☑ বর্গের সূত্রাবলি (Formulas of Square):

01. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
02. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
03. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
04. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$
05. $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$
06. $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$
07. $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
08. $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
09. $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$
10. $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
11. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
12. $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
13. $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
14. $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

☑ ঘন-এর সূত্রাবলি (Formulas of Cube):

01. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
02. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
03. $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
04. $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
05. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: মান নির্ণয়

01. $a - b = 4$ এবং $ab = 60$ হলে, $a + b$ এর মান কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol" দেওয়া আছে, $a - b = 4$ এবং $ab = 60$
আমরা জানি, $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
বা, $(a + b)^2 = (4)^2 + 4.60$ [মান বসিয়ে]
বা, $(a + b)^2 = 16 + 240$ বা, $(a + b)^2 = 256$
বা, $a + b = \pm\sqrt{256}$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]
$\therefore \quad a + b = \pm 16$
∴ নির্ণেয় মান = ± 16.

02. $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$ হলে, $a - b$ এর মান কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" দেওয়া আছে, $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$
আমরা জানি, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
বা, $(a - b)^2 = (9m)^2 - 4.18m^2$ [মান বসিয়ে]
বা, $(a - b)^2 = 81m^2 - 72m^2$ বা, $(a - b)^2 = 9m^2$
বা, $a - b = \pm\sqrt{9m^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]
$\therefore \quad a - b = \pm 3m$
∴ নির্ণেয় মান = $\pm 3m$.

03. $x - y = 2$ এবং $xy = 24$ হলে, $x + y$ এর মান কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-০৬)]

Sol" দেওয়া আছে, $x - y = 2$ এবং $xy = 24$
আমরা জানি, $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$
বা, $(x + y)^2 = (2)^2 + 4.24$ [মান বসিয়ে]
বা, $(x + y)^2 = 4 + 96$ বা, $(x + y)^2 = 100$
বা, $x + y = \pm\sqrt{100}$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]
$\therefore \quad x + y = \pm 10$
∴ নির্ণেয় মান = ± 10.

04. $x - y = 7$ এবং $xy = 60$ হলে, $(x + y)^2$ ও $x^2 + y^2$ এর মান কত?

Sol" দেওয়া আছে, $x - y = 7$ এবং $xy = 60$
আমরা জানি, $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$
বা, $(x + y)^2 = (7)^2 + 4.60$ [মান বসিয়ে]
বা, $(x + y)^2 = 49 + 240$ বা, $(x + y)^2 = 289$
আবার, $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$
বা, $x^2 + y^2 = (7)^2 + 2.60$ [মান বসিয়ে]
বা, $x^2 + y^2 = 49 + 120$ বা, $x^2 + y^2 = 169$
∴ নির্ণেয় মান = 289 এবং 169

05. $a+b=7$ এবং $a^2+b^2=25$ হলে ab এর মান কত?

Sol" Given, $a+b=7$ এবং $a^2+b^2=25$

$\therefore a^2+b^2=25 \quad \Rightarrow (a+b)^2-2ab=25$

$\Rightarrow 2ab=(7)^2-25 \quad \Rightarrow ab=\frac{24}{2} \quad \therefore ab=12$

06. $x+y=\sqrt{7}$ এবং $y=x-\sqrt{3}$ হলে, xy এর মান কত?

Sol" $x+y=\sqrt{7}$ এবং $y=x-\sqrt{3} \quad \therefore x-y=\sqrt{3}$

$\therefore xy=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=\frac{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}{4}=\frac{7-3}{4}=\frac{4}{4}=1$

$\therefore xy=1$

07. $a+b=4$ এবং $a-b=2$ হলে a^2+b^2 এর মান কত?

Sol" $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2=(4)^2+(2)^2=16+4=20$

$\Rightarrow a^2+b^2=\frac{20}{2} \quad \therefore a^2+b^2=10$

08. $P=\sin\theta$, $Q=\cos\theta$ এবং $PQ=\frac{1}{2}$ হলে, $P+Q$ এর মান কত? [৪৩তম বিসি

Sol" দেওয়া আছে, $P=\sin\theta \Rightarrow P^2=\sin^2\theta$ ..... (i)

এবং $Q=\cos\theta \Rightarrow Q^2=\cos^2\theta$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$P^2+Q^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$\Rightarrow (P+Q)^2-2.P.Q=1 \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

$\Rightarrow (P+Q)^2-2.\frac{1}{2}=1 \quad [\text{দেওয়া আছে, } PQ=\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow (P+Q)^2-1=1$

$\Rightarrow (P+Q)^2=2$

$\therefore P+Q=\pm\sqrt{2}$ **(Ans.)**

TYPE 02: মান নির্ণয়-২

01. $x+\frac{1}{x}=5$ হলে, $\frac{x}{x^2+x+1}$ এর মান কত?

Sol" $x+\frac{1}{x}=5 \quad \Rightarrow x^2+1=5x$

এখন, $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{x}{x^2+1+x}=\frac{x}{5x+x}=\frac{x}{6x}=\frac{1}{6}$ Ans.

02. $b+b^{-1}=2$ হলে, $\frac{2b}{b^2-b+1}$ এর মান-

Sol" $b+b^{-1}=2 \Rightarrow b+\frac{1}{b}=2 \quad \Rightarrow b^2+1=2b$

এখন, $\frac{2b}{b^2-b+1}=\frac{2b}{b^2+1-b}=\frac{2b}{2b-b}=\frac{2b}{b}=2$ Ans.

3. $x-\frac{6}{x}=1$ হলে, $\frac{6}{x^2+x+1}$ এর মান কত?

Sol" $x-\frac{6}{x}=1 \Rightarrow x^2-6=x \Rightarrow x^2-x-6=0$

$\Rightarrow x^2-3x+2x-6=0 \Rightarrow x(x-3)+2(x-3)=0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \quad \therefore x=3,-2$

এখন $x=3$ হলে, $\frac{6}{x^2+x+1}=\frac{6}{3^2+3+1}=\frac{6}{13}$

এবং $x=-2$ হলে, $\frac{6}{x^2+x+1}=\frac{6}{(-2)^2+(-2)+1}=\frac{6}{4-2+1}=2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{6}{13}$ অথবা, 2

4. $x-\frac{1}{x}=p$ হলে, $\frac{c}{x(x-p)}$ এর মান কত?

Sol" $x-\frac{1}{x}=p \Rightarrow x^2-1=px \Rightarrow x^2-px=1$

$\therefore \frac{c}{x(x-p)}=\frac{c}{x^2-px}=\frac{c}{1}=c$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=c$

TYPE 03: বর্গের সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা

1. $x-\frac{1}{x}=4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4+\frac{1}{x^4}=322$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol" দেওয়া আছে, $x-\frac{1}{x}=4$

বামপক্ষ $=x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2.x^2.\frac{1}{x^2}=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2.x.\frac{1}{x}\right\}^2-2$

$=\{(4)^2+2\}^2-2$ [মান বসিয়ে]

$=(16+2)^2-2=(18)^2-2=324-2=322=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad x^4+\frac{1}{x^4}=322$ (প্রমাণিত)

2. $2x+\frac{2}{x}=3$ হলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান কত? [১৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol" দেওয়া আছে, $2x+\frac{2}{x}=3 \Rightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)=3 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2$ [মান বসিয়ে]

$=\frac{9}{4}-2=\frac{9-8}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{1}{4}$.

03. $a+\frac{1}{a}=2$ হলে, দেখাও যে, $a^2+\frac{1}{a^2}=a^4+\frac{1}{a^4}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর জন্য

Sol" দেওয়া আছে, $a+\frac{1}{a}=2$

বামপক্ষ $=a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2.a.\frac{1}{a}=(2)^2-2=4-2=2$

ডানপক্ষ $=a^4+\frac{1}{a^4}=(a^2)^2+\left(\frac{1}{a^2}\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2.a^2.\frac{1}{a^2}=\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2.a.\frac{1}{a}\right\}^2-2$

$=\{(2)^2-2\}^2-2=(4-2)^2-2=(2)^2-2=4-2=2$

$\therefore\ a^2+\frac{1}{a^2}=a^4+\frac{1}{a^4}$ (দেখানো হলো)

04. $2x+\frac{2}{x}=3$ হলে $x^4+\frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় করুন। [২৩তম;

Sol" $2x+\frac{2}{x}=3 \Rightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)=3 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2+2.x.\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{9}{4}-2$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{9-8}{4} \Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^4+2.x^2.\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}=\frac{1}{16} \Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=\frac{1}{16}-2$ 7.

$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=\frac{-31}{16}$

Ans: $\frac{-31}{16}$

বিকল্প পদ্ধতি:

$2x+\frac{2}{x}=3 \Rightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)=3 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ 8.

