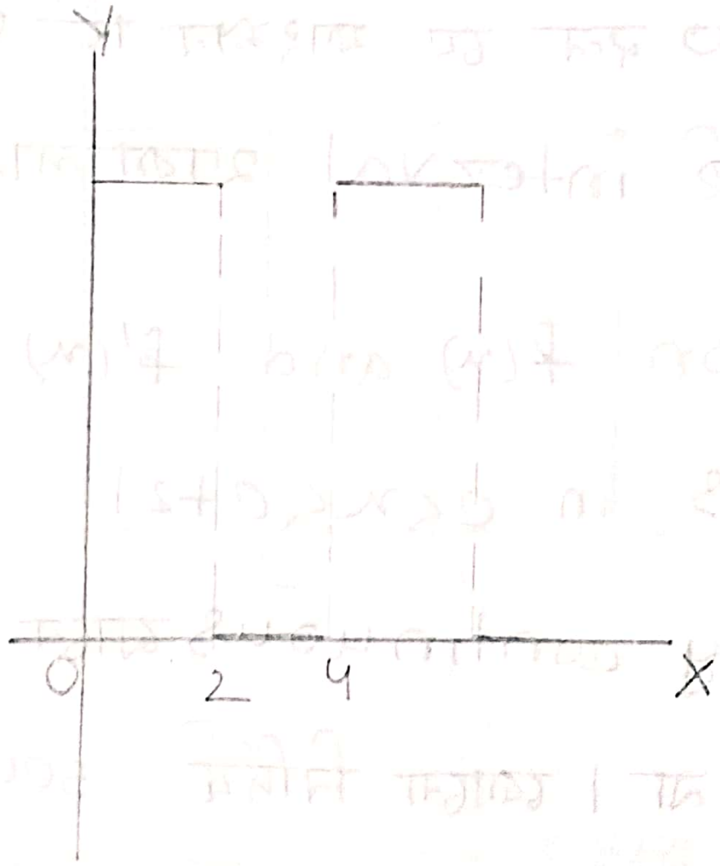
Fourier Series

$$f(x) = \begin{cases} 3 ; & 0<x<2 \\ 0 ; & 2<x<4 \end{cases}$$



যেকোনো function কে fourier series এ দেখানো যাবেনা।

There are some conditions for fourier series:

i) $f(x)$ is defined in the interval $c<x<c+2l$

[c দ্বারা initial value বোঝানো হয়। যা একটি constant value. এবং $2l$ দ্বারা বোঝানো হয় একটি period এর শেষ।

আগের চিত্রে দেখি period একটি শুরু হচ্ছে 0 থেকে ও শেষ হচ্ছে 4 এ. তাহলে initial value হল 0. মানে $c=0$ এবং period এর শেষ 4 এ তাহলে $2l=4$. $\therefore$ interval হল $0<x<4$.

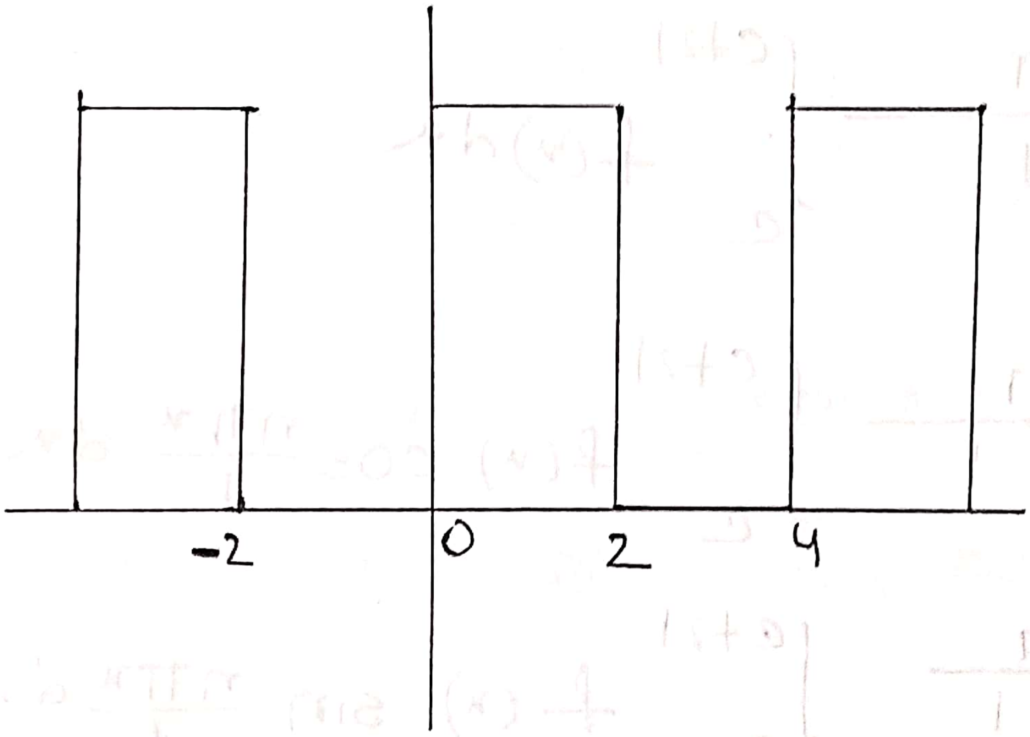
অর্থাৎ ২য় শর্ত হল যে ফাংশন টি উল্লেখ থাকবে তার অবশ্যই interval থাকা লাগবে।]

2nd condition: $f(x)$ and $f'(x)$ are sectionally continuous in $c<x<c+2l$

[sectionally continuous মানে যে পুরো অংশে continuous না। কোনো নির্দিষ্ট section এ continuous. আগের graph এ দেখি। 0 থেকে 2 থেকে function টি continuous. মানে কোনো change নাই। কিন্তু 2 point এ graph টি discontinuous কারণ এক্ষেত্রে graph এ একটি fall লক্ষ্য করা যায়। আবার 2-4 এ function টি continuous.

$\therefore$ function টি sectionally continuous]

3rd Condition: $f(x+2l) = f(x)$ i.e $f(x)$ is periodic in $c < x < c+2l$



এখানে -2 থেকে একটি period এর শুরু ও শেষ হল 2 এ

$\therefore c = -2$ ও $c+2l = 2$

$\therefore$ interval $-2 < x < 2$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

where a_0, a_n and b_n are co-efficient of Fourier series

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Even function:

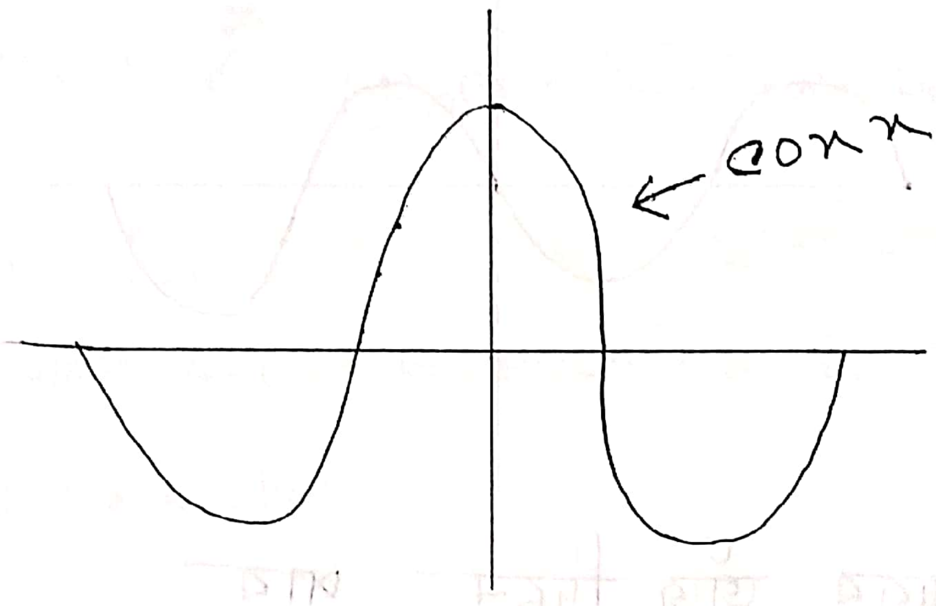
$$f(-x) = f(x)$$

[মানে হল x এর মান $(-)$ বসালেও positive আসবে]

$f(x) = \cos x$

$f(-x) = f(x)$ মানে

কারন $\cos(x) = \cos x$



Even function is symmetric about y-axis.

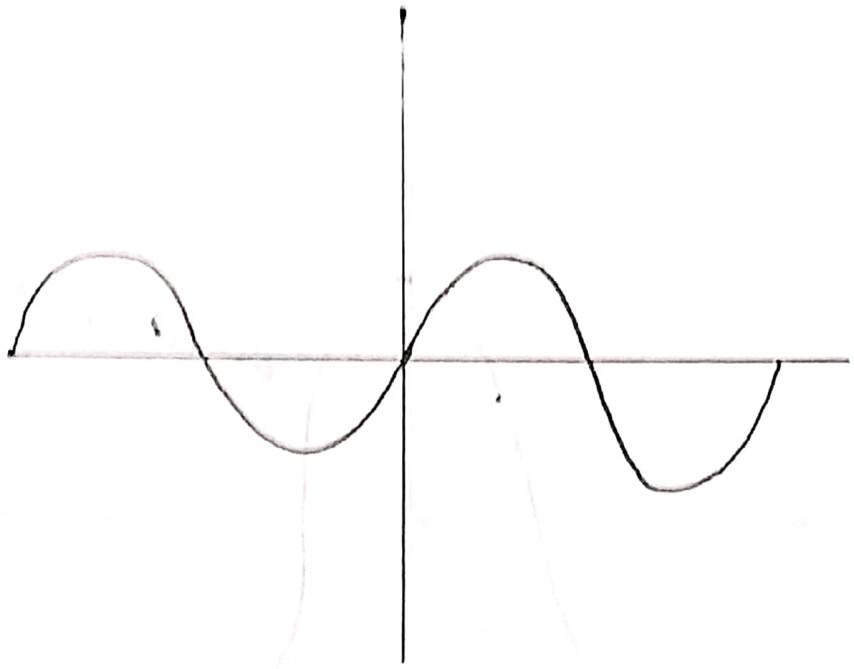
[মানে হল y axis বরাবর ভাঁজ করলে উভয় পাশ মিলে যাবে]

Odd Function:

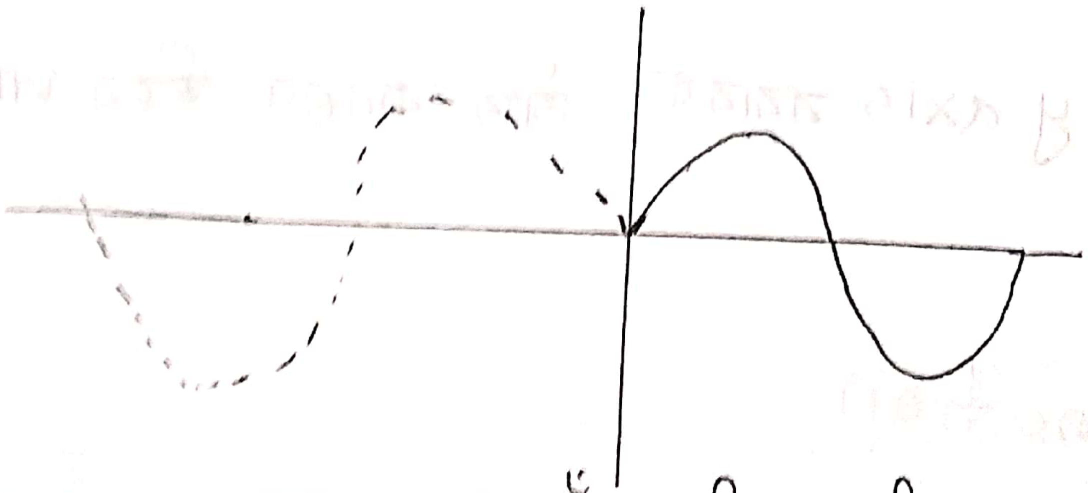
$f(-x) = -f(x)$

$\sin(-x) = -\sin x$

তাহলে $\sin x$ হল odd function



y axis বরাবর ভাঁজ দিলে পাব



তারপর x অক্ষ বরাবর ভাঁজ দিলে মিলে যাবে।

তাই বলা হয়, odd function is symmetric about origin.

Lecture-2

আগের লেকচারে আমরা দেখেছি,

Fourier series:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

আমরা জানি, fourier series এ অবশ্যই একটি interval থাকবে। general series এর equation টির জন্য এই equation (interval) টি হল $c < x < c+2l$.

এখন বলা হল $-\pi < x < \pi$ interval এ series এর equation টি কি হবে।

তাহলে $c < x < c+2l$ ও $-\pi < x < \pi$ এর তুলনা করে দেখি

পাওয়া যায় $c = -\pi$ ও $c+2l = \pi$

$$\text{বা, } -\pi + 2l = \pi$$

$$\therefore 2l = 2\pi$$

$$\therefore l = \pi$$

তাহলে $-\pi < x < \pi$ এর জন্য fourier series equation টা হবে just l এর জায়গায় π বসিয়ে যা পাওয়া যায় তা

$$\therefore f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\pi}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \ldots\ldots (i)$$

আমরা জানি,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\,dx$$

তাহলে $-\pi < x < \pi$ interval এ equation টি হবে,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx$$

Now,

integrating equation (i) w.r.to x from $-\pi$ to π

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx\right] \text{.........} \text{(ii)}$$

আলাদা আলাদা ভেঙে বের করি,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\right]$$

$$= 0 \quad [n = 1, 2, 3 \ldots\ldots]$$

Now,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = -\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\left[\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\cdot 0 = 0.$$

[এখন, value গুলো বসিয়ে দিই equation (ii) তে]

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + 0 + 0$$

$$= a_0 \cdot \pi$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx.$$

[তাহলে, a_0 coefficient টির value পেলাম আমরা]

এখন, a_n এর value বের করব।

Multiplying (i) by $\cos(nx)$ and integrating w.r.to x from $-\pi$ to π

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx)^2\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)\,dx\right]$$

.... equation (iii)

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 nx)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2(\cos^2 nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}[x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4n}[\sin 2nx]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}[\pi+\pi] + 0$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi$$

$$= \pi$$

again,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(nx)\cdot\cos(nx)\, dx$$

$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2nx)\, dx$

$= -\frac{1}{4n} \left[\cos(2nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= -\frac{1}{4n} \left[\cos(2n\pi) - \cos(-2n\pi)\right]$

$= -\frac{1}{4n} \cdot 0$

$= 0$

Now, equation (iii) হতে মান বসিয়ে

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\, dx = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \pi + 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\, dx$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\, dx$$

where, $n = 1, 2, 3 \ldots \ldots \ldots$

Multiplying (i) by $\sin(nx)$ we get,

$$F(x) \cdot \sin(nx) = \frac{a_0}{2} \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx)\sin(nx) + b_n(\sin(nx))^2\right]$$

Integrating w.r.t. to x

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cdot \sin(nx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)\sin(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin^2(nx)\,dx\right]$$

Now,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin^2(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\cdot\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}[x]_{-\pi}^{\pi} - 0$$

$$= \frac{1}{2}[\pi+\pi] = \pi$$

∴ মান বসিয়ে,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \pi$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx$$

[তাহলে আমরা একটি general statement এ আসি, অর্থাৎ যে interval ই থাকবে তা পরে চিন্তা করব। প্রথমে আমরা main সূত্রগুলো মাথায় রাখব $(c<x<c+2l)$ এর জন্য

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

এরপর just interval যা দেওয়া থাকবে তাকে $c<x<c+2l$ এর সাথে compare করে l এর value পাব। এবং উপরের সূত্রগুলোতে l এর value বসাব]

Expand $F(x)=x$, $-2<x<2$ in a fourier series

P⇒ we know,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

[এখানে interval $-2<x<2$, তাহলে $c<x<c+2l$ এর

সাথে compare করে পাই, $c=-2$ ও $c+2l=2$]

বা, $-2+2l=2$

$\therefore 2l=4$

$\therefore l=2$

তাহলে,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\,dx$ [আমরা জানি, $a_0 = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} F(x)\,dx$

এখানে খালি value গুলো change করে দিলেই হবে]

$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2}$

$= \frac{1}{4}[4-4] = 0$

Now, a_n [a_n এর simple form এর সূত্রে 1 এর জায়গায় 2 বসিয়ে integrate করলেই পাব]

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx - \int_{-2}^{2}\left\{\frac{dx}{dx}\int\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\frac{x\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_{-2}^{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2}\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2} + \frac{2}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2}$$

$$= 0 + \frac{2}{(n\pi)^2}\left[\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right]$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}\cdot 0 = 0.$$

একইভাবে b_n বের করি,

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\int_{-2}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] - \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2}\left(\frac{dx}{dx}\int_{-2}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2} + \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2}\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}dx}{\frac{n\pi}{2}}\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2} + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2} + \frac{2}{(n\pi)^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[2\cos n\pi - (-2)\cos(-n\pi)\right] + \frac{2}{(n\pi)^2}\cdot 0$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[2\cos n\pi + 2\cos n\pi\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cdot 4\cos n\pi$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi)$$

Lecture-3

Fourier series for odd function

আগের lecture এ দেখেছি, $-\pi < x < \pi$ interval এর জন্য

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, dx$$

~~এই লিমিটটিকে~~ $-\pi$ থেকে π কে দুইভাগ করলে পায় $-\pi$ থেকে 0 ও 0 থেকে π

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} F(x)dx + \int_{0}^{\pi} F(x)dx \right] \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{0} F(x)\, dx = \int_{\pi}^{0} F(-z)\, (-dz)$$

Let, $x = -z$

$dx = -dz$

when,

$x = 0$ $\quad x = -\pi$

$z = 0$ $\quad z = \pi$

$$= -\int_{\pi}^{0} F(-z)\, dz$$

$$= \int_{\pi}^{0} F(z)\, dz$$

[কারন আমরা জানি, $F(-x) = -F(x)$; for odd function]

$$= -\int_{0}^{\pi} F(z)\, dz$$

$$= -\int_{0}^{\pi} F(x)\, dx$$

From equation (i).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} F(x)\,dx + \int_0^{\pi} F(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0$$

তাহলে, বলাযায়, for odd function, $a_0 = 0$.

