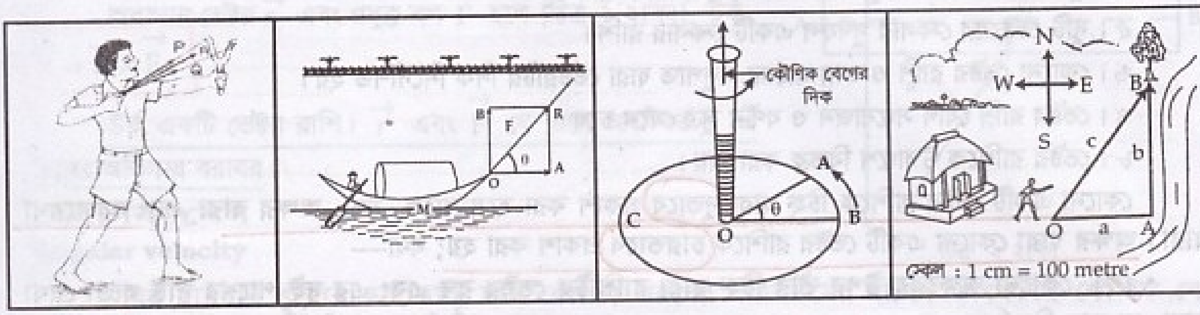
২

ভেক্টর
VECTOR

প্রধান শব্দ **(Key Words)** : ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি, একক ভেক্টর, লব্ধি ও অংশক বা উপাংশ, অবস্থান ভেক্টর, নাল বা শূন্য ভেক্টর, আয়ত একক ভেক্টর, ভেক্টর রাশির বিভাজন ও উপাংশ, ত্রিভুজ সূত্র, সামান্তরিক সূত্র, স্কেলার গুণন বা ডট গুণন, ভেক্টর বা ক্রস গুণন, অপারেটর, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স, কার্ল।



সূচনা
Introduction

বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয় সুনির্দিষ্টভাবে জানতে হলে কোনো না কোনো ধরনের পরিমাপের প্রয়োজন হয়। পদার্থের যে সব ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিমাপ করা যায় তাদেরকে রাশি (quantity) বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, আয়তন, বেগ, কাজ ইত্যাদি প্রত্যেকে এক একটি রাশি। **পদার্থবিজ্ঞানের অন্তর্গত যে কোনো রাশিকে ভৌত রাশি (physical quantity) বলে।** কিছু কিছু ভৌত রাশিকে শুধুমাত্র মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার অনেক ভৌত রাশি রয়েছে যাদেরকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয়। তাই ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য অনুসারে ভৌত রাশিগুলোকে আমরা দুই ভাগে বিভক্ত করতে পারি ; যথা—

(ক) স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি (Scalar quantity)।

(খ) ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বা সদিক রাশি (Vector quantity)।

যে সব ভৌত রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, জনসংখ্যা, তাপমাত্রা, তাপ, বৈদ্যুতিক বিভব, দ্যুতি, কাজ ইত্যাদি স্কেলার বা অদিক (০১-১০) রাশি। **যে সব ভৌত রাশির মান এবং দিক দুই-ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলে।** যেমন সরণ, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, বল, ওজন ইত্যাদি ভেক্টর বা দিক রাশি।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ভেক্টরের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন ভৌত রাশি ভেক্টররূপে প্রকাশ ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কতিপয় বিশেষ ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টরের রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ক্ষেত্রে লম্বাংশে বিভাজন করতে পারবে।
- দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণের সংজ্ঞার্থ ও এদের ব্যবহার করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার করতে পারবে।

২·১ ভেক্টর (ধর্ম ও চিহ্ন)
Vector (Properties and Symbols)

কোনো কোনো ভৌত রাশিকে বর্ণনার জন্য মানের সাথে দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয়। এই সকল ভৌত রাশিই ভেক্টর রাশি। বস্তুজগতের এ ধরনের রাশি মান ও দিক দ্বারা প্রকাশিত না হলে তা ঐ রাশির বর্ণনায় অসম্পূর্ণ

থেকে যায়। ভেক্টর রাশি কতগুলো নিয়ম মেনে চলে। যথা—

১। ভেক্টর রাশির মান ও অভিমুখ আছে।

২। দুই বা ততোধিক সমজাতীয় ভেক্টরকে যোগ করা যায়। ভিন্ন প্রকৃতির ভেক্টরকে যোগ করা যায় না।

৩। দুই বা ততোধিক ভেক্টর যোগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তা প্রথমোক্ত ভেক্টর দুটির সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলাফলের সমান হয়।

৪। দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি হয়।

৫। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি।

৬। কোনো ভেক্টর রাশি ও তার মানের অনুপাত দ্বারা ভেক্টরটির দিক নির্দেশিত হয়।

৭। ভেক্টর রাশি যোগ সংযোজন ও বণ্টন সূত্র মেনে চলে।

৮। ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করা যায়।

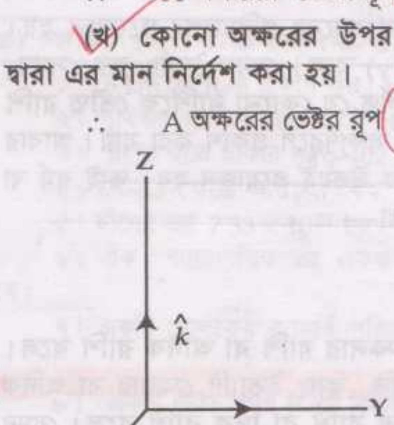
কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চিহ্ন দ্বারা দুভাবে প্রকাশ করা হয়ে থাকে, যথা—**অক্ষর দ্বারা** এবং **সরলরেখা দ্বারা**। **অক্ষর দ্বারা** কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চারভাবে প্রকাশ করা হয়, যথা—

(ক) কোনো অক্ষরের উপর তীর চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়। সাধারণভাবে শুধু অক্ষর দ্বারাও রাশিটির মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\vec{A}$ এবং মান রূপ $|\vec{A}|$ বা A

(খ) কোনো অক্ষরের উপর রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\bar{A}$ এবং মান রূপ $|\bar{A}|$



চিত্র ২.১

(গ) কোনো অক্ষরের নিচে রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\underline{A}$ এবং মান রূপ $|\underline{A}|$

(ঘ) মোটা হরফের অক্ষর দিয়ে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়। যেমন A অক্ষরের ভেক্টর রূপ **A** এবং এর মান A।

ভেক্টর রাশি নির্দেশের ক্ষেত্রে (ক)-এ ব্যবহৃত চিহ্নই শ্রেয়। তাই এই বই-এ আমরা এই পদ্ধতিই ব্যবহার করব।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ চিহ্ন দ্বারা আয়ত একক ভেক্টর দেখানো হয়েছে [চিত্র ২.১]।

২.২ ভেক্টর প্রকাশ
Vector Representation

বিভিন্ন ভেক্টর রাশিকে ভেক্টররূপে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করা যায়। ফলে রাশিটির মান ও দিক স্পষ্ট হয়। নিম্নে কয়েকটি ভৌত রাশির ভেক্টর প্রকাশ দেখানো হলো।

বল
Force

যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।

বল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক আছে। কোনো একটি গতিশীল বস্তুর ভর 'm', ত্বরণ $\vec{a}$ এবং বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ হলে, এর ভেক্টর প্রকাশ হলো,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ঘূর্ণন বল বা টর্ক
Rotational force or torque

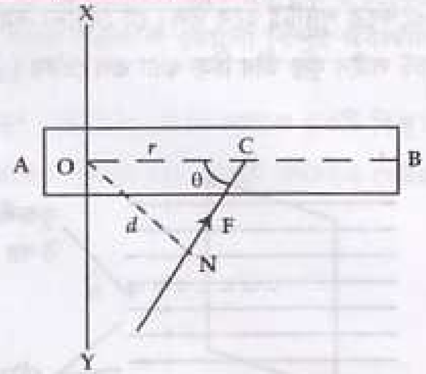
ঘূর্ণন বল বলতে টর্ককে বুঝানো হয়। ঘূর্ণনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে বলের সমতুল্য রাশি হলো টর্ক।

কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর উপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের গুণফলকে ঘূর্ণন বল বা টর্ক বলে।

অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হলে [চিত্র ২.২(ক)], টর্ক,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

টর্ক একটি ভেক্টর রাশি। $\vec{r}$ এবং $\vec{F}$ যে তলে অবস্থিত τ ঐ তলের অভিলম্ব বরাবর।



চিত্র ২.২(ক)

কৌণিক বেগ
Angular velocity

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ ($\vec{\omega}$) বলে। এর ভেক্টর গাণিতিক প্রকাশ হলো $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

চিত্র ২.২(খ)

কৌণিক বেগের দিক (ভেক্টর রূপ) :

কৌণিক বেগ একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক দুই-ই আছে। একটি ডান পাকের স্ক্রু সাহায্যে এর দিক নির্দেশ করা যায়।

একটি কণা ABC বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকলে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র O-এ একটি ডান পাকের স্ক্রু অগ্রভাগ বৃত্ত-তলের অভিলম্বভাবে স্থাপন করে কণাটির ঘূর্ণনের সাথে এবং কণাটি যে ক্রমে ঘুরছে সেই ক্রমে স্ক্রুটিকে ঘুরালে তার গতির দিকই হবে কণাটির কৌণিক বেগের দিক [চিত্র ২.২(খ)]।

কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

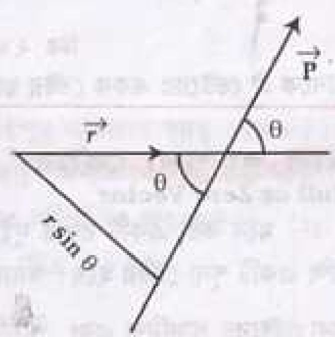
মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ। অতএব, সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি।

মান ও দিক : কৌণিক ভরবেগের মান

$$L = rP \sin\theta$$



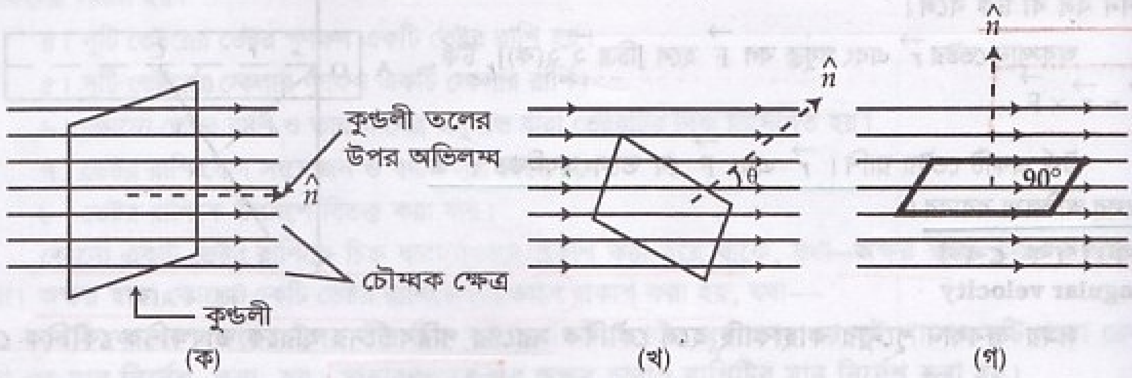
চিত্র ২.২(গ)

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ২.২(গ)]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r \sin\theta$। অতএব, কোনো বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।

$\vec{r}$ ও $\vec{P}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$ এর দিক হবে ঐ তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

তল
Surface

কোনো একটি পৃষ্ঠের বা সমতলের উপর অভিলম্ব অঙ্কন করলে যে দিক নির্দেশিত হয় তা ঐ তলের ভেক্টর। এক্ষেত্রে পৃষ্ঠটিই হবে তল। যে কোনো সমতলের উপর অঙ্কিত অভিলম্বকে ঐ তলের তল ভেক্টর বলে। নিচের চিত্রে ডট লাইন যুক্ত তীর চিহ্ন দ্বারা তল ভেক্টর ($\hat{n}$) দেখানো হলো। চিত্রের কুণ্ডলিটি হলো তল।



চিত্র ২.৩

(৩৩-৩৪) ২.৩ বিশেষ ভেক্টর
Special Vectors

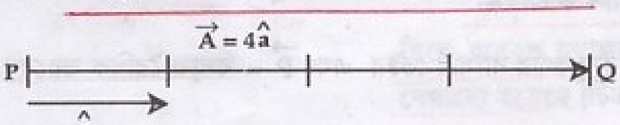
একক ভেক্টর
Unit Vector

যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে বা সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যাবে। অর্থাৎ **যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।**

একক ভেক্টরকে প্রকাশ করতে সাধারণত ছোট অক্ষরের উপর একটি টুপি চিহ্ন (^) দেয়া হয়। যেমন $\hat{i}, \hat{a}, \hat{n}$ ইত্যাদি দ্বারা একক ভেক্টর প্রকাশ করা হয়।

ধরি, $\vec{A}$ একটি ভেক্টর যার মান, $A \neq 0$

$\therefore \frac{\vec{A}}{A} = \vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $= \hat{a}$ (ধরি)।



চিত্র ২.৪

কাজেই কোনো একটি ভেক্টর $\vec{A}$-এর মান, $A = 4$ একক এবং $\vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, $\vec{A} = 4\hat{a}$ [চিত্র ২.৪]। অর্থাৎ কোনো ভেক্টরের মানকে ঐ ভেক্টরের একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে ভেক্টরটি পাওয়া যায়।

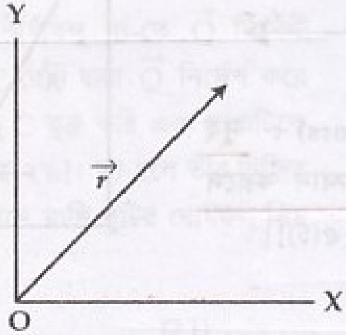
নাল বা শূন্য ভেক্টর
Null or Zero Vector

মনে কর, একটি রশির দুই প্রান্তে দুইজন লোক এক সাথে একই পরিমাণ বলে টানছে। তাহলে এই টানের লব্ধি একটি শূন্য ভেক্টর হবে। অন্যভাবে বলা যায়, **যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য, তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে।** শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু একই। একে $\vec{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। একটি ভেক্টরের সাথে তার বিপরীত ভেক্টর যোগ করে বা দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করে নাল ভেক্টর পাওয়া যায়। এর কোনো নির্দিষ্ট দিক নেই। দুটি সমান ও বিপরীত ভেক্টর কোন বিন্দুতে একই সাথে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি একটি নাল ভেক্টর হয়।

অবস্থান ভেক্টর
Position Vector

প্রসঙ্গ কাঠামোতে একটি বিন্দুর অবস্থান জানার জন্য একটি ভেক্টর রাশির প্রয়োজন হয়। এর মান ও দিকের সাহায্যে বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ **প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।**

মনে করি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত X ও Y দুটি অক্ষ, এদের মূল বিন্দু O। P যে কোনো একটি বিন্দু। এখানে $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করছে। সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর [চিত্র ২'৫]।

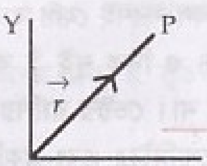


চিত্র ২'৫

অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় ব্যাসার্ধ ভেক্টর (radius vector) বলে এবং $\vec{r}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ । ব্যাসার্ধ ভেক্টরের সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

ব্যাসার্ধ ভেক্টর (Radius Vector) : মূল বিন্দু হতে কোনো বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। একে $\vec{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় [চিত্র ২'৫(ক)]।

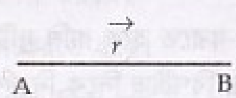
ব্যাখ্যা : এখানে O বিন্দু হতে P বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।



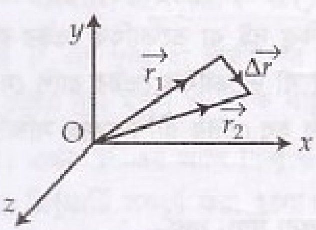
চিত্র ২'৫ (ক)

সরণ ভেক্টর
Displacement Vector

রৈখিক বা সরল পথে বা নির্দিষ্ট দিকে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে। একে $\vec{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



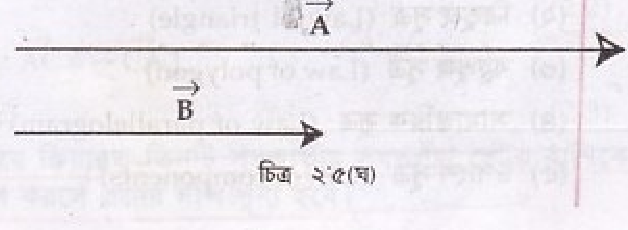
চিত্র ২'৫ (খ)



চিত্র ২'৫ (গ)

ব্যাখ্যা : ধরি, সরল পথে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব AB = r। অতএব $\vec{r}$ হলো সরণ ভেক্টর [চিত্র ২'৫(খ)]। অন্যভাবে বলা যায় একটি বস্তুর আদি অবস্থান $\vec{r_1}$ (x_1, y_1, z_1) এবং পরিবর্তিত অবস্থান $\vec{r_2}$ (x_2, y_2, z_2) হলে সরণ ভেক্টর $\Delta \vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ [চিত্র ২'৫ (গ)]।

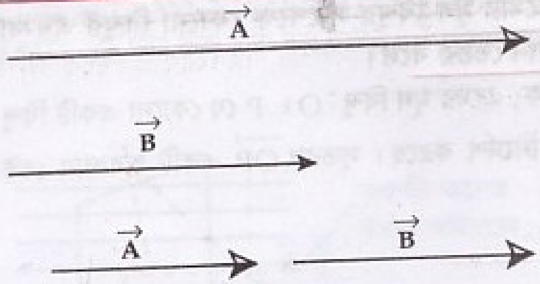
সদৃশ ভেক্টর (Like vectors) : সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে [চিত্র ২'৫(ঘ)]। উদাহরণ, $\vec{A} = 2\vec{B}$



চিত্র ২'৫(ঘ)