এখন, $x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2.x^2.\frac{1}{x^2}$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}\right\}^2-2=\left(\frac{9-8}{4}\right)^2-2=\frac{1}{16}-2=\frac{1-32}{16}=\frac{-31}{16}$ **Ans:**

05. $x+\frac{1}{x}=5$ হলে, $x^4+\frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় করুন। [৪১তম;9.

Sol" দেওয়া আছে, $x+\frac{1}{x}=5$

$\therefore\ x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2.x^2.\frac{1}{x^2}$ $[\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab]$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}\right\}^2-2=\{(5)^2-2\}^2-2$ [মান বসিয়ে]

$=(25-2)^2-2=(23)^2-2=529-2=527$ **(Ans.)**

10. $a-\frac{1}{a}=3$ হলে, $a^2+\frac{1}{a^2}=?$

Sol" $a^2+\frac{1}{a^2}=(a)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2.a.\frac{1}{a}$

$=(3)^2+2=9+2=11$

11. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ হলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

Sol" দেয়া আছে, $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

তাহলে, $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ [লব ও হরকে $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} \Rightarrow \frac{1}{x}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

প্রদত্ত রাশি, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-2$

$=(2\sqrt{3})^2-2=4.3-2=12-2=10$

12. $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ হলে, $x^2-\frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

Sol" $x^2-\sqrt{5}x+1=0 \Rightarrow x^2+1=\sqrt{5}x \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$

আবার, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4.x.\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(\sqrt{5})^2-4 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=1$

$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{5}.1=\sqrt{5}$

13. $x^4+2x^2+1=5x^2$ হলে, $x+\frac{1}{x}=$ কত?

Sol" $x^4+2x^2+1=5x^2 \Rightarrow \frac{x^4+2x^2+1}{x^2}=5$

$\Rightarrow \frac{x^4}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=5 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=5$

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=5-2 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}=3$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3+2 \therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$

14. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ হলে, $x^4+\frac{1}{x^4}=?$

Sol^n দেয়া আছে, $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$

$\therefore \quad x^4+\frac{1}{x^4} = (x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2.x^2.\frac{1}{x^2} = \left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}\right\}^2-2$

$= \{(\sqrt{2})^2-2\}^2-2 \quad = (2-2)^2-2 = 0-2 \quad = -2$

15. যদি $a-\frac{1}{a}=m$ হয়, তবে প্রমাণ কর: $a^4+\frac{1}{a^4}=m^4+4m^2+2$

Sol^n দেয়া আছে, $a-\frac{1}{a}=m$

$\therefore \quad a+\frac{1}{a}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4.a.\frac{1}{a}}=\sqrt{(m)^2+4}=\sqrt{m^2+4}$

$\therefore a^4+\frac{1}{a^4}=(a^2)^2+\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2.a^2.\frac{1}{a^2} = \left\{(a)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2\right\}^2-2$

$= \left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2.a.\frac{1}{a}\right\}^2-2 \quad = \left\{\left(\sqrt{m^2+4}\right)^2-2\right\}^2-2$

$= (m^2+4-2)^2-2 = (m^2+2)^2-2$

$= m^4+4m^2 \quad 4-2 = m^4+4m^2+2$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

16. $a-\frac{1}{a}=3$ হলে $a^4+\frac{1}{a^4}=?$

Sol^n $a^4+\frac{1}{a^4}=(a^2)^2+\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = \left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2.a^2.\frac{1}{a^2}$

$= \left\{(a)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2\right\}^2-2 \quad = \left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2.a.\frac{1}{a}\right\}^2-2$

$= \{(3)^2+2\}^2-2 \quad = (11)^2-2 = 121-2 \quad = 119$

Note: প্রশ্নটি এভাবেও আসতে পারে- $p=3+\frac{1}{p}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^4=119-\frac{1}{p^4}$

17. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$ হলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

Sol^n দেয়া আছে, $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$

$\Rightarrow (\sqrt{x})^2+(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+2.\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}=9$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}+2=9 \quad \Rightarrow x+\frac{1}{x}=7 \quad \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2.x.\frac{1}{x}=49$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=49$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=47$ (Ans.)

18. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6$ হলে $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2$ এর মান কত?

Sol" দেয়া আছে, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6$

$\therefore \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2=\left(\frac{a}{b}\right)^2+2.\frac{a}{b}.\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=(6)^2=36$

TYPE 04: সূত্রের সাহায্যে প্রমাণ

01. $a+b=\sqrt{7}$ এবং $a-b=\sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab\,(a^2+b^2)=24$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" দেওয়া আছে, $a+b=\sqrt{7}$ এবং $a-b=\sqrt{5}$

বামপক্ষ $= 8ab(a^2+b^2)=4ab.2(a^2+b^2)$

$=\{(a+b)^2-(a-b)^2\}\ \{(a+b)^2+(a-b)^2\}$

$=\{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2\}\{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2\}$ [মান বসিয়ে]

$=(7-5)(7+5)=2\times 12=24=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $8ab\,(a^2+b^2)=24$ (প্রমাণিত)

02. প্রমাণ কর যে, $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab\,(a^2+b^2)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (উদাহরণের অংক নং-০৮)]

Sol" বামপক্ষ $=(a+b)^4-(a-b)^4=\{(a+b)^2\}^2-\{(a-b)^2\}^2$

$=\{(a+b)^2+(a-b)^2\}\ \{(a+b)^2-(a-b)^2\}$

$=2(a^2+b^2)\times 4ab=8ab\,(a^2+b^2)=$ ডানপক্ষ

$\therefore (a+b)^4-(a-b)^4=8ab\,(a^2+b^2)$ (প্রমাণিত)

TYPE 05: মান নির্ণয়-৩

01. $a^4+a^2b^2+b^4=8$ এবং $a^2+ab+b^2=4$ হলে, (ক) a^2+b^2; (খ) ab-এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol"

(ক) এখানে, $a^4+a^2b^2+b^4=8$

বা, $(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2=8$

বা, $(a^2+b^2)^2-(ab)^2=8$

বা, $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=8$

বা, $4(a^2-ab+b^2)=8$ [মান বসিয়ে]

বা, $a^2-ab+b^2=\frac{8}{4}$

বা, $a^2-ab+b^2=2$

এখন, $a^2+ab+b^2=4$ এবং $a^2-ab+b^2=2$ যোগ করে পাই, $2(a^2+b^2)=6$

বা, $a^2+b^2=\frac{6}{2}$ $\therefore a^2+b^2=3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 3.

(খ) (ক) হতে প্রাপ্ত, $a^2 + b^2 = 3$ এবং $a^2 - ab + b^2 = 2$

বা, $a^2 + b^2 - ab = 2$

বা, $3 - ab = 2$

বা, $-ab = 2 - 3$

বা, $-ab = -1$

$\therefore \quad ab = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 1.

02. যদি $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হয়, তবে $a^2 + b^2$ এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (উদাহরণের অংক নং-০৭)]

Sol^n দেওয়া আছে, $a^2 + ab + b^2 = 3$.....(i)

এবং $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$

বা, $(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = 3$

বা, $(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 3$

বা, $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = 3$

বা, $3(a^2 - ab + b^2) = 3$

বা, $a^2 - ab + b^2 = 1$.....(ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2(a^2 + b^2) = 4$ বা, $a^2 + b^2 = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 2.

TYPE 06: তিনপদী বর্গের সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা

01. $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol^n দেওয়া আছে, $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$

প্রদত্ত রাশি $= a^2 + b^2 + c^2$

$= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$= (9)^2 - 2.31$ [মান বসিয়ে]

$= 81 - 62 = 19$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 19.

02. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol^n দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$

প্রদত্ত রাশি $= (a + b + c)^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$

$= 9 + 2.8$ [মান বসিয়ে]

$= 9 + 16 = 25$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 25.

03. $a + b + c = 15$, $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে $ab + bc + ca$ এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

Sol" দেওয়া আছে, $a + b + c = 15$, $a^2 + b^2 + c^2 = 83$, $ab + bc + ca = ?$

এখন, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$$\therefore \quad ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

$$= \frac{15^2 - 83}{2}$$

$$= \frac{225 - 83}{2}$$

$$= \frac{142}{2} = 71$$

04. $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx =$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol" দেওয়া আছে, $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$

প্রদত্ত রাশি $= 9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$

$= (3x)^2 + (-4y)^2 + (2z)^2 + 2.3x.(-4y) + 2.(-4y).2z + 2.2z.3x$

$= (3x - 4y + 2z)^2$

$= (3 \times 3 - 4 \times 4 + 2 \times 5)^2$ [x, y এবং z এর মান বসিয়ে]

$= (9 - 16 + 10)^2$

$= (19 - 16)^2 = 3^2 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 9.