এবার, a_n দেখি,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} F(x)\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx\right] \ldots\ldots (ii)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} F(x)\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx\right]$$

Now, $\int_{-\pi}^{0} F(x)\cos(nx)\,dx$

Let, $x = -z$ when, $x = 0$, $z = 0$

$dx = -dz$ $x = -\pi$, $z = \pi$

$$\therefore \int_{\pi}^{0} F(-z) \cos(-nz) (-dz)$$

$$= -\int_{\pi}^{0} F(-z) \cos(nz)\, dz$$

$$= \int_{\pi}^{0} F(z) \cos(nz)\, dz \quad [\because F(-z) = -F(z) \text{ for odd function}]$$

$$= -\int_{0}^{\pi} F(z) \cos(nz) dz = -\int_{0}^{\pi} F(x) \cos(nx)\, dx$$

$\therefore$ from equation (ii)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} F(z) \cos(nz) dz + \int_{0}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx\right]$$

$$= 0$$

$\therefore$ For odd function, $a_n = 0$.

Now,

we know,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} F(x)\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx\right] \quad \ldots\ldots\ldots (iii)$$

Now,

$$\int_{-\pi}^{0} F(x)\sin(nx)\,dx$$

Let, $x = -z$ when, $x = 0$ $x = -\pi$

$dx = -dz$. $z = 0$ $z = \pi$

$$\therefore \int_{\pi}^{0} F(-z)\sin(-nz)(-dz)$$

$$= -\int_{\pi}^{0} F(z)\sin(nz)\,dz$$

[$F(-z) = -F(z)$ ও $-dz$ এর (−),(−) (+) হয়ে যায়, কিন্তু $\sin(-nz) = -\sin(nz)$ তাই সামনে (−)]

$$= -\int_{\pi}^{0} F(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx$$

Now,

from equation (iii)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx + \int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx\right]$$

Now,

fourier series:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$$

$$= 0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[0 + b_n\sin(nx)\right]$$

$$\therefore F(x) = b_n\sin(nx)$$

$\therefore$ Fourier series for odd function is half range fourier sine series.

Fourier series for even function:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} F(x)\,dx\right] \quad \text{---- (i)}$$

Now,

$$\int_{-\pi}^{0} F(x)\,dx$$

Let
$x = -z$
$dx = -dz$

when,
$x = 0$
$z = 0;$

$x = -\pi$
$z = \pi$

$$= \int_{\pi}^{0} F(-z)\,(-dz)$$

$$= -\int_{\pi}^{0} F(-z)\,dz$$

$$= -\int_{\pi}^{0} F(z)\,dz$$

[For even function $f(-x) = f(x)$]

$$= \int_{0}^{\pi} F(z)\,dz$$

$$= \int_{0}^{\pi} F(x)\,dx$$

From equation (i)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} F(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} F(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x)\,dx$$

For a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} F(x)\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx\right] \quad \text{.......(ii)}$$

Now,

$$\int_{-\pi}^{0} F(x)\cos(nx)\,dx$$

Let,
$x = -z$
$dx = -dz$
when, $x = 0, z = 0$
$x = -\pi, z = \pi$

$$= \int_{\pi}^{0} F(-z)\cos(-nz)(-dz)$$

$$= -\int_{\pi}^{0} F(z)\cos(nz)\,dz$$

$$= \int_{0}^{\pi} F(z)\cos(nz)\,dz$$

$$= \int_{0}^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx$$

From equation (ii)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos(nx)\,dx$$

For b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} F(x)\sin(nx)\,dx + \int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx\right]$$

Now,

$$\int_{-\pi}^{0} F(x)\sin(nx)\,dx$$

Let

$x = -z$

$dx = -dz$

when $x = 0,\ z = 0$

$x = -\pi;\ z = \pi$

$$= \int_{\pi}^{0} F(-z)\sin(-nz)\,(-dz)$$

$$= -\int_{\pi}^{0} F(z)\sin(-nz)\,dz$$

$$= \int_{\pi}^{0} F(z)\sin(nz)\,dz \quad [\because \sin(-nz) = -\sin(nz)]$$

$$= -\int_0^{\pi} F(z)\sin(nz)\,dz = -\int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx$$

From equation (iii);

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx + \int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= 0$$

SOLVE এর দুনিয়া

" Engineering is an art
But no one is the artist "

কিছু আলোচনা: solve করার আগে আমাদের জানতে হবে আমাদের কি দেওয়া থাকে বা কি করতে হবে। এই আলোচনায় বলব কি কি type এর question হতে পারে বা কিভাবে তা deal করব। প্রথমে আমরা যে type টি নিয়ে আলোচনা করব তা হল graph plot করা। সাধারণত function দিয়ে দেয়। দিয়ে বলে "graph this function". মানে ঐ function টির উপর graph plot করা লাগে।

Graph Shown:

আমরা step by step শিখি:

সাধারণত আমরা জানি fourier series যে function গুলোর করা হয়ে থাকে তারা হল periodical function. Periodical function মানে আগেই আলোচনা করেছি (1st lecture এ)

তাও বলা হল:

"একটি period পর পর যখন কোনো function repeat হয় তখন তাকে বলা হয় periodical function:

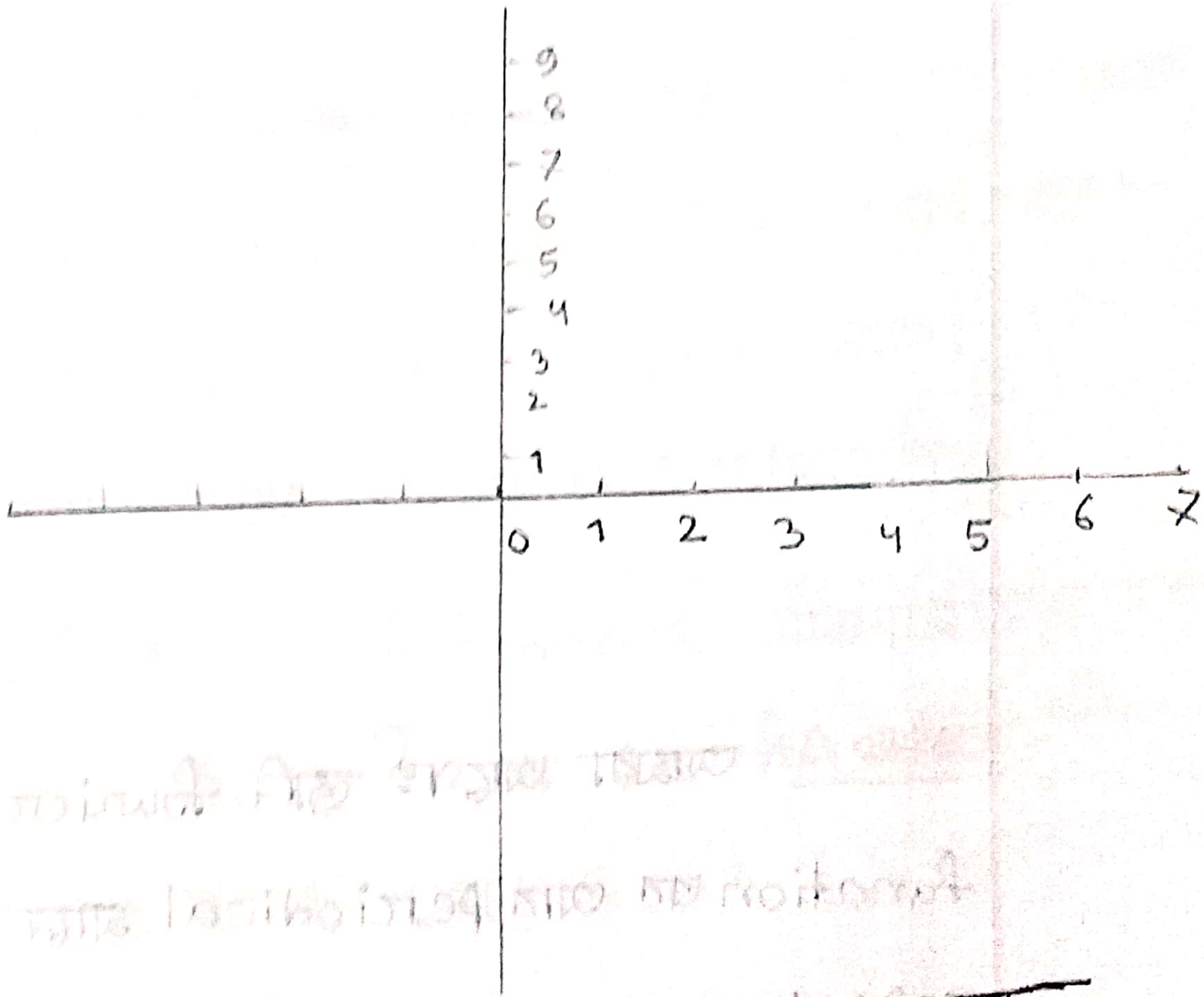
ব্যাপারটি উদাহরণ দিয়ে বুঝি:

মনে করি একটি function হল $f(x)$. এই ফাংশনটির value হল 0-3 থেকে 3 তে 5 তাহলে লেখা যায়, $f(x)=5$; when $0<x<3$. আবার 3 থেকে 6 এ functionটির value হল 0. এটিকে লেখা যায়, $f(x)=0$; when $3<x<6$. আমাদেরকে বলা হল period হল 6. তাহলে quesটি কি হল finally দেখি:

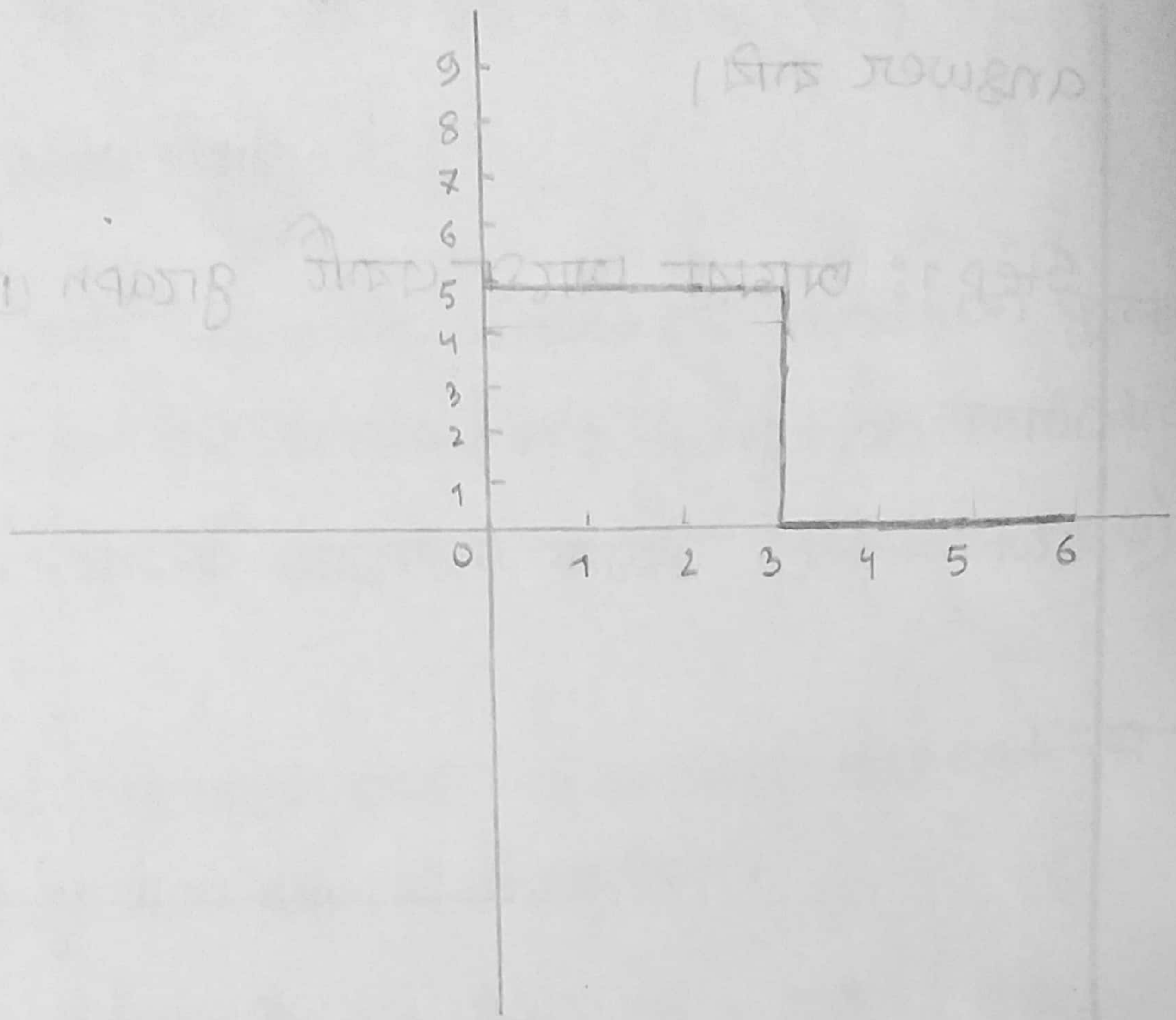
$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0<x<3 \\ 0 & 3<x<6 \end{cases} \qquad \text{Period} = 6$$

বলা হল: এই function টি graph এ দেখাতে। এবার step by step answer করি।

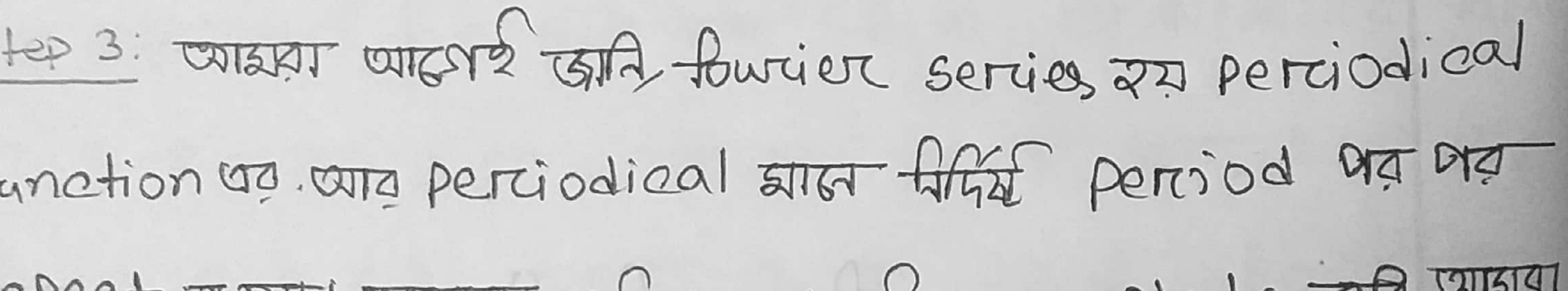
Step 1: আমরা আগে একটি graph এঁকে নিই x ও y axis দিয়ে



Step 2: Ques এর দিকে দেখি। কি বলছে? বলা হয়েছে 0 থেকে 3 তে function এর value 5 ও 3 থেকে 6 এ value 0. তাহলে এবার এই value গুলো graph এ এঁকে নিই।



<u>Step 3:</u> আমরা আগেই জানি fourier series হয় periodical function এর. আর periodical মানে নির্দিষ্ট period পর পর repeat হওয়া। তাহলে এই graph টি complete করি আমরা।



কিভাবে আঁকা হল বুঝিঃ 0 থেকে 3 ও 3 থেকে 6 এর portion টুকু তো আমরা question দেখেই আঁকলাম। এবার বাকিটুকু কিভাবে?