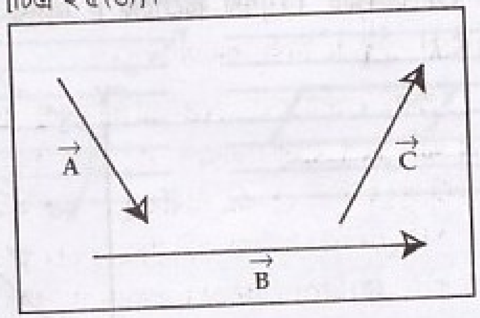
বিপ্রতীপ ভেক্টর (Reciprocal vectors) : দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে। উদাহরণ, $\vec{A} = 5\hat{i}$ ও $\vec{B} = \frac{1}{5}\hat{i}$ । এখানে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিপ্রতীপ ভেক্টর।

সমরেখ ভেক্টর (Collinear vectors) : দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে, তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে [চিত্র ২.৫(ঙ)]।



চিত্র ২.৫(ঙ)

সমতলীয় ভেক্টর (Coplanar vectors) : দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে [চিত্র ২.৫(চ)]।



চিত্র ২.৫(চ)

২.৪ ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম
Geometrical Addition of Vectors

জ্যামিতিক পদ্ধতি : একই জাতীয় দুটি ভেক্টর রাশিকে যোগ বা বিয়োগ করা যায়। যেমন সরণের সাথে কেবল সরণই যোগ বা বিয়োগ করা চলে। সরণের সাথে বেগের যোগ বা বিয়োগের প্রশ্নই ওঠে না। **ভেক্টর রাশির মান ও দিক দুই-ই আছে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ সাধারণ বীজগণিতের নিয়মানুযায়ী করা হয় না। ভেক্টর রাশির দিকই এ সব ক্ষেত্রে বিঘ্ন ঘটায়।** যেমন ধরা যাক, একটি নৌকায় দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার এবং একটি নদীর পানির স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার। নৌকাটিকে ঐ নদীর এক পাড় হতে সোজা অপর পাড়ের দিকে চালালে, নৌকাটির উপর যে দুটি বেগ ক্রিয়া করবে এদের যোগফল (8 + 6) = 14 কিলোমিটার / ঘণ্টা দ্বারা নৌকাটির প্রকৃত বেগ পাওয়া যাবে না—প্রকৃত বেগ সম্পূর্ণ আলাদা হবে। আবার নৌকাটির গতিমুখ ঐ দুই বেগের মাঝামাঝি কোনো এক দিকে হবে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ জ্যামিতিক পদ্ধতি অনুসারে করতে হয়।

একই অভিমুখী দুটি ভেক্টর রাশি যোগ করতে হলে রাশি দুটিকে একই দিকে নির্দেশ করতে হয়, আর বিয়োগ করতে হলে একটি ভেক্টর রাশিকে অপরটির বিপরীত দিকে নির্দেশ করতে হয়। কিন্তু দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এদের যোগফল আর একটি নতুন ভেক্টর রাশি হবে। দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগে যে একটি নতুন ভেক্টর রাশি হয় তাকে এদের **লব্ধি** (Resultant) বলে। অর্থাৎ লব্ধি হল ভেক্টর রাশিগুলোর সম্মিলিত ফল।

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগ নিম্নলিখিত **পাঁচটি** সূত্রের সাহায্যে করা যায়; যথা—

(১) **সাধারণ সূত্র** (General law)
(২) **ত্রিভুজ সূত্র** (Law of triangle)
(৩) **বহুভুজ সূত্র** (Law of polygon)
(৪) **সামান্তরিক সূত্র** (Law of parallelogram) এবং
(৫) উপাংশ সূত্র (Law of components)।

- ভেক্টর রাশির যোজন: নৌকার গতি, চলন্ত গাড়িতে পড়ন্ত বৃষ্টি।
- ভেক্টর রাশির বিয়োজন: গুনটানা নৌকা, লনরোলার টানা, পাখির উড্ডয়ন।
- ভেক্টর রাশিকে বিভিন্ন ভাবে বিভিন্ন শ্রেণীতে ভাগ করা হয়েছে:

a. একক ভেক্টর	b. সমভেক্টর
c. বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর	d. সীমাবদ্ধ ভেক্টর
e. সদৃশ ভেক্টর	f. স্বাধীন ভেক্টর
g. বিসদৃশ ভেক্টর	h. সমরেখ ভেক্টর
i. আয়ত একক ভেক্টর	j. নাল বা শূন্য ভেক্টর
k. অবস্থান ভেক্টর।	

ভে

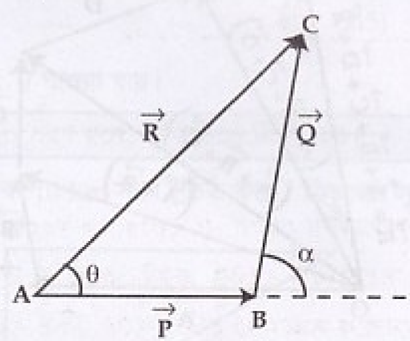
এই অনুচ্ছেদে প্রথম চারটি সূত্র আলোচনা করা হলে

সাধারণ সূত্র

সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষ বা শেষ ... করে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু ও দ্বিতীয় ভেক্টরের শ... ভেক্টরের দিক এবং ঐ সরলরেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টর দুটির ল...

ধরা যাক একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্ণয় করতে হবে।

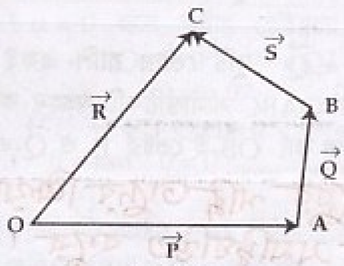
$\vec{P}$ নির্দেশী সরলরেখা AB-এর শীর্ষবিন্দু B-তে $\vec{Q}$ নির্দেশী সরলরেখার আদি বিন্দু থাকে। এরূপে BC রেখা দ্বারা $\vec{Q}$ নির্দেশ করে $\vec{P}$-এর আদিবিন্দু A এবং $\vec{Q}$-এর শীর্ষবিন্দু C যুক্ত করি এবং রেখাটিকে A হতে C অভিমুখে তীর চিহ্নিত করি [চিত্র ২.৬]। তা হলে তীর চিহ্নিত AC রেখাই লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করবে। এখানে রাশি দুটির যোগফল নিম্ন উপায়ে লেখা হয়—



চিত্র ২.৬

$$\boxed{\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.1)$$

অনুরূপে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগ করা যায়।



চিত্র ২.৭

২.৭ চিত্রে তিনটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{S}$ যথাক্রমে তীর চিহ্নিত OA, AB ও BC সরলরেখায় নির্দেশ করে OC সরলরেখা দ্বারা এদের লব্ধি $\vec{R}$ সূচিত হয়েছে।

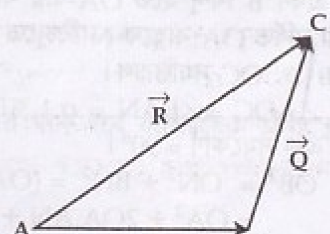
এখানে লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$।

ত্রিভুজ সূত্র

দুটি ভেক্টর কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর যোগ করতে হবে।

প্রথমে $\vec{P}$-এর প্রান্ত বা শীর্ষবিন্দুর সাথে $\vec{Q}$-এর আদি বিন্দু যুক্ত করে ভেক্টর দুটি মানে ও দিকে বাহু AB ও BC দ্বারা সূচিত করা হলো। এখন $\vec{P}$-এর আদি বিন্দু ও $\vec{Q}$-এর শেষ বিন্দু যোগ করে ABC ত্রিভুজটি সম্পূর্ণ করা হলো। AC বাহুটিই দিকে ও মানে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ নির্দেশ করে [চিত্র ২.৮]।



চিত্র ২.৮

অর্থাৎ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ $\quad \ldots \quad \ldots \quad (2.2)$

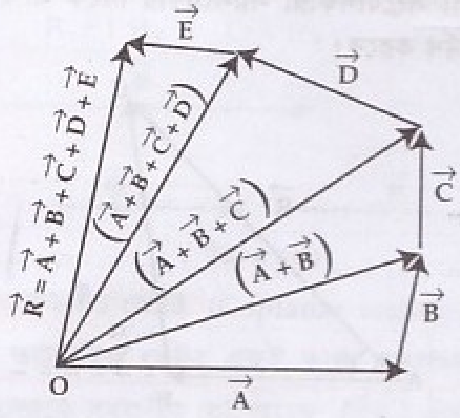
পুনঃ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = -\vec{CA}$ $\quad [\because \vec{AC} = -\vec{CA}]$

বা, $\boxed{\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0}$ $\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.3)$

সিদ্ধান্ত : অতএব, **একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় সমতলীয় ভেক্টর রাশিকে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হবে।**

বহুভুজ সূত্র

দুই-এর অধিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ভেক্টর রাশিগুলোকে একই ক্রমে সাজিয়ে প্রথম ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে বহুভুজ পাওয়া যায় এর শেষ বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।



চিত্র ২.৯

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ পাঁচটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.৯]; এদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে। এখন প্রথম ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর উপর দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর উপর তৃতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু স্থাপন করি এবং এমনিভাবে ভেক্টর রাশিগুলোকে পর পর স্থাপন করি। তাহলে বহুভুজ সূত্রানুসারে প্রথম ভেক্টর রাশির আদি বিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর সংযোজক ভেক্টর রাশি $\vec{R}$-ই উল্লিখিত ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

$\therefore$ লব্ধি, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

সামান্তরিক সূত্র

কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে, তা হলে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

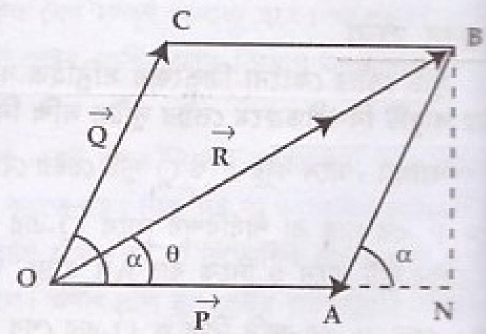
মনে করি O বিন্দুতে একটি কণার উপর $\vec{OA} = \vec{P}$ ও $\vec{OC} = \vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি একই সময়ে α কোণে ক্রিয়া করছে [চিত্র ২.১০]। OA ও OC-কে সন্নিহিত বাহু ধরে OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং OB যুক্ত করি। এই সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়াবিন্দু O থেকে অঙ্কিত কর্ণ $\vec{OB}$-ই ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করে।

*সমান সমান ভেক্টরের লব্ধি তাদের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অর্থাৎ, $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$

লব্ধির মান নির্ণয়



চিত্র ২.১০

মনে করি লব্ধির মান R এবং $\angle AOC = \alpha$ কোণটি সূক্ষ্মকোণ। এখন B বিন্দু হতে OA-এর বর্ধিত অংশের উপর BN লম্ব টানি যা বর্ধিত OA বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করল।

AB ও OC সমান্তরাল।

$\therefore \angle AOC = \angle BAN = \alpha$। আবার OBN ত্রিভুজের, $\angle ONB$ = এক সমকোণ $= 90^\circ$।

$$\therefore OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$

চিত্র ২.১০ থেকে ΔABN এ $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$ $\therefore BN = AB \sin\alpha = Q\sin\alpha$

এবং $\cos\alpha = \frac{AN}{AB}$ $\therefore AN = AB\cos\alpha = Q\cos\alpha$

$$OB^2 = OA^2 + 2OA.Q\cos\alpha + Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$$
$$= P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$$\therefore \boxed{R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2.4)$$

লব্ধির দিক নির্ণয়

মনে করি P-এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে লব্ধি R ক্রিয়া করছে, অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$।

সুতরাং OBN সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\tan\theta = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{(OA + AN)}$$

BAN সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$

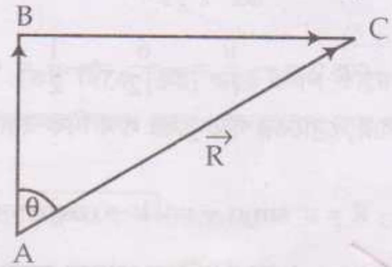
$\therefore BN = AB \sin\alpha$

$$= \frac{AB\sin\alpha}{(OA + AB\cos\alpha)} = \boxed{\frac{Q\sin\alpha}{(P + Q\cos\alpha)}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2.5)$$

∴ সমীকরণ (2.4) এবং সমীকরণ (2.5) হতে যথাক্রমে R এবং θ পাওয়া যায়।

হিসাব কর : একটি কণার উত্তর ও পূর্বদিকে যথাক্রমে 4 km এবং 10 km সরণ হলে, লব্ধি সরণ নির্ণয় কর।

$\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টর যথাক্রমে উত্তর ও পূর্বদিকে 4 km এবং 10 km সরণ সূচিত করে। ত্রিভুজের সূত্র অনুযায়ী লব্ধি $\overrightarrow{AC}$ সরণ ভেক্টর আঁকা হলো। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-এর অন্তর্বর্তী কোণ θ এবং লব্ধি ভেক্টরের মান R হলে,



$$R = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 10{\cdot}78 \text{ km}$$

এবং $\tan\theta = \frac{10}{4} = 2{\cdot}5$

$\therefore \theta = 68{\cdot}2°$

বিশেষ ক্ষেত্র (Special cases)

(i) $\alpha = 0$ হলে অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে বা ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0° = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P+Q)^2, \quad \therefore R = P + Q$

এবং $\tan\theta = \frac{Q\sin 0°}{P + Q\cos 0°} = \frac{0}{P + Q} = 0$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 0°$

$\therefore \quad \theta = 0°$

সুতরাং দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল এবং দিক হবে ভেক্টরদ্বয় যেদিকে ক্রিয়া করে সেই দিকে।

(ii) $\alpha = 90°$ হলে, অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90°$ বা, $R^2 = P^2 + Q^2$

$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$

এবং $\tan\theta = \frac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$

$\tan\theta = \frac{Q}{P}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)$

অর্থাৎ দুটি ভেক্টর পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে রাশিদ্বয়ের বর্গের যোগফলের বর্গমূলের সমান।

(iii) $\alpha = 180°$ হলে অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180° = P^2 + Q^2 - 2PQ$$

বা, $R^2 = (P \sim Q)^2 \quad \therefore \quad R = P \sim Q$

এবং $\tan\theta = \frac{Q\sin 180°}{P + Q\cos 180°} = \frac{0}{P - Q} = 0$

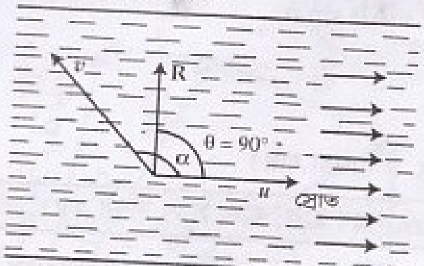
$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 180°$ বা, $0°$

অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী হলে তাদের লব্ধির মান হবে ভেক্টর দুটির বিয়োগফল এবং দিক হবে বৃহত্তর ভেক্টরটির দিকে। ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখী হলে, লব্ধি শূন্য হবে।

ক্রিয়াকর্ম : 3F এবং 3F ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর R : প্রথম ভেক্টরকে দ্বিগুণ করলে লব্ধি ভেক্টরও দ্বিগুণ হয়। ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গাণিতিক উদাহরণ

১। কোনো একটি নদীতে একটি দাঁড়ের নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ঘন্টায় 18 km এবং প্রতিকূলে ঘন্টায় 6 km। নৌকাটিকে কোন দিকে চালনা করলে তা সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে এবং নৌকাটি কত বেগে চলবে?



চিত্র ২'১১

ধরা যাক স্রোতের বেগ $= u$ এবং দাঁড়ের বেগ $= v$।
তা হলে $u + v = 18$ এবং $v - u = 6$.
$\therefore$ সমীকরণ দুটির যোজন ও বিয়োজনে পাওয়া যায়,
$v = 12\ \text{km h}^{-1}$ এবং $u = 6\ \text{km h}^{-1}$।

ধরা যাক স্রোতের সাথে α কোণ করে নৌকাটিকে চালনা করলে তা R বেগে চলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে। তা হলে স্রোতের গতি বরাবর R-এর অংশ,

$$R\cos 90^\circ = 0 = u\cos 0^\circ + v\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = -\frac{u}{v} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \quad \text{বা,} \quad \alpha = 120^\circ$$

আবার, স্রোতের গতিমুখের লম্ব দিক বরাবর R-এর অংশ, $R\sin 90^\circ = R = u\ \sin 0^\circ + v\sin\alpha$

$$\therefore \quad R = v\ \sin\alpha = v\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 12\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{3} = 10{\cdot}39\ \text{km h}^{-1}$$

২। $4\ \text{ms}^{-1}$ বেগে দৌড়ে যাবার সময় একজন লোক $6\ \text{ms}^{-1}$ বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে হলে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?