05. $a+b+c= 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 =$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" দেওয়া আছে, $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

আমরা জানি, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

বা, $14 = (6)^2 - 2(ab + bc + ca)$ [মান বসিয়ে]

বা, $14 = 36 - 2(ab + bc + ca)$

বা, $2(ab + bc + ca) = 36 - 14$

বা, $ab + bc + ca = \frac{22}{2}$

$\therefore \quad ab + bc + ca = 11$

প্রদত্ত রাশি $= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$

$= 2.14 - 2.11$ [মান বসিয়ে]

$= 28 - 22 = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 6.

06. $x+y+z=12$ এবং $x^2+y^2+z^2=50$ হলে, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ = কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (উদাহরণের কাজের অংক)]

Sol" দেওয়া আছে, $x+y+z=12$ এবং $x^2+y^2+z^2=50$

আমরা জানি, $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

বা, $50=(12)^2-2(xy+yz+zx)$ [মান বসিয়ে]

বা, $50=144-2(xy+yz+zx)$

বা, $2(xy+yz+zx)=144-50$

বা, $xy+yz+zx=\frac{94}{2}$

$\therefore \quad xy+yz+zx=47$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$=x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2$

$=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$

$=2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)$

$=2.50-2.47$ [মান বসিয়ে]

$=100-94=6$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 6.

07. $a+b+c=2$ এবং $ab+bc+ac=1$ হলে, $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$ = কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (উদাহরণের অংক নং-১০)]

Sol" দেওয়া আছে, $a+b+c=2$ এবং $ab+bc+ac=1$

$\therefore (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

$=a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ac+a^2$

$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)+(a^2+b^2+c^2)$

$=(a+b+c)^2+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$

$=2^2+2^2-2\times1$

$=4+4-2=8-2=6$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 6.

TYPE 07: কোন রাশিকে দুইটি রাশির বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ

01. $2p^2-15p-27$ রাশিটিকে দুইটি রাশির বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ করুন। [৩৪তম বিসিএস]

Sol" $2p^2-15p-27=2p^2-18p+3p-27$

$=2p(p-9)+3(p-9)$

$=(2p+3)(p-9)$

ধরি, $2p+3=a$

$p-9=b$

আমরা জানি, $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$=\left(\frac{2p+3+p-9}{2}\right)^2-\left(\frac{2p+3-p+9}{2}\right)^2$ [মান বসিয়ে]

$=\left(\frac{3p-6}{2}\right)^2-\left(\frac{p+12}{2}\right)^2$ **Ans.**

02. $x^2 + 10x + 24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" $x^2 + 10x + 24 = x^2 + 2.x.5 + 5^2 - 1 = (x+5)^2 - 1^2$

বিকল্প পদ্ধতি:

$x^2 + 10x + 24 = x^2 + 6x + 4x + 24 = x(x+6) + 4(x+6)$

$= (x+6)(x+4)$

ধরি, $x + 6 = a$ এবং $x + 4 = b$

আমরা জানি $= ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{x+6+x+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+6-x-4}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{2x+10}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \left\{\frac{2(x+5)}{2}\right\}^2 - 1^2 = (x+5)^2 - 1^2$

03. দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করুন: $(3x + 5y)(7x - 5y)$

[২৭তম বিসিএস]

Sol" $(3x+5y)(7x-5y) = \left(\frac{3x+5y+7x-5y}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x+5y-7x+5y}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{10x}{2}\right)^2 - \left(\frac{10y-4x}{2}\right)^2 = (5x)^2 - (5y-2x)^2$ **(Ans.)**

04. $(a + 2b)(3a + 2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" ধরি, $a + 2b = x$ এবং $3a + 2c = y$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{a+2b+3a+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+2b-3a-2c}{2}\right)^2$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{4a+2b+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{2b-2a-2c}{2}\right)^2$

$= \left\{\frac{2(2a+b+c)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2(b-a-c)}{2}\right\}^2$

$= (2a+b+c)^2 - (b-a-c)^2.$

05. $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.১ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol" ধরি, $2x + 3y = a$ এবং $4x - 5y = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{2x+3y+4x-5y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x+3y-4x+5y}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{6x-2y}{2}\right)^2 - \left(\frac{8y-2x}{2}\right)^2 = \left\{\frac{2(3x-y)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2(4y-x)}{2}\right\}^2$

$= (3x-y)^2 - (4y-x)^2.$

TYPE 08: ঘনের সূত্র ব্যবহার করে মান নির্ণয়

01. $x - y = 7$ এবং $xy = 15$ হলে, $(x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$ এর মান কত? [১৭তম বিসিএস]

Sol: প্রদত্ত রাশি, $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 7^2 + 2.15 = 49 + 30 = 79$

দ্বিতীয় রাশি $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$

$= (7)^3 + 3.15.7$

$= 343 + 315 = 658$

$\therefore (x^2 + y^2)(x^3 - y^3) = 79 \times 658 = 51982$ **Ans:**

02. $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে, $a^3 - b^3$ এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol: দেওয়া আছে, $a - b = 5$ এবং $ab = 36$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

$= (5)^3 + 3.36.5$ [মান বসিয়ে]

$= 125 + 540 = 665$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 665.

03. যদি $a^3 - b^3 = 513$ এবং $a - b = 3$ হয়, তবে ab এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol: দেওয়া আছে, $a^3 - b^3 = 513$ এবং $a - b = 3$

আমরা জানি, $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

বা, $(3)^3 = 513 - 3ab \cdot 3$ [মান বসিয়ে]

বা, $27 = 513 - 9ab$

বা, $9ab = 513 - 27$

বা, $ab = \frac{486}{9} = 54$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 54.

04. $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে, (ক) $a^2 - ab + b^2$ এবং (খ) $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol: (ক) দেওয়া আছে, $a + b = 3$ এবং $ab = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 - ab + b^2 = (a^2 + b^2) - ab = (a + b)^2 - 2ab - ab$

$= (a + b)^2 - 3ab = 3^2 - 3 \times 2$ [মান বসিয়ে] $= 9 - 6 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 3.

(খ) দেওয়া আছে, $a + b = 3$ এবং $ab = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$= (3)^3 - 3.2.3$ [মান বসিয়ে]

$= 27 - 18 = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 9.

05. $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে,
(ক) $a^2 + ab + b^2$ এবং (খ) $a^3 - b^3$ এর মান নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $a - b = 5$ এবং $ab = 36$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + ab + b^2 = (a^2 + b^2) + ab = (a - b)^2 + 2ab + ab$
$= (a - b)^2 + 3ab = 5^2 + 3 \times 36$ [মান বসিয়ে]
$= 25 + 108 = 133$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 133

(খ) দেওয়া আছে, $a - b = 5$ এবং $ab = 36$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b) = 5^3 + 3.36.5$ [মান বসিয়ে]
$= 125 + 540 = 665$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 665.

06. যদি $x - y = 8$ এবং $xy = 5$ হয়, তবে $x^3 - y^3 + 8(x + y)^2$ এর মান কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (উদাহরণের অংক নং-১৫)]

Sol" দেওয়া আছে, $x - y = 8$ এবং $xy = 5$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 + 8(x + y)^2$
$= (x - y)^3 + 3xy\,(x - y) + 8\{(x - y)^2 + 4xy\}$
$= (8)^3 + 3.5.8 + 8(8^2 + 4.5)$ [মান বসিয়ে]
$= 512 + 120 + 8.(64 + 20)$
$= 632 + 8.84 = 632 + 672 = 1304$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 1304

07. যদি $a + b = 5$ এবং $ab = 6$ হয়, তবে $a^3 + b^3 + 4(a - b)^2$ এর মান কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (উদাহরণের কাজের অংক)]

Sol" দেওয়া আছে, $a + b = 5$ এবং $ab = 6$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^3 + b^3 + 4(a - b)^2$
$= (a + b)^3 - 3ab\,(a + b) + 4\{(a + b)^2 - 4ab\}$
$= (5)^3 - 3.6.5 + 4(5^2 - 4.6)$ [মান বসিয়ে]
$= 125 - 90 + 4.(25 - 24)$
$= 35 + 4.1 = 35 + 4 = 39$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 39

08. যদি $x - y = 8$ এবং $xy = 65$ হয়, তবে $x^3 - y^3 - 16(x - y)^2$ এর মান কত?

Sol" দেওয়া আছে, $x - y = 8$ এবং $xy = 65$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 - 16(x - y)^2$
$= (x - y)^3 + 3xy\,(x - y) - 16(x - y)^2$
$= (8)^3 + 3.65.8 - 16.8^2$ [মান বসিয়ে]
$= 512 + 1560 - 1024 = 1048$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 1048

TYPE 09: ঘনের সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা-১

01. $m+\frac{1}{m}=a$ হলে, $m^3+\frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" দেওয়া আছে, $m+\frac{1}{m}=a$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=m^3+\frac{1}{m^3}=\left(m+\frac{1}{m}\right)^3-3.m.\frac{1}{m}.\left(m+\frac{1}{m}\right)$

$=a^3-3a$ [মান বসিয়ে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=a^3-3a$.