আমরা period টা খেয়াল করি। Period হল 6. তাহলে 6 ঘর পর পর function টা repeat হবে (কারণ Periodical function) তাহলে 0 থেকে function টা যেমন 6 এও তেমন ই হবে। মানে 0 থেকে 3 তে function এর যে condition এর 6 ঘর পরে 6 থেকে 9 এও function এর condition same হবে।

function টা আঁকার একটি সহজ technique শিখে নিই:

যখন ডান দিকে যাবঃ 0 থেকে 3 তে function টি আঁকলাম। তার পর ডানদিকে যদি যায় তাহলে আবার 6 থেকে 9 এ function টি repeat হল। মনে রাখব, ডানদিকে গেলে

"যে interval এ function টা যেমন সেই (interval + period) করে যে নতুন interval পাওয়া যাবে সেই interval এও function টি একই রকম।"

মানে হল: 0 থেকে 3 তে function টি যেমন $(0+6)-(3+6)$ Period

$\Rightarrow$ (6-9) interval এও function টি একই রকম Period

যখন বাম দিকে যাব: বাম দিকে যখন যাব তখন:

"যে interval এ function টি যেমন সেই (interval-period) করে নতুন যে interval পাওয়া যাবে সেই interval এও function টি একই রকম।"

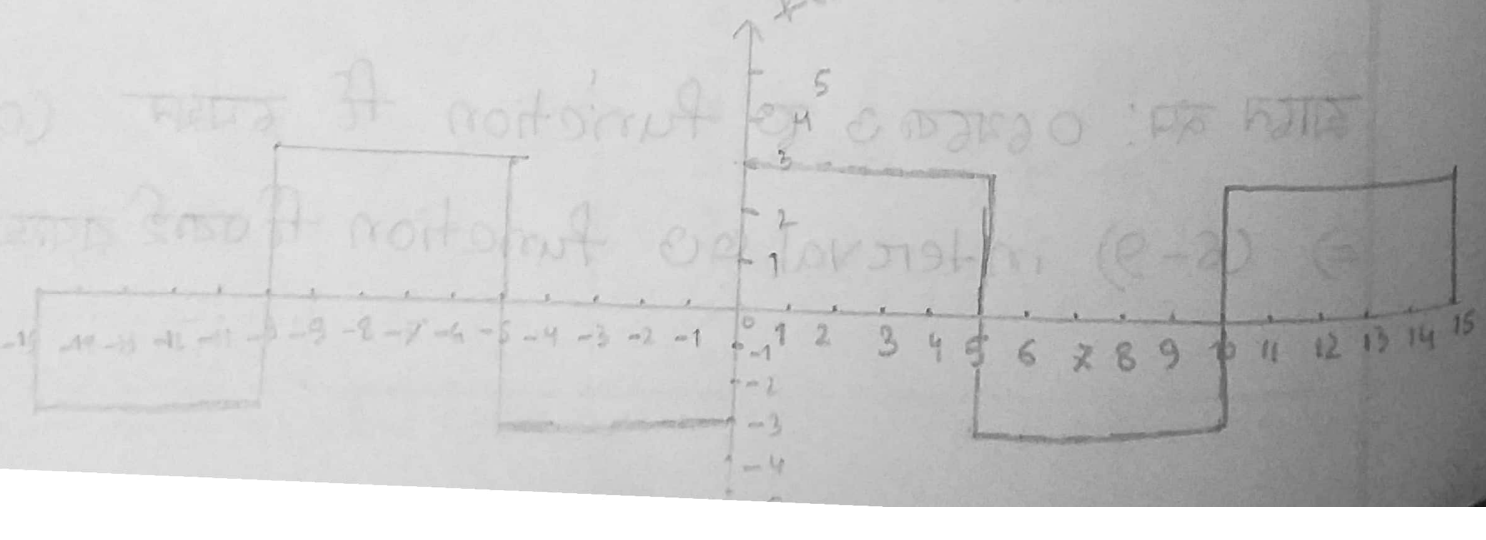
যেমন হল: 0 থেকে 3 তে function টি যেমন (0-6) থেকে (3-6) বা -6 থেকে -3 তেও function টি একই

এভাবে আমরা Question দেখে function এর graph আঁকতে পারব। এবার আরও কয়েকটা উদাহরন দেখে বুঝি:

বই এর Problem:

2.1 (a) (25 page)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0<x<5 \\ -3 & -5<x<0 \end{cases} \quad \text{Period} = 10$$

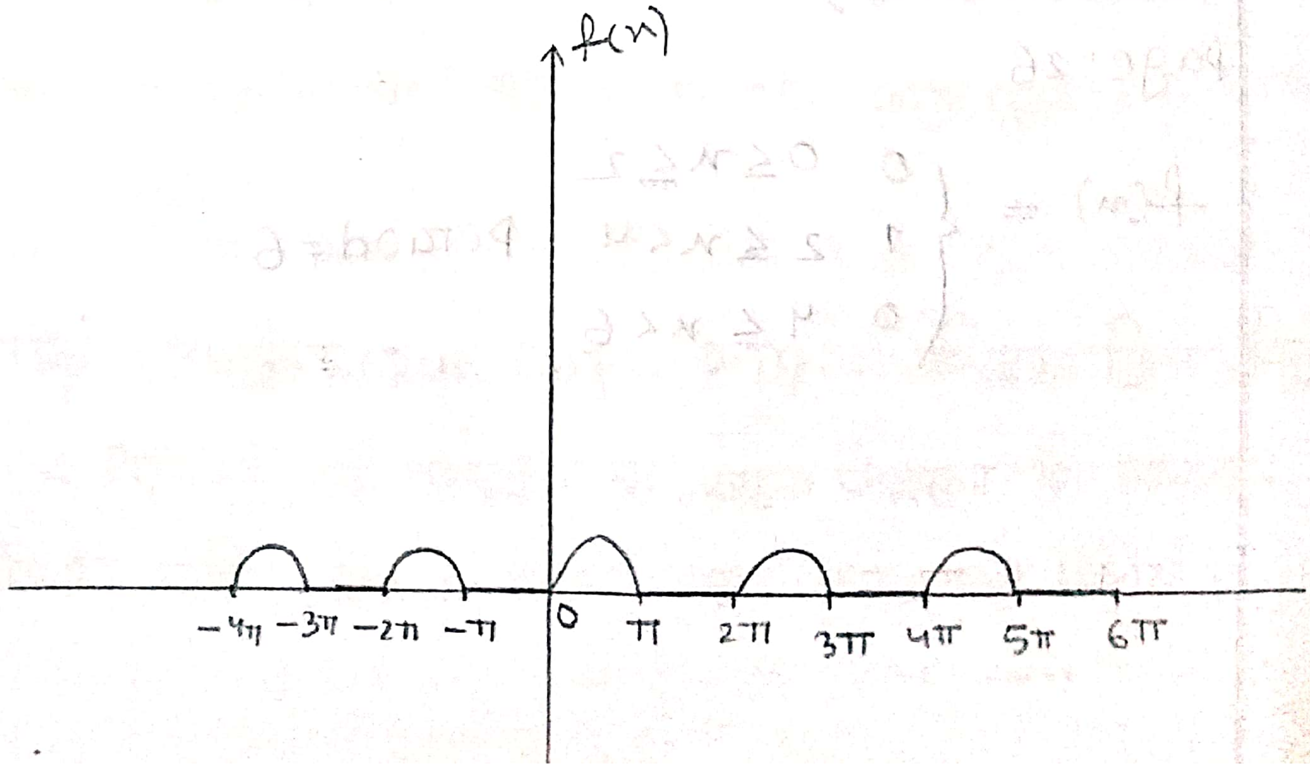


ব্যাখ্যাঃ Ques এ দেওয়া অনুযায়ী আমরা $-5<x<0$ ও $0<x<5$ এ function টি এঁকে নিলাম। এর পর দেওয়া আছে Period হল 10. তাহলে 0 থেকে 5 এ ~~ক~~ function টি যেমন, ডানদিকে গেলে $(0+10)$ বা, 10 থেকে $(5+10)$ বা 15 এ অর্থাৎ 10 থেকে 15 এ আবার function টি একই রকম। আবার ~~5~~ $<0<x<5$ interval থেকে যখন বামদিকে যাব তখন $(0-10)$ বা, -10 থেকে $(5-10)$ বা -5 অর্থাৎ -10 থেকে -5 interval এও function এর অবস্থা একই রকম।

Problem 2.1(b)

Page : (25)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{Period} = 2\pi$$

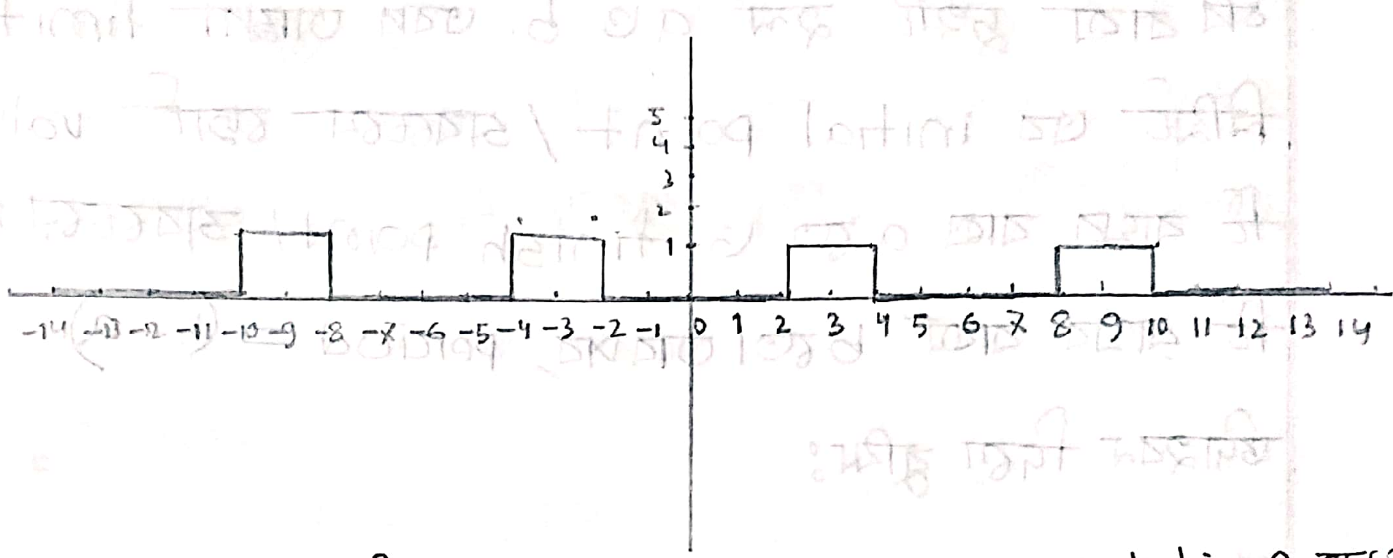


ব্যাখ্যা: Period হল 2π. 0 থেকে π interval function টি sine function. তাই ডানে যখন যাব $(0+2\pi)$ বা 2π থেকে $(\pi+2\pi)$ বা 3π অর্থাৎ 2π থেকে 3π তে function টি আবার একই। আবার বামদিকে গেলে $(0-2\pi)$ বা -2π থেকে $(\pi-2\pi)$ বা $-\pi$ অর্থাৎ -2π থেকে $-\pi$ এ function টি আবার same.

অর্থাৎ Question এ দেওয়া interval এ graph টি আগে এঁকে নিব, এরপর period দেখে ডানদিকে গেলে (interval+period) করে new interval এ function টি একই ভাবে আঁকব আর বামে গেলে (interval − period) করে new interval এ ব্যাংকান টি একই হবে।

Problem 2.1. (c)
Page: 26

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x < 4 \\ 0 & 4 \le x < 6 \end{cases} \quad \text{Period} = 6$$



ব্যাখ্যাঃ Ques এ ৩ টি interval এ $f(x)$ এর condition দেওয়া। সেই ৩ টি condition graph এ আগে show করলাম। এর পর Period দেখে ডানে গেলে যোগ ও বামে গেলে বিয়োগ করে দিলাম (আগের মতই) 0 থেকে 2 interval এ যেমন $f(x)=0$. তাহলে ডানদিকে গেলে $(0+6)$ থেকে $(2+6)$ বা 6 থেকে 8 interval এও $f(x)=0$. আবার বামে গেলে $(0-6)$ থেকে $(2-6)$ বা -6 থেকে -4 interval এও $f(x)=0$. অন্যগুলোও same.

* যদি Ques এ ~~limit~~ Period উল্লেখ না থাকে

এতক্ষণ আমরা দেখছিলাম Question এ period উল্লেখ ছিল। কিন্তু যদি Question এ Period যদি উল্লেখ না থাকে তাহলে কি করব?

এখন, আমরা দেখি limit দেখে period বুঝার উপায়।

প্রথমে আমাদের কাজ হল দুইটি ফাঁকা বাক্স চিন্তা করে নেওয়া। ঐ বাক্স দুইটি হল a ও b. এবার আমরা limit দেখায় পর লিমিট এর initial point / সবচেয়ে ছোট value এর point টি রাখব বাক্স a তে ও finish point / সবচেয়ে বড় point টি রাখব বাক্স b তে। তারপর, period $= (b-a)$

উদাহরন দিয়ে বুঝি:

Example 1:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases}$$

এখন, limit এর দিকে দেখি:

$0 < x < 5$

$-5 < x < 0$

দুই limit এর মধ্যে initial value টি কত বা সবচেয়ে ছোট value.

- অবশ্যই তা -5

তাহলে বাক্স a তে রাখলাম -5 $\therefore a = -5$

এবার দেওয়া লিমিটগুলোর মধ্যে end point / সবচেয়ে বড় value টি কি বের করি -

= অবশ্যই তা হল 5

তাহলে বাক্স b তে রাখব 5 . $\therefore b = 5$

Now,

Period $= b-a$

$= 5-(-5)$

$= 10$

এভাবে Period বের করে graph complete করব।

Example 2:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

limit গুলোর মধ্যে initial point হল 0

$\therefore a = 0$

এবং end point হল 2π

$\therefore b = 2\pi$

Now, limit $= 2\pi - 0$

$= 2\pi$

Example 3:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x < 4 \\ 0 & 4 \le x < 6 \end{cases}$$

limit তিনটি দেখি: limit গুলোর মধ্যে initial point হল 0

$\therefore a = 0$.

এবং end point হল 6 $\therefore b = 6$

$\therefore$ Period $= 6 - 0 = 6$

How to expand fourier series and solve it

⇒ fourier series expand করা মানে হল fourier series solve করা। এখন দেখব sei solve:

তার আগে মনে করে নিই আরেকবার:

Fourier series,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$$

~~$a_0 =$~~ মূলত fourier series এর solve মানে হল a_0, a_n, b_n coefficient গুলোর value বের করে series এ বসানো

Now,

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

এখন আমরা কিছু continuous limit এর math আগে solve করব। এরপর করব discontinuous part. এবং এর topic বুঝানো শেষে আমরা Book ও class এ করানো math solve করব

Example 1: $f(x) = x^2 ; [-\pi, \pi]$

তাহলে, $c < x < c+2l$ এর সাথে compare করলে পাই

$c = -\pi$

$c + 2l = \pi$

$\Rightarrow -\pi + 2l = \pi$

$\Rightarrow 2l = 2\pi$

$\therefore l = \pi$

Now,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad \left[a_0 = \frac{1}{l} \int_{c}^{c+2l} f(x)\,dx \text{ থেকে} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\pi^3}{3} \right]$$

$$= \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\left[\therefore a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \right]$$

Now,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{dx^2}{dx}\int\cos nx\,dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[x^2\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}2x\,\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\left[x\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{dx}{dx}\int\sin nx\,dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\left[-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\left[-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{\cancel{\pi}\,1}{\pi}\left[\pi^2 \cdot \frac{\sin n\pi}{n} - \pi^2\left(\frac{\sin(n\pi)}{n}\right)\right] + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{(-\pi)\cos n\pi}{n}\right] - \frac{\cancel{4}\,2}{n\pi}\left[\frac{\sin n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi^2\frac{\sin n\pi}{n} + \pi^2\frac{\sin n\pi}{n}\right] \cancel{+ \frac{2}{n\pi}[0]} \cancel{+} - \frac{4}{n^2\pi}\sin n\pi$$

$$= \frac{2\pi}{n}\sin n\pi - \frac{4}{n^2\pi}\sin n\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi^2\frac{\sin n\pi}{n} + \pi^2\frac{\sin n\pi}{n}\right] + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{2\pi}{n}\cos n\pi\right] - \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n}\right]$$

$$= 0 + \frac{4}{n^2}\cos n\pi - 0 \quad [\because \sin n\pi = 0]$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

$$\left[\therefore a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}\right]$$

Now b_n

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

Here

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{dx^2}{dx}\int \sin nx\,dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left[\frac{x^2\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left[\frac{x^2\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\cos nx}{n}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[x^2\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\cos n\pi - \pi^2\cos(n\pi)\right] + \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cdot 0 + \frac{2}{n\pi}\left[x\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{dx}{dx}\int\cos nx\,dx\right\}dx\right]$$

$$= 0 + \frac{2}{n\pi}\left[\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\pi \sin n\pi - (-\pi)\sin(-n\pi)\right] - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\pi \sin n\pi - \pi \sin n\pi\right] - \frac{2}{n^2\pi}\cdot\frac{1}{n}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{2}{n^3\pi}\left[\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right]$$

$$= 0 + \frac{2}{n^3\pi}\left[\cos n\pi - \cos n\pi\right]$$

$$= 0$$

$[\therefore b_n = 0]$

a_0, a_n, b_n এর value বের করা শেষ।

$\therefore$ fourier series, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$= \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx + 0\right)$$

$$= \frac{2\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx\right)$$

(Ans)

[এভাবে, a_0, a_n, b_n এর value বের করে solve করলেই শেষ]