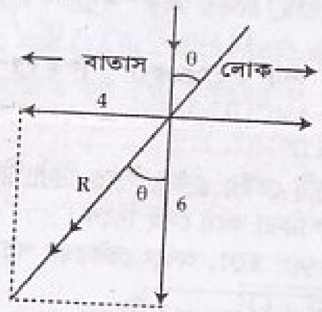
মনে করি বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{4\ \text{ms}^{-1}}{6\ \text{ms}^{-1}} = 0{\cdot}666$$

বা, $\tan\theta = \tan 33{\cdot}7^\circ$

$\therefore \quad \theta = 33{\cdot}7^\circ$

সুতরাং লোকটিকে উল্লম্ব দিকের সাথে $33{\cdot}7^\circ$ কোণে ছাতা ধরতে হবে।



চিত্র ২'১২

৩। একটি বস্তুকে 50 N বল দ্বারা পশ্চিম দিকে এবং 20 N বল দ্বারা উত্তর দিকে টানা হচ্ছে। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।

আমরা জানি

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2 + 2\times 50\times 20\cos 90^\circ}$$
$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2} = \sqrt{2500 + 400}$$
$$= \sqrt{2900}\ \text{N} = 53{\cdot}85\ \text{N}$$

এখানে
$P = 50\ \text{N}$
$Q = 20\ \text{N}$
$\alpha = 90^\circ$
$R = ?$
$\theta = ?$

আবার $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$$= \frac{20\sin 90^\circ}{50 + 20\cos 90^\circ} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{2}{5} = 21{\cdot}80^\circ$$

লব্ধির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান
Maximum and minimum value of the resultant

মনে করি দুটি ভেক্টর রাশি $\overrightarrow{P}$ এবং $\overrightarrow{Q}$ একই সময়ে কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়া করছে। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুসারে এদের লব্ধির মান $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$

(ক) উপরোক্ত সমীকরণ হতে বলা যায় লব্ধি $\overrightarrow{R}$-এর মান $\overrightarrow{P}$ এবং $\overrightarrow{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণের উপর নির্ভর করে। $\overrightarrow{R}$-এর মান সর্বাধিক হবে যখন $\cos \alpha$-এর মান সর্বাধিক হবে অর্থাৎ $\cos \alpha = 1 = \cos 0°$

বা, $\alpha = 0°$ হবে

$\therefore$ **লব্ধির সর্বোচ্চ মান**

$$R_{(\text{সর্বোচ্চ})} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 0°}$$
$$= \sqrt{(P+Q)^2} = (P+Q) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.6)$$

অতএব, **দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর একই দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে এবং এই সর্বোচ্চ মান ভেক্টর রাশি দুটির যোগফলের সমান হবে।** অন্যভাবে বলা যায়, দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির মান এদের যোগফল অপেক্ষা বড় হতে পারে না।

(খ) লব্ধি R-এর সর্বনিম্ন মান হবে যখন $\cos \alpha$-এর মান সর্বনিম্ন হবে অর্থাৎ $\cos \alpha = -1 = \cos 180°$

বা, $\alpha = 180°$ হবে।

$\therefore$ **লব্ধির সর্বনিম্ন মান,**

$$R_{(\text{সর্বনিম্ন})} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = \sqrt{(P \sim Q)^2} = P \sim Q \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.7)$$

অতএব, **দুটি ভেক্টর রাশি যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হবে এবং লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টর রাশি দুটির বিয়োগফলের সমান হবে।**

কাজ : একটি রশির দুই প্রান্তে দুই জন ধরে সমান বলে টান দাও। দুই জনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে কী?

দুটি সমান ও বিপরীতমুখী বল একটি সরলরেখার দুই প্রান্তে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি শূন্য হয় তাই দুইজনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

গাণিতিক উদাহরণ

১। দুটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 10 N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4 N; বল দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে একটি কণার উপর ক্রিয়া করলে লব্ধির মান কত হবে?

আমরা জানি

$R_{max} = P + Q$

বা, $10 = P + Q \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার $R_{min} = P - Q$

বা, $4 = P - Q \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2P = 14\text{ N} \quad \therefore \quad P = 7\text{ N}$

আবার (i) ও (ii) সমীকরণ বিয়োগ করে পাই

$2Q = 6\text{ N} \quad \therefore \quad Q = 3\text{ N}$

আবার $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 90° \quad [\because \cos 90° = 0]$

$= P^2 + Q^2 + 0 = (7)^2 + (3)^2 = 49 + 9 = 58$

$\therefore \quad R = \sqrt{58}\text{ N}$

এখানে

$R_{max} = 10\text{ N}$

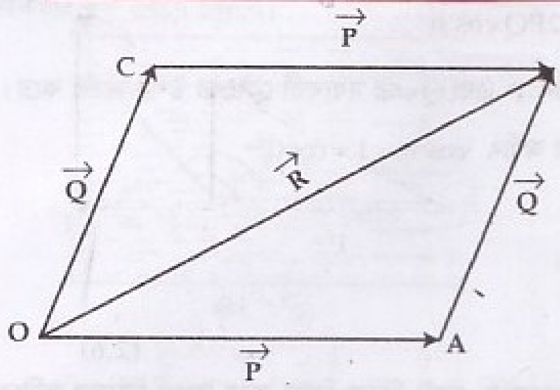
$R_{min} = 4\text{ N}$

$\alpha = 90°$

$R = ?$

২.৫ ভেক্টর যোগের কয়েকটি সূত্র
Some laws of vector addition

(ক) বিনিময় সূত্র (Commutative law) : $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$



চিত্র ২.১৩

প্রমাণ : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{R}$ রাশি দুটির লব্ধি [চিত্র ২.১৩]।

ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে, OAB ত্রিভুজে,

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

অর্থাৎ $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

এখন OABC সামান্তরিক অঙ্কন করি এবং OC ও CB-এ যথাক্রমে AB ও OA-এর ন্যায় তীর চিহ্নিত করি। OCB ত্রিভুজে,

$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$ (ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে)

$\therefore \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OC} + \vec{CB}$

অর্থাৎ $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ ... ... (2.8)

এটিই হলো বিনিময় সূত্র।

তেমনি স্কেলার রাশিও বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

(খ) সংযোজন সূত্র (Associative law) : $(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$

মনে করি $\vec{P}$, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.১৪]। এদেরকে যথাক্রমে $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ এবং $\vec{CD}$ রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। এখন AC, BD এবং AD যোগ করি। অতএব ত্রিভুজের সূত্র হতে পাই,

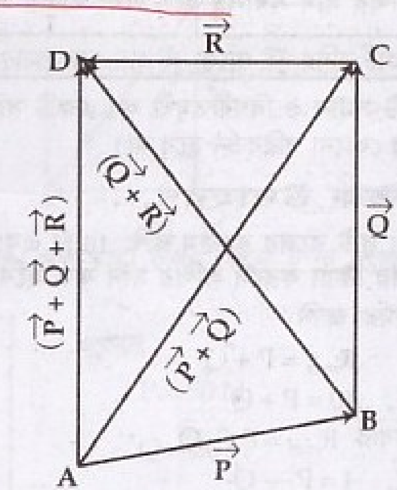
ABC ত্রিভুজে, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{P} + \vec{Q}$

ACD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$

$$= \left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R} \quad \dots \quad (2.9)$$

আবার, BCD ত্রিভুজে,

$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{Q} + \vec{R}$



চিত্র ২.১৪

এবং ABD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right)$ ... ... (2.10)

$\therefore$ সমীকরণ (2.9) এবং সমীকরণ (2.10) হতে পাই,

$$\left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right)$$

এটিই হলো ভেক্টর রাশির যোগের সংযোজন সূত্র অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ সংযোজন সূত্র মেনে চলে।

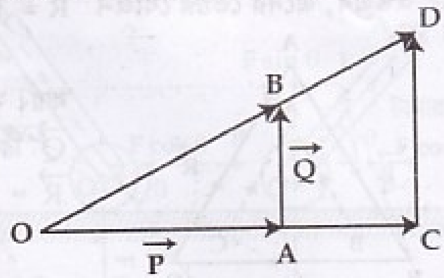
(গ) বন্টন সূত্র (Distributive law) : $m(\vec{P}+\vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q}$

মনে করি, $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{AB} = \vec{Q}$ [চিত্র ২.১৫]। OB যোগ করি। এখন ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} = \vec{P} + \vec{Q}$

মনে করি, OA ও OB-এর বর্ধিতাংশের উপর C ও D দুটি বিন্দু নেয়া হলো যাতে $\vec{OC} = m\vec{OA} = m\vec{P}$

এবং $\vec{CD} = m\vec{AB} = m\vec{Q}$



চিত্র ২.১৫

এখন, OAB এবং OCD সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে,

$$\frac{\vec{OC}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OD}}{\vec{OB}} = \frac{\vec{CD}}{\vec{AB}} = \frac{m\vec{Q}}{\vec{Q}} = m$$

$$\therefore \vec{OD} = m\vec{OB} = m(\vec{P}+\vec{Q}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.11)$$

আবার, ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = m\vec{P} + m\vec{Q}$$

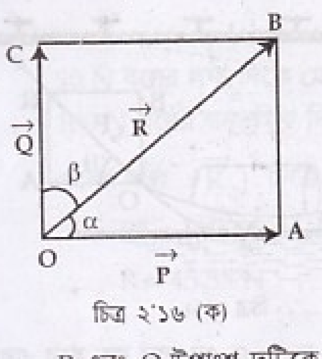
$$\therefore m(\vec{P}+\vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.12)$$

এটিই হলো ভেক্টর যোগের বন্টন সূত্র।

২.৬ লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন
Vectors addition and subtraction in terms of components

একটি ভেক্টর রাশিকে সামান্তরিক সূত্রের দ্বারা বহুভাবে দুটি ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করা যায়। একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াই হলো ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ। একটি ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ কে লম্ব উপাংশে বিভাজন করা যায় এবং এর সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন করা যায়। এই বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি অংশক বা উপাংশ (Component) বলে।

মনে করি, OB রেখা $\vec{R}$ এর মান নির্দেশ করে। যদি $\vec{R}$ সমকোণে বিভাজিত করা হয় অর্থাৎ, P এবং Q উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণী হয় [চিত্র ২.১৬(ক)], তবে $(\alpha + \beta) = 90°$। এক্ষেত্রে OB এর সাথে উপাংশ দুটি যথাক্রমে উৎপন্ন কোণ α, β। এখন OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হলো।



চিত্র ২.১৬ (ক)

$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin 90° = 1$ এবং

$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

ত্রিকোণমিতির ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী OAB ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$$\therefore \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 90°}$$

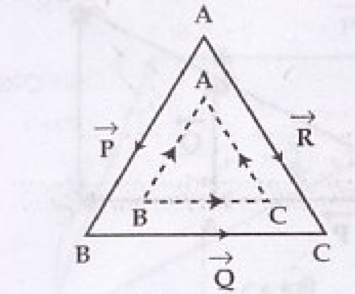
$$\therefore \boxed{P = R\cos\alpha} \text{ এবং } \boxed{Q = R\sin\alpha} \quad \ldots \quad \ldots (2.13)$$

P এবং Q উপাংশ দুটিকে মূল ভেক্টর রাশি R-এর লম্বাংশ বলে। P-কে অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal component) এবং Q-কে উল্লম্ব উপাংশ (Tangential component) বলা হয়।

উপাংশ দুটির ভেক্টর রূপ হলো—

$$\vec{P} = R\cos\alpha\,\hat{i} \text{ এবং } \vec{Q} = R\sin\alpha\,\hat{j}$$

অতএব, এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = R\cos\alpha\hat{i} + R\sin\alpha\hat{j}$ ... ... (2.14)



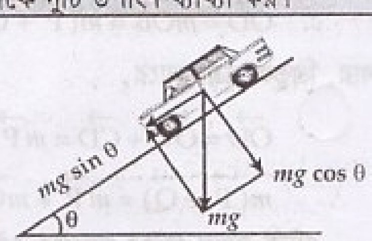
চিত্র ২'১৬ (খ)

ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সাহায্যে যোজন ও বিয়োজন ব্যাখ্যা করা যায়। মনে করি একটি ত্রিভুজের AB বাহু বরাবর $\vec{P}$ এবং BC বাহু বরাবর $\vec{Q}$ ক্রিয়াশীল [চিত্র ২'১৬ (খ)] সলিড রেখাচিত্র। তাহলে এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু AC দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

আবার $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি BA এবং BC বরাবর ক্রিয়াশীল হলে ভেক্টর রাশির বিয়োজন $\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু CA দ্বারা প্রকাশ করা যায় [চিত্র ২'১৬ (খ)] ডটেড রেখাচিত্র।

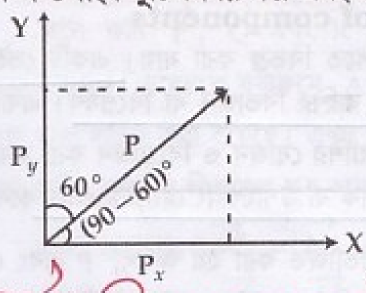
কাজ : ২'১৭ চিত্রের দিকে লক্ষ কর। গাড়িটি ইঞ্জিন বন্ধ করে নিচে নামছে। কেবলমাত্র গাড়িটির ওজন নিচের দিকে ক্রিয়াশীল। ঘর্ষণ উপেক্ষা করে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশ ব্যাখ্যা কর।

বস্তুর ওজন mg নিচের দিকে উল্লম্বভাবে ক্রিয়া করে। mg কে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশে বিভাজন করা যায়। নত তলটি অনুভূমিক তলের সাথে θ কোণে আনত হওয়ায় উপাংশ দুটির মান যথাক্রমে $mg\sin\theta$ এবং $mg\cos\theta$ চিত্র অনুযায়ী ক্রিয়াশীল হয়। $mg\cos\theta$ নত তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া দ্বারা প্রশমিত হয়। কেবলমাত্র $mg\sin\theta$ বলের প্রভাবে গাড়িটি নিচের দিকে নামতে থাকে।



চিত্র ২'১৭

উদাহরণ : ১। 30 N একটি বল Y-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে আনত। বলটির X ও Y অক্ষ বরাবর লম্ব উপাংশ দুটি নির্ণয় কর এবং উহাদের যোগফল ও বিয়োগফল নির্ণয় কর।



মনে করি, P= 30 N বলের X- এবং Y- অক্ষ বরাবর উপাংশ যথাক্রমে P_x এবং P_y। ভেক্টরের সমকৌণিক বিশ্লেষণের নীতি অনুযায়ী

$$P_x = P\sin 60° = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ N} = 15\sqrt{3}\text{ N}$$

$$P_y = P\cos 60° = 30 \times \frac{1}{2}\text{ N} = 15\text{ N}$$

এদের যোগফল $= P_x + P_y = (15\sqrt{3} + 15)$ N= $15(\sqrt{3}+1)$ N

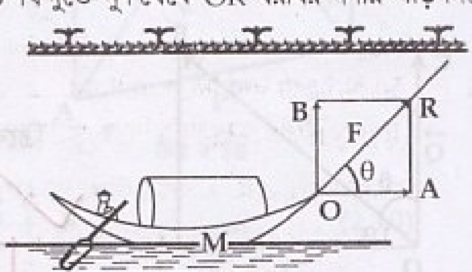
এবং বিয়োগফল $= P_x - P_y = (15\sqrt{3} - 15)$ N= $15(\sqrt{3}-1)$ N

ভেক্টর বিভাজনের দৃষ্টান্ত :

২ **নৌকার গুণ টানা :** মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা— অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ।

অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ, এর দিক OA বরাবর।
উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ, এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ F cos θ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ F sin θ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ F sin θ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে; ফলে F sin θ-এর মান কম হবে এবং F cos θ-এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।



চিত্র ২'১৮

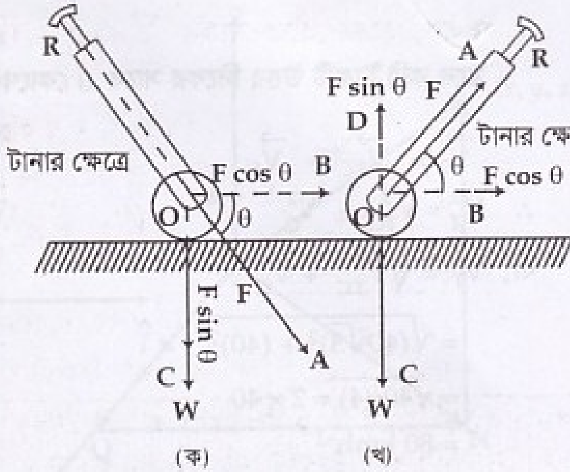
৩। **লন-রোলার চালনা :** তলের উপর দিয়ে কোনো বস্তুকে ঠেলা বা টানা হলে তল ও বস্তুর মধ্যে ঘর্ষণ বল ক্রিয়াশীল হয় এবং বস্তুর গতিকে বাধা দেয়। বস্তুর ওজন বেশি হলে ঘর্ষণ বলও বেশি হয়। রোলারকে ঠেলে বা টেনে গতিশীল করা হয়।

ঠেলার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন $= \vec{W}$

রোলারের হাতলের উপর প্রযুক্ত বল $= \vec{F}$

F বল রোলারের O বিন্দুতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.২০ (ক)]। O বিন্দুতে এই বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$, এর দিক OB বরাবর সামনের দিকে এবং উল্লম্ব উপাংশ $= F\sin\theta$, এর দিক OC বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়াশীল যা রোলারের ওজন বৃদ্ধি করে। সুতরাং রোলারের মোট ওজন হয় $(W + R\sin\theta)$। ফলে রোলার প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয়ে যায় বলে ঘর্ষণ বলের মানও বেড়ে যায়। তাই রোলার ঠেলা কষ্টকর হয়।



চিত্র ২.২০

টানার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন $= \vec{W}$ এবং রোলারের হাতলের উপর প্রযুক্ত বল $= \vec{F}$

F বল O বিন্দুতে অনুভূমিক রেখা OB-এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.২০ (খ)]। F বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত হয়ে যায়।

অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$, এর ক্রিয়ায় রোলারটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।

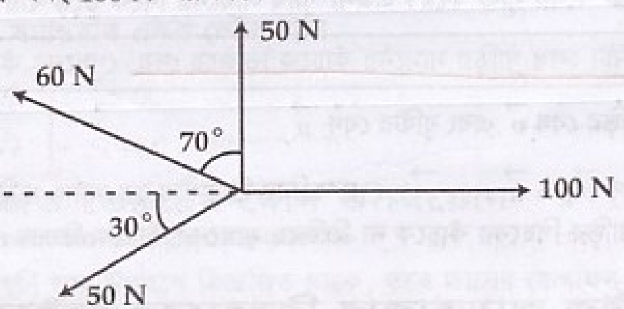
এবং উল্লম্ব উপাংশ $= F\sin\theta$, এর ক্রিয়া OD বরাবর উপরের দিকে হওয়ায় রোলারের মোট ওজন W-কে প্রশমিত করে। ফলে রোলারের ওজন হয় $(W - F\sin\theta)$। ফলে টানার ক্ষেত্রে রোলার হাল্কা অনুভূত হয় এবং ঘর্ষণ বলও হ্রাস পায়। ফলে রোলার টানা সহজতর হয়।

*সাইকেলের ক্যাঙ্ক এর গতি

তাই বলা যায়, **লন-রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর।** ২১-২২ — *সরলদোলকের ববের গতি

গাণিতিক উদাহরণ

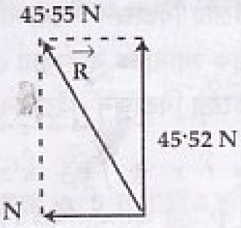
১। নিচের চিত্রের 50 N এবং 100 N এর দিকে বলের লব্ধি নির্ণয় কর।



50 N বলের লম্ব দিকে মোট বল $= 50 + 60\sin(90° + 70°) + 50\sin(180° + 30°) = 45.52$ N

100 N বলের অনুভূমিক দিকে মোট বল $= 100 + 60\cos(90° + 70°) + 50\cos(180° + 30°) = 1.69$ N

এদের লব্ধি $(\vec{R})$ চিত্রে দেখানো হলো



$$R^2 = \{(45.52)^2 + (1.69)^2\}\ N = 2074.92\ N$$

$$\therefore\ R = 45.55\ N$$

২। ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান একটি গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। (ক) ট্রাকটি কোন দিকে চলছে এবং (খ) ট্রাকটির প্রকৃত বেগ কত?