02. $x-\frac{1}{x}=p$ হলে, $x^3-\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" দেওয়া আছে, $x-\frac{1}{x}=p$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3.x.\frac{1}{x}.\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=p^3+3p$ [মান বসিয়ে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=p^3+3p$.

03. যদি $a-\frac{1}{a}=1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3-\frac{1}{a^3}=4$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" দেওয়া আছে, $a-\frac{1}{a}=1$

বামপক্ষ $=a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3.a.\frac{1}{a}.\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=(1)^3+3.1$ [মান বসিয়ে] $=1+3=4=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad a^3-\frac{1}{a^3}=4$ (দেখনো হলো)

04. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ হলে $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান কত?

Sol" $\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad =(\sqrt{3})^3-3.\sqrt{3} \quad =3\sqrt{3}-3\sqrt{3} \quad =0$

05. $a-\frac{1}{a}=3$ হলে, $a^3+\frac{1}{a^3}$ এর মান কত?

Sol" দেয়া আছে, $a-\frac{1}{a}=3$

$\therefore \quad a+\frac{1}{a}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4.a.\frac{1}{a}}=\sqrt{(3)^2+4}=\sqrt{13}$

$\therefore a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3.a.\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right) \quad =(\sqrt{13})^3-3.\sqrt{13}$

$=13.\sqrt{13}-3.\sqrt{13}=10\sqrt{13}$

TYPE 09: ঘনের সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা-১

01. $m+\frac{1}{m}=a$ হলে, $m^3+\frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" দেওয়া আছে, $m+\frac{1}{m}=a$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= m^3+\frac{1}{m^3}=\left(m+\frac{1}{m}\right)^3-3.m.\frac{1}{m}.\left(m+\frac{1}{m}\right)$

$= a^3-3a$ [মান বসিয়ে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= a^3-3a.$

02. $x-\frac{1}{x}=p$ হলে, $x^3-\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" দেওয়া আছে, $x-\frac{1}{x}=p$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3.x.\frac{1}{x}.\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$= p^3+3p$ [মান বসিয়ে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= p^3+3p.$

03. যদি $a-\frac{1}{a}=1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3-\frac{1}{a^3}=4$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" দেওয়া আছে, $a-\frac{1}{a}=1$

বামপক্ষ $= a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3.a.\frac{1}{a}.\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$= (1)^3+3.1$ [মান বসিয়ে] $= 1+3=4=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad a^3-\frac{1}{a^3}=4$ (দেখনো হলো)

04. $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ হলে $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান কত?

Sol" $\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad =(\sqrt{3})^3-3.\sqrt{3} \quad =3\sqrt{3}-3\sqrt{3} \quad =0$

05. $a-\frac{1}{a}=3$ হলে, $a^3+\frac{1}{a^3}$ এর মান কত?

Sol" দেয়া আছে, $a-\frac{1}{a}=3$

$\therefore \quad a+\frac{1}{a}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4.a.\frac{1}{a}}=\sqrt{(3)^2+4}=\sqrt{13}$

$\therefore a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3.a.\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right) \quad =(\sqrt{13})^3-3.\sqrt{13}$

$= 13.\sqrt{13}-3.\sqrt{13}=10\sqrt{13}$

06. $x-\frac{1}{x}=7$ হলে $x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3$ এর মান কত?

Sol" $x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3.x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $=7^3+3.7=343+21=364$

07. $2x-\frac{2}{x}=3$ হলে, দেখাও যে, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক২

Sol" দেওয়া আছে, $2x-\frac{2}{x}=3$

বামপক্ষ $=8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=8x^3-\frac{8}{x^3}=(2x)^3-\left(\frac{2}{x}\right)^3$

$=\left(2x-\frac{2}{x}\right)^3+3.2x.\frac{2}{x}.\left(2x-\frac{2}{x}\right)$

$=3^3+3.2.2.3$ [মান বসিয়ে]

$=27+36=63=$ ডানপক্ষ

$\therefore 8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$ (দেখানো হলো)

08. যদি $2x=\frac{2}{x}+3$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $8x^3=\frac{8}{x^3}+63.$ [৩৩ তম বিসি

Sol" দেওয়া আছে, $2x=\frac{2}{x}+3 \Rightarrow 2x-\frac{2}{x}=3 \Rightarrow \left(2x-\frac{2}{x}\right)^3=(3)^3$

$\Rightarrow (2x)^3-\left(\frac{2}{x}\right)^3-3.2x.\frac{2}{x}\left(2x-\frac{2}{x}\right)=27$

$\Rightarrow 8x^3-\frac{8}{x^3}-12\times 3=27$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 8x^3-\frac{8}{x^3}=27+36 \Rightarrow 8x^3-\frac{8}{x^3}=63$

$\therefore 8x^3=\frac{8}{x^3}+63$ **(প্রমাণিত)**

09. $2x^2-3x=2$ হলে, $x^3-\frac{1}{x^3}$ এ মান নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসি

Sol" দেওয়া আছে, $2x^2-3x=2 \Rightarrow 2x^2-2=3x$

$\Rightarrow \frac{2x^2-2}{x}=\frac{3x}{x}$ [উভয় পক্ষকে x দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{2x^2}{x}-\frac{2}{x}=3 \Rightarrow 2x-\frac{2}{x}=3 \Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{x}\right)=3 \therefore x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$

এখন, $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\times\frac{3}{2}$

$=\frac{27}{8}+\frac{9}{2}=\frac{27+36}{8}=\frac{63}{8}$ **Ans.**

10. $x^2-\sqrt{3}x+1=0$ হলে $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান কত? [৩২তম বিসিএস]

Sol" $x^2-\sqrt{3}x+1=0$

$\Rightarrow x^2+1=\sqrt{3}x$

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$

এখন, $\frac{x^6+1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}$ $=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{3})^3-3.1.\sqrt{3}$ $=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0$ **Ans.**

11. যদি $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=0$

Sol" দেওয়া আছে, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$

বামপক্ষ $=a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3.a.\frac{1}{a}.\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\left(a+\frac{1}{a}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=3\left(a+\frac{1}{a}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$ [মান বসিয়ে] $=0=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $a^3+\frac{1}{a^3}=0$ (দেখানো হলো)

TYPE 10: ঘনের সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা-২

01. $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6-1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" দেওয়া আছে, $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

$\therefore$ $\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}$ [লব ও হরকে $(\sqrt{6}-\sqrt{5})$ দ্বারা গুণ করে]

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

$\therefore a-\frac{1}{a}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{a^6-1}{a^3}$ $=a^3-\frac{1}{a^3}$

$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3.a.\frac{1}{a}.\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=(2\sqrt{5})^3+3.2\sqrt{5}$ $=40\sqrt{5}+6\sqrt{5}=46\sqrt{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $46\sqrt{5}$

02. যদি $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (উদাহরণের অংক নং-১)]

Sol" দেওয়া আছে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \text{ [লব ও হরকে } (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^3 - 3.a.\frac{1}{a}.\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$= (2\sqrt{3})^3 - 3.2\sqrt{3} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 8.3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$= 18\sqrt{3} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3} \text{ (প্রমাণিত)}$$

03. যদি $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ হয়, তবে $x^3 + \frac{8}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (উদাহরণের কাজের অংক)]

Sol" দেওয়া আছে, $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$$\therefore \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= 2.\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \text{ [লব ও হরকে } (\sqrt{5}-\sqrt{3}) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$= 2.\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = 2.\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$\therefore x + \frac{2}{x} = \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore x^3 + \frac{8}{x^3}$$

$$= \left(x+\frac{2}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{2}{x}.\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{5})^3 - 6.2\sqrt{5} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 8.5\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$$

$$= 40\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 28\sqrt{5} \textbf{ (Ans.)}$$

04. $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ হলে, $\frac{a^2+2}{2a}$ এর মান নির্ণয় করুন। [৪৩তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \quad [\text{লব ও হরকে } (\sqrt{5}-\sqrt{3}) \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

এখন, $\frac{a^2+2}{2a} = \frac{a^2}{2a} + \frac{2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

05. $x + \frac{1}{x} = 3$ হলে, $x^9 + \frac{1}{x^9}$ এর মান নির্ণয় করুন। [৪৩তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = 3$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \quad [\text{উভয়পক্ষে ঘন করে}]$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3 = 27 \quad \left[\because x + \frac{1}{x} = 3\right]$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27 \qquad \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18$$

$$\Rightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^3 = (18)^3 \quad [\text{উভয়পক্ষে ঘন করে}]$$

$$\Rightarrow (x^3)^3 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^3 + 3.x^3 \cdot \frac{1}{x^3}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 5822$$

$$\Rightarrow x^9 + \frac{1}{x^9} + 3.\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 5822$$

$$\Rightarrow x^9 + \frac{1}{x^9} + 3.18 = 5822 \left[\because x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\right]$$

$$\Rightarrow x^9 + \frac{1}{x^9} + 54 = 5822$$

$$\Rightarrow x^9 + \frac{1}{x^9} = 5822 - 54 = 5778 \text{ (Ans.)}$$

06. $a^3+\frac{1}{a^3}=18\sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

Sol" দেওয়া আছে, $a^3+\frac{1}{a^3}=18\sqrt{3}$ ..... (i)

$$\Rightarrow \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)^2=(18\sqrt{3})^2$$
$$\Rightarrow \left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)^2+4.a^3.\frac{1}{a^3}=972$$
$$\Rightarrow \left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)^2+4=972$$
$$\Rightarrow \left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)^2=968$$
$$\Rightarrow \left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)^2=484\times 2$$
$$\Rightarrow \left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)^2=(22\sqrt{2})^2$$