Problem 2: $f(x) = e^{-x}$, $[0, 2\pi)$

$c < x < c+2l$ এর সাথে compare করি,

$\therefore c = 0,$

$c + 2l = 2\pi$

$0 + 2l = 2\pi$

$\therefore l = \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-e^{-x}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-e^{-2\pi}+1\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[1 - e^{-2\pi}\right]$$

$$\boxed{\therefore a_0 = \frac{1}{\pi}\left[1 - e^{-2\pi}\right]}$$

Now,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Here,

$$a_n = \frac{1}{1}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos nx\,dx$$

[Formula, $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$]

Here, $a=-1$, $b=n$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}}{1+n^2}(-\cos nx + n\sin nx)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-2\pi}}{1+n^2}(-\cos n2\pi + n\sin n\cdot 2\pi) - \frac{1}{1+n^2}(-1+0)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[e^{-2\pi}(-\cos n\cdot 2\pi + n\sin n\cdot 2\pi) + 1\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[e^{-2\pi}(-1) + 1\right] \quad [\because \cos 2\pi = 1, \sin 2\pi = 0]$$

$$= \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi(1+n^2)}$$

$$\therefore a_n = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi(1+n^2)}$$

Now, bn.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Here,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{-x}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-x}}{1+n^2}(-\sin nx - n\cos nx)\right]_0^{2\pi}$$

[Formula: $\int e^{ax}.\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-2\pi}}{1+n^2}(-\sin n.2\pi - n.\cos n.2\pi) - \frac{1}{1+n^2}(0-n)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[e^{-2\pi}(-0-n) + n\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1+n^2)}\left[-ne^{-2\pi} + n\right]$$

$$= \frac{n(1-e^{-2\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

$$b_n = \frac{n(1-e^{-2\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

$\therefore$ fourier series.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{\frac{1}{\pi}[1-e^{-2\pi}]}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-e^{-2\pi})}{\pi(1+n^2)} \cos nx + \frac{n(1-e^{-2\pi})}{\pi(1+n^2)} \sin nx \right)$$

Practice এর জন্য কিছু Problem:

1) $f(x) = x - x^2 \; [-\pi, \pi]$

2) $f(x) = \sqrt{1-\cos x} \; [0, 2\pi]$

3) $f(x) = x \sin x \; [0, 2\pi]$

বই এর বাইরের
Just for clear concept

Problems with discontinuous limit:

এতক্ষন আমরা যে Problem গুলো দেখলাম সেগুলো ছিল continuous limit এর. এখন কিছু Problem দেখব discontinuous limit এর।

Problem 1:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

[এতক্ষণ আমরা যা যা শিখে আসলাম তা এখানে করে দেখাব]

Period: Period দেওয়া নাই। বের করতে হবে। a ও b দুইটি খালি বাক্স নিই। এবার limit দেখি,

$-\pi < x < 0$

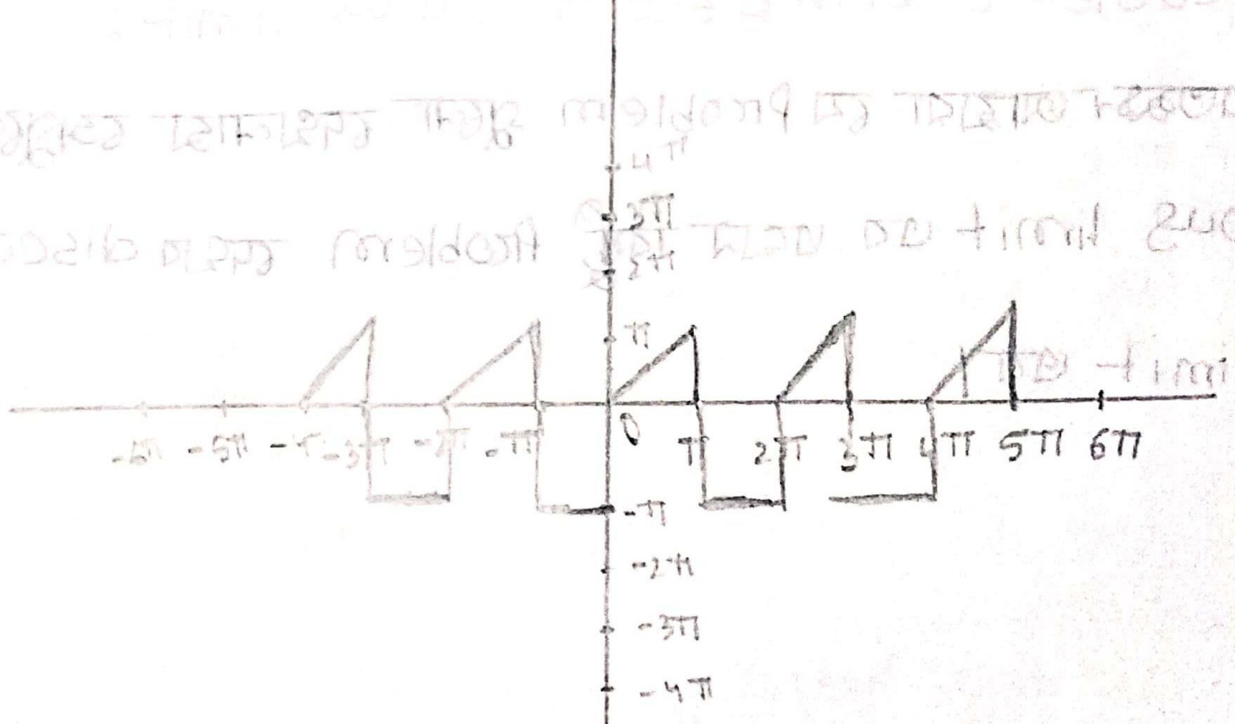
$0 < x < \pi$

limit গুলোর মধ্যে initial ~~valu~~ point $-\pi$ $\therefore a = -\pi$

এবং সবচেয়ে highest point π $\therefore b = \pi$

$\therefore$ Period $= b - a = \pi - (-\pi) = \pi + \pi = 2\pi$

graph: Period জানলাম। এখন কাজ graph আঁকা



Series expansion:

আমার Period বের করার সময় যে Point টা কেও a তে রাখি মানে initial point সেটাই হল c এর value.

মানে এখানে

$$c = -\pi$$

আর end যে Point টা ঠিক মানে b তে যাচ্ছে রাখি তা হল $c+2l$ এর value.

$\therefore c+2l = \pi$

Now, $-\pi + 2l = \pi$

$\therefore 2l = 2\pi$

$\therefore l = \pi$

Now,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\,dx$$

[Question এ দেখি, c হল $-\pi$ ও $c+2l$ হল π, কিন্তু Problem টা যেহেতু discontinuous limit এর তাই limit টা দুইভাগে বিভক্ত। আমরা দুইভাগেই solve করব। let's see]

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right]$$ এভাবে লিখব

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\left[x\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\left[0-(-\pi)\right] + \frac{1}{2}\left[\pi^2\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{2}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

$$\left[\therefore a_0 = -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

here,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx + \left[x\int_0^{\pi}\cos nx\,dx - \int_0^{\pi}\left\{\frac{dx}{dx}\int\cos nx\,dx\right\}dx\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\left[\sin n0 - \sin(-n\pi)\right] + \left[\frac{1}{n}\left[\pi\sin n\pi - 0\right] + \frac{1}{n^2}\left[\cos n\pi - 1\right]\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi}{n}\left[0+0\right] + \left[\frac{1}{n}\left[0\right] + \frac{1}{n^2}\left[-1-1\right]\right]\right]$$

$= \frac{1}{\pi}\left[0 + 0 + \frac{(-2)}{n^2}\right]$

$= -\frac{2}{n^2\pi}$

$\therefore \boxed{a_n = -\frac{2}{n^2\pi}}$

Now,

$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

Here,

$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi \sin nx\,dx + \int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx + \left[x\int_0^{\pi}\sin nx\,dx - \int_0^{\pi}\left\{\frac{dx}{dx}\int \sin nx\,dx\right\}dx\right]\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(+)\pi}{n}\left[\cancel{\sin nx}\ \cos nx\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right]\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\left[1 - \cos(-n\pi)\right] + \left[-\frac{1}{n}\left[\pi\cos n\pi - \cancel{\pi}0\right] + \frac{1}{n^2}\left[\sin n\pi - 0\right]\right]\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\left[1 - (-1)\right] + \left[-\frac{1}{n}\left[-\pi\right] + 0\right]\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right] = \frac{3\pi}{n} \times \frac{1}{\pi} = \frac{3}{n}$

$\therefore b_n = \frac{3}{n}$

$\therefore b_n = \frac{3}{n}$

$\therefore$ fourier series: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$= \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{n^2\pi} \cos nx + \frac{3}{n} \sin nx \right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n^2\pi} \cos nx + \frac{3}{n} \sin nx \right)$$

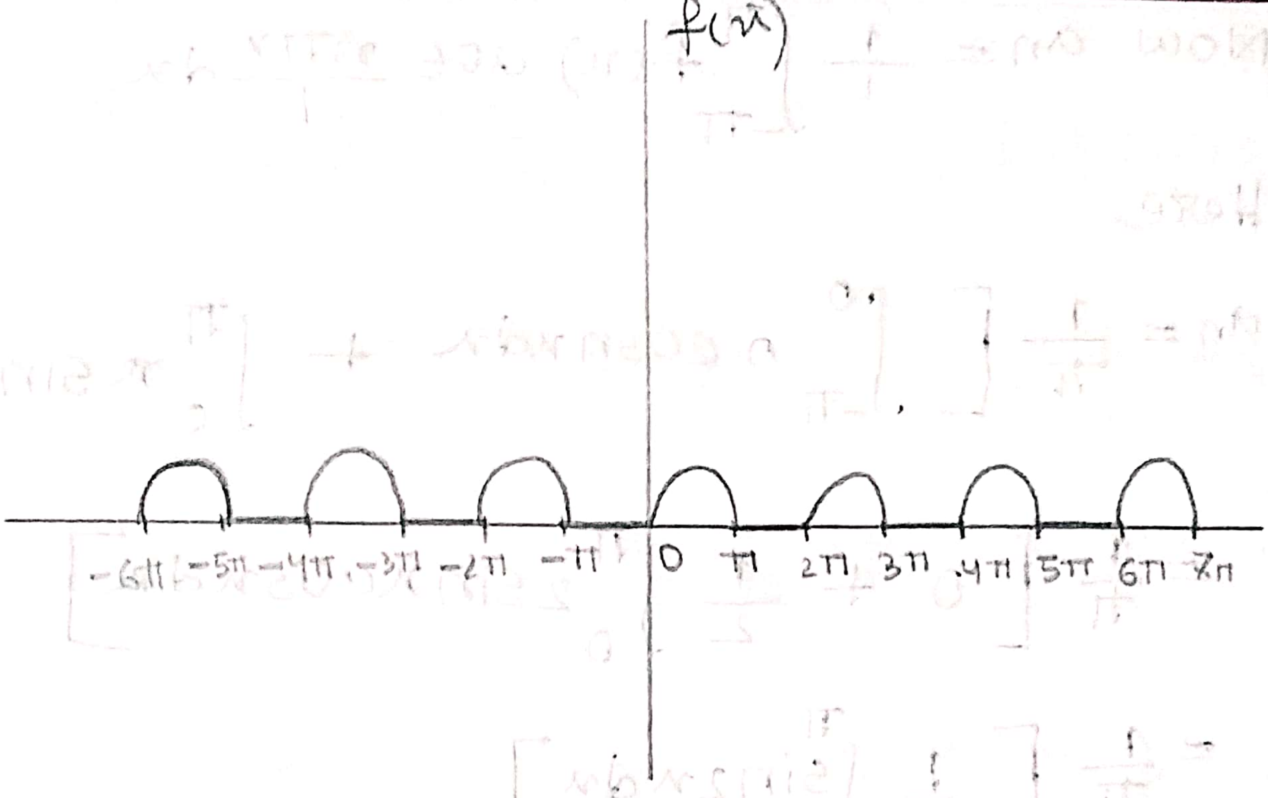
Problem 02:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Period: আগের math এর মতই limit

$\therefore$ Period $= 2\pi$

[maximum math এই period দেওয়া থাকে। যেখানে period দেওয়া থাকবে না সেখানে আমরা আমাদের technique দিয়ে Period বের করে নিব।



seriesexpansation:

$$a_0 = \frac{1}{\cancel{\pi}\, l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\,dx$$

c ও c+2l এর calculation সব আগের math এর মতই

Here,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \left[(-)\cos x\right]_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left[\cos\pi - \cos 0\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left[-1-1\right]\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

$$\left[\therefore a_0 = \frac{2}{\pi}\right]$$

Now, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$

Here

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} \sin x \cos x dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} 2\sin x \cos x dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\cos 2\pi - \cos 0\right]$$

বাদ

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[-1 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$

$$\left[\therefore a_n = \frac{1}{2\pi}\right]$$

Now, $b_n = \frac{1}{l}\int_{c}^{c+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

Here,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\cdot\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} 2\sin x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left[\cos(x-nx) - \cos(x+nx)\right]dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{(1+n)}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left[\frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)} - \frac{\sin(1+n)\pi}{(1+n)}\right] - \left[\frac{\sin 0}{1-n} - \frac{\sin 0}{1+n}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[0 - 0\right] \quad \left[\because \sin n\pi = 0,\ \sin 0 = 0\right]$$

$= 0$ when $n \neq 1$ [কারণ $n = 1$ হলে $(1-n) = 0$ যাহলে হর 0 হয়ে যেত]

[এখানে আমাদের এক্সট্রা একটি জিনিস করতে হবে। তাহলে, b_1 এর value বের করতে হবে b_1 মানে হল n এর জায়গায় 1 বসিয়ে calculation]

Now,

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \sin nx\,dx + \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\cancel{2}\int_0^{\pi} 2\sin^2 x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} (1-\cos 2x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi$$

$$= \frac{1}{2}$$

Now,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

Here,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[0 + \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} 2 \sin x \cos nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} [\sin (x+nx) + \sin (x-nx)] dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin (1+n) x dx + \int_0^{\pi} \sin (1-n) x dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\left[- \frac{\cos (1+n) x}{1+n} \right]_0^{\pi} + \left[- \frac{\cos (1-n) x}{(1-n)} \right]_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[- \left[\frac{\cos (1+n) x}{(1+n)} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{\cos (1-n) x}{(1-n)} \right]_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[- \left[\frac{\cos (1+n) \pi}{(1+n)} - \frac{\cos 0}{(1+n)} \right] - \left[\frac{\cos (1-n) \pi}{(1-n)} - \frac{\cos 0}{1-n} \right] \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{(-1)^{1+n}}{1+n} + \frac{1}{1+n} - \frac{(-1)^{1-n}}{(1-n)} + \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-n-\cancel{1}-n}{(\cancel{1+n})(1-n)} \cancel{\frac{1-(-1)^{1+n}}{(1+n)}} + \frac{}{(n-1)}\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-(-1)^{1+n}}{(1+n)} + \frac{1-(-1)^{1-n}}{(1-n)}\right] [n \neq 1]$$

when, n is odd

$a_n = 0$

[কারণ n এর value 3 বসাই, $1-(-1)^{1+3} = 1-(-1)^4 = 1-1=0$]

when, n is even,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-(-1)^{1+2}}{(1+n)} + \frac{1-(-1)^{1-2}}{(1-n)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{(1+n)} + \frac{2}{(1-n)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2-2n+2+2n}{(1-n^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{4}{1-n^2} = \frac{2}{\pi(1-n^2)}$$

Now,

for $a_1 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos x\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\cos x\,dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 2\sin x\cos x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\cos 2\pi - \cos 0\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[1 - 1\right] = 0$$

[এখন একটু খেয়াল করি, a_1 ও b_1 কেন বের করলাম। আমাদের fourier series এ $\sum_{n=1}^{\infty}$ n এর value 1 থেকে infinity পর্যন্ত হয়। কিন্তু এখানে $n=1$ হলে a_n ও b_n এর হর 0 হয়ে অসংজ্ঞায়িত হবে। তাই এক্ষেত্রে $n=2$ থেকে হবে। $\therefore \sum_{n=2}^{\infty}$ এমন। এবং a_n এর সাথে a_1 ও b_n এর সাথে b_1 এর value লিখে দিতে হবে]

$$\therefore f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos nx + a_1 \cos x + b_n \sin nx + b_1 \sin x)$$

$$= \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(1-n^2)} \cos nx + 0 + 0 + \frac{1}{2} \sin x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{(1-n^2)} + \frac{1}{2} \sin x\right)$$

$n=2$ থেকে শুরু করার জন্য $a_n + a_1 + b_n + b_1$

এই দুইটি value add করতে হয়

[This type of case is important. a_n এর b_n এর value বের করে যদি দেখি $n=1$ হলে হয় 0 হয়ে যাচ্ছে তাহলে এভাবে solve হবে]

Even or Odd function

আমরা lecture 3 হতে জেনেছিলাম even or odd function এর জন্য fourier series গুলো কেমন হয়। for odd function $a_0 = 0$, $a_n = 0$ হয়, আবার even function এর জন্য $b_n = 0$ হয়। তাহলে একটি function even না odd তা যদি আমরা জানতে পারি তাহলে আমাদের a_0, a_n ও b_n এর calculation না করেই বলে দিতে পারব value $= 0$

even or odd জানার উপায় কি?