[রা. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০২]

মনে করি ট্রাকটি উত্তর দিকের সাথে θ কোণে পূর্বদিকে চলছে। ত্রিভুজ সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$$\vec{V}_T = \vec{V}_{TC} + \vec{V}_C$$

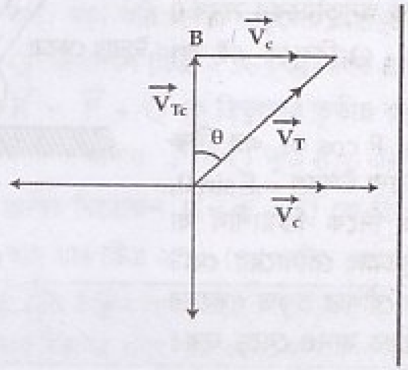
$$\therefore \; V_T^2 = V_{TC}^2 + V_C^2$$

$$\text{বা, } V_T = \sqrt{V_{TC}^2 + V_C^2}$$

$$= \sqrt{(40\sqrt{3})^2 + (40)^2}$$

$$= \sqrt{40^2(4)} = 2 \times 40$$

$$= 80 \text{ kmh}^{-1}$$



এখানে,
গাড়ির প্রকৃত বেগ,
$V_C = 40 \text{ kmh}^{-1}$
গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ,
$V_{TC} = 40\sqrt{3} \text{ kmh}^{-1}$
ট্রাকের প্রকৃত বেগ,
$V_T = ?$

$$\text{আবার, } \tan\theta = \frac{V_C}{V_{TC}} = \frac{40}{40\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$$

$$\therefore \quad \theta = 30°$$

উত্তর : (ক) 30° কোণে পূর্বদিকে, (খ) 80 kmh^{-1}

কাজ I : পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে দুই পাশের বাতাসকে আঘাত করে কিন্তু পাখি সামনের দিকে উড়ে কী করে?

পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে বাতাসকে আঘাত করে। ফলে বাতাস দুটি পাখার লব্ধি বলের বিপরীত দিকে একটি প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি করে। এজন্য পাখি সামনের দিকে উড়ে যায়।

কাজ II : বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির সামনের কাঁচকে ভিজিয়ে দেয়, পেছনের কাঁচকে ভিজায় না কেন?

মনে করি গাড়ির বেগ $\vec{v}$ এবং বৃষ্টির বেগ $\vec{u}$

∴ লব্ধি বেগ $\vec{v}_R = \vec{u} + (-\vec{v})$, OP বরাবর ক্রিয়াশীল হয় অর্থাৎ গাড়ির গতির দিকে ক্রিয়া করে। কাজেই বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির পিছনের কাঁচকে না ভিজিয়ে সামনের কাঁচকে ভিজায়।

২.৭ ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন
Resolution of Vector in Three Dimensional Co-ordinates

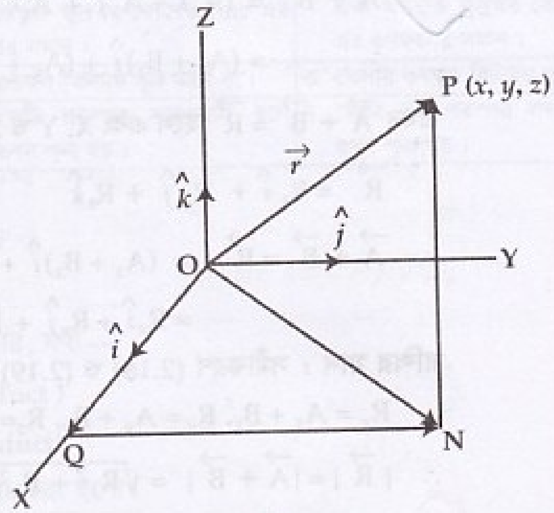
একটি ভেক্টর রাশিকে একক ভেক্টর রাশির সাহায্যে প্রকাশ করতে গিয়ে আমরা কেবল ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন বিবেচনা করব।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো অবস্থান ভেক্টরকে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায় যা ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন হিসেবে বিবেচিত হয়।

$$\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$$

এখানে P-এর অবস্থানাঙ্ক (x, y, z)

ধরা যাক, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY ও OZ সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ নির্দেশ করছে [চিত্র ২.২১]। OP রেখাটি এই অক্ষ ব্যবস্থায় r মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ নির্দেশ করছে। আরও মনে করি $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষে একক ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$। PN রেখাটি হলো XY সমতলের উপর এবং NQ রেখাটি হলো OX-এর উপর লম্ব।



চিত্র ২.২১

চিত্র হতে ভেক্টর যোগের নিয়ম অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \text{ এবং}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP}$$

কিন্তু $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{QN} = y\hat{j}$,

$\overrightarrow{NP} = z\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

$$\therefore \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.15)$$

এখানে x, y ও z হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ ভেক্টরের উপাংশের মান এবং $\vec{r}$ হলো ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার অবস্থান ভেক্টর।

ভেক্টরের মান

চিত্র ২.২১ হতে, $OP^2 = ON^2 + NP^2$ এবং $ON^2 = OQ^2 + QN^2$

$\therefore \quad OP^2 = OQ^2 + QN^2 + NP^2$ বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\therefore \quad \boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.16)$$

$\vec{r}$ বরাবর বা $\vec{r}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর রাশি

$$\boxed{\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.17)$$

লম্ব উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ
Vector Addition and Subtraction using components

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি লম্ব উপাংশে বিভাজিত থাকে, তবে তাদের যোগফল বা বিয়োগফলকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়।

যোগফল নির্ণয় :

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর রাশি যাদেরকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

এবং $$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

এখানে A_x, A_y, A_z এবং B_x, B_y, B_z, X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির উপাংশের মান নির্দেশ করে।

এখন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যোগ করে পাই,

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.18)$$

এখন $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$ হলে এবং X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান যথাক্রমে R_x, R_y ও R_z হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} + \vec{B} = \vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.19)$$

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.18) ও (2.19) থেকে পাই,

$$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y,\ R_z = A_z + B_z$$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$

$$= \frac{(A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}}{\sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}}$$

বিয়োগফল নির্ণয় :

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল নিম্নোক্তভাবে নির্ণয় করা যায়।

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.20)$$

এখন বিয়োগফল $\vec{R}$ হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

এখানে R_x, R_y ও R_z হলো X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান

$$\therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{R} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.21)$$

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.20) ও (2.21) থেকে পাই,

$$R_x = A_x - B_x,\ R_y = A_y - B_y,\ R_z = A_z - B_z$$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$

$$= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$

$$= \frac{(A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - 1}{\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - }$$

☐ পার্থক্য:

ভেক্টর গুণফল	স্কেলার গুণফল
১. ভেক্টর গুণফল ~~একটি~~ ভেক্টর রাশির ডানহাতি স্ক্রু-এর নিয়ম হতে এর দিক পাওয়া যায়।	১. স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি এর কোন দিক নেই।
২. ভেক্টর গুণনের মান রাশিদ্বয়ের মানের এবং অন্তর্ভুক্ত ক্ষুদ্রতর কোণের sine এর গুণফলের সমান।	২. স্কেলার গুণনের মান রাশিদ্বয়ের মানে এবং অন্তর্ভুক্ত ক্ষুদ্রতর কোণের cosin এর গুণফলের সমান।
৩. ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মানে না।	৩. স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র মানে।
৪. ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল হলে ভেক্টর গুণন শূন্য হয়।	৪. ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হলে স্কেলা গুণন শূন্য হয়।

২.৮ স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন
Scalar and Vector Multiplication

দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল সাধারণত দুই প্রকার, যথা—

(১) স্কেলার গুণন বা ডট গুণন (Scalar or Dot product)

(২) ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন (Vector or Cross product)

এই দুটি গুণন বা গুণফল নিম্নে পৃথক পৃথকভাবে আলোচনা করা হলো।

স্কেলার গুণন বা ডট গুণন

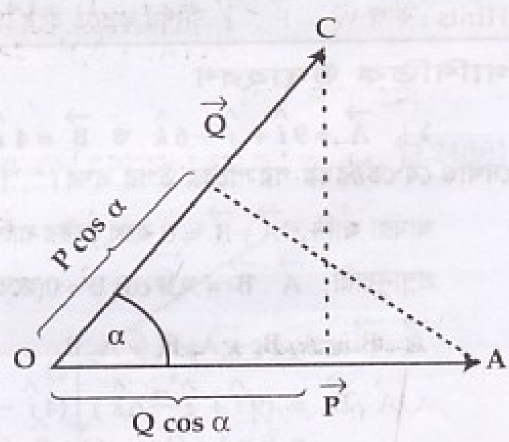
দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হলে এই গুণনকে স্কেলার গুণন বলে। এই গুণনে গুণফলের মান ভেক্টর দুটির মানের গুণফল এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান হয়। দুটি ভেক্টরকে স্কেলার গুণন করতে হলে উহাদের মাঝে একটি ডট (.) চিহ্ন দিতে হয়। এই জন্য এ গুণনের অপর নাম ডট গুণন।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। তীর চিহ্নিত OA ও OC সরলরেখা রাশি দুটির মান ও দিক নির্দেশ করছে [চিত্র ২.২২]। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে আনত। তাদের স্কেলার বা ডট গুণফল $= \vec{P} \cdot \vec{Q}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং পড়তে হয় $\vec{P}$ ডট $\vec{Q}$। কাজেই সংজ্ঞা অনুসারে পাই,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}|\,|\vec{Q}| \cos\alpha$$

বা, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\alpha = QP\cos\alpha$ ... (2.22)

এখানে $0 \le \alpha \le \pi$



চিত্র ২.২২

$Q\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{P}$ এর দিকে $\vec{Q}$ এর উপাংশ বা $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ [চিত্র ২.২২]।

আবার, (2.22) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\alpha = Q\,(P\cos\alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.22(a)]$$

এখানে $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ বা $\vec{Q}$ এর উপর $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং যে কোনো দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলতে যে কোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের দিকে অপর ভেক্টরের উপাংশের বা সেই ভেক্টরের উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফলকে বুঝায়।

বিশেষ ক্ষেত্র :

(ক) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 0° = PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

(খ) যদি $\alpha = 90°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 90° = 0$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

(গ) যদি $\alpha = 180°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 180° = -PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তর এবং বিপরীতমুখী হবে।

[উল্লেখ্য : $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = P \times Q\cos\alpha = Q \times P\cos\alpha$, এখানে, $Q\cos\alpha = \vec{P}$ বরাবর Q-এ লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha = \vec{Q}$ বরাবর $\vec{P}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ।]

স্কেলার গুণনের উদাহরণ : বল $\vec{F}$ এবং সরণ $\vec{s}$ উভয়েই ভেক্টর রাশি। কিন্তু এদের স্কেলার গুণফল কা (W) একটি স্কেলার রাশি, অর্থাৎ

$$W = \vec{F}.\vec{s} = Fs\cos\alpha \qquad \ldots \ldots (2.23)$$

স্থিতিশক্তি, বৈদ্যুতিক বিভব ইত্যাদিও ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফলের উদাহরণ।

স্কেলার গুণনের নিয়মানুসারে,

(i) $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

(ii) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

(iii) $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

কাজ : $\vec{F} = (5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ Nবল একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে $\vec{r} = (3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ সৃ করল।

Hints : কাজ $W = \vec{F}.\vec{r}$ নির্ণয় করতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ

১। $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর এব দেখাও যে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব। [য. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০১

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হবে।

প্রশ্নানুযায়ী, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta = 0$ হতে হবে।

$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\therefore \vec{A}.\vec{B} = (9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}).(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 9 \times 4 + (1 \times -6) + (-6 \times 5) = 36 - 6 - 30 = 0$

যেহেতু $\vec{A}.\vec{B} = 0$, কিন্তু $A \neq 0$ ও $B \neq 0$; $\therefore \cos\theta = 0 = \cos 90°$

অতএব ভেক্টর দুটি পরস্পরের উপর লম্ব।

২। ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$-এর উপর $\vec{Q} = 4\hat{j} + 5\hat{k}$-এর লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta$

আমরা জানি, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$\therefore Q\cos\theta = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{P} = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}|}$

এখন, $\vec{P}.\vec{Q} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}).(4\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 \times 0 + (-3) \times (4) + (1) \times (5)$

$= -12 + 5 = -7$

এবং $|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\therefore \quad Q\cos\theta = \dfrac{-7}{\sqrt{14}}$

৩। m এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ?

আমরা জানি দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90° = 0$ হবে।

$\therefore \quad \vec{A}.\vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}).(m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

বা, $2m + 6 - 8 = 0$

বা, $2m - 2 = 0$

বা, $m = 1$

ভেক্টরের ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন
Vector product or Cross product of vectors

দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয়, তবে ঐ গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। দুটি ভেক্টরকে ভেক্টর গুণন করতে হলে উহাদের মাঝে একটি ক্রস (×) চিহ্ন দিতে হয় এজন্য এই গুণনের অপর নাম ক্রস গুণন। ভেক্টর গুণফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। অতএব এদের ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল—

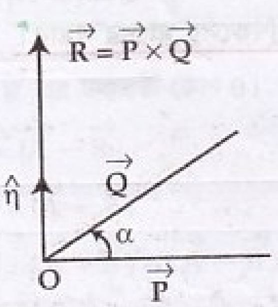
$$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, |\vec{P}|\,|\vec{Q}|\, \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.24(a)]$$

এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে চিত্র ২.২৩

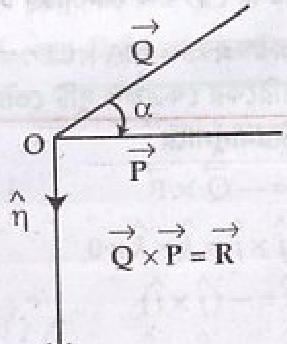
বা, $\vec{R} = \vec{Q} \times \vec{P}$

$$= \hat{\eta}\, QP\, \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.24(b)]$$

এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ২.২৪]



চিত্র ২.২৩

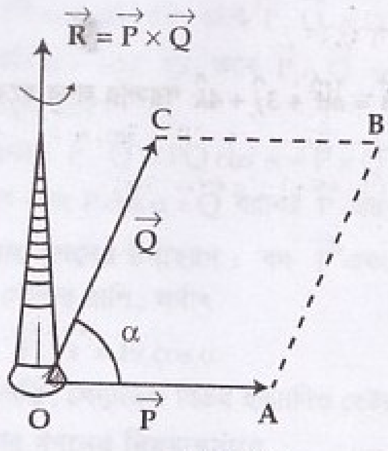


চিত্র ২.২৪

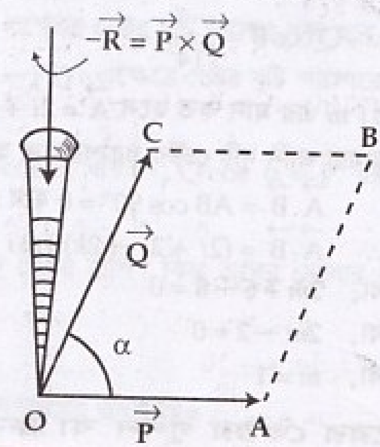
দুটি ভেক্টরের গুণফলের দিক ডান হাতি কর্ক স্ক্রু সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম : ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের উপর লম্বভাবে একটি ডান হাতি স্ক্রুকে রেখে প্রথম ভেক্টর হতে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সেই দিকই হবে $\vec{R}$ তথা $\hat{\eta}$ এর দিক।

উপরোক্ত নিয়ম অনুসারে $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর অভিমুখ হবে উপরের দিকে [চিত্র ২·২৫] এবং $\vec{Q} \times \vec{P}$ এর অভিমুখ হবে নিচের দিকে [চিত্র ২·২৬] অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে ডান হাতি স্ক্রুর দিক হবে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী (Anti-



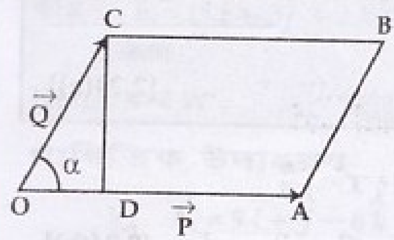
চিত্র ২·২৫



চিত্র ২·২৬

clockwise) এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clockwise)। Anti-clockwise direction-কে positive (ধনাত্মক) ধরা হয় এবং clockwise direction-কে Negative (ঋণাত্মক) ধরা হয়।

বিশেষ ক্ষেত্র : (ক) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 0° = 0$. এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।



চিত্র ২·২৭

(খ) যদি $\alpha = 90°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 90° = PQ$. এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

(গ) যদি $\alpha = 180°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 180° = 0$. এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।

উদাহরণ : মনে করি দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের সাথে α কোণ উৎপন্ন করেছে। OABC সামান্তরিকের $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OC} = \vec{Q}$

এখন C হতে OA এর উপর CD লম্ব টানি [চিত্র ২·২৭]।

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= OA \times CD = OA \times OC \sin\alpha = PQ \sin\alpha = |\vec{P} \times \vec{Q}|$

সিদ্ধান্ত—সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মানের সমান।

ভেক্টর গুণনের নিয়মানুসারে,

(i) $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

(ii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

(iii) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i})$

(iv) $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j})$

(v) $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k})$

হিসাব : একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু বরাবর দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ক্রিয়াশীল হলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Hints : $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় করে $|\vec{A} \times \vec{B}|$ এর মান বের করতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ

১। $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$। m-এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে ?