$\therefore \quad a^3-\frac{1}{a^3}=22\sqrt{2}$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2a^3=18\sqrt{3}+22\sqrt{2}$

$$\Rightarrow a^3=9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow a^3=3\sqrt{3}+9\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow a^3=(\sqrt{3})^3+3.(\sqrt{3})^2.\sqrt{2}+3.\sqrt{3}.(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3$$
$$\Rightarrow a^3=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$$
$$\Rightarrow a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$ **(প্রমাণিত)**

TYPE 11: বর্গ ও ঘন উভয় সূত্রের ব্যবহার সংক্রান্ত সমস্যা

01. যদি $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ হয় তবে $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসি

Sol" দেওয়া আছে, $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}=7$$
$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=7$$
$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \qquad \Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$$

এখন, $\frac{x^6+1}{x^3}=\frac{x^3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3}$

$$=x^3+\frac{1}{x^3}$$
$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3.1.3=27-9=18$$ **Ans.**

$x+\frac{1}{x}=3$ হলে, $x^4+x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় করুন। [৩৬তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $x+\frac{1}{x}=3$

এখন, $x^4+x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$

$=x^4+\frac{1}{x^4}+x^3+\frac{1}{x^3}+x^2+\frac{1}{x^2}$

$=(x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2+x^3+\frac{1}{x^3}+x^2+\frac{1}{x^2}$

$=\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\frac{1}{x^2}\right\}+\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}\right\}$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\frac{1}{x}\right\}^2-2+(3)^3-3.3+3^2-2$

$=\{(3^2-2)^2-2+27-9+9-2\}$

$=49+23=72$ **Ans.**

3. $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ হলে, $\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন। [৩৫তম বিসিএস]

Sol" $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$ {$(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে}

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\therefore y^2+\frac{1}{y^2}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{y}$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-2$

$=(2\sqrt{3})^2-2=4\times3-2=10$

এবং $y^3-\frac{1}{y^3}=\left(y-\frac{1}{y}\right)^3+3\cdot y\cdot\frac{1}{y}\left(y-\frac{1}{y}\right)$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{2})^3+3\times2\sqrt{2}$

$=8\times2\sqrt{2}+6\sqrt{2}$

$=16\sqrt{2}+6\sqrt{2}$

$=22\sqrt{2}$

$\therefore \left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)=10\times22\sqrt{2}=220\sqrt{2}$ **(Ans.)**

04. $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ হলে, $y^5 - \frac{1}{y^5}$ এর মান নির্ণয় করুন।

Sol^n $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$ {$(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে}

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\therefore y - \frac{1}{y} = \sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore y^2 + \frac{1}{y^2} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{y}$

$= (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - 2$

$= (2\sqrt{3})^2 - 2 = 4\times3 - 2 = 10$

এবং $y^3 - \frac{1}{y^3} = \left(y - \frac{1}{y}\right)^3 + 3 \cdot y \cdot \frac{1}{y}\left(y - \frac{1}{y}\right)$

$= (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$= (2\sqrt{2})^3 + 3\times2\sqrt{2} = 8\times2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$

$= 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$

$\therefore \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^3 - \frac{1}{y^3}\right) = 10\times22\sqrt{2}$

$\Rightarrow y^5 - \frac{1}{y} + y - \frac{1}{y^5} = 220\sqrt{2}$

$\Rightarrow y^5 - \frac{1}{y^5} + \left(y - \frac{1}{y}\right) = 220\sqrt{2}$

$\Rightarrow y^5 - \frac{1}{y^5} + 2\sqrt{2} = 220\sqrt{2}$

$\Rightarrow y^5 - \frac{1}{y^5} = 218\sqrt{2}$ **(Ans.)**

05. $a - \frac{1}{a} = 2$ হলে, প্রমাণ করুণ যে, $a^5 - \frac{1}{a^5} = 82$.

Sol^n দেয়া আছে, $a - \frac{1}{a} = 2$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4.a.\frac{1}{a}} = \sqrt{(2)^2+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3.a.\frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right) = (2\sqrt{2})^3 - 3.2\sqrt{2}$

$= 8.2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 16\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

$\therefore \quad a^2-\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)=2\sqrt{2}.2=4\sqrt{2}$

$\therefore \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)=10\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad a^5-a+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^5}=40\times 2$

$\Rightarrow \quad a^5-\frac{1}{a^5}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=80$

$\Rightarrow \quad a^5-\frac{1}{a^5}-2=80$

$\Rightarrow \quad a^5-\frac{1}{a^5}=82$ (প্রমাণিত)

06. $x+\frac{1}{x}=3$ হলে, প্রমাণ করুণ যে, $x^7+\frac{1}{x^7}=843.$

Sol^n দেয়া আছে, $x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore \quad x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2.x^2.\frac{1}{x^2}$ [$\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$]

$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}\right\}^2-2$

$=\{(3)^2-2\}^2-2$ [মান বসিয়ে]

$=(9-2)^2-2$

$=(7)^2-2$

$=49-2$

$=47$

$\therefore \quad x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times 3$

$=27-9$

$=18$

$\therefore \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=47\times 18$

$\Rightarrow \quad x^7+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^7}=846$

$\Rightarrow \quad x^7+\frac{1}{x^7}+\left(x+\frac{1}{x}\right)=846$

$\Rightarrow \quad x^7+\frac{1}{x^7}+3=846$

$\Rightarrow \quad x^7+\frac{1}{x^7}=843$ (প্রমাণিত)

07. $\sqrt{3}-\frac{1}{x}=x$ হলে $x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=?$

Sol" $\sqrt{3}-\frac{1}{x}=x \quad \Rightarrow \quad x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$

$\therefore \quad x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)+x+\frac{1}{x}$

$=(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3}+\sqrt{3} \quad =3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$**(Ans.)**

08. যদি $4a^2+\frac{1}{a^2}=2$ হয়, তবে $8a^3+\frac{1}{a^3}$ এর মান কত?

Sol" $4a^2+\frac{1}{a^2}=2$

$\Rightarrow \quad (2a)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=2$

$\Rightarrow \quad \left(2a+\frac{1}{a}\right)^2-2.2a.\frac{1}{a}=2$

$\Rightarrow \quad \left(2a+\frac{1}{a}\right)^2=2+4$

$\Rightarrow \quad \left(2a+\frac{1}{a}\right)^2=6$

$\therefore \quad 2a+\frac{1}{a}=\sqrt{6}$

এখন, $8a^3+\frac{1}{a^3}=(2a)^3+\left(\frac{1}{a}\right)^3=\left(2a+\frac{1}{a}\right)^3-3.2a.\frac{1}{a}\left(2a+\frac{1}{a}\right)$

$=(\sqrt{6})^3-6.\sqrt{6} \quad =6\sqrt{6}-6\sqrt{6}=0$ **(Ans.)**

09. $2x-\frac{1}{3x}=5$ হলে, $4x^2+\frac{1}{9x^2}$ এবং $8x^3-\frac{1}{27x^3}$ এর মান কত?