একটি function even নাকি odd তা জানার দুইটি উপায় আছে। ~~দ্বিতীয়~~ উপায় দুইটি আলোচনা করা হল:

a। প্রথম উপায়: Given function থেকে check করা

For example. একটি function দেওয়া:

$$f(x) = x^2 \quad -2<x<2$$

আমরা জানি,

for odd function: $f(-x) = -f(x)$

for even function: $f(-x) = f(x)$

এখন, আমাদের example এর function এর দিকে দেখি,

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

$= f(x)$

$\therefore f(-x) = f(x)$

$\therefore$ this is an even function

আবার,

$f(x) = x^3 + x \quad -2 < x < 2$

এখানে আমরা check করি,

$f(-x) = -x^3 - x \neq f(x)$

মানে $f(-x) \neq f(x)$ $\therefore$ this function is not even

Now,

$f(-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

$\therefore$ this function is odd

example 3:

$f(x) = x^2 + x, \; -2 < x < 2$

$f(-x) = x^2 - x \neq f(x)$

$\therefore$ this function is not ~~odd~~ even

again, $f(-x) \neq -f(x)$ $\therefore$ this function is not odd

তাহলে এই function টি odd ও না even ও না।

এই উপায়ের সীমাবদ্ধতাঃ

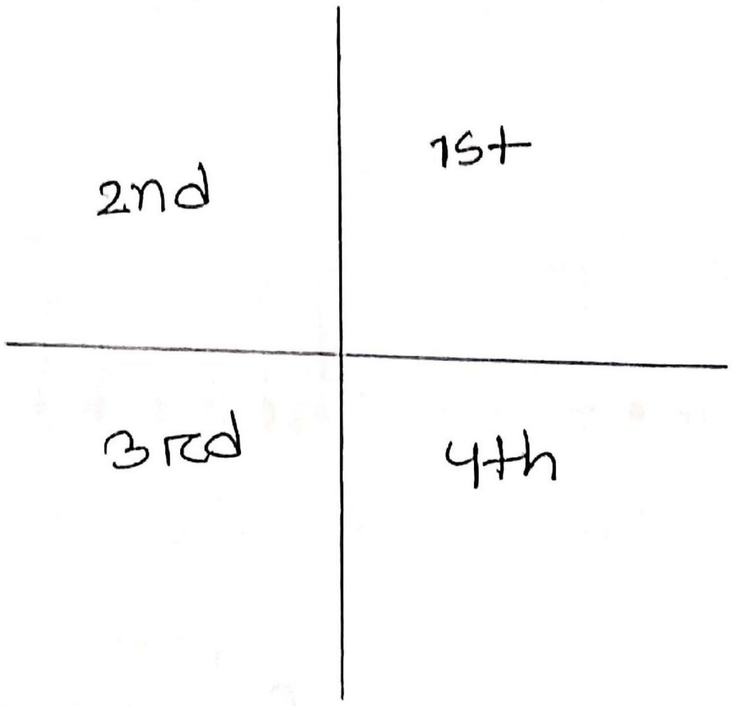
১। এই উপায়ে আমরা তখনই check করতে পারব যখন limit টি continuous হবে $(-2<x<2)$ or $(-\pi<x<\pi)$ অর্থাৎ আমরা ইতোমধ্যেই discontinuous limit এর problem দেখেছি $\left(\begin{array}{l}-\pi<x<0 \\ 0<x<\pi\end{array}\right)$ এমন হলে এই technique apply করা যাবেনা।

২। limit হতে হবে (-) something to (+) something মানে $(-3<x<3)$ or $(-2<x<2)$ or $(-\pi<x<\pi)$ এমনহলে এই technique applicable. কিন্তু $(0<x<4)$ or $(0<x<2\pi)$ এমন হলে apply করা সম্ভব না।

দ্বিতীয় উপায়: (No limitations)

আমরা normally যেভাবে একটা function দেখে graph আঁকতাম একইভাবে graph আঁকব। তারপর graph দেখে determine করব function টি odd না even. এখন প্রশ্ন হল graph দেখে কিভাবে চিনব function টা odd না even?

ফাংশন odd না even চিনার আগে ekta জিনিস মনে করে নিই। আমাদের quardrant গুলো মনে আছে?

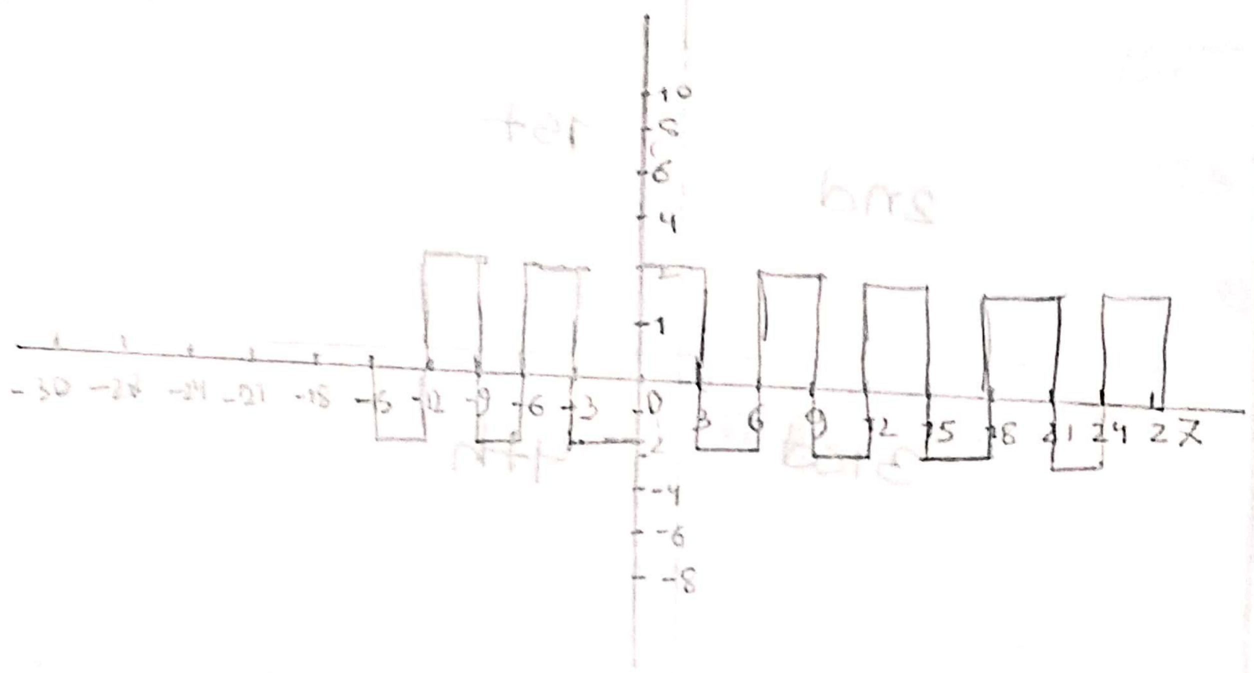


এবার আসল কথায় আসি।

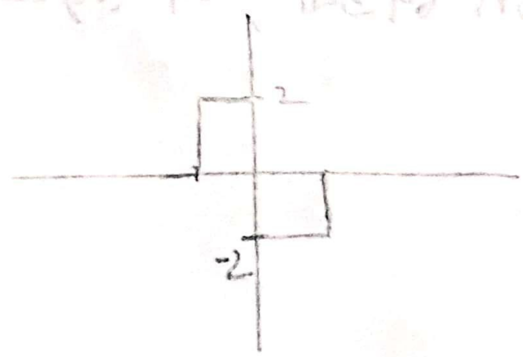
Odd function চেনার উপায়ঃ odd function এর ক্ষেত্রে 1st quardrant থেকে এর যে point থেকে function টি start হবে 3rd quardrant এর same point but negative থেকে function টি বামদিকে start হবে। একটি উদাহরণ দিয়ে বুঝি।

মনে করি, একটি function দেওয়া, $f(x) = \begin{cases} -2 & -3 < x < 0 \\ +2 & 0 < x < 3 \end{cases}$ Period=6

এখনও আমরা জানিনা function টি odd না even. নাকি কিছুই না। তাই প্রথম কাজ হল graph এঁকে complete করি।



odd function এর ক্ষেত্রে আমরা জানি, 1st quardrant এ যে point থেকে graph টি শুরু হয়েছে 3rd quardrant এ same point ~~এর~~ but negative থেকে graph টি বামদিকে যাবে। আবার 2nd quardrant এ যদি graph টি হতে শুরু তাহলে 4th quardrant এর same point এর but negative থেকে graph টি তখন ডানদিকে যেতো/মানে এরকম।



আমরা যে graph টি আঁকলাম একটু আগে তা দেখি। 0 থেকে 3 তে first quardrant এ (2) আবার −3 থেকে 0 তে fowrth quardrant এ হল (−2) same point but (−) ∴ function টি odd. তাহলে calculation ছাড়াই বলে দিব $a_0=0$, $a_n=0$

odd function চেনার আরেকটা উপায় হল: graph আঁকার পর (খাতা/ Phone screen) 180° angle এ ঘুরালে graph টি same ই থাকবে।

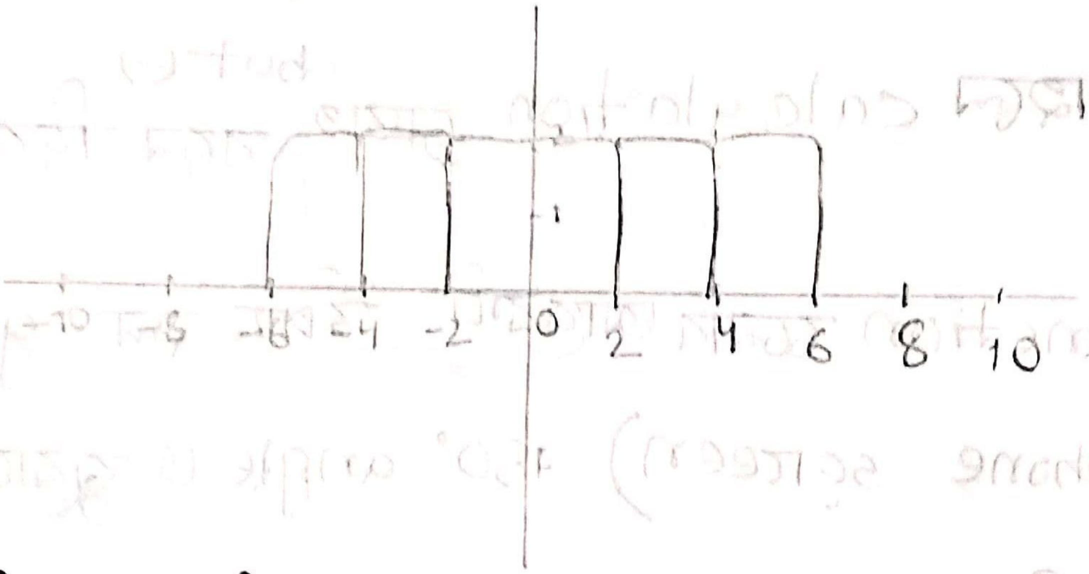
মনে রাখার সহজ technique: odd function এর ক্ষেত্রে graph টি ডানদিকে যে point থেকে শুরু হবে বামদিকে same point কিন্তু উল্টা দিক থেকে শুরু হবে।

Even Function: Even function চিনা odd function এর তুলনায় আরও অনেক বেশি মজা। Even function এর ক্ষেত্রে মাথায় রাখব 1st quarder ডানদিকে function টি যে point থেকে শুরু হবে বামদিকেও function টি same point থেকে start হবে। এবং ডানদিকে function টি দেখতে যেরকম হবে বামদিকেও একই রকম হবে।

একটি উদাহরণ দেখি:

$f(x) = 2 \quad 0 < x < 2$ Period 4

$2 \quad -2 < x < 0$



graph টির দিকে দেখি, ডান side এ 2 point থেকে শুরু হয়েছে আবার বামদিকেও 2 point থেকে শুরু হয়েছে। ∴

∴ function টি even.

এখন কিছু problem এর graph দেখি ও graph দেখে নির্ণয় করি function টি কি even না odd.

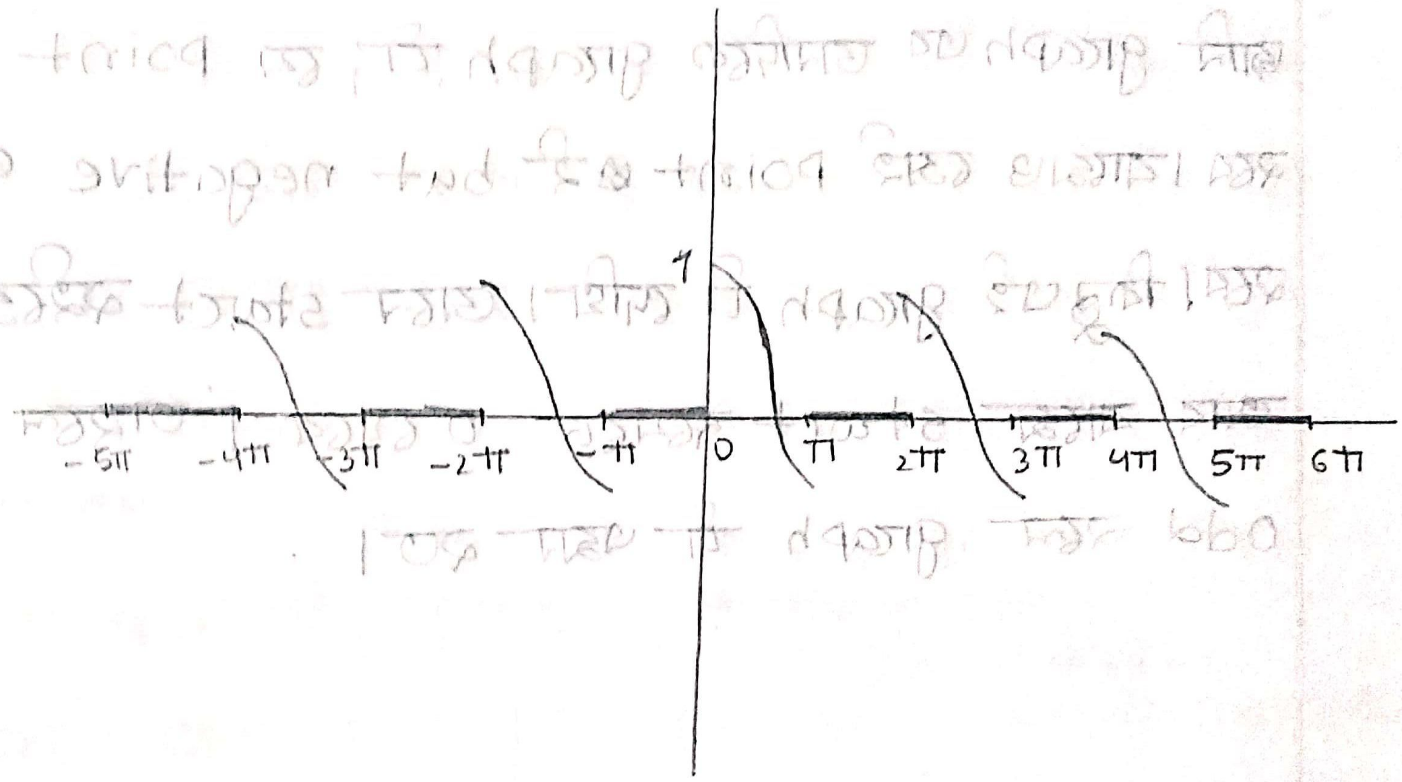
বই এর Problem(2.8 a) Page: 29

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 3 \\ -2 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Period = 6

এই function টি already আমরা odd function এর example এ আলোচনা করেছি।

b) Page : 30

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{Period} = 2\pi$$

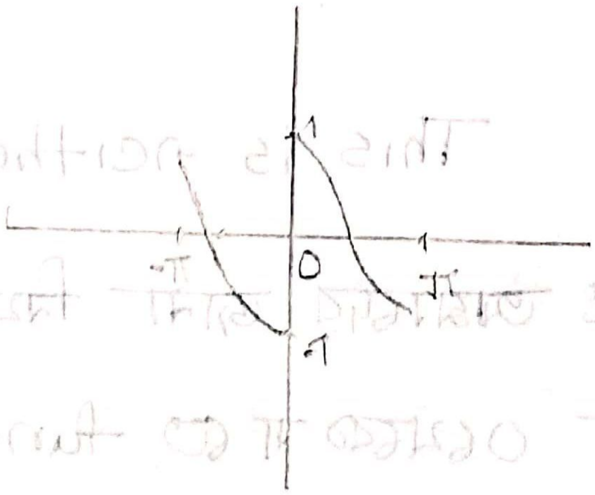


This is neither even nor odd

graph এর ব্যাখ্যাঃ আমাদের জানা নিয়ম অনুযায়ীই question দেখে আঁকলাম 0 থেকে π তে function টি $\cos x$ এর মত এবং π থেকে 2π এ 0 . আর period দেওয়া 2π. তাহলে graph এর ডানে যখন যাচ্ছি তখন 0 থেকে π এ graph টা যেমন $(0+2\pi)$ বা 2π থেকে $(\pi+2\pi)$ বা 3π এও same. আবার π থেকে 2π এ যেমন $(\pi+2\pi)$ থেকে $(2\pi+2\pi)$ বা 4π থেকে