যদি $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হয় তবে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে।

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \times (m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ m & 6 & -10 \end{vmatrix} = \hat{i}(30-30) - \hat{j}(-10-5m) + \hat{k}(6+3m) = \hat{j}(10+5m) + \hat{k}(6+3m)$$

$\therefore$ শর্ত অনুসারে,

$10 + 5m = 0$ এবং $6 + 3m = 0$

বা, $5m = -10$ বা, $3m = -6$

$\therefore\ m = -\frac{10}{5} = -2$ $\therefore\ m = -\frac{6}{3} = -2$

সুতরাং, $m = -2$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

২। $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{Q} = -2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থান করে তার উল্লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৪; কু. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৮]

$\vec{P} \times \vec{Q}$ একটি ভেক্টর যা $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর তলে লম্ব।

$$\therefore\ \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(9-8) + \hat{j}(-4-6) + \hat{k}(-4-3) = \hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$$

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর রাশি $= \hat{n}$

$$\therefore\ \hat{n} = \frac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-7)^2}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{1 + 100 + 49}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{150}}$$

৩। $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করে দেখাও যে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ।

$\therefore\ |\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

বা, $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A} - \vec{B}|^2$

বা, $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$

বা, $\vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B}$

বা, $2(\vec{A} \cdot \vec{B}) = -2(\vec{A} \cdot \vec{B})$, $(\because \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A})$

বা, $4(\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0$ বা, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, $(A \neq 0, B \neq 0)$

বা, $AB\cos\theta = 0$ $\therefore \cos\theta = 0$ বা, $\theta = 90°$ $(A \neq 0, B \neq 0)$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $90°$; কাজেই ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

৪। একটি ঘূর্ণনরত কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N হলে টর্কের মান ও দিক নির্ণয় কর।

এখানে,
ব্যাসার্ধ ভেক্টর, $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ m
বল, $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$ N
টর্ক, $\vec{\tau} = ?$
টর্কের মান, $\tau = ?$

আমরা জানি, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6+3) - \hat{j}(-6+6) + \hat{k}(6-12)$$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{\tau} = -(3\hat{i} + 6\hat{k}) \text{ N-m}$$

τ-এর মান $= \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

উত্তর : $-(3\hat{i} + 6\hat{k})$ N-m, $\sqrt{45}$

৫। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণ দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

আমরা জানি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-6) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(-9-1) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \times |\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2}(\sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{300} = 8{\cdot}66$$

২.৮ পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাস
Calculus in Physics

ক্যালকুলাস হলো পরিবর্তনের গাণিতিক অধ্যয়ন। এর দুটি প্রধান শাখা রয়েছে— ডিফারেনসিয়াল (Differential) ক্যালকুলাস ও ইন্টিগ্রাল (Integral) ক্যালকুলাস। বিজ্ঞানী নিউটন সর্বপ্রথম তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানে ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করেন।

গুরুত্ব : পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাস-এর অপরিহার্য গুরুত্ব রয়েছে। অনেক বাস্তব প্রক্রিয়া ডেরিভেটিভস যুক্ত সমীকরণ দ্বারা ব্যাখ্যা করা হয়। সেই সমীকরণগুলোকে ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণ বলে। পদার্থবিজ্ঞান সময়ের সাথে রাশির পরিবর্তন ও বিকাশের পদ্ধতির সাথে সম্পর্কিত। কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ ধারণার সম্যক জ্ঞানের জন্য time derivative-এর ধারণা থাকা আবশ্যক। বিশেষত নিউটনীয় পদার্থবিদ্যায় একটি বস্তুর অবস্থানের time derivative গুরুত্বপূর্ণ।

বেগ বস্তুর সরণের time derivative

ত্বরণ বস্তুর বেগের time derivative

ব্যবহার : বেগ, ত্বরণ, বক্ররেখার ঢাল ইত্যাদি হিসাবের জন্য ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করা হয়। ক্ষেত্রফল, আয়তন, ভরকেন্দ্র, কাজ এবং চাপ ইত্যাদি হিসাবের জন্য ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়। স্থান, কাল এবং গতির প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জনের জন্যও ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ :

দেয়া আছে, একটি সরলরেখার উপর বস্তুর অবস্থান

$$x(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

তাহলে বস্তুর বেগ, $v = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -32t + 16$

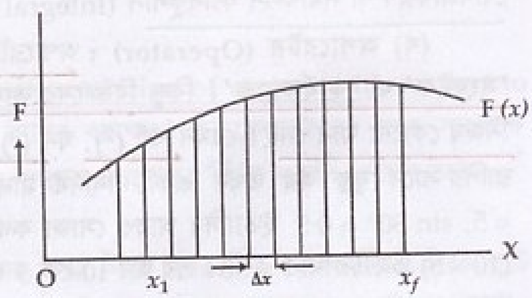
এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -32$

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র সাধারণ ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণের মাধ্যমে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়

$$F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস-এর সাহায্যে পরিবর্তী বল দ্বারা কাজ নির্ণয় : ধরি, একটি বস্তুর ওপর একটি পরিবর্তনশীল বল x-অক্ষ বরাবর ক্রিয়াশীল। বলটির মান বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব x-এর ওপর নির্ভর করে অর্থাৎ F, দূরত্ব x-এর একটি অপেক্ষক। চিত্রে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $F(x)$-এর আনুষঙ্গিক মান নিয়ে লেখ দেখানো হয়েছে।

মোট সরণ Δx প্রস্থের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত, যেখানে x_i থেকে $x_i + \Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ হচ্ছে Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে বলের মান প্রায় ধ্রুব থাকে এবং এই ধ্রুব মান F_1। সুতরাং এই অংশে এই বল দ্বারা সম্পন্ন ক্ষুদ্র কাজ, $\Delta W_1 = F_1 \Delta x$



চিত্র ২.২৮

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশে $x_i + \Delta x$ থেকে $x_i + 2\Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে ধ্রুব বল F_2। সুতরাং দ্বিতীয় অংশে বল দ্বারা কৃত কাজ, $\Delta W_2 = F_2 \Delta x$। বস্তুটিকে x_i থেকে x_f পর্যন্ত সরাতে $F(x)$ বল দ্বারা কৃত মোট কাজ,

$$\begin{aligned} W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \ldots + \Delta W_N \\ &= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + \ldots + F_N\Delta x \\ &= \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.25) \end{aligned}$$

Δx-কে যত ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর তথা N-এর মান যত বেশি হবে হিসাবকৃত কাজের মান তত সঠিক হবে। আমরা বল $F(x)$ দ্বারা কৃত কাজের সঠিক মান পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δx-কে শূন্য এবং N-কে অসীম করি। তাহলে সঠিক ফল হবে,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.26)$$

কিন্তু ক্যালকুলাসের ভাষায় $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{K=1}^{N} F_K \Delta x$ রাশিটি হচ্ছে

$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$ যা x_i থেকে x_f পর্যন্ত x-এর সমাকলন (Integration) নির্দেশ করে।

সুতরাং (2.26) নং সমীকরণ দাঁড়ায়,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2.27)$$

সংখ্যাগতভাবে এই রাশিটি হচ্ছে বল বক্ররেখা এবং x_i ও x_f সীমার মধ্যে অবস্থিত x-অক্ষের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। সুতরাং সমাকলনের সাহায্যে কাজ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

২·৯ ভেক্টর ক্যালকুলাস
Vector Calculus

ভেক্টর অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ
Vector differentiation or vector derivatives

ভেক্টর অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ আলোচনার পূর্বে কয়েকটি প্রয়োজনীয় বিষয় জানা দরকার।

(ক) ক্যালকুলাস (Calculus) : বিজ্ঞানের ভাষায় ক্যালকুলাস হলো অবিরত পরিবর্তনশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ গণনার একটি শাস্ত্র। আধুনিক গণিতে এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা।

ক্যালকুলাস দুভাগে বিভক্ত—(১) অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন ক্যালকুলাস (Differential calculus). (২) যোগজীকরণ বা সমাকলন ক্যালকুলাস (Integral calculus)

(খ) অপারেটর (Operator) : অপারেটর একটি ইংরেজি শব্দ। এর অভিধানগত অর্থ হলো **'চলক'** বা **'সংঘটক'** বা **'কার্যকারক'**। কিন্তু বিজ্ঞানের ভাষায় বলা হবে— অপারেটর এক ধরনের **প্রতীক** বা **সংকেত**। এর নিজস্ব কোনো মান নেই। যেমন বর্গ (^{2}), ঘন (^{3}), বর্গমূল ($\sqrt{}$), sine, log ইত্যাদি। তবে এরা যখন অন্য কোনো রাশির সাথে যুক্ত হয় তখন একটি নির্দিষ্ট মান বহন করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $\sqrt{25} = 5$, $\sin 30° = 0{\cdot}5$ ইত্যাদি। আরও সোজা কথায় বলা যেতে পারে ($10\times$) চিহ্নটির কোনো মান হয় না। কিন্তু (10×5) চিহ্নটির মান $= 50$। এর অর্থ 10-কে 5 দ্বারা গুণ করা। এখন যদি ($10\times$) চিহ্নকে C দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $10 \times 5 = C5$ হয়। অতএব C একটি অপারেটর।

সংজ্ঞা : যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

উল্লেখ্য, অন্তরীকরণ একটি অপারেটর। t-সাপেক্ষে এই অপারেটর $\frac{d}{dt}$, x-সাপেক্ষে $\frac{d}{dx}$, y-সাপেক্ষে $\frac{d}{dy}$ ইত্যাদি। যোগজীকরণও একটি অপারেটর। এর চিহ্ন $\int$ অথবা Σ। ভেক্টর অন্তরীকরণ অপারেটর $\vec{\nabla}$ চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এই চিহ্নকে 'ডেল' উচ্চারণ করা হয়। বিভিন্ন উপাংশের সাহায্যে একে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

যেহেতু স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশিকেই অন্তরীকরণ করা যায়, সেহেতু অন্তরীকরণ অপারেটর স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশির ক্ষেত্রেই কার্যকর।

ভেক্টর অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন
Differentiation of a Vector

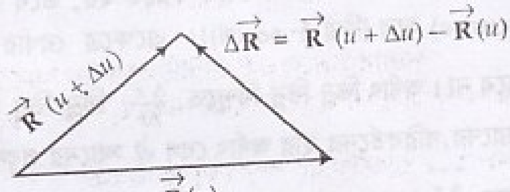
ধরা যাক $\vec{V}(u)$ একটি ভেক্টর যা একক স্কেলার চলক u এর উপর নির্ভরশীল। গাণিতিক ভাষায়, V, u এর অপেক্ষক (function)। তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \frac{\vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u}$$, এখানে Δu দ্বারা u-এর সামান্য বৃদ্ধি বুঝায়।

$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u}$ হচ্ছে u-এর সাপেক্ষে $\vec{R}$ এর পরিবর্তনের হার। Δu শূন্যের কাছাকাছি হলে,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{R}(u+\Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u}$$

$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u}$-কে $\frac{d\vec{R}}{du}$ রূপে লেখা যায়।



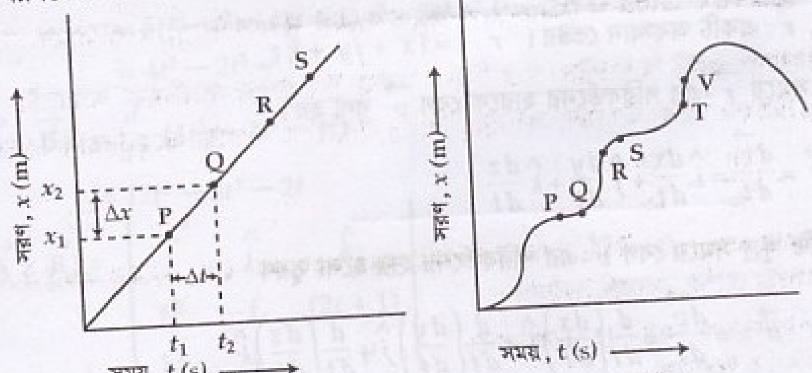
চিত্র ২.২৯

$$\therefore \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{R}(u+\Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u}$$

$\frac{d\vec{R}}{du}$ হচ্ছে u-এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য, u-এর সাপেক্ষে $\vec{R}$-এর পরিবর্তনের হার। $\frac{d\vec{R}}{du}$-কে u-এর সাপেক্ষে $\vec{R}$ এর অন্তরক সহগ (differential coefficient) বলে। $\frac{d\vec{R}}{du}$ এর মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন বলা হয়।

ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন (Differentiation of vectors with respect to time) : সময়ের সাথে কোনো ভেক্টর রাশির পরিবর্তন হলে ঐ রাশির ব্যবকলন করাকে ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে ব্যবকলন করা বুঝায়। যেমন গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$, সময় t-এর উপর নির্ভর করে। এখানে ভেক্টর $\vec{r}$ সময় t-এর অপেক্ষক (function)।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, একটি বাস সমতল ও সোজা রাস্তার উপর দিয়ে উত্তর দিক থেকে দক্ষিণ দিকে ছুটে চলেছে। বাসটি ১ম সেকেন্ডে 2m, ২য় সেকেন্ডে 4m, ৩য় সেকেন্ডে 6m এভাবে চলছে। তখন আমরা বলি যে বাসটির সরণ $\vec{x}$ সব সময় সমান। এখন বাসটির সরণ $\vec{x}$-কে Y-অক্ষে এবং সময় t-কে X-অক্ষে স্থাপন করে লেখচিত্র অঙ্কন করলে এটি সরলরেখা হবে [চিত্র ২.৩০(ক)]।



চিত্র ২.৩০

এই সরলরেখার যে কোনো দুটি বিন্দু P ও Q হতে X ও Y-অক্ষের উপর লম্ব টেনে Δx ও Δt বের করতে পারি। Δx ও Δt-এর অনুপাত অর্থাৎ ঢাল $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ হবে বাসের বেগ। এই সরলরেখার ঢাল সর্বত্র একই মানের হবে; অর্থাৎ বেগ সর্বত্র সমান। অর্থাৎ যে কোনো সময় ব্যবধানের জন্য (তা যতই ক্ষুদ্র হোক) বেগ সমান হবে। এ অবস্থায়

আমরা বলি যে, বাসটির গড় বেগ ও তাৎক্ষণিক বেগ সমান। কিন্তু বাসটি যদি বাঁকা ও উঁচু-নিচু রাস্তায় চলে এব ঘন ঘন বাসের বেগ কম-বেশি করতে হয়, তবে সরণ $\vec{x}$ বনাম সময় t লেখচিত্রটি সরলরেখা না হয়ে বক্ররেখ (curve) হবে [চিত্র ২·৩০ (খ)]। এক্ষেত্রে রেখার যে কোনো দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী ঢাল অন্য বিন্দুদ্বয়ের ঢালের সমান হবে না। অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ ভিন্ন ভিন্ন হবে। এবার সময় ব্যবধান Δt যদি অত্যন্ত ক্ষুদ্র ধরা হয়, তবে সরণের পরিবর্তনের হার অর্থাৎ বেগ ঐ স্থানের প্রকৃত বেগের প্রায় কাছাকাছি হবে। Δt যদি শূন্যের কাছাকাছি হয়, তবে $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ প্রকৃত বেগ হবে।

অর্থাৎ $\underset{\Delta t \to 0}{\text{Limit}} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \vec{v}$, প্রকৃত বেগ ... ... (2.28)

ক্যালকুলাসের ভাষায়, $\underset{\Delta t \to 0}{\text{Limit}} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ লেখা হয়। ... ... (2.29)

এটিই ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন। $\vec{x}$ হলো সরণ ভেক্টর এবং $\frac{d}{dt}$ হলো অপারেটর।

সমীকরণ (2.19)-এ সরণ $\vec{x}$ ভেক্টর রাশি এবং সময় t স্কেলার রাশি। সুতরাং, কোনো স্কেলারের সাপেক্ষে ভেক্টরের অন্তরীকরণ ভেক্টর হয় (যেমন এক্ষেত্রে বেগ $\vec{v}$)। স্কেলার রাশির অন্তরীকরণ স্কেলার রাশি হবে।

এখন $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে লেখা যায়,

$\vec{x} = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1$, এখানে x_1, y_1, z_1 হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষের দিকে $\vec{x}$ ভেক্টরের উপাংশের মান। x_1, y_1, z_1 উপাংশগুলো সময় t-এর অপেক্ষক কিন্তু $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ধ্রুবক এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের কোনো পরিবর্তন নেই; অর্থাৎ এদের পরিবর্তনের হার শূন্য। অতএব $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে এর ব্যবকলন হবে,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{i}\frac{dx_1}{dt} + \hat{j}\frac{dy_1}{dt} + \hat{k}\frac{dz_1}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.30)$$

অবস্থান ভেক্টর হতে বেগ ও ত্বরণ প্রতিপাদন

ধরা যাক, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর। $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ $\vec{v}$ বলা হয়।

$$\text{সুতরাং, } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.31)$$

আবার, অতি ক্ষুদ্র সময়ে বেগ $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হার হলো ত্বরণ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d2x}{dt_2}\hat{i} + \frac{d2y}{dt_2}\hat{j} + \frac{d2z}{dt_2}\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.32)$$

কোনো স্কেলার রাশিকে অন্তরীকরণ করার সাধারণ নিয়ম নিম্নরূপ :

(ক) প্রথমে চল রাশিটির সহগ সংখ্যাকে ঘাত দ্বারা গুণন করতে হবে।

(খ) পরে চল রাশির ঘাতের মান হতে '1' বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ : মনে করি, দূরত্ব $s = 16t^2$। এখানে সহগ 16, t চল রাশি এবং 2 হলো ঘাত। উপরের নিয়ম অনুসারে প্রথমে সহগ 16-কে ঘাত 2 দ্বারা গুণন করে পাওয়া যাবে 32 এবং চল রাশির ঘাত 2 হতে 1 বিয়োগ করলে পাওয়া যাবে 1।

$$\therefore \frac{ds}{dt} = v = 32t$$

গাণিতিক উদাহরণ

১। অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$-কে ব্যবকলন করে কিভাবে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া যায় ?