Sol" দেওয়া আছে, $2x-\frac{1}{3x}=5$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=4x^2+\frac{1}{9x^2}=(2x)^2+\left(\frac{1}{3x}\right)^2$

$=\left(2x-\frac{1}{3x}\right)^2+2.2x.\frac{1}{3x}=5^2+\frac{4}{3}$ [মান বসিয়ে]

$=25+\frac{4}{3}=\frac{75+4}{3}=\frac{79}{3}$

এবং $8x^3-\frac{1}{27x^3}=(2x)^3-\left(\frac{1}{3x}\right)^3$

$=\left(2x-\frac{1}{3x}\right)^3+3.2x.\frac{1}{3x}\left(2x-\frac{1}{3x}\right)=5^3+2.5$ [মান বসিয়ে]

$=125+10=135$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{79}{3}$ এবং 135

TYPE 12: সৃজনশীল প্রশ্ন

1. $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ যেখানে $x \neq 0$

(ক) প্রমাণ করুন যে, $x^2 - \sqrt{3}x = 1$

(খ) প্রমাণ করুন যে, $23\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$

(গ) $x^6 + \frac{1}{x^6}$ এর মান নির্ণয় করুন। ৩৮তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol^n (ক) দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x^2 - 1 = \sqrt{3}x \quad \Rightarrow x^2 - \sqrt{3}x = 1$ (প্রমাণিত)

(খ) দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$

এখন, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.x.\frac{1}{x} = (\sqrt{3})^2 + 2 = 3 + 2 = 5$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2.x^2.\frac{1}{x^2}$$

$$= \left\{(x)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^2 - 2$$

$$= \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.x.\frac{1}{x}\right\}^2 - 2$$

$$= \{(\sqrt{3})^2 + 2\}^2 - 2 = (5)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

$\therefore$ বামপক্ষ $= 23\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 23 \times 5 = 115$

ডানপক্ষ $= 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = 5 \times 23 = 115$

$\therefore 23\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$

$$\therefore x^6 + \frac{1}{x^6} = (x^3)^2 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 = \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2 + 2.x^3.\frac{1}{x^3}$$

$$= \left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3.x.\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]^2 + 2$$

$$= \left[(\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3}\right]^2 + 2$$

$$= (3\sqrt{3} + 3\sqrt{3})^2 + 2$$

$$= 36 \times 3 + 2 = 108 + 2 = 110$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: 110

02. $x + y = 5$, $xy = 6$ হলে এবং $x > y$ হলে,
(ক) $2(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।
(খ) $x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।
(গ) $x^5 + y^5$ এর মান নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (উদাহরণের অংক নং-১)]*

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $x + y = 5$ এবং $xy = 6$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= 2(x^2 + y^2) = 2\{(x+y)^2 - 2xy\}$
$= 2\{(5)^2 - 2\times6\}$ [মান বসিয়ে] $= 2(25 - 12) = 2 \times 13 = 26$
$\therefore$ নির্ণেয় মান 26

(খ) দেওয়া আছে, $x + y = 5$ এবং $xy = 6$
আমরা জানি, $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 5^2 - 4\times6 = 25 - 24 = 1$
$\therefore x - y = \pm 1$
যেহেতু $x > y$ সেহেতু $x - y$ কখনই ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore x - y = 1$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2)$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y) - \frac{3}{2}\times2(x^2+y^2)$$

$$= (1)^3 + 3\times6\times1 - \frac{3}{2}\times26 \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$= 1 + 18 - 39$$
$$= -20$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান -20

(গ) দেওয়া আছে, $x + y = 5$.....(i)
(খ হতে) $x - y = 1$.....(ii)
(i) + (ii) হতে পাই, $2x = 6 \quad \therefore x = 3$
(i) – (ii) হতে পাই, $2y = 4 \quad \therefore y = 2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^5 + y^5 = 3^5 + 2^5 = 243 + 32 = 275$ **(Ans.)**

TYPE 13: তিনপদী ঘনের সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা

01. যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয় তবে দেখান যে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

[৩৪তম, ২১তম বিসিএস]
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়- ২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" $x = b + c - a$ ..... (i)
$y = c + a - b$ ..... (ii)
$z = a + b - c$ ..... (iii)
(i) + (ii) + (iii) নং যোগ করে পাই,
$x + y + z = b + c - a + c + a - b + a + b - c = a + b + c$
(i) নং – (ii) নং থেকে পাই, $x - y = b + c - a - c - a + b = 2(b - a)$
(ii) নং – (iii) নং থেকে পাই, $y - z = c + a - b - a - b + c = 2(c - b)$
(iii) নং – (i) নং থেকে পাই, $z - x = a + b - c - b - c + a = 2(a - c)$
$\therefore$ L. H. S $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)[\{2(b-a)\}^2+\{2(c-b)\}^2+\{2(a-c)\}^2]$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{4(b-a)^2+4(c-b)^2+4(a-c)^2\}$

$= \frac{1}{2}.4(a+b+c)\{(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\}$

$= \frac{1}{2}.4(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$= \frac{1}{2}.4.2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= 4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

∴ L. H. S = R. H. S (দেখানো হলো)

2. যদি $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $ab+bc+ca=0$ অথবা, $a=b=c$. [৩৩ তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়- ২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" প্রদত্ত মান হতে, $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

$\Rightarrow \frac{bc+ca+ab}{abc}=0 \quad \therefore ab+bc+ca=0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$

∴ কতগুলি রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে উহাদের প্রত্যেকটি রাশির বর্গের মান শূন্য হয়। সেহেতু-

$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=0$

$\Rightarrow \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$

$\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

$\therefore a=b$

আবার,

$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2=0$

$\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$

$\therefore b=c$

অতএব, $a=b=c$

সুতরাং $ab+bc+ca=0$ অথবা, $a=b=c$ (প্রমাণিত)

TYPE 14: পূর্ণবর্গ রাশিতে রূপান্তরের শর্ত

01. $x^2 - 8x - 8y + 16 + y^2$ এর সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণ বর্গ হবে?

Sol" $x^2 - 8x - 8y + 16 + y^2$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হতে হলে এটি $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ আকারে হতে হবে।

একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা কেননা, $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$

এখন, $x^2 - 8x - 8y + 16 + y^2$

$= x^2 + y^2 + 16 - 8x - 8y$

$= x^2 + y^2 + (-4)^2 + 2.x.(-4) + 2.y.(-4)$

এখন, $2xy$ যদি যোগ করি, তাহলে আমরা পাই,

$x^2 + y^2 + (-4)^2 + 2.x.(-4) + 2.y.(-4) + 2xy = (x + y - 4)^2$

$\therefore$ পূর্ণবর্গ হতে $2xy$ যোগ করতে হবে।

02. $9x^2 + 16y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে?

Sol" $9x^2 + 16y^2 = (3x)^2 + (4y)^2 + 2.3x.4y - 24xy$

$= (3x + 4y)^2 - 24xy$

$\therefore$ $24xy$ যোগ করতে হবে।

03. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ হবে?

Sol" $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc$

$= (-a)^2 + (-b)^2 + c^2 + 2(-a)(-b) + 2(-b).c + 2(-a).c + 2ac$

$= (-a)^2 + (-b)^2 + (c)^2 + 2ab - 2bc - 2ac + 2ac$

$= (-a - b + c)^2 + 2ac$

অর্থাৎ $-2ca$ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ হবে।

TYPE 15: Miscellaneous

01. $(p + q)^2 = \sqrt[3]{27}$ এবং $p^2 = \sqrt{6} + q^2$ হলে $p^3q + pq^3 =$ কত? [৩২তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $(p + q)^2 = \sqrt[3]{27} = 3$

$\therefore$ $p + q = \sqrt{3}$ ..... (i)

আবার, $p^2 = \sqrt{6} + q^2 \Rightarrow p^2 - q^2 = \sqrt{6} \Rightarrow (p + q)(p - q) = \sqrt{6}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3}(p - q) = \sqrt{6}$ [(i) হতে]

$\therefore$ $p - q = \sqrt{2}$ ..... (ii)

এখানে, $p^3q + pq^3 = pq(p^2 + q^2)$

$$= \left\{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right\}\left\{\frac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{2}\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}\left\{\frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}{2}\right\}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right)\left(\frac{3+2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3-2}{4}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$$ **Ans.**

02. যদি $x = (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}$ এবং $p^2 - q^2 = r^3$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $x^3 - 3rx - 2p = 0$ [২০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $x = (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}$ এবং $p^2 - q^2 = r^3$

এখন, $x = (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}$ ..... (i)

$\Rightarrow x^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয়পক্ষে ঘন করে]

$\Rightarrow x^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3(p+q)^{\frac{1}{3}}.(p-q)^{\frac{1}{3}}\left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}$

$\Rightarrow x^3 = p+q+p-q+3\{(p+q)(p-q)\}^{\frac{1}{3}} \times x$ [(i) নং থেকে মান বসিয়ে]

$\Rightarrow x^3 = 2p + 3(p^2-q^2)^{\frac{1}{3}} x$

$\Rightarrow x^3 = 2p + 3(r^3)^{\frac{1}{3}} x$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow x^3 = 2p + 3rx$

$\therefore x^3 - 3rx - 2p = 0$ (প্রমাণিত)

03. যদি $a+b = m$, $a^2+b^2 = n$ এবং $a^3+b^3 = p^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$.
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" দেওয়া আছে, $a+b = m$, $a^2+b^2 = n$ এবং $a^3+b^3 = p^3$

বামপক্ষ $= m^3 + 2p^3$

$= (a+b)^3 + 2.(a^3+b^3)$ [$\because a+b = m$ এবং $a^3+b^3 = p^3$]

$= (a+b)(a+b)^2 + 2(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$= (a+b)\{(a+b)^2 + 2(a^2-ab+b^2)\}$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2+2a^2-2ab+2b^2)$

$= (a+b)(3a^2+3b^2)$

$= 3(a+b)(a^2+b^2) = 3mn =$ ডানপক্ষ

$\therefore m^3 + 2p^3 = 3mn.$ (দেখানো হলো)

04. $x+y = 2$, $x^2+y^2 = 4$ হলে, $x^3+y^3 =$ কত?