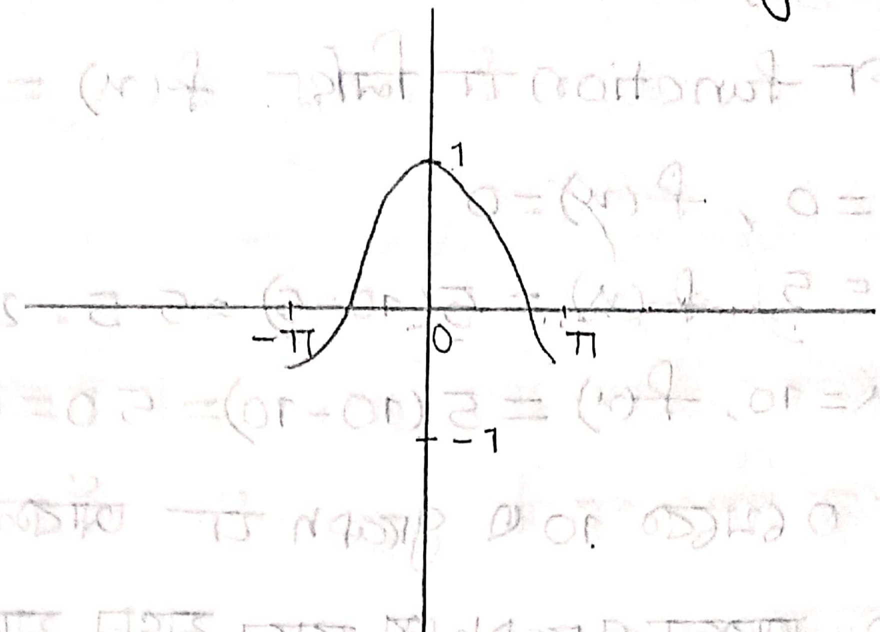
π এও same. আবার graph এর বামে যখন যাচ্ছি তখন বিয়োগ। মানে 0 থেকে π এ যেমন (0−2π) থেকে (π−2π) বা −2π থেকে −π এও same. এভাবে complete হল।

Odd or even এর ব্যাখ্যাঃ Odd function এর ক্ষেত্রে আমরা জানি graph এর ডানদিকে graph টি যে point থেকে start হবে। বামেও সেই point এই but negative থেকে start হবে। কিন্তু এই graph টি দেখি। ডানে start হইছে 1 থেকে। আর বামে start হয়েছে 0 থেকে। তাহলে এইটা odd না। Odd হলে graph টি এমন হত।



আবার আমরা জানি, even function এর ক্ষেত্রে graph এর ডানদিকে যে point থেকে শুরু হয়। বামদিকেও same point থেকে শুরু হয়। কিন্তু এই function টির ক্ষেত্রে ডানে শুরু

এই function টি even না। even হলে graph টি হত এমন:

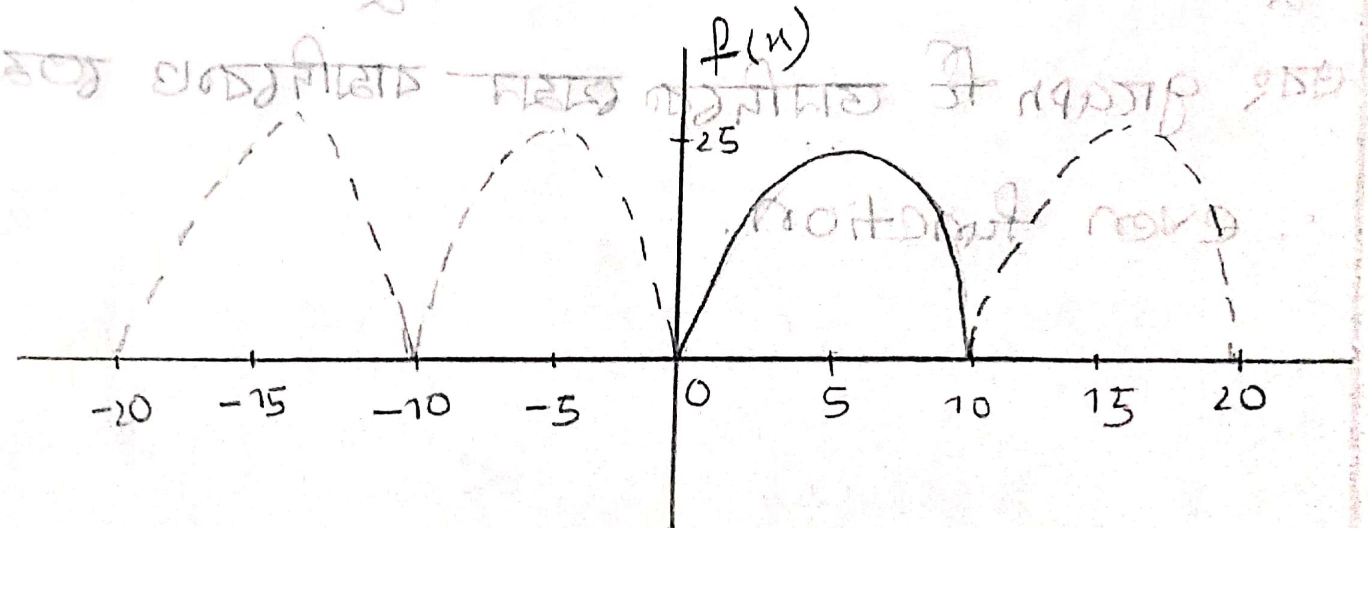


$\therefore$ function টি odd ও না even ও না

c) Page 30:

$f(x) = x(10-x) \quad 0<x<10 \quad period = 10$

দেখি, আগে আমাদের equation এর value দেওয়া ছিল যেমন $f(x) = 2$ / or something. কিন্তু এখানে $f(x) =$ equation দেওয়া। তখন এই equation এ value বসিয়ে আমরা graph complete করব।



graph এর ব্যাখ্যাঃ

আমরা আগে function টি লিখি $f(x) = x(10-x)$ $0<x<10$

when, $x=0$, $f(x)=0$

when, $x=5$, $f(x) = 5(10-5) = 5 \cdot 5 = 25$

when, $x=10$, $f(x) = 5(10-10) = 5 \cdot 0 = 0$

এই অনুযায়ী 0 থেকে 10 এ graph টি আঁকলাম। তারপর দেখি Period: 10. তাহলে graph এর ডানে যখন যাব 0 থেকে 10 এ যেমন graph (0+10) থেকে (10+10) বা 10 থেকে 20 তেও graph এর অবস্থা same হবে। আবার negative মানে বামে গেলে (0−10) থেকে (10−10) বা −10 থেকে 0 তেও same condition হবে। এভাবে graph টি complete করলাম।

Odd or even এর ব্যাখ্যাঃ

ফাংশনটি ~~odd হলে~~ even. কারণ graph টির ডানদিকেও শুরু হয়েছে 0 থেকে বামদিকেও শুরু হয়েছে 0 থেকে। এবং graph টি ডানদিকে যেমন বামদিকেও তেমনই।

∴ even function.

আমরা এই lecture এর শুরুতেই ~~যে~~ জেনেছি, function

odd হলে ~~$a_0=0$~~, $a_n=0$

আবার, function যদি even হয় তাহলে, $b_n=0$

তাহলে কোনো function expansion করার আগে যদি আমরা graph দেখে বলে দিতে পারি যে, function টি odd না even তাহলে আমাদের কাজ অনেক কমে যায়।

odd হলে a_n এর জন্য আর calculation করা ~~লাগে~~ লাগেনা। direct বলে দিতে পারব $a_n=0$ আবার যদি দেখি function টি even তাহলে b_n এর জন্য calculation করা লাগবেনা। বলে দিতে পারব $b_n=0$.

HALF RANGE FOURIER SERIES

জিনিসটি কি?

Range এর আরেকটি প্রতিশব্দ বলা যায় limit. এতক্ষন আমরা যে graph গুলো আঁকলাম বা যে expansion গুলো করলাম তা ছিল full range বা full লিমিট এর জন্য। এখন আলাদা হল কারন এখানে half range দেওয়া থাকবে শুধু।

মানে হল একটি full limit যদি হয় $-2<x<2$. তবে এই limit কে দুইভাগে ভাগ করলে পাব $-2<x<0$ এবং $0<x<2$ তাহলে এই $-2<x<2$ limit বা range এর half range হল $-2<x<0$ অথবা $0<x<2$ তাহলে আমাদের যদি question এ limit দেওয়া থাকে $0<x<2$. তাহলে বুঝে নিব আমাদের এখানে half limit দেওয়া, যার full limit হল $-2<x<2$

২।প্রশ্ন কিভাবে আসে?

প্রশ্ন আসতে পারে দুই পদ্ধতিতে। যেমন:

পদ্ধতি ১: Obtain cosine and sine series / cosine series / sine series for a অমুক function in interval [... ...].

পদ্ধতি ২:

Expand অমুক function ; [interval] in a fourier cosine / sine / cosine and sine series.

প্রশ্ন half range cosine series / শুধু cosine series বলতে পারে। শুধু cosine বা sine series বললেও আমাদের বুঝে নিতে হবে যে, half range cosine or half range sine series.

৩। graph কিভাবে আঁকতে হয়

graph আঁকার ব্যাপারে আমাদের মনে রাখতে হবে,

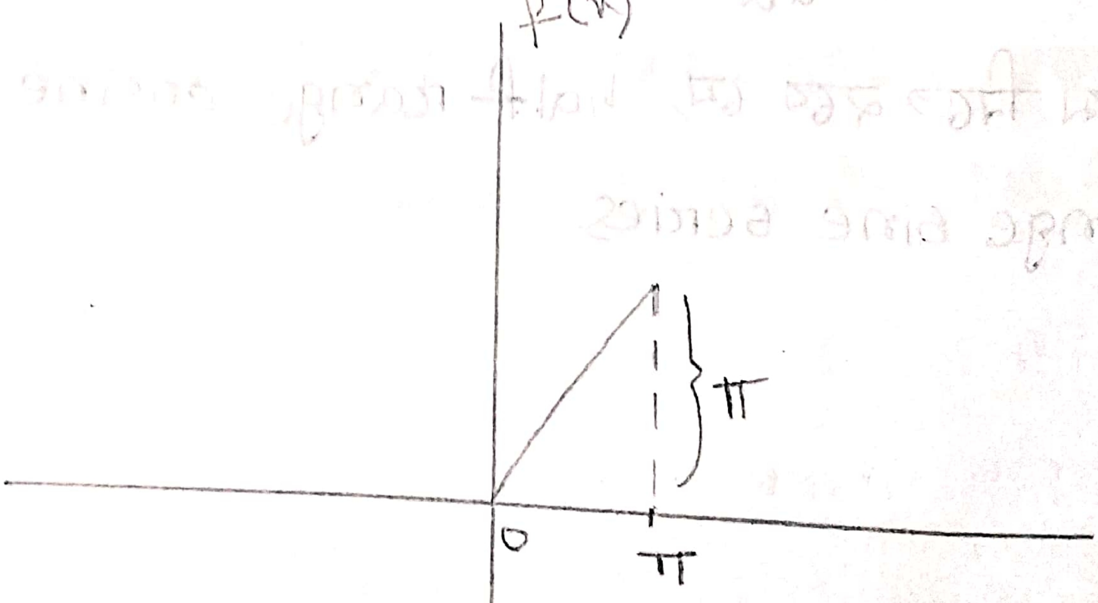
১। $\sin x$ কিন্তু odd function. কারণ $\sin(-x) = -\sin x$

২। $\cos x$ হল even function. কারণ $\cos(-x) = \cos x$

এবার step by step graph আঁকা শিখি।

$f(x) = x$ $[0, \pi]$ ~~এই funct~~ expand this function in cosine series. এই প্রশ্নের graph step by step দেখি।

step 1: প্রশ্নে যে limit (half range দেওয়া আছে) আগে সেটুকুর graph টি complete করি। মানে 0 থেকে π এ graph টি যেমন তা আঁকি।



step 2 : (most important)

আমরা জানি, question এ যে range বা limit দেওয়া তা হল half range. এখানে দেওয়া হল 0 থেকে π এর অপর half range টুকু হল −π থেকে 0. এখন 0 থেকে π এ graph টি কেমন হবে তা তো আমরা আঁকলাম। কিন্তু −π থেকে 0 ~~থেকে~~ তে graph টি কেমন হবে তা বুঝার জন্য আমরা তাকাব question এর দিকে। আমরা নিজেদের দুইটি question করব

1st question: প্রশ্নে function টিকে কিসে expand করতে বলা হয়েছে ?

এখন আমরা যে question এর graph আঁকছি তা দেখি, বলা আছে expand this function in cosine series. মানে cosine series এ expansion করতে বলা হয়েছে

Answer: তাহলে আমাদের ১ম প্রশ্নের উত্তর হল 'cosine series'

2nd Question: 1st question এ পাওয়া উত্তর কি odd function / even function ?

[মানে এখানে আমরা first question এর answer পেলাম cosine series. এখন প্রশ্ন হল cosine কি odd না even function?]

Answer: তাহলে আমাদের 2nd question এর answer হল even function.

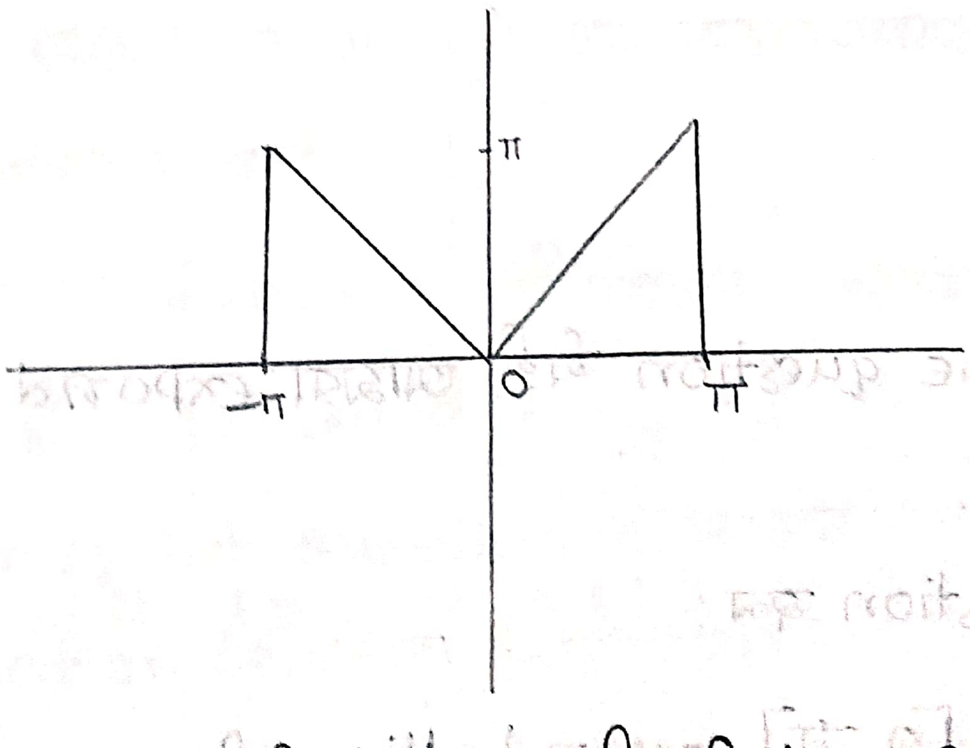
তাহলে 2nd question এর answer আমরা যা পেলাম graph এর অপর side এর function টাও সে অনুযায়ীই complete করতে হবে।

[মোট কথা হল: Question এ দেখব কিসে expand করা লাগবে function টি. then সেটা যদি ~~od~~ even function হয় তাহলে even periodic expansion হবে graph টা আর odd function হলে odd periodic extention হবে]

আমরা এই question এ পেলাম cosine এ expand করা লাগবে। আর cosine হল even function তাহলে graph টাও হবে even function এর graph এর মত।

Odd/even আলোচনার অধ্যায় ই আমরা জেনেছিলাম যে, even function এর graph হল : graph এর ডানদিক যে point থেকে শুরু হবে graph এর বামদিকও সেই একই point থেকে শুরু হবে। এবং graph টার right side যেমন হবে left side ও তেমন ই হবে।

তাহলে এবার range এর বাকি অংশ মানে $[-\pi, 0]$ তে even function এর graph এর ~~মত~~ নিয়ম মত graph টা আঁকি।



Step 3: আগের নিয়ম অনুযায়ী full range $[-\pi, \pi]$ ~~দিয়ে~~ থেকে period বের করি। period বের করার জন্য আমরা জানি,