এখানে, অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

আমরা জানি, অতি ক্ষুদ্র সময়ে r-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলা হয়। সুতরাং

বেগ, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলা হয়।

$$\text{সুতরাং ত্বরণ, } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

২। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}$ ও $\vec{B} = 5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ ও $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$ নির্ণয় কর।

$$\text{প্রশ্নানুযায়ী, } (\vec{A}\cdot\vec{B}) = \{\hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}\}\cdot(5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3)$$

$$= 5t^3 - t^2 - (2t+1)t^3 = 5t^3 - t^2 - 2t^4 - t^3$$

$$= 4t^3 - 2t^4 - t^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{dt}(4t^3 - 2t^4 - t^2)$$

$$= 12t^2 - 8t^3 - 2t$$

$$\text{পুনরায়, } (\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & (2t+1) \\ 5t & t & -t^3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -t & (2t+1) \\ t & -t^3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} t & (2t+1) \\ 5t & -t^3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} t^2 & -t \\ 5t & t \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) - \hat{j}(-t^5 - 10t^2 - 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$$

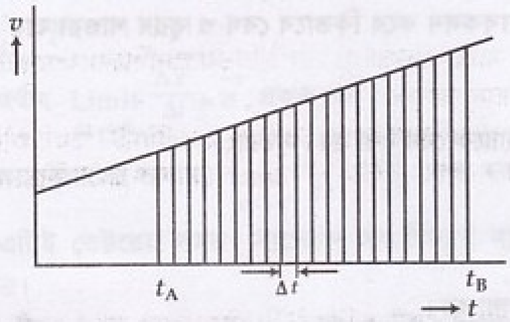
$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + \hat{j}(5t^4 + 20t + 5) + \hat{k}(3t^2 + 10t)$$

যোগজীকরণ বা সমাকলন
Integration

মনে করি, একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল অর্থাৎ এটি সরলরেখা বরাবর চলছে। বেগের দিক নির্দিষ্ট হলেও এর মান ভিন্ন। ধরা যাক, বেগের মান v সময় t-এর উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ v সময় t-এর অপেক্ষক (function)। একে $v(t)$ হিসেবে প্রকাশ করা হয়।

ধরা যাক, আদি সময় t_A এবং শেষ সময় t_B। এই সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করব। এখন আমরা সময় ব্যবধান $t_B - t_A$ কে N সংখ্যক অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমান অংশ Δt এ বিভক্ত করি। ধরি আদি সময় t_A হতে প্রথম ক্ষুদ্রাংশ $t_A + \Delta t$ এর মধ্যে সময় ব্যবধান Δt। এই সময় ব্যবধান এত ক্ষুদ্র যে এই অংশে $v(t)$ এর পরিবর্তন অতি নগণ্য; সুতরাং এই ক্ষুদ্র সময় ব্যবধানকালে $v(t)$ এর মান প্রায় ধ্রুব থাকে। ধরা যাক $v(t)$-এর এই ধ্রুব মান v_1। Δt সময় ব্যবধানে অতিক্রান্ত দূরত্ব Δs_1 হলে আমরা পাই,

$$\Delta s_1 = v_1 \Delta t$$



চিত্র ২.৩১

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশ, তৃতীয় অংশের জন্য সময় ব্যবধান হবে Δt এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে যথাক্রমে $\Delta s_2 = v_2\Delta t$, $\Delta s_3 = v_3\Delta t$। N সংখ্যক অংশের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে $\Delta s_N = v_N\Delta t$। এখন t_A হতে t_B সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব s হবে, $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3 \ldots\ldots \Delta s_N$ পদগুলোর সমষ্টি।

সুতরাং, $s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_N$

বা, $s = v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + \ldots + v_N\Delta t$

বা, $$s = \sum_{n=1}^{N} v_n \Delta t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (2.33)$$

এখানে লক্ষণীয় যে আমরা ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান Δt এর জন্য বেগের মান প্রায় ধ্রুব ধরেছি। এই Δt সময়ে বেগের মান যদি পুরোপুরি ধ্রুব থাকত তবে সমীকরণ (2.33) হতে আমরা সঠিক দূরত্ব নির্ণয় করতে পারতাম। এখন সময় ব্যবধান Δt যত ক্ষুদ্রতর হবে v-এর মান ততই ধ্রুব মানের খুবই কাছাকাছি হবে। অতিক্রান্ত দূরত্বের মান সঠিক পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δt-কে শূন্য এবং ক্ষুদ্র অংশগুলোর সংখ্যা N অসীম হয়। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N} v_n \Delta t$$

ক্যালকুলাসে $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{n=1}^{N} v_n\Delta t$ রাশিকে লেখা হয় $\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$।

$\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$ রাশিটি t_A হতে t_B পর্যন্ত t-এর সাপেক্ষে $v(t)$ এর সমাকলন নির্দেশ করে। সমাকলন এক ধরনের যোগজীকরণ Σ বা $\int$ চিহ্ন সমষ্টিকরণ বা যোগজীকরণ বুঝায়।

অতএব, $$s = \int_{t_A}^{t_B} v(t)dt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (2.34)$$

$v(t)$ কে যোজ্য রাশি (Integrand) বলা হয়। $v(t)$ এর পরে dt দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে, যোগজীকরণটি করতে হবে t-এর সাপেক্ষে।

অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ পরস্পর বিপরীত ক্রিয়া। যেমন—

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

আবার, $\int \cos x \, dx = \sin x$

অর্থাৎ $\sin x$-কে অন্তরীকরণ করলে $\cos x$ পাওয়া যায়, আবার $\cos x$ কে যোগজীকরণ করলে $\sin x$ পাওয়া যায়।

২.১০ ভেক্টর অপারেটরের ব্যবহার
Uses of Vector Operators

গ্রেডিয়েন্ট (Gradient) : গ্রেডিয়েন্টের সংজ্ঞা এবং ব্যাখ্যা দেয়ার পূর্বে ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ডেল (∇), স্কেলার ও ভেক্টর ক্ষেত্র এবং রেখা ইন্টিগ্রাল সম্পর্কে জানা দরকার।

ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ∇ : ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটরটি স্যার হ্যামিলটন প্রথম আবিষ্কার করেন। গিবস একে 'ডেল' নামকরণ করেন। এর অন্য নাম ন্যাবলা। ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয় :

$$\text{ডেল, } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

সাধারণ ভেক্টরের মতো এর ভেক্টর ধর্ম রয়েছে। ইহা কোন একটি রাশির উপর ক্রিয়া করে নতুন একটি রাশির সৃষ্টি করে।

$$\text{তবে, } \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, একটি স্কেলার রাশি। এখানে $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ আংশিক অন্তরীকরণ বুঝায়।

স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট, ভেক্টর ফাংশনের ডাইভারজেন্স বা ভেক্টর ফাংশনের কার্ল সংজ্ঞায়িত করার জন্য এই অপারেটরটি ব্যবহার করা হয়।

স্কেলার ক্ষেত্র ও ভেক্টর ক্ষেত্র

স্কেলার ক্ষেত্র : যেকোনো ক্ষেত্র বিবেচনা করা হোক না কেন, ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে একটি ভৌত গুণ (physical property) যুক্ত থাকে। **ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে।** ঘনত্ব, উষ্ণতা, বিভব ইত্যাদি স্কেলার ক্ষেত্রের উদাহরণ। গাণিতিকভাবে, $\varphi(x, y, z) = 3x^2yx + 2xy^2x + 5zy^2$) স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

ভেক্টর ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে। বেগ, তড়িৎ প্রাবল্য, মহাকর্ষ প্রাবল্য ইত্যাদি ভেক্টর ক্ষেত্রের উদাহরণ।

$\vec{F}(x, y, z) = ax^2y\,\hat{i} + bx^2yz^2\,\hat{j} + 4zx^2\,\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

রেখা ইন্টিগ্রাল : $\vec{V}(x, y, z)$ একটি ভেক্টর ক্ষেত্র হলে কোনো আবদ্ধ পথে ভেক্টরের রেখাজনিত ইন্টিগ্রাল $\oint \vec{V}.\vec{dl}$, এখানে $\vec{dl}$ আবদ্ধ পথের একটি অংশ যার পরিমাণ dl এবং অভিমুখ ঐ অংশের স্পর্শ বরাবর।

গ্রেডিয়েন্ট

ধরা যাক, $\varphi(x, y, z)$ একটি ব্যবকলনযোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে। তাহলে φ-এর গ্রেডিয়েন্টকে $\vec{\nabla}\varphi$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\text{অর্থাৎ, grad } \varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \frac{\hat{i}\,\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\hat{j}\,\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\hat{k}\,\partial\varphi}{\partial z}$$

সংজ্ঞা : গ্রেডিয়েন্ট হলো একটি ভেক্টর ক্ষেত্র যা অদিক রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হার প্রকাশ করে। একে স্কেলার অপেক্ষকও বলে।

গ্রেডিয়েন্টের ভৌত তাৎপর্য (**Physical significances of Gradient**)

(i) স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর ক্ষেত্র অর্থাৎ একটি ভেক্টর রাশি।

(ii) উক্ত ভেক্টর রাশির মান ঐ স্কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হারের সমান।

(iii) স্কেলার রাশির পরিবর্তন শুধু বিন্দুর স্থানাঙ্কের উপরই নির্ভর করে না, যেদিকে এর পরিবর্তন দেখানো হয় সেদিকের উপরেও নির্ভর করে।

গানিতিক উদাহরণ

১। যদি $\vec{A} = 2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k}$ এবং $\varphi = 2z - x^3y$ হয়, তাহলে $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{A}.\nabla\varphi$ নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2z - x^3y)$$

$$= -3x^2y\,\hat{i} - x^3\,\hat{j} + 2\hat{k}$$

এখন, $\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = (2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k})\,.\,(-3x^2y\,\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= -6x^4y - 3x^3yz - 2xz^2$$

$(1, 1, -1)$ বিন্দুতে

$$\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = -6(1)^4(1) - 3(1)^3(1)(-1) - 2(1)(-1)^2$$

$$= -6 + 3 - 2 = -5.$$

ডাইভারজেন্স (Divergence)

মনে করি, ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় R অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\hat{i} + v_2(x, y, z)\,\hat{j} + v_3(x, y, z)\,\hat{k}$, তাহলে ডেল (∇) অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণফলকে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে। ডাইভারজেন্সকে $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div. $\vec{V}$ লিখে প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$ এটি স্কেলার রাশি।

সংজ্ঞা : ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলো একটি স্কেলার ফাংশন বা ক্ষেত্র। যাদ্বারা ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে ফ্লাক্সের প্রকৃতি (বহি/অন্ত) জানা যায়।

ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্ম (**Physical properties of divergence**)

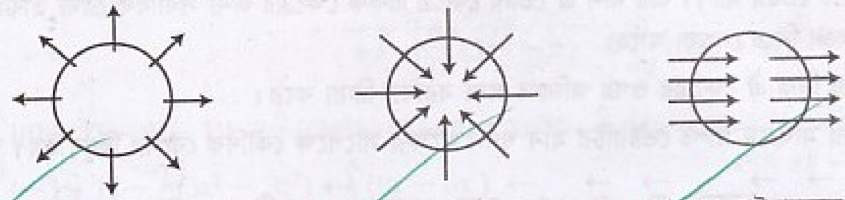
(i) ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div.$\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

(ii) মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়; ঘনত্বের হ্রাস ঘটে।

(iii) মান ঋণাত্মক হলে, আয়তনের সংকোচন ঘটে; ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।

(iv) মান শূন্য হলে, আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0$ হলে, ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনইডাল (solenoidal) বলে। নিম্নে ২·৩২ চিত্রে কয়েকটি ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স দেখানো হলো :



(ক) ধনাত্মক ডাইভারজেন্স (খ) ঋণাত্মক ডাইভারজেন্স (গ) শূন্য ডাইভারজেন্স

চিত্র ২·৩২

গাণিতিক উদাহরণ

১। (1, −1, 1) অবস্থানে $\vec{A} = 3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\,\hat{k}$-এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $\vec{\nabla} . \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\,\hat{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$

$$= 3yz^3 + 4xy - x^3y^2$$

(1, −1, 1) অবস্থানে,

$$\vec{\nabla} . \vec{A} = 3(-1)(1)^3 + 4(1)(-1) - (1)^3(-1)^2$$

$$= -3 - 4 - 1 = -8$$

২। p এর মান কত হলে $\vec{r} = (x+3y)\hat{i} + (py - z)\hat{j} + \hat{k}(x - 2z)$ সলিনয়েড হবে ?

আমরা জানি, $\vec{\nabla} . \vec{r} = 0$ হলে $\vec{r}$ সলিনয়েড হবে।

$$\vec{\nabla} . \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot [(x+3y)\hat{i} + (py - z)\hat{j} + \hat{k}(x - 2z)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(py - z) + \frac{\partial}{\partial z}(x - 2z) = 1 + p - 2 = p - 1$$

$\therefore \vec{\nabla} . \vec{r} = p - 1 = 0$ বা, $p = 1$

কার্ল (Curl)

ধরা যাক, কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\hat{V}(x, y, z) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$। তাহলে অপারেটর ∇ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে **কার্ল** বলে। সুতরাং $\vec{V}$ এর কার্ল

$$\text{curl}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

সংজ্ঞা : কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনের সাথে সম্পর্কিত। ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি বিন্দুর চারদিকে এর লাইন ইনটিগ্রালের মান প্রতি একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তা উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল প্রকাশ করে।

কার্লের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of Curl)

(i) কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রালের সমান। (রেখা ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞা নিচে দেওয়া আছে)

(ii) ভেক্টরটির দিক ঐ ক্ষেত্রের ওপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

(iii) কার্ল এর মাধ্যমে প্রাপ্ত ভেক্টরটির মান ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ $\vec{V} = \omega \times \vec{r}$ হলে, $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 2\vec{\omega}$ হবে। এখানে $\vec{\omega}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর।

(iv) কোনো ভেক্টরে কার্ল ঐ ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে কার্ল তা নির্দেশ করে।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল-এর নতিমাত্রা (gradient) শূন্য। অর্থাৎ $\vec{\nabla} . (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0.$

(vi) কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল হয়।

গাণিতিক উদাহরণ

১। (1, 1, − 1) বিন্দুতে $\vec{A} = xz^2 \hat{i} - 2x^3 yz \hat{j} + 3yz^3 \hat{k}$ এর কার্ল নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & -2x^3yz & 3yz^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3yz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^3yz)\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3yz^3)\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^3yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^2)\right]\hat{k}$$

$$= (3z^3 + 2x^3y)\,\hat{i} + (2xz)\,\hat{j} + (-6x^2yz)\,\hat{k}$$

$$= (3z^3 + 2x^3y)\,\hat{i} + 2xz\,\hat{j} - 6x^2yz\,\hat{k}$$

(1, 1, − 1) বিন্দুতে

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = [3(-1)^3 + 2(1)^3(1)]\,\hat{i} + 2(1)(-1)\,\hat{j} - 6(1)^2(+1)(-1)\,\hat{k}$$

$$= (-3+2)\,\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

২। $\vec{A} = (6xy + z^3)\,\hat{i} + (3x^2 - z)\,\hat{j} + (3xz^2 - y)\,\hat{k}$। প্রমাণ কর যে, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল।

আমরা জানি, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল হবে, যদি $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ হয়।

এখন,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy + z^3) & (3x^2 - z) & (3xz^2 - y) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - z)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy + z^3)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy + z^3)\right\}$$

$$= \hat{i}\,\{(0-1)-(0-1)\} - \hat{j}\,\{(3z^2-0)-(0+3z^2)\} + \hat{k}\,\{(6x-0)-(6x+0)\}$$
$$= \hat{i}\,(-1+1) - \hat{j}\,(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}\,(6x - 6x)$$
$$= 0$$

$\therefore\ \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

$\therefore\ \vec{A}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। তমাল সাইকেলে করে বাড়ি থেকে স্কুলে যাচ্ছিল। হঠাৎ করে বৃষ্টি নামল। বৃষ্টির ফোঁটা $6\ ms^{-1}$ তার গায়ে পড়া শুরু করল। বায়ুর প্রবাহ খুব বেশি ছিল না। তবুও বৃষ্টির ফোঁটা তার গায়ে $45°$ কোণে পড়ছে।

ক. সাইকেলের বেগ নির্ণয় কর।

খ. স্কুলে তাড়াতাড়ি পৌঁছানোর জন্য তমাল দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?