Sol" দেয়া আছে, $x+y = 2$, $x^2+y^2 = 4$

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

$\Rightarrow 4 = (2)^2 - 2xy$

$\Rightarrow 4 = 4 - 2xy \quad \therefore xy = 0$

$\therefore x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = 2(4-0) = 8$ **Ans.**

05. যদি $a+b+c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

(ক) $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

(খ) $\dfrac{(b+c)^2}{3bc} + \dfrac{(c+a)^2}{3ca} + \dfrac{(a+b)^2}{3ab} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $a + b + c = 0$

$\Rightarrow a + b = -c$

$\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$ [ঘন করে]

$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 - 3abc = -c^3$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$ (দেখানো হলো)

(খ) দেওয়া আছে, $a + b + c = 0$

বামপক্ষ $= \frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab}$

$= \frac{(a+b+c-a)^2}{3bc} + \frac{(a+b+c-b)^2}{3ca} + \frac{(a+b+c-c)^2}{3ab}$

$= \frac{(0-a)^2}{3bc} + \frac{(0-b)^2}{3ca} + \frac{(0-c)^2}{3ab}$ [$\because a + b + c = 0$]

$= \frac{a^2}{3bc} + \frac{b^2}{3ca} + \frac{c^2}{3ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} = \frac{3abc}{3abc}$ [(ক) এর সাহায্যে]

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab} = 1$ (দেখানো হলো)

06. $p - q = r$ হলে, দেখাও যে, $p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১

Sol" দেওয়া আছে, $p - q = r$

$\Rightarrow (p - q)^3 = r^3$ [ঘন করে]

$\Rightarrow p^3 - q^3 - 3pq(p - q) = r^3$

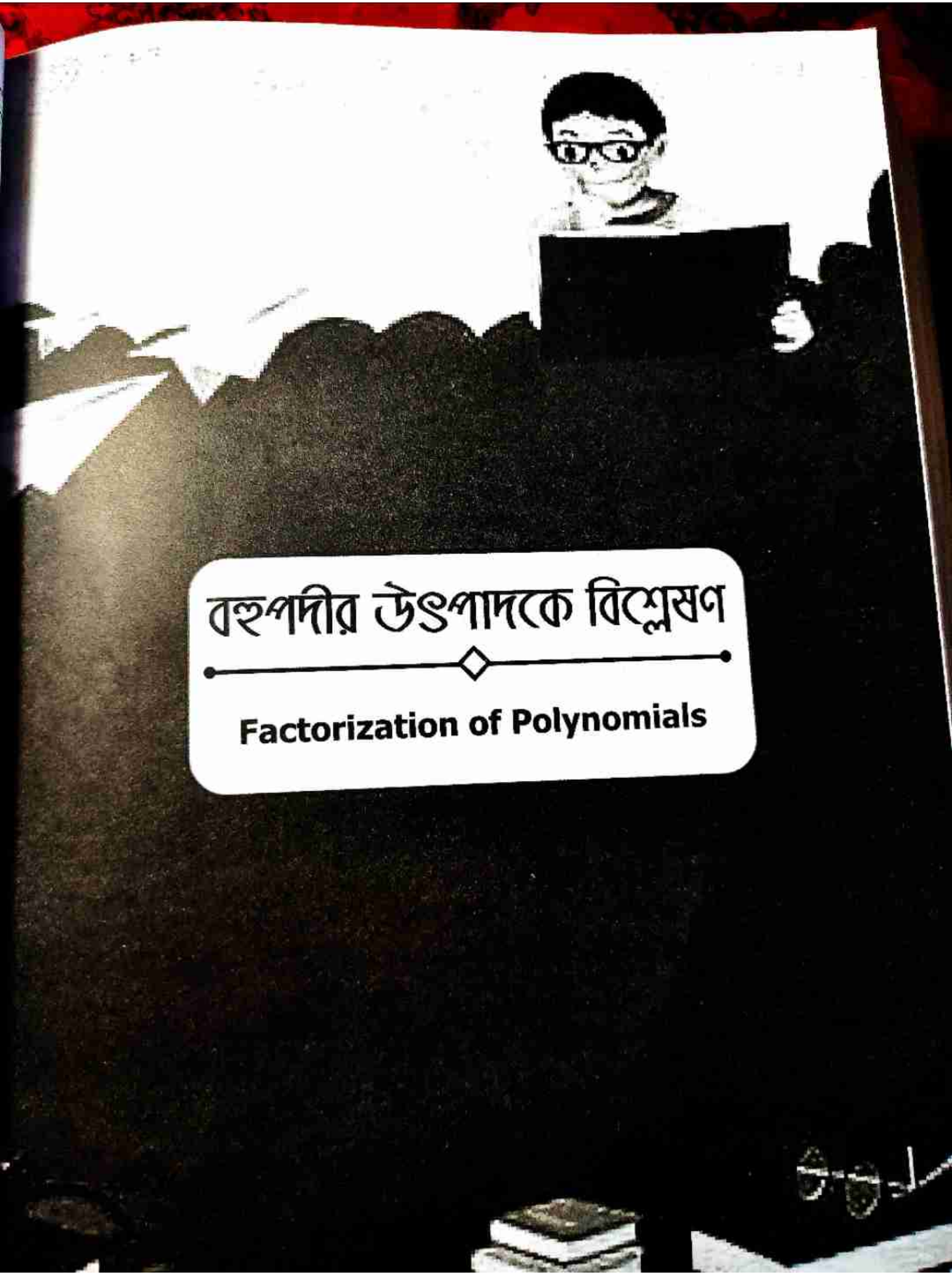
$\Rightarrow p^3 - q^3 - 3pq.r = r^3$

$\therefore p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr.$ (দেখানো হলো)

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	02, 04, 08
Type-02	03, 04
Type-03	01, 02, 03, 04, 05, 06, 11, 14, 15, 17
Type-04	01, 02
Type-06	01, 02, 03, 06, 07
Type-08	06, 07
Type-09	01, 02, 07, 09, 10
Type-10	Full
Type-11	01, 02, 03, 04, 05, 06, 09
Type-12	01
Type-13	01, 02
Type-15	03, 05



বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

Factorization of Polynomials

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: সাধারণ নিয়মে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

01. $ab(x-y) - bc(x-y)$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০১)]*

Sol" $ab(x-y) - bc(x-y)$
$= (x-y)(ab-bc)$
$= (x-y)\,b(a-c) = b(x-y)(a-b)$ **(Ans.)**

02. $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$ [৩৩তম বিসিএস]
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$
$= (4x)^2 - (5y)^2 - 2z(4x-5y)$
$= (4x+5y)(4x-5y) - 2z(4x-5y)$
$= (4x-5y)(4x+5y-2z)$ **(Ans.)**

03. $ax^2 + (a^2+1)x + a$ [২৮তম বিসিএস]
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" $ax^2 + (a^2+1)x + a$
$= ax^2 + a^2x + x + a$
$= ax(x+a) + 1(x+a)$
$= (x+a)(ax+1)$ **(Ans.)**

04. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$ [১৫তম বিসিএস]

Sol" $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$
$= a^2 - (b^2 + c^2 + 2bc) + 1(a-b-c)$
$= (a)^2 - (b+c)^2 + 1(a-b-c)$
$= (a+b+c)(a-b-c) + 1(a-b-c)$
$= (a-b-c)(a+b+c+1)$ **(Ans.)**

05. $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]*

Sol" $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
$= x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + x + 2$
$= x^2(x+2) + x(x+2) + 1(x+2)$
$= (x+2)(x^2+x+1)$ **(Ans.)**

06. $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$

Sol" $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$
$= x(x-a) - \frac{1}{a}(x-a)$
$= x^2 - ax - \frac{x}{a} + 1$
$= (x-a)\left(x - \frac{1}{a}\right)$ **(Ans.)**

07. $(1-x^2)(1+y)^2 - (1-y^2)(1+x)^2$

Sol" $(1-x^2)(1+y)^2 - (1-y^2)(1+x)^2$
$= (1+x)(1-x)(1+y)^2 - (1+y)(1-y)(1+x)^2$
$= (1+x)(1+y)\{(1-x)(1+y) - (1-y)(1+x)\}$
$= (1+x)(1+y)(1+y-x-xy-1-x+y+xy)$
$= (1+x)(1+y)(2y-2x)$
$= 2(1+x)(1+y)(y-x)$ **(Ans.)**

TYPE 02: Middle factor সংক্রান্ত উৎপাদকে বিশ্লেষণ

01. $12x^2 + 35x + 18$

Sol" $12x^2 + 35x + 18$
$= 12x^2 + 27x + 8x + 18$
$= 3x(4x + 9) + 2(4x + 9)$
$= (4x + 9)(3x + 2)$ **Ans.**