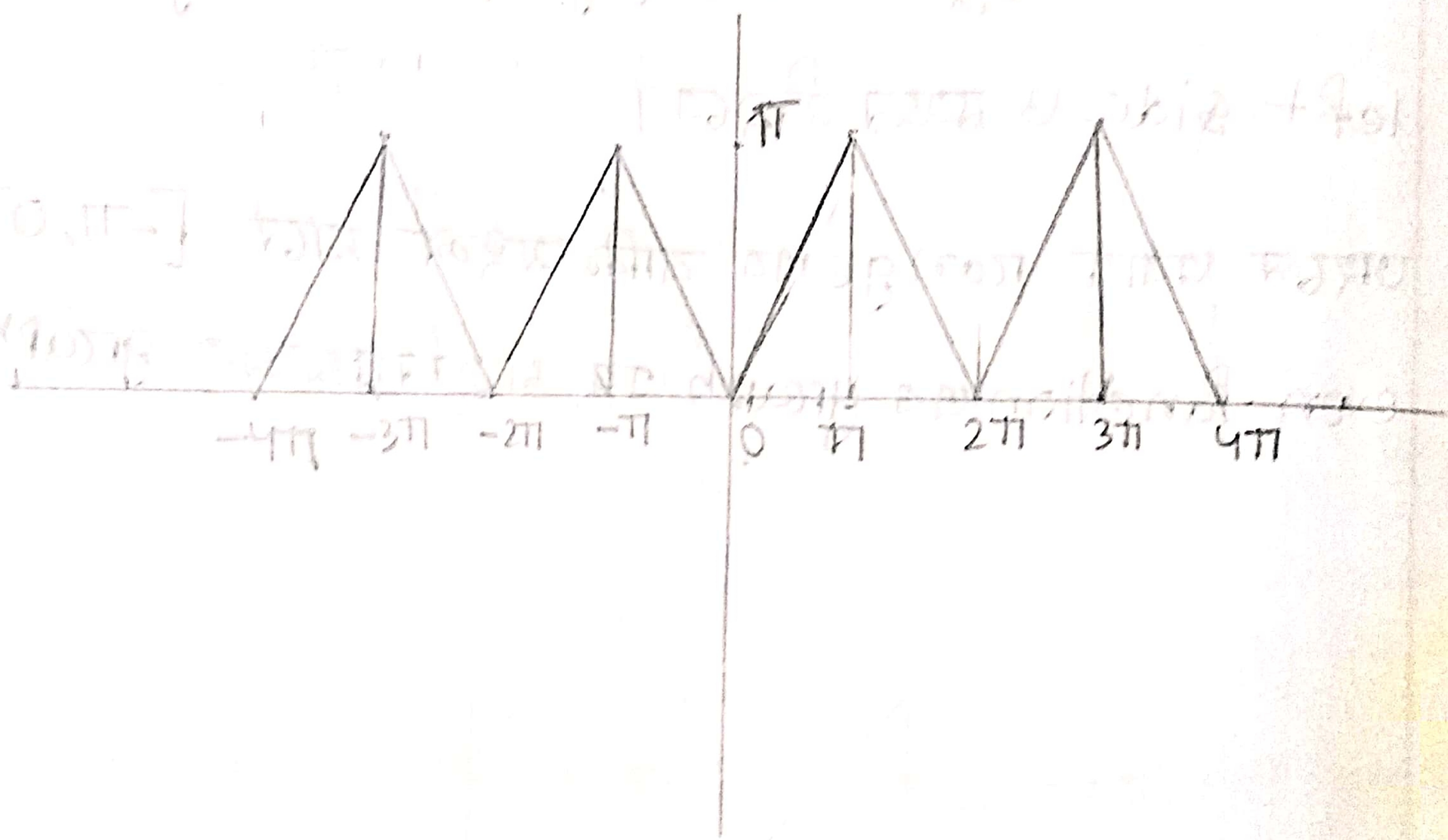
initial point $= a = -\pi$

এবং highest point $= b = \pi$

$\therefore$ Period $= b - a = \pi - (-\pi) = 2\pi$.

তাহলে 2π ঘর পর পর function টি repeat হবে।

তাহলে এখন full graph টা আঁকি।

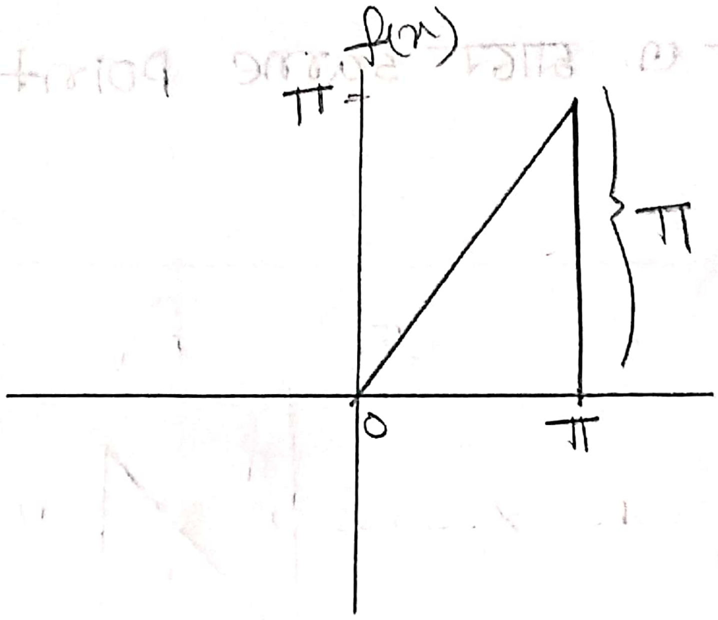


এবার same question টিই আমরা expand করব sine series এ.

আগে question হল:

$f(x) = x \; [0, \pi]$ expand this function in sine series/ half range sine series.

1st step: আগের মতই হুবহু same Question এ দেওয়া limit টুকু অনুযায়ী graph টা start করি।



Step 2: আমরা Question এর দিকে তাকাই ও নিজেদের দুটো Question করি।

Question 1: function টি কিসে expand করা লাগবে?

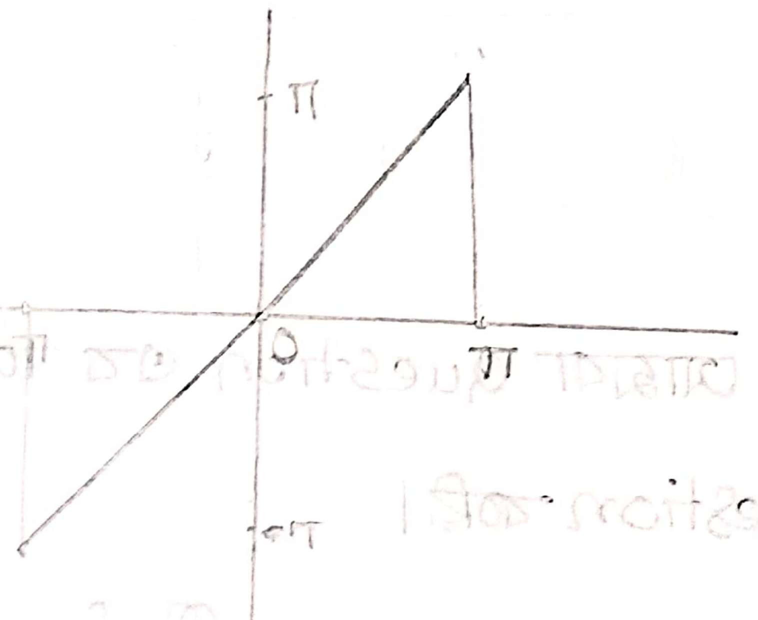
Answer: Sine series এ.

Question 2: 1st question এ পাওয়া answer টি কি odd function / না even function?

Answer: odd function. কারন sin হল odd function.

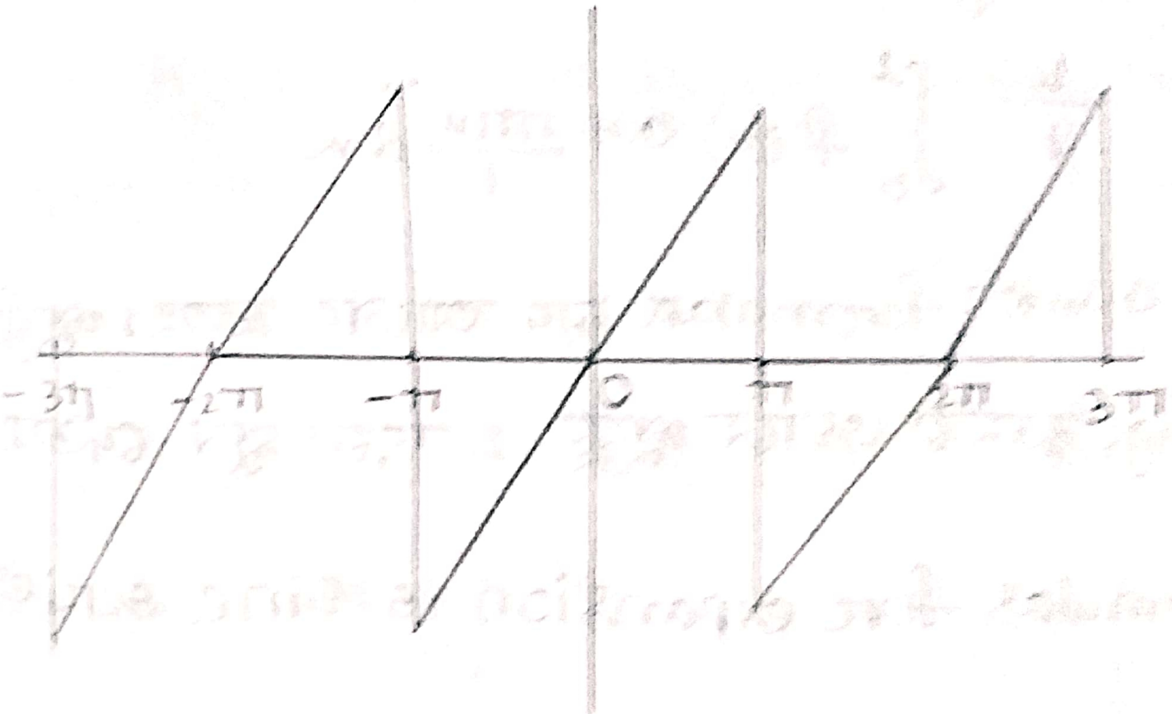
এবার −π থেকে 0 তে আমরা odd function এর graph আঁকার নিয়ম অনুযায়ী graph টা আঁকব।

আমরা জানি odd function এর graph মানে ডানদিকে graph টি 1st quadrant এ গেলে বামে যাবে 3rd quadrant এ. মানে same point but negative দিকে।



মানে ডানদিকে গেলে (π) এ ও বামদিকে গেলে (−π এ).

3rd step: Period আগের মতই 2π. এবার আগের graph আঁকার জানা নিয়ম অনুযায়ী graph টি complete করি।



Formula for half range Fourier series

দুটি case এ question হতে পারে আমরা জানি।

case1: expand the function in cosine series

case2: expand the function in sine series

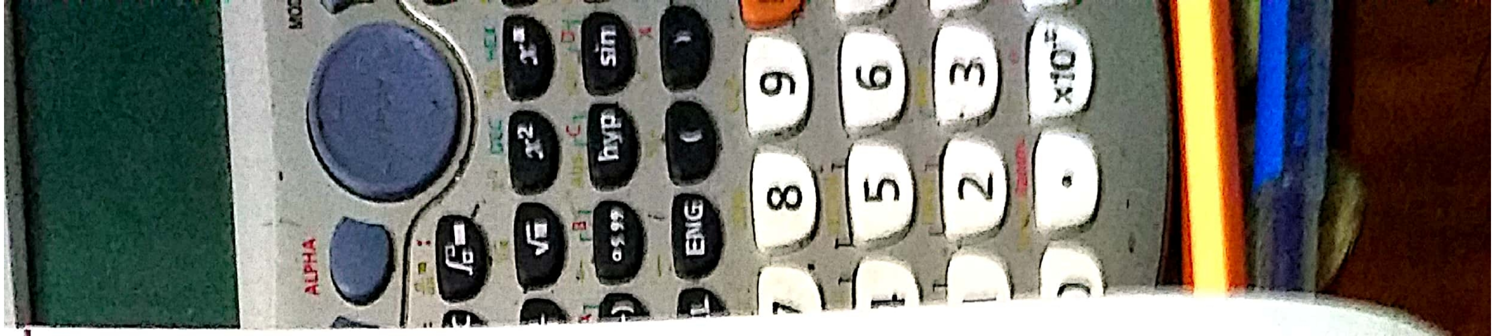
আমরা জানি for odd function, $a_0 = 0$; $a_n = 0$

for even function, $b_n = 0$

Formula for expansion in cosine series

cosine হল even function $\therefore b_n = 0$

$$\therefore f_x = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cancel{\sin} \cos \frac{n\pi x}{l})$$



$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

[a_0 ও a_n এর formula সব আগের মতই। শুধু half range হওয়াতে এখানে শুরুতে 2 দিয়ে গুন দেওয়া হয়েছে]

Formulas for expansion is sine series:

sine হল odd function $\therefore a_0 = 0,\ a_n = 0$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

[b_n এর আগের মতই। শুধু এখানে half range হওয়াতে 2 দিয়ে গুন হয়েছে আসলে]

Math Solve

আমরা যে Problem টির ~~অ~~ graph আঁকলাম তাই আগে solve করি।

Problem 1:

$f(x) = x\,[0,\pi]$ expand this function in fourier cosine and sine series.

In fourier cosine series:

graph আগেই draw করা হয়েছে

Solve:

cosine series এ expand করার সময় আমরা জানি, $b_n = 0$

[$\because$ cosine, even function]

Now, $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$

limit দেওয়া $[0,\pi]$ এটিকে $[0,l]$ এর সাথে compare করলে পাই, $l = \pi$

তাহলে, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}\right]$

$= \pi$

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[x\int_0^{\pi}\cos nx\,dx - \int_0^{\pi}\left\{\frac{dx}{dx}\int\cos nx\,dx\right\}dx\right]$

$= \frac{2}{\pi}\left[\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]$

$= \frac{2}{\pi}\left[\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right]$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\left[\pi\sin n\pi - 0\right] + \frac{1}{n^2}\left[\cos n\pi - \cos 0\right]\right]$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}[0] + \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\right]$

$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$

$$\therefore f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \cos nx\right]$$

For expansion in sine series:

Here, $a_0 = 0$; $a_n = 0$ [$\because$ sine odd function]

$$\therefore b_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x \int_0^{\pi} \sin nx \, dx + \int_0^{\pi}\left\{\frac{dx}{dx} \int \sin nx \, dx\right\} dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\left[x \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -\frac{\cos nx}{n} \, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\left[x \cos nx\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\left[\pi \cos n\pi - \pi \cos 0\right] - \left[\frac{\sin n\pi}{n^2} - 0\right]\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\left[\pi (-1)^n - \pi\right] - 0\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\{(-1)^n - 1\}}{n}\right]$$

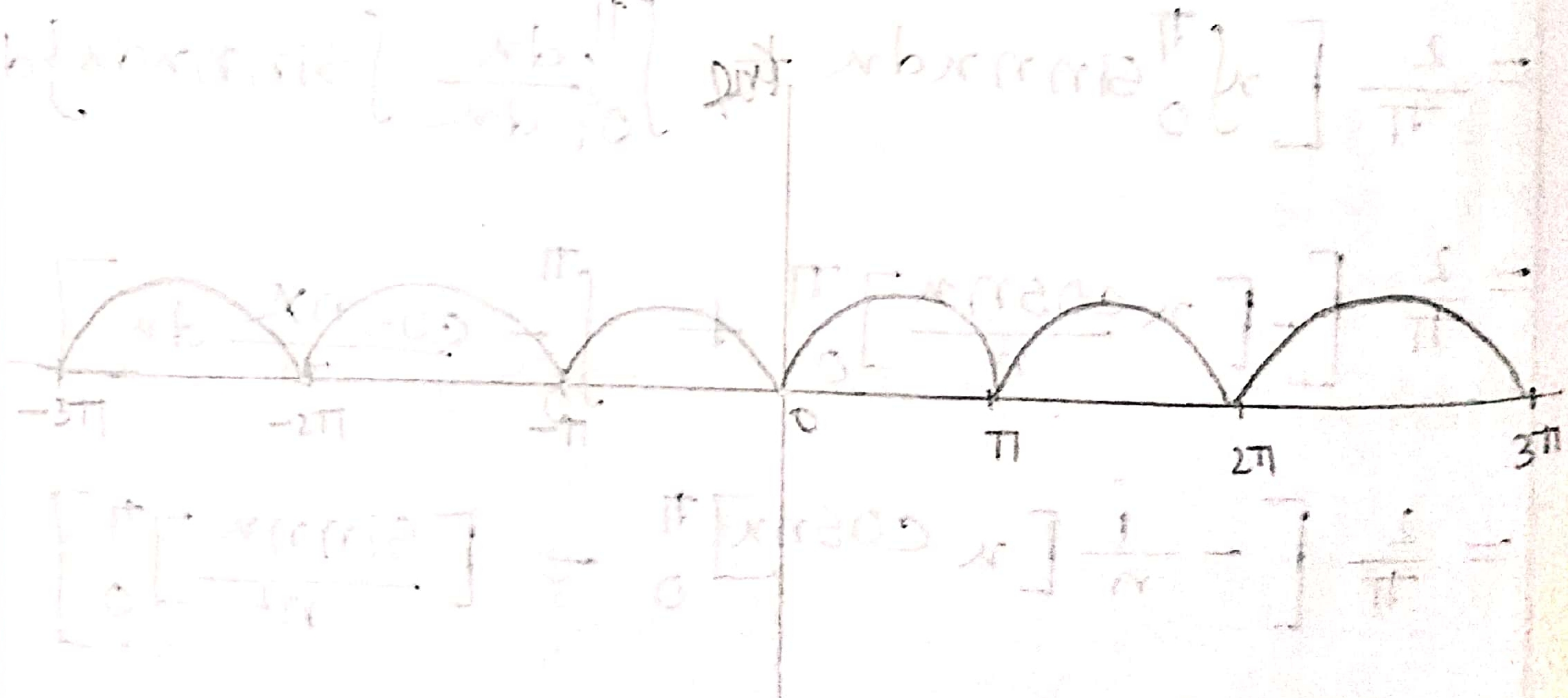
$$= -\frac{2}{n}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{2}{n}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}$$