(ক) আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{Q\,P \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

বা, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$

বা, $\tan 45° = \dfrac{6\sin 90°}{P + 6\cos 90°}$

$\therefore\ P = 6\ ms^{-1}$

$\therefore$ সাইকেলের বেগ $6\ ms^{-1}$

এখানে,
বৃষ্টির বেগ, $Q = 6\ ms^{-1}$
সাইকেলের বেগ $= P$
$\theta = 45°$
$\alpha = 90°$

(খ) দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে পরিবর্তিত বেগ,

$P' = (6 \times 2) = 12\ ms^{-1}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{6\sin 90°}{12 + 6\cos 90°} = \dfrac{6}{12+0} = \dfrac{1}{2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore\ \theta = 26.57°$, অর্থাৎ তাকে $26.57°$ কোণে ছাতা ধরতে হবে।

২। সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য স্বপন ফেরিতে করে $15\ kmh^{-1}$ বেগে নদী পার হওয়ার সময় দেখল, ফেরিটি সোজাসুজি রওনা না দিয়ে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে যাচ্ছে। [স্রোতের বেগ $=10\ kmh^{-1}$]

ক. লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের কতগুণ নির্ণয় কর।

খ. ফেরিটির দিক পরিবর্তনের কারণ বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি,

$R_{max} = v + u$
$= 15 + 10 = 25\ kmh^{-1}$

আবার, $R_{min} = v - u$
$= 15 - 10 = 5\ kmh^{-1}$

এখানে,
ফেরির বেগ, $v = 15\ kmh^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$
$\dfrac{R_{max}}{R_{min}} = ?$

$$\therefore \frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{25}{5} \quad \text{বা, } R_{max} = 5\,R_{min}$$

অর্থাৎ, লব্ধির সর্বোচ্চ মান, লব্ধির সর্বনিম্ন মানের 5 গুণ।

(খ) যেহেতু নদীতে স্রোত আছে সেহেতু সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য ফেরিটিকে তির্যকভাবে রওনা দিতে হবে।

ধরি, ফেরিটিকে স্রোতের প্রতিকূলে α কোণে রওনা দিতে হবে। সেক্ষেত্রে, স্রোতের বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$, ফেরির বেগ, $v = 15\ kmh^{-1}$ এবং স্রোতের দিকের সাথে লব্ধিবেগের দিক, $\theta = 90°$ হবে।

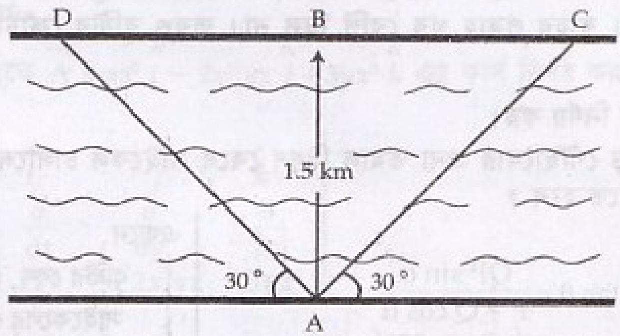
আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ বা, $\tan 90° = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ বা, $u + v\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\frac{u}{v} = -\frac{10}{15}$ $\therefore \alpha = 131^{\cdot}8°$

যেহেতু $\alpha > 90°$ সেহেতু ফেরিটিকে সোজাসুজি রওনা না দিয়ে তির্যকভাবে রওনা দিতে হয়েছে।

৩।



চিত্রে স্রোতযুক্ত একটি নদী যার প্রস্থ $1^{\cdot}5$ km অতিক্রম করার জন্য পিন্টু A বিন্দু হতে সোজা অপর পারে B বিন্দুতে সাঁতার কেটে পৌছানোর সিদ্ধান্ত নিল। ঐ নদীতে স্রোতের বেগ $3\ kmh^{-1}$ এবং সাঁতারুর বেগ ছিল $4\ kmh^{-1}$। স্রোতের কারণে পিন্টু AB বরাবর রওয়ানা হওয়া সত্ত্বেও AC বরাবর ওপারে পৌছাল।

(ক) AC বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) AD বরাবর পিন্টু সাঁতার কেটে কি B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও।

(ক) উদ্দীপকে $AB = 1^{\cdot}5$ km, AB-কে AC বরাবর বিভাজন করে পাই,

$$AC \sin 30° = AB$$

$$\therefore \text{ অতিক্রান্ত দূরত্ব, } AC = \frac{AB}{\sin 30°} = \frac{1^{\cdot}5}{0^{\cdot}5} = 3\ km$$

(খ) ধরি, পিন্টু স্রোতের প্রতিকূলে α কোণে রওনা দিলে B বিন্দুতে পৌছবে। এখানে স্রোতের বেগ $u = 3\ kmh^{-1}$ এবং সাঁতারুর বেগ $v = 4\ kmh^{-1}$ এবং স্রোতের দিকের সাথে লব্ধিবেগের দিক, $\theta = 90°$।

আমরা জানি,

$$\tan 90° = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $u + v\cos\alpha = 0$ বা, $v\cos\alpha = -u$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = 138^{\cdot}59°$

যেহেতু AD বরাবর স্রোতের সাথে উৎপন্ন কোণ 150°। সুতরাং AD বরাবর সাঁতার কেটে পিন্টু B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে না। তাই পিন্টুকে A বিন্দু হতে স্রোতের সাথে 138°59° কোণে সাঁতার কেটে B বিন্দুতে পৌছাতে হবে।

সার-সংক্ষেপ

ভেক্টর রাশি : যে সব ভৌত রাশির দিক ও মান উভয়ই আছে তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলা হয়।

স্কেলার রাশি : যে সব ভৌত রাশির মান আছে কিন্তু দিক নেই তাদেরকে স্কেলার রাশি বলা হয়।

একক ভেক্টর রাশি : যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর রাশি বলে।

লব্ধি ও অংশক বা উপাংশ : দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির যোগফলকে লব্ধি এবং রাশিগুলোকে লব্ধির অংশক বা উপাংশ বলা হয়।

অবস্থান ভেক্টর : কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

নাল বা শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই।

আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর : ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর বলে।

সরণ ভেক্টর : রৈখিক বা সরল পথে বা নির্দিষ্ট দিকে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর : মূল বিন্দু হতে কোনো বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

সদৃশ ভেক্টর : সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে।

বিপ্রতীপ ভেক্টর : দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটি বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

সমরেখ ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে।

সমতলীয় ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।

স্কেলার ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে।

ভেক্টর ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।

ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ ও উপাংশ : একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াকে ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ বলে। এই বিভক্ত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি উপাংশ বা অংশক বলে।

ত্রিভুজ সূত্র : দুটি ভেক্টর কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীত ক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করে।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র : কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপরে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে তা হলে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে। একে ভেক্টর রাশির যোজনের সামান্তরিক সূত্র বলে।

স্কেলার গুণন বা ডট গুণন : দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে যার মান রাশি দুটির মানের গুণফলের সাথে তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান।

ভেক্টর বা ক্রস গুণন : দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয় তবে ঐ গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এ ভেক্টরের গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine)-এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুণফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

অপারেটর : যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

ডাইভারজেন্স : ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় R অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\hat{i} + v_2(x, y, z)\hat{j} + v_3(x, y, z)\hat{k}$, তাহলে ডেল ($\nabla$) অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণফলকে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে।

কার্ল : কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\vec{V}(x, y, z) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$। তাহলে অপারেটর ∇ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। কোন দুটি ভেক্টর রাশি ?
- ক গতিশক্তি, বেগ
- খ তড়িৎ বিভব, ত্বরণ
- গ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, তাপমাত্রা
- ঘ তড়িৎক্ষেত্র, বল

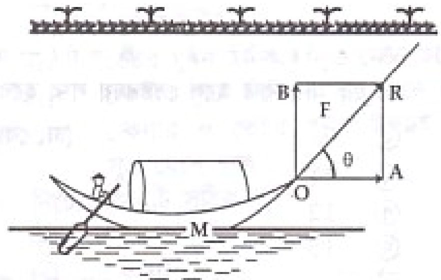
২। দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করছে। ভেক্টরদ্বয় হবে—
(i) সমতলীয় ভেক্টর
(ii) সমরেখ ভেক্টর
(iii) পরস্পর বিপরীত ভেক্টর
নিচের কোনটি সঠিক ?
- ক i
- খ i ও ii
- গ i ও iii
- ঘ i, ii ও iii

৩। কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই হলে ভেক্টরটি হবে—
(i) একক ভেক্টর
(ii) শূন্য ভেক্টর
(iii) অবস্থান ভেক্টর
নিচের কোনটি সঠিক ?
- ক i
- খ ii
- গ iii
- ঘ ii ও iii

৪। আয়ত একক ভেক্টর $\hat{j}$ এর অভিমুখ হচ্ছে—
(i) X-অক্ষের লম্ব বরাবর
(ii) Y-অক্ষের লম্ব বরাবর
(iii) যে-কোনো দিকে
নিচের কোনটি সঠিক ?
- ক i ও ii
- খ ii ও iii
- গ i ও iii
- ঘ iii

৫। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ এবং $\vec{A}$ এর দিকে একটি একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ হলো—
(i) $A\cos\theta$
(ii) $B\cos\theta$
(iii) $\vec{B}\,\hat{a}$
নিচের কোনটি সঠিক ?
- ক i
- খ ii
- গ i ও ii
- ঘ ii ও iii

৬। যদি দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি এদের যে-কোনো একটির সমান হয় তবে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে—
- ক $0°$
- খ $180°$
- গ $90°$
- ঘ $120°$

৭। 

উদ্দীপকের উল্লেখিত F বল অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল

(i) অনুভূমিক উপাংশ F cos θ এর ক্রিয়ায় নৌকা সামনের দিকে গতিশীল হয়

(ii) উল্লম্ব উপাংশের মান F sin θ

(iii) অনুভূমিক উপাংশ নৌকার হাল দ্বারা প্রশমিত হয়

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক i ও ii

খ i ও iii

গ ii ও iii

ঘ i, ii ও iii

৮। দুটি ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগফল একই। এদের মাঝে কোণ হলো—

ক 0°

খ 90°

গ 120°

ঘ 60°

৯। একটি লন রোলার ঠেলা বা টানার সময় যদি এর হাতলে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 19.6N বল প্রয়োগ করলে এর টানা অপেক্ষাকৃত সহজ কারণ এর ওজন তখন কমে—

ক 0.5 kg

খ 1 kg

গ 3 kg

ঘ 9.8 kg

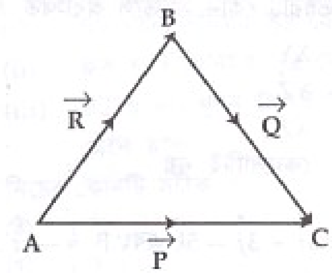
১০। একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় ভেক্টর রাশিকে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি—

ক কম হবে

খ বেশি হবে

গ শূন্য হবে

ঘ কোনো পরিবর্তন হবে না

১১। 

চিত্রানুসারে কোনটি সঠিক ?

ক $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

খ $\vec{P} = \vec{R} + \vec{Q}$

গ $\vec{Q} = \vec{R} + \vec{P}$

ঘ $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

১২। ভেক্টর যোগ—

(i) বিনিময় সূত্র মেনে চলে

(ii) বণ্টন সূত্র মেনে চলে

(iii) সংযোগ সূত্র মেনে চলে

নিচের কোনটি সঠিক ?

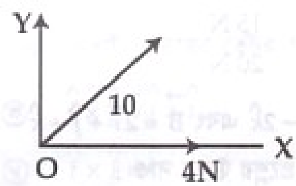
ক i ও ii

খ ii ও iii

গ i ও iii

ঘ i, ii ও iii

১৩। 10N-এর একটি বলকে লম্ব উপাংশে বিভাজিত করলে OY-এর মান কত ?



ক 4N

খ 6N

গ 12N

ঘ 14N

$\vec{P} = 8\hat{i} + 10\hat{k}$, $\vec{Q} = 4\hat{j} + 3\hat{k}$

উপরের ভেক্টর দুটি থেকে নিচের ১৪ ও ১৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৪। $\vec{P}$ ভেক্টরটি কোন সমতলে অবস্থিত ?

ক XY

খ XZ

গ YZ

ঘ কোনোটিই নয়

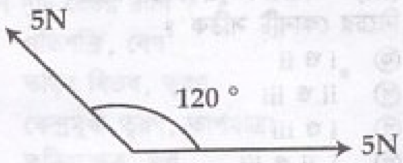
১৫। $\vec{Q}$ ভেক্টরটি কোন সমতলে অবস্থিত ?

ⓚ XY
ⓚ YZ
ⓖ XZ
ⓖ কোনোটিই নয়

১৬। $\vec{A} = 6\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A} - \vec{B} = ?$

ⓚ $10\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$
ⓚ $10\hat{i} + 8\hat{j} - 7\hat{k}$
ⓖ $5\hat{i} - 7\hat{j} - 5\hat{k}$
ⓖ $2\hat{i} - 8\hat{j} + 7\hat{k}$

১৭। চিত্রে A বিন্দুতে 5N এর দুটি সমান বল ক্রিয়া করছে। এদের মধ্যবর্তী কোণ 120°। লব্ধি বলের মান কত ?



ⓚ 5N
ⓚ 10 N
ⓖ 15 N
ⓖ 20 N

$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

১৮ ও ১৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৮। ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান কত ?

ⓚ 9
ⓚ 19
ⓖ $\sqrt{19}$
ⓖ 6

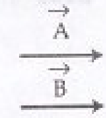
১৯। ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল একক ভেক্টর কী?

ⓚ $\frac{3}{\sqrt{19}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{19}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{19}}\hat{k}$
ⓚ $\frac{3}{9}\hat{i} + \frac{3}{9}\hat{j} - \frac{1}{9}\hat{k}$
ⓖ $\frac{3}{19}\hat{i} + \frac{3}{19}\hat{j} - \frac{1}{19}\hat{k}$
ⓖ $\frac{3}{6}\hat{i} + \frac{3}{6}\hat{j} - \frac{1}{6}\hat{k}$

২০। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = 6\hat{i} - m\hat{j} +$ m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবে ? [ঢা. বো. ২০১

ⓚ 9
ⓚ 11
ⓖ 12
ⓖ 13

২১। $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ হলে নিচের কোন চিত্রটি সঠিক ?

ⓚ 
ⓚ 
ⓖ 
ⓖ 

২২। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হয় তখন

ⓚ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$
ⓚ $\vec{A} \times \vec{B} = 0$
ⓖ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
ⓖ $|\vec{A}| \times |\vec{B}| = 1$

২৩। দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলর গুণফল 18 একক এ ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{3}$ গুণন একক। ভে দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত ?

ⓚ 30°
ⓚ 60°
ⓖ 90°
ⓖ 120°

২৪। দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল—

(i) একটি স্কেলার রাশি হতে পারে
(ii) একটি ভেক্টর রাশি হতে পারে
(iii) শূন্য হলে ভেক্টর দুটি সর্বদা পরস্পর সমান্তরাল হবে

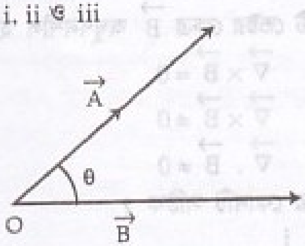
নিচের কোনটি সঠিক ?

ⓚ i ও ii
ⓚ ii ও iii
ⓖ i ও iii
ⓖ i, ii ও iii

২৫। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির—
(i) ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে
(ii) স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে
(iii) স্কেলার ও ভেক্টর গুণন উভয়ই বিনিময় সূত্র মেনে চলে
নিচের কোনটি সঠিক ?
ক ii
খ ii ও iii
গ i ও iii
ঘ i, ii ও iii

২৬। $\hat{i}$ এবং $\hat{j}$ যে তলে অবস্থিত সেই তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর হলো— [ঢা. বো. ২০১৫]
ক $(\hat{j} \times \hat{k})$
খ $(\hat{i} \times \hat{j})$
গ $(\hat{k} \times \hat{i})$
ঘ $(\hat{i} \times \hat{k})$

২৭। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর—
(i) $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A}$
(ii) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
(iii) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
নিচের কোনটি সঠিক ?
ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii



$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে θ কোণে ক্রিয়াশীল। এদের স্কেলার গুণন A . B এবং ভেক্টর গুণন A × B দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুচ্ছেদটি থেকে ২৮ ও ২৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

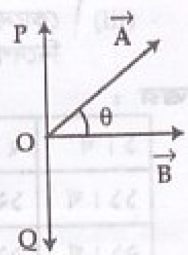
২৮। $\vec{A} = -\vec{B}$ হলে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান 0 (শূন্য) হলে তখন ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ—
ক $\theta = \frac{\pi}{2}$
খ $\theta = \pi$
গ $\theta > \pi$
ঘ $\theta < \frac{\pi}{2}$

২৯। চিত্রের $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি
(i) ডট গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে
(ii) ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে
(iii) ডট ও ক্রস গুণন উভয়ই বিনিময় সূত্র মেনে চলে
নিচের কোনটি সঠিক ?
ক i
খ i ও ii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

৩০। $\vec{P} \times \vec{Q}$ বরাবর একক ভেক্টর $\vec{\eta}$ এর মান কোনটি?
ক $\dfrac{|\vec{P} \times \vec{Q}|}{\vec{P} \times \vec{Q}}$
খ $\dfrac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \cdot \vec{Q}|}$
গ $\dfrac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|}$
ঘ $\dfrac{|\vec{P} \cdot \vec{Q}|}{|\vec{P} \times \vec{Q}|}$

৩১। $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল কোনটি ?
ক $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{j} \times \hat{i}$
খ $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$
গ $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$
ঘ $\hat{i} \times \hat{j} = 0$

৩২। চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যে তলে আছে POQ সেই তলের ওপর লম্ব। $\vec{A} \times \vec{B}$ এর দিক —।



ক $\overrightarrow{OP}$ এর দিকে
খ $\overrightarrow{OQ}$ এর দিকে
গ $\vec{A}$ এর সমান্তরালে
ঘ $\vec{B}$ এর সমান্তরালে

৩৩। একটি সামন্তরিকের সন্নিহিত দুটি বাহু যদি দুটি ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত হয় তবে এর ক্ষেত্রফল—
- ক ভেক্টর দুটির যোগফলের সমান
- খ ভেক্টর দুটির বিয়োগফলের সমান
- গ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফলের সমান
- ঘ ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফলের সমান

উদ্দীপকটি পড়ে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও :
কোনো গতিশীল কণার কোনো মুহূর্তের অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t$.