Problem 2: [বই এর Page: 31 Problem 2.11]

Expand $f(x) = \sin x$; $0 < x < \pi$ in a Fourier cosine series.

graph:



[প্রশ্নে দেখি, expand করতে বলেছে cosine series এ. এবং cosine হল even function. তাহলে graph টা হবে

even function এর graph এর মত। মানে right side এ যেমন left side এও তেমন graph]

solve:

expand করতে হবে cosine series এ. cosine series হল even function. মানে $b_n = 0$. $0 < x < 1$ এর সাথে compare করলে, $l = \pi$

Now,

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\cos\pi - \cos 0\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-1-1\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\{\sin(x+nx) + \sin(x-nx)\}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{(n+1)} - \frac{\cos(1-n)x}{(1-n)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{\cos(1+n)\pi - \cos 0}{(n+1)}\right] - \left[\frac{\cos(1-n)\pi - \cos 0}{(1-n)}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{(n+1)} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{(1-n)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{(n+1)} - \frac{1-\cos(1-n)\pi}{(n-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(\pi+n\pi)}{(n+1)} - \frac{1-\cos(\pi-n\pi)}{(n-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(\cos\pi\cos n\pi - \sin\pi\sin n\pi)}{(n+1)} - \frac{1-(\cos\pi\cos n\pi + \sin\pi\sin n\pi)}{(n-1)}\right]$$

$$\left[\because \cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \quad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos n\pi(-1)}{(n+1)} - \frac{1-\cos n\pi(-1)}{(n-1)}\right]$$

$[\because \cos\pi = -1 \text{ and } \sin n\pi = 0]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos n\pi}{(n+1)} - \frac{1+\cos n\pi}{(n-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(n-1)(1+\cos n\pi) - (1+\cos n\pi)(n+1)}{(n^2-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(1+\cos n\pi)(n-1-n-1)}{(n^2-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2(1+\cos n\pi}{n^2-1}\right]$$

$$= \frac{-2}{\pi(n^2-1)}[1+\cos n\pi] \quad [\text{if } n \neq 1]$$

For $n=1$,

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x\,dx$$

$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}$

$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cos 2\pi - \cos 0\right]$

$= -\frac{1}{2\pi}\left[1-1\right]$

$= 0.$

Now,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

a_1 এর value 0. তাই আমরা $n=2$ থেকে infinity পর্যন্ত যাব

$$f(x) = \frac{\frac{4}{\pi}}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{\pi(n^2-1)}\left[1+\cos n\pi\right]\cos nx$$

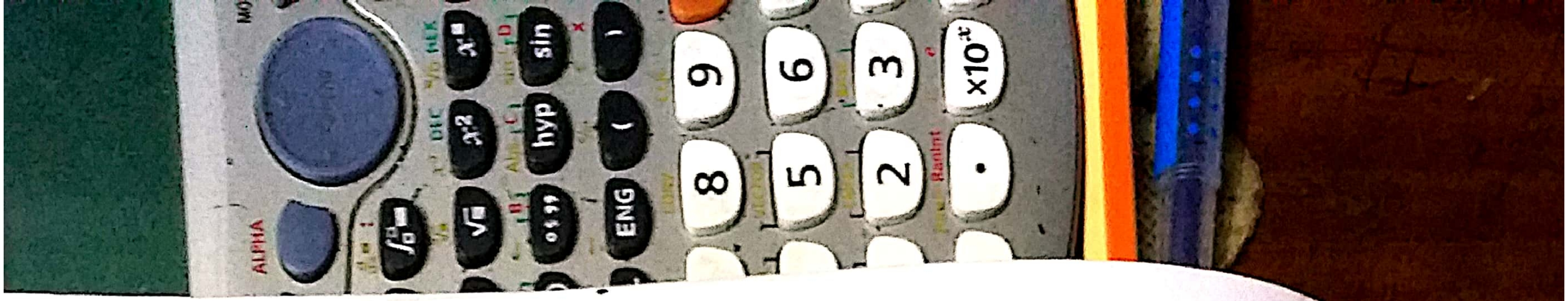
$$= \frac{2}{\pi} + \cancel{+}\frac{-2}{\pi}\cancel{\sum_{n=2}^{\infty}}\left[\frac{1+\cancel{\cos} 2\pi}{\cancel{n^2}} \quad \frac{1+\cos\cancel{n}\pi}{n^2-1}\cos nx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1+\cos n\pi}{(n^2-1)}\cos nx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right]$$

n এর সব odd value এর জন্য $a_n = 0$

এবং সব even এর জন্য $1+\cos n\pi = 2$. এই 2 কে সামনে এনে



$\frac{y}{\pi}$ ধরা হল. এবং তারপর সব even value গুলো পরপর বসানো হল]

Problem 3ঃ বইয়ের Page: 32. 2.12 no. Problem.

[Same আমাদের Problem 1 এর মত। শুধু limit আলাদা]

Complex Form of Fourier Series

[এই Proof টা লাগবে]

আমরা জানি,

কোনো random $[-l, l]$ limit এর জন্য Fourier series হবে:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right\} \quad \cdots\cdots (i)$$

where,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

We know,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \cdots\cdots\cdots (ii)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \cdots\cdots\cdots (iii)$$

(ii) + (iii) করে পাই,

$$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

আবার (ii) − (iii) করে পাই,

$$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i}$$

[এখন Fourier series এ দেখি, কোথাও কিন্তু θ নাই।
cosθ/ sinθ এর বদলে আছে cos $\frac{n\pi x}{l}$ এবং sin $\frac{n\pi x}{l}$
তাই এখন আমরা θ কে replace করব $\frac{n\pi x}{l}$ দ্বারা]

$$\therefore \cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i}$$

From equation (i) we can write,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\left(\frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i}\right)\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n e^{in\pi x/l}}{2} + \frac{a_n e^{-in\pi x/l}}{2} + \frac{b_n e^{in\pi x/l}}{2i} - \frac{b_n e^{-in\pi x/l}}{2i}\right\}$$

[এখন দেখি, ৩ ও ৪নং ভগ্নাংশের হরে আছে 2i যে একটি common form [2] নিচে আনার জন্য আমাদের (i) কে সরাতে হবে। তার জন্য আমরা ৩ ও ৪নং ভগ্নাংশের লব ও হরকে i দ্বারা গুণ করব]

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n e^{in\pi x/l}}{2} + \frac{a_n e^{-in\pi x/l}}{2} + \frac{i b_n e^{in\pi x/l}}{2i^2} - \frac{i b_n e^{-in\pi x/l}}{2i^2} \right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n e^{in\pi x/l}}{2} + \frac{a_n e^{-in\pi x/l}}{2} - \frac{i b_n e^{in\pi x/l}}{2} + \frac{i b_n e^{-in\pi x/l}}{2} \right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_n - i b_n}{2}\right) e^{in\pi x/l} + \left(\frac{a_n + i b_n}{2}\right) e^{-in\pi x/l} \right\}$$

$$\therefore f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n\, i^{n\pi x/l} + c_{-n}\, e^{-in\pi x/l} \right\}$$

[এই line টা মনে রাখা লাগবে]

$$\therefore c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

Now,

$$c_n = \frac{1}{2}\{a_n - i b_n\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx - i\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2l}\left[\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2l}\left[\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\pi x/l}\,dx\right]$$

[কারণ আমরা জানি, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$e^{-in\pi x/l} = \cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin n\pi x/l$]

$$\therefore c_n = \frac{1}{2l}\left[\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\pi x/l}\,dx\right]$$

↓

এই formula টা important অনেক। পরবর্তীতে math গুলোতেই লাগবে

এইভাবে

$$c_{-n} = \frac{1}{2}[a_n + ib_n]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx + i\cdot\frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{1} + i\sin\frac{n\pi x}{1}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2l}\left[\int_{-1}^{1} f(x)\, e^{in\pi x/l}\, dx\right]$$

and $f(x)$ can be completely written as,

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/1}}$$

[আমরা এতক্ষণ normal fourier series expansion এ use করেছি $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{1} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ কিন্তু complex form এর বেলায় আমাদের জন্য আরও easy just, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/1}$

এখান থেকে c_n এর value টি বের করে এখানে এনে বসিয়ে দিলেই answer পেয়ে যাব]

Problem 1:

Find the complex form of fourier series of

$f(x) = e^{-x}$ is, $-1 \le x \le 1$.

Ans: we know,

the complex form of fourier series,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l} \quad \dots\dots\dots (i)$$

এখানে Period $= 1-(-1) = 2$

$\therefore 2l = 2$

$\therefore l = \frac{2}{2} = 1.$

and we know,

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-in\pi x/l}\, dx$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 1} \int_{-1}^{1} e^{-x} e^{-in\pi x/1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-x - in\pi x/1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+in\pi)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left| \frac{e^{-(1+in\pi)x}}{-(1+in\pi)} \right|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2(1+in\pi)}\left[e^{-(1+in\pi)x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2(1+in\pi)}\left[e^{-(1+in\pi)} - e^{(1+in\pi)}\right]$$

$$= \frac{e^{(1+in\pi)} - e^{-(1+in\pi)}}{2(1+in\pi)}$$

$$= \frac{e^{1}\cdot e^{in\pi} - e^{-1}\cdot e^{-in\pi}}{2(1+in\pi)}$$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$$= \frac{e^{1}\cdot(\cos n\pi + i\sin n\pi) - e^{-1}(\cos n\pi - i\sin n\pi)}{2(1+in\pi)}$$

Now,

$$c_n = \frac{e(\cos n\pi + i\sin n\pi) - e^{-1}(\cos n\pi - i\sin n\pi)}{2(1+in\pi)}$$

$$= \frac{e^1(-1)^n - e^{-1}(-1)^n}{2(1+in\pi)} \quad \left[\because \begin{array}{l} \cos n\pi = (-1)^n \\ \sin n\pi = 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n(e^1 - e^{-1})}{2(1+in\pi)}$$

$$= \left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2}\right)(-1)^n \left(\frac{1}{1+in\pi} \times \frac{1-in\pi}{1-in\pi}\right)$$

[হর থেকে i [illegible] টি সরানোর জন্য $(1-in\pi)$ দ্বারা লবও হরে গুণ দিলাম]

[we know, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\therefore \sinh 1 = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2}$

মাথায় রাখবে, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$]

h = hyperbolic

$$= \frac{\sinh 1 \, (-1)^n \, (1-in\pi)}{1^2 - i^2 n^2 \pi^2}$$

$$= \frac{(-1)^n \, (\sinh 1) \, (1-in\pi)}{1+n^2\pi^2}$$

$\therefore$ from (i)

$$e^{-x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\sinh 1) \left(\frac{1-in\pi}{1+n^2\pi^2} \right) e^{in\pi x}$$

(Ans)

PARSEVAL'S IDENTITY

Assuming that, the fourier series corresponding to $f(x)$ in $(-L, L)$ converges uniformly to $f(x)$

[এখানে হল, আমরা এতক্ষণ যে fourier series দেখেছি

এখানে এইটা: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ in $(-L, L)$

এই series.টি converges uniformly to $f(x)$ এখানে x এর $-L$ থেকে L এর মধ্যে যে কোনো value এর জন্য fourier series টি valid বা fourier series টি exist করে]

যদি এই শর্ত মানে তাহলে Prove Parseval's identity

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Proof (very important) :

we know;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

Multiplying (i) by $f(x)$ and integrating term by term from $-L$ to L

$$\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\right.$$

$$\left. + b_n\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 = \frac{a_0 \cdot L}{2}\times\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n \cdot L}{}\times\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n \cdot L\times\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

আনার জন্য সামনে

$\frac{1}{L}$ দিয়ে গুণ দিলাম

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 = \frac{a_0 \cdot L}{2}\cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cdot L \cdot a_n + b_n \cdot L \cdot b_n\}$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 = \frac{a_0^2}{2}\cdot L + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n^2 \cdot L + b_n^2 \cdot L\}$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 = L\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n^2 + b_n^2\}\right]$$

$$\therefore \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 = \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$ (Proved)

Math Solve

আগের মতই সব। a_n, b_n, a_0 বের করে just বসাই দিব। তবে এখানে extra ভাবে $\{f(x)\}^2$ এর integration করতে হবে। Let's see.

Problem 1:

Obtain the Parseval's identity of the fourier series for $y=x^2$ in $-\pi < x < \pi$.

Also show that $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\dots = \frac{\pi^4}{90}$

Solve: Period $= 2L = \pi - (-\pi)$

$= 2\pi$

$\therefore L = \pi$

Now, $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2$

$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right) \right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi^3}{3}\right]$

$= \frac{2\pi^2}{3}$

Now,

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{dx^2}{dx}\int\cos nx\,dx\right\}dx\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\left|\frac{x^2\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi^2\sin n\pi}{n} + \frac{\pi^2\sin n\pi}{n}\right) - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$

$\left[\begin{array}{l}\sin(-n\pi) \\ = -\sin n\pi;\ (-)(3(-)\,\alpha(+)\end{array}\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \frac{2}{n}\left\{x\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{dx}{dx}\int\sin nx\,dx\right\}dx\right\}\right]$

$= \frac{2}{\pi\cdot n}\left[-\left|\frac{x\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right]$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[-\left(\frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{(-\pi)\cos n\pi}{n}\right) + \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\left(\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\pi\cos n\pi}{n}\right) + \left(\frac{\sin n\pi}{n^2} + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2\pi\cos n\pi}{n} + 0\right]$$

$$= \frac{4\pi\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$= \frac{4\cos n\pi}{n^2}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

[Odd even function হওয়ার ১ম পদ্ধতিটি মনে করি। যখন -(something) to (+) something limit থাকে তখন $f(x)$ কে $f(-x)$ দ্বারা replace করে odd না even যাচাই করতে পারি। same here, $f(x) = x^2$

$$\therefore f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

$$\therefore f(x) = f(-x)$$

$\therefore$ function টি even]

$\therefore b_n = 0$,

Now,

$$\cancel{\frac{1}{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \left[\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right]$$

$$= \frac{2\pi^3}{3}.$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi^5}{5}.$$

Now, applying parseval's identity for $f(x)$ in $(-\pi, \pi)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{2\pi^5}{5} = \left[\frac{\frac{4}{9}\pi^4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{2n}}{n^4}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{5} = \left[\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}(-1)^{2n}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\pi^4 = \left[\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \{(-1)^2\}^n\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\pi^4 = \left[\frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}\right] \quad [\because 1^n = 1]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right)\pi^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{18-10}{45}\right)\pi^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{45}\pi^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{45\times 16}\pi^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{8\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\therefore \frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

(Proved)

#Problem 2: (বইএর 2.14) Page: 33

Write Parseval's identity corresponding to the fourier series of $f(x) = x$; $0<x<2$ in a half range cosine series.

[এখানে দেখি, একটি fourier series দেওয়া আছে যা half range and ~~ex~~ expand in cosine series. যেহেতু cosine হল even function. তাই even expansion করতে বলছে। মানে $b_n = 0$ হবে]

Now,

Period $= 2-(-2) = 4$ [half range হল: $0<x<2$ $\therefore$ full " : $-2<x<2$]

$2L = 4$

$\therefore L = 2$

[অথবা $0<x<L$ এর সাথে direct compare করেও লেখা যায় $L=2$]

$$\therefore a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{2}\left[\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right]$$

$$= 2$$

Now,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= x\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_0^2\left\{\frac{dx}{dx}\int\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right\}dx$$

$$= \left[\frac{x\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2 - \int_2^2 \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[2\cdot\sin n\pi - 0\right] + \frac{4}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cdot 0 + \frac{4}{n\pi^2}\left[\cos n\pi - \cos 0\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

b) ~~Determin~~

b) Determine the sum of the series:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\cdots$$

Now,

from (a) we can write,

the parseval's identity is

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2 = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4\pi^4}[(-1)^n-1]^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}[(-1)^n-1]^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right] = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}[(-1)^n-1]^2$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}[(-1)^n-1]^2$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} - 2 = \frac{16}{\pi^4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}[(-1)^n-1]^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{16}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4}\cdot 4 + 0 + \frac{1}{3^4}\cdot 4 + 0 + \frac{1}{5^4}\cdot 4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{4\cdot 16}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2\times\pi^4}{64\times 3} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots$$

Now, $S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \cdots$

$$= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \frac{S}{16}$$

$$= \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16}$$

$$\Rightarrow S - \frac{S}{16} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\therefore \frac{15S}{16} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\therefore S = \frac{\pi^4}{90}$$

(Ans)