৩৪। কণার তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v}$ হবে— [ঢা. বো. ২০১৫]
- ক $5(\hat{j}\cos 5t - \hat{i}\sin 5t)$
- খ $(\hat{j}\cos 5t + \hat{i}\sin 5t)$
- গ $5(\hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t)$
- ঘ $(\hat{j}\cos 5t + \hat{i}\sin 5t)$

৩৫। $\vec{r}$ ভেক্টরের ক্ষেত্রটি হলো— [ঢা. বো. ২০১৫]
(i) সলিনয়ডাল
(ii) অঘূর্ণনশীল
(iii) ঘূর্ণনশীল
নিচের কোনটি সঠিক ?
- ক i
- খ i ও ii
- গ i ও iii
- ঘ i, ii ও iii

৩৬। কোনটি অপারেটর নয় ?
- ক $\sin\theta$
- খ $\sqrt{}$
- গ log
- ঘ $\frac{d}{dx}$

৩৭। ভেক্টর অপারেটরগুলোর নিম্নরূপ বৈশিষ্ট্য রয়েছে—
(i) স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর রাশি
(ii) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল
(iii) কোনো ভেক্টরের কার্ল ঐ ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে
নিচের কোনটি সঠিক ?
- ক i ও ii
- খ i ও iii
- গ ii ও iii
- ঘ i, ii ও iii

৩৮। কোনো অন্তরীণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষকের কার্ল হলো—
- ক $\vec{\nabla} \times \vec{V}$
- খ $\vec{\nabla} V$
- গ $\vec{\nabla} . \vec{V}$
- ঘ $\vec{V} . \vec{\nabla}$

৩৯। কোনো অন্তরীণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষকের ডাইভারজেন্স হলো—
- ক $\vec{\nabla} \times \vec{V}$
- খ $\vec{\nabla} . \vec{V}$
- গ $\vec{\nabla} V$
- ঘ $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}$

৪০। কোনো অন্তরীণযোগ্য স্কেলার অপেক্ষকের গ্রেডিয়েন্ট হলো—
- ক $\vec{\nabla} . \vec{V}$
- খ $\vec{\nabla} \varphi$
- গ $\vec{\nabla} \times \vec{V}$
- ঘ $\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}$

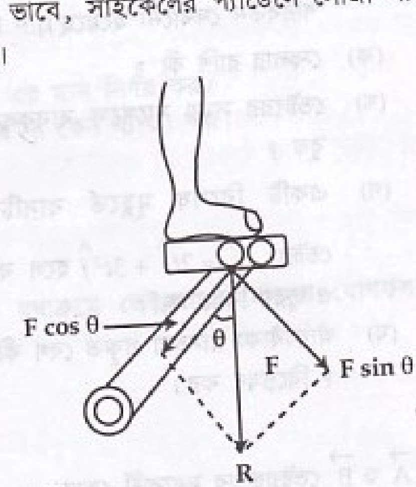
৪১। একটি ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{B}$ অঘূর্ণনশীল হবে যখন—
(i) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$
(ii) $\vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0$
(iii) $\vec{\nabla} . \vec{B} \neq 0$
নিচের কোনটি সঠিক ?
- ক i
- খ i ও ii
- গ ii ও iii
- ঘ i, ii ও iii

উত্তর :

১। ঘ	২। খ	৩। খ	৪। ক	৫। ঘ	৬। ঘ	৭। ক	৮। ক	৯। ঘ	১০। গ
১১। খ	১২। ঘ	১৩। খ	১৪। খ	১৫। খ	১৬। খ	১৭। ক	১৮। গ	১৯। ক	২০। খ
২১। গ	২২। খ	২৩। ক	২৪। ক	২৫। ক	২৬। খ	২৭। গ	২৮। খ	২৯। ক	৩০। গ
৩১। খ	৩২। খ	৩৩। ঘ	৩৪। ক	৩৫। খ	৩৬। ক	৩৭। খ	৩৮। ক	৩৯। খ	৪০। খ
৪১। ক									

(খ) সৃজনশীল প্রশ্ন

১। রাফি রোজ সাইকেলে করে কলেজে যায়। সাইকেল চালায় আর ভাবে, সাইকেলের প্যাডেলে সোজা খাড়া নিচের দিকে বল প্রয়োগ করি অথচ সাইকেল সামনের দিকে এগিয়ে যায়। রাফির বন্ধু আল আমিন বিষয়টা সহজ করে দেয়। সে বলে এটি বলের বিভাজন দ্বারাই সম্ভব। নিচের দিকে এ বল দুইটি উপাংশে বিভক্ত হয়ে ক্রিয়া করে। এদের একটি উপাংশ বল সাইকেলকে সামনের দিকে গতিশীল করে।



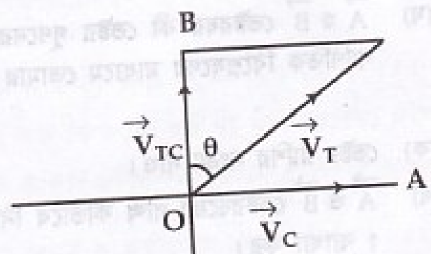
(ক) একক ভেক্টর কী ?

(খ) অবস্থান ভেক্টর হতে কীভাবে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া যায় ?

(গ) F মানের একটি বলকে দুটি অংশে বিশ্লেষণ করলে, একটি অংশ যদি বলটির সম মানের হয় এবং এর সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে তবে অপর অংশটির মান ও দিক নির্ণয় কর।

(ঘ) উদ্দীপকের বল F-কে যে কোনো দুই দিকে বিভাজিত করে বিশ্লিষ্টাংশদ্বয়ের রাশি দুইটি তুলনা কর।

২। চিত্রে পূর্বদিকে ঘণ্টায় 40 km বেগে ধাবমান একজন গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল।



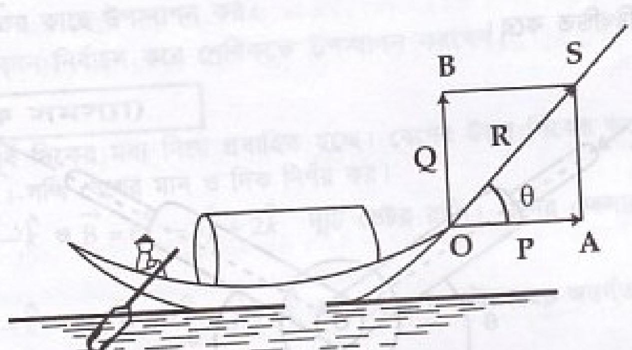
(ক) কার্ল কাকে বলে?

(খ) ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকের ট্রাকটির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর। ট্রাকটি কোনদিকে চলছে?

(ঘ) গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর যে লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ।

৩।



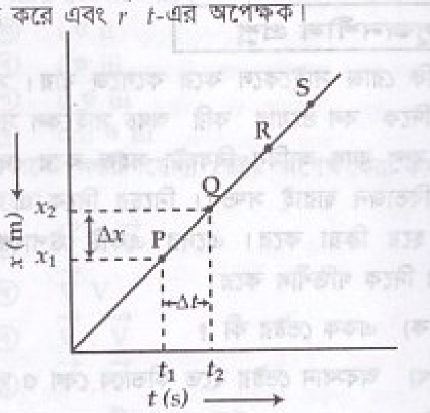
(ক) অবস্থান ভেক্টর কী ?

(খ) ভেক্টর বিভাজন বলতে কী বুঝায় ?

(গ) নৌকাটির গতির বিপরীত দিক থেকে 200 N টানের স্রোত আসায় নৌকাটি নদীতে স্থির হয়ে রইল। গুণের টান নির্ণয় কর।

(ঘ) গুণের টান অপরিবর্তিত থাকলে নৌকাটি নদীর কোন পথ দিয়ে চললে দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে— বিশ্লেষণ কর।

৪। কোনো গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$, সময় t এর ওপর নির্ভর করে এবং $\vec{r}$ t-এর অপেক্ষক।



[চিত্রে একটি বাসের সময়ের সাথে সরণের পরিবর্তন দেখানো হয়েছে।]

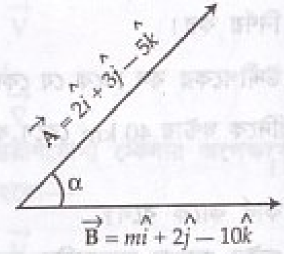
(ক) স্কেলার রাশি কী ?

(খ) ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে ব্যবকলন বলতে কী বুঝ ?

(গ) একটি বিশেষ মুহূর্তে বাসটির অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = 2t\hat{i} + 3t^2\hat{j}$ হলে বাসটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

(ঘ) আঁকাবাঁকা রাস্তায় প্রকৃত বেগ কীভাবে পাবে ? বিশ্লেষণ কর।

৫।



চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α।

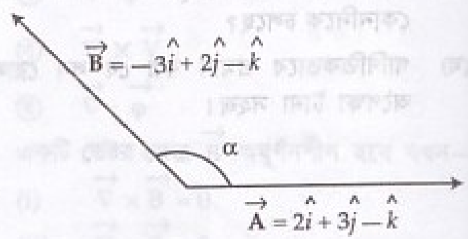
(ক) ভেক্টর গুণন কাকে বলে ?

(খ) ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি কোন সূত্র দ্বারা নির্ণয় করা যাবে ব্যাখ্যা কর।

(গ) m এর মান কত হলে $\alpha = 90°$ হবে ?

(ঘ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় কী ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার উত্তর যাচাই কর।

৬।



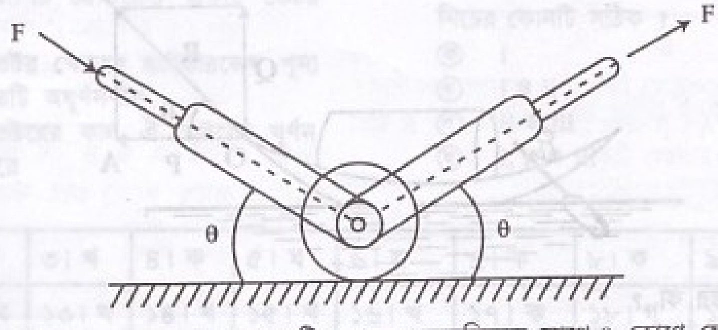
(ক) ভেক্টর রাশির সংজ্ঞা দাও।

(খ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি কীভাবে নির্ণয় করা যাবে ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) $(\vec{A} \times \vec{B})$ নির্ণয় কর।

(ঘ) দেখাও যে, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণ α-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৭।



চিত্রে একটি লনরোলার দেখানো হয়েছে। লনরোলারটির হাতল অনুভূমিকের সাথে θ কোণে হেলানো আছে।

(ক) ভেক্টর বিভাজন কী ?

(খ) ভেক্টর ব্যবকলন ব্যাখ্যা কর।

(গ) লনরোলারকে 20N বল দ্বারা ঠেললে বলটির অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ বের কর।

(ঘ) লনরোলারটি ঠেলা না টানা সহজতর হবে ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) কাঠামোবদ্ধ ও রচনামূলক প্রশ্ন

১। স্কেলার ও ভেক্টর রাশির সংজ্ঞা দাও।
২। একক ভেক্টর, নাল ভেক্টর, অবস্থান ভেক্টর ও সরণ ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।
৩। ঘূর্ণন বল ও কৌণিক বলবেগের ভেক্টর রূপ লিখ।
৪। ত্রিমাত্রিক আয়তাকার ব্যবস্থায় অবস্থান ভেক্টর রাশিমালা থেকে এর মান নির্ণয় কর।
৫। সাধারণ গাণিতিক নিয়মে ভেক্টর রাশির যোগ বা বিয়োগ করা যায় না কেন ব্যাখ্যা কর।
৬। ভেক্টর রাশির যোগের সাধারণ সূত্র ব্যাখ্যা কর।
৭। ভেক্টর রাশির যোগের ত্রিভুজ সূত্র বর্ণনা কর।
৮। ভেক্টর রাশির যোগের সামান্তরিক সূত্র ব্যাখ্যা কর।
৯। ভেক্টর রাশির বিয়োগের নিয়ম ব্যাখ্যা কর।
১০। দেখাও যে, দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান।
১১। লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ব্যাখ্যা কর।
১২। ভেক্টর রাশির বিভাজন বলতে কী বুঝ—ব্যাখ্যা কর।
১৩। লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর কেন ব্যাখ্যা কর।
১৪। দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ব্যাখ্যা কর।
১৫। দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা কর।
১৬। দেখাও যে, দুটি ভেক্টর ডট গুণন বিনিময় সূত্র মানে, কিন্তু ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মানে না।
১৭। ভেক্টর রাশির অন্তরীকরণ ব্যাখ্যা কর।
১৮। ভেক্টর রাশির যোগজীকরণ ব্যাখ্যা কর।
১৯। স্কেলার ক্ষেত্র কাকে বলে ? উদাহরণ দাও।
২০। ভেক্টর ক্ষেত্র বলতে কী বুঝ ? উদাহরণ দাও।
২১। পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা কর।
২২। ভেক্টর অপারেটর কী ? এর গাণিতিক রূপ লিখ।
২৩। গ্রেডিয়ান্ট-এর ভৌতিক তাৎপর্য লিখ।
২৪। ডাইভারজেন্স-এর ভৌতিক তাৎপর্য লিখ।
২৫। কার্ল-এর ভৌতিক তাৎপর্য লিখ।

(ঘ) ক্রিয়াকর্ম

প্রতিবেদন রচনা : ভেক্টর বিভাজনের আলোকে পাখির আকাশে উড়া এবং গুলতি দিয়ে ঢিল ছোড়া বিষয়ের উপর একটি প্রতিবেদন প্রস্তুত করে শিক্ষকের কাছে উপস্থাপন কর।
শিক্ষক সবচেয়ে ভালো প্রতিবেদন নির্বাচন করে শ্রেণিকক্ষে উপস্থাপন করবেন।

(ঙ) কাজ (গাণিতিক সমস্যা)

১। বায়ু উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হচ্ছে। বেগের উত্তর দিকের অংশক ঘণ্টায় 5 km এবং পূর্ব দিকের অংশক ঘণ্টায় 12 km। লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর। [উ. 13 km/h, 67°30′]

২। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এদের স্কেলার গুণফল ও ভেক্টর গুণফলের মান নির্ণয় কর। [উ. 4, $5\sqrt{17}$]

৩। $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ হলে A ও B ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর। [উ. 90°]

৪। $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। দেখাও যে এরা পরস্পর সমান্তরাল।

৫। $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ দুটি দিক রাশি। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণন নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এরা পরস্পর সমান্তরাল। [উ. 0]

৬। $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $(\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{A}) = 0.$

৭। $\vec{P} = 2\hat{i} + m\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 9\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে m-এর মান নির্ণয় কর। [উ. $m = -1$]

৮। একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (2, 3, 1), (1, 1, 3) এবং (2, 2, 5) হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উ. $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ বর্গ একক]

৯। দেখাও যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি, $|\vec{A} - \vec{B}| = |\vec{A} + \vec{B}|$ হয়।

১০। প্রমাণ কর : $|\vec{A} \times \vec{B}|^2 + (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = A^2B^2$

১১। একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় 100 মিটার প্রশস্ত একটি নদী 4 মিনিটে সোজাসুজি সাঁতরিয়ে পাড় হতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করতে পারে। স্রোতের গতিবেগ বের কর। [উ. 15 মিটার/মিনিট]

১২। একটি কণার উপর $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$ N বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ m সরণ হয়। বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ কত ? [উ. 10 Joules]

১৩। এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা XY তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত। (উ. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$)

১৪। a-এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে ? [ঢা. বি. ভর্তি পরীক্ষা, ২০০০, ২০১১] [উ. 2]

১৫। যদি $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = x\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হলে x-এর মান কত? [ঢা. বি. ভর্তি পরীক্ষা, ২০০৮, ২০০৯] [উ. 22]

১৬। যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ কত ? [ঢা. বি. ভর্তি পরীক্ষা, ২০০১, ২০১০]

১৭। $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\sqrt{3}\hat{k}$ ভেক্টর দুটি একটি বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি ভেক্টরের দিক ($\vec{P}$ এর সাপেক্ষে) কত ? [ঢা. বি. ভর্তি পরীক্ষা, ২০০৭, ২০০৮]

১৮। দুটি দিক রাশির প্রত্যেকটির মান 8 একক। তারা একই বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [উ. 8 একক, 60°]

১৯। একটি বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশের মান যথাক্রমে 60 ms^{-1} ও 80 ms^{-1}। বেগটির মান কত ? [উ. 100 ms^{-1}]

২০। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি।

(ক) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর। (খ) $(2\vec{A} + 3\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। [উ. (ক) 3, 7 ; খ) $5\sqrt{21}$]

২১। যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উ. 101.49°]

২২। $\vec{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [উ. $\frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$]

২৩। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$-এর ভেক্টর গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উ. 4 ; 98.69°]

২৪। দেখাও যে, $\vec{A} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

২৫। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণের সাইনের মান নির্ণয় কর। দেখাও যে, এরা পরস্পর লম্ব। [উ. $\alpha = 90°$]

২৬। a-এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর লম্ব হবে ? [উ. 3]

২৭। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{B} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{C} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ হলে (i) $\vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$ নির্ণয় কর। [উ. $\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$]

২৮। a-এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে। [উ. $a = -5$]

২৯। $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$-এর অভিক্ষেপ বা অংশক নির্ণয় কর। [উ. 4]

৩০। একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি যথাক্রমে $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উ. $\sqrt{107}$]

৩১। দেওয়া আছে $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{B} = -2\hat{j} + 5\hat{k}$। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উ. 26.25 একক]

৩২। কোনো কণার অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = 2t\hat{i} + 3t^2\hat{j}$ হলে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

[উ. $\vec{v} = 2\hat{i} + 6t\hat{j}$ এবং $\vec{a} = 6\hat{j}$]

৩৩। কোনো কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = [(3.0\ \text{ms}^{-1})\,t + 4.2\ \text{m}]\,\hat{i} + (5.3\ \text{ms}^{-1})\,\hat{j}$ হলে বেগ $\vec{v}$ নির্ণয় কর।

[য. বো. ২০০৮] [উ. $3.0\ \text{ms}^{-1}\hat{i}$]

৩৪। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করে। সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল কত হবে ? [উ. 8.9]

৩৫। দুটি ভেক্টরের যোগফল $\vec{A} + \vec{B} = 12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$ এবং বিয়োগফল $\vec{A} - \vec{B} = -6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ নির্ণয় কর এবং এদের স্কেলার গুণন নির্ণয় কর।

[উ. $\vec{A} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k})$, এবং $\vec{B} = (9\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k})$, -14]

৩৬। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এদের লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর। [উ. $\frac{1}{20.6}\hat{i} - \frac{10}{20.6}\hat{j} - \frac{18}{20.6}\hat{k}$]

৩৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

[উ. 79.01°]

৩৮। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B})\cdot\vec{C}$

৩৯। যদি $\varphi(x, y, z) = 3xy^2z^3 - 4xy$ হয়, তবে $\vec{\nabla}\varphi$ বের কর। $(2, -1, 1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ নির্ণয় কর।

[উ. $(3y^2z^2 - 4y)\hat{i} + (6xyz^3 - 4x)\hat{j} + (9xy^2z^2)\hat{k}$; $7\hat{i} - 20\hat{j} + 18\hat{k}$]

৪০। যদি $\varphi = 2xy^4 - x^2z$ হয়, তবে $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ নির্ণয় কর। [উ. $-(6\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$]

৪১। যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হয় তবে $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$ বের কর। [উ. 3]

৪২। যদি $\vec{r} = (3x^2z)\hat{i} + (xyz)\hat{j} - (x^3y^2z)\hat{k}$ হয়, তবে $(2, -1, 2)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$ নির্ণয় কর। [উ. 24]

৪৩। যদি $\vec{A} = 4xyz\,\hat{i} + 2x^2y\,\hat{j} - x^2y^2z\,\hat{k}$ হয়, তবে $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে, $\nabla\times\vec{A}$ নির্ণয় কর।

[উ. $-(16\hat{i} + 32\hat{j} + 8\hat{k})$]

৪৪। যদি $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0$