[১৭তম, ১৫তম বিসি

02. উৎপাদক নির্ণয় করুন: $9x^2 + 18x - 40$

Sol" $9x^2 + 18x - 40$
$= (3x)^2 + 2.3x.3 + 3^2 - 40 - 9$
$= (3x + 3)^2 - 49$
$= (3x + 3)^2 - 7^2$
$= (3x + 3 + 7)(3x + 3 - 7)$
$= (3x + 10)(3x - 4)$
Ans: $(3x + 10)(3x - 4)$

বিকল্প: $9x^2 + 18x - 40$
$= 9x^2 + 30x - 12x - 40$
$= 3x(3x + 10) - 4(3x + 10)$
$= (3x + 10)(3x - 4)$ **Ans.**

03. $9x^2 + 24x + 16$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-

Sol" $9x^2 + 24x + 16$
$= (3x)^2 + 2.3x.4 + 4^2$
$= (3x + 4)^2$
$= (3x + 4)(3x + 4)$
Ans: $(3x + 4)(3x + 4)$

বিকল্প: $9x^2 + 24x + 16$
$= 9x^2 + 12x + 12x + 16$
$= 3x(3x + 4) + 4(3x + 4)$
$= (3x + 4)(3x + 4)$
$= (3x + 4)^2$ **(Ans.)**

04. $x^2 + 13x + 36$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-

Sol" $x^2 + 13x + 36$
$= x^2 + 9x + 4x + 36$
$= x(x + 9) + 4(x + 9)$
$= (x + 9)(x + 4)$ **(Ans.)**

05. $x^4 + x^2 - 20$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-

Sol" $x^4 + x^2 - 20$
$= x^4 + 5x^2 - 4x^2 - 20$
$= x^2(x^2 + 5) - 4(x^2 + 5)$
$= (x^2 + 5)(x^2 - 4)$
$= (x^2 + 5)(x^2 - 2^2)$
$= (x^2 + 5)(x + 2)(x - 2)$ **(Ans.)**

06. $a^2 - 30a + 216$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-

Sol" $a^2 - 30a + 216$
$= a^2 - 18a - 12a + 216$
$= a(a - 18) - 12(a - 18)$
$= (a - 18)(a - 12)$ **(Ans.)**

07. $a^8 - a^4 - 2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" $a^8 - a^4 - 2$
$= a^8 - 2a^4 + a^4 - 2$
$= a^4(a^4 - 2) + 1(a^4 - 2)$
$= (a^4 - 2)(a^4 + 1)$ **(Ans.)**

08. $x^2 - 37x - 650$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" $x^2 - 37x - 650$
$= x^2 - 50x + 13x - 650$
$= x(x - 50) + 13(x - 50)$
$= (x - 50)(x + 13)$ **(Ans.)**

09. $9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" $9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2$
$= 9x^2y^2 + 9xy^2 - 14xy^2 - 14y^2$
$= 9xy^2(x + 1) - 14y^2(x + 1)$
$= (x + 1)(9xy^2 - 14y^2)$
$= y^2(9x - 14)(x + 1)$ **(Ans.)**

10. $4x^4 - 27x^2 - 81$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" $4x^4 - 27x^2 - 81$
$= 4x^4 - 36x^2 + 9x^2 - 81$
$= 4x^2(x^2 - 9) + 9(x^2 - 9)$ $= (x^2 - 9)(4x^2 + 9)$
$= (x^2 - 3^2)(4x^2 + 9)$ $= (x + 3)(x - 3)(4x^2 + 9)$ **(Ans.)**

11. $4x^2 + 12x + 9$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২০)]

Sol" $4x^2 + 12x + 9$
$= 4x^2 + 6x + 6x + 9$
$= 2x(2x + 3) + 3(2x + 3)$
$= (2x + 3)(2x + 3) = (2x + 3)^2$ **(Ans.)**

12. $\frac{1}{2}p^2 - 3p + 4$

Sol" $\frac{1}{2}p^2 - 3p + 4$ $= \frac{1}{2}(p^2 - 6p + 8)$
$= \frac{1}{2}(p^2 - 4p - 2p + 8)$ $= \frac{1}{2}\{p(p - 4) - 2(p - 4)\}$
$= \frac{1}{2}(p - 4)(p - 2)$ **(Ans.)**

TYPE 03: বর্গের সূত্র ব্যবহার সংক্রান্ত উৎপাদকে বিশ্লেষণ

[১৭তম বিসিএস]

01. উৎপাদক নির্ণয় করুন: $a^4b^4 + a^2b^2c^2 + c^4$

Sol" $a^4b^4 + a^2b^2c^2 + c^4$
$= (a^2b^2)^2 + 2a^2b^2c^2 + (c^2)^2 - a^2b^2c^2$
$= (a^2b^2 + c^2)^2 - (abc)^2$
$= (a^2b^2 + c^2 + abc)(a^2b^2 + c^2 - abc)$
$= (a^2b^2 + abc + c^2)(a^2b^2 - abc + c^2)$
Ans: $(a^2b^2 + abc + c^2)(a^2b^2 - abc + c^2)$

[১৫তম বিসিএস]

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $4a^4 - 4a^2 + 9$

Sol" $4a^4 - 4a^2 + 9$
$= (2a^2)^2 + 2.2a^2.3 + 3^2 - 16a^2$
$= (2a^2 + 3)^2 - (4a)^2$
$= (2a^2 + 3 + 4a)(2a^2 + 3 - 4a)$
$= (2a^2 + 4a + 3)(2a^2 - 4a + 3)$ **(Ans.)**

03. $a^4 - 27a^2 + 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩]

Sol" $a^4 - 27a^2 + 1$
$= (a^2)^2 - 2.a^2.1 + (1)^2 - 25a^2$
$= (a^2 - 1)^2 - (5a)^2$
$= (a^2 - 1 + 5a)(a^2 - 1 - 5a)$
$= (a^2 + 5a - 1)(a^2 - 5a - 1)$ **(Ans.)**

04. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪]

Sol" $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 - 2.x^2.y^2 + (y^2)^2 - 4x^2y^2$
$= (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 - y^2 + 2xy)(x^2 - y^2 - 2xy)$
$= (x^2 + 2xy - y^2)(x^2 - 2xy - y^2)$ **(Ans.)**

05. $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫]

Sol" $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$
$= a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + 2abxy$
$= (ax)^2 + 2abxy + (by)^2 - (ay)^2 + 2abxy - (bx)^2$
$= \{(ax)^2 + 2.ax.by + (by)^2\} - \{(ay)^2 - 2.ay.bx + (bx)^2\}$
$= (ax + by)^2 - (ay - bx)^2$
$= (ax + by + ay - bx)(ax + by - ay + bx)$ **(Ans.)**

06. $4a^2 - 12ab + 9b^2 - 4c^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬]

Sol" $4a^2 - 12ab + 9b^2 - 4c^2$
$= (2a)^2 - 2.2a.3b + (3b)^2 - 4c^2$
$= (2a - 3b)^2 - (2c)^2$
$= (2a - 3b + 2c)(2a - 3b - 2c)$

7. $a^2 + 6a + 8 - y^2 + 2y$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" $a^2 + 6a + 8 - y^2 + 2y = a^2 + 2.a.3 + 3^2 - y^2 + 2y - 1$
$= (a+3)^2 - (y^2 - 2.y.1 + 1^2) = (a+3)^2 - (y-1)^2$
$= (a + 3 + y - 1)(a + 3 - y + 1)$
$= (a + y + 2)(a - y + 4)$ **(Ans.)**

8. $4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$

[৪৪তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৫)]

Sol" $4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$

$= (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2a} + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 + 2\left(2a - \frac{1}{2a}\right)$

$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)^2 + 2\left(2a - \frac{1}{2a}\right)$

$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)\left(2a - \frac{1}{2a} + 2\right)$ **(Ans.)**

9. $9x^2 - 30xy + 25y^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২১)]

Sol" $9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x)^2 - 2.3x.5y + (5y)^2$
$= (3x - 5y)^2 = (3x - 5y)(3x - 5y)$ **(Ans.)**

10. $a^2 - 1 + 2b - b^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২২)]

Sol" $a^2 - 1 + 2b - b^2 = a^2 - (1 - 2b + b^2)$
$= a^2 - (b-1)^2 = \{a + (b-1)\}\{a - (b-1)\}$
$= (a + b - 1)(a - b + 1)$ **(Ans.)**

11. $a^4 + 64b^4$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২৩)]

Sol" $a^4 + 64b^4 = (a^2)^2 + (8b^2)^2$
$= (a^2)^2 + 2.a^2.8b^2 + (8b^2)^2 - 16a^2b^2$
$= (a^2 + 8b^2)^2 - (4ab)^2$
$= (a^2 + 8b^2 + 4ab)(a^2 + 8b^2 - 4ab)$
$= (a^2 + 4ab + 8b^2)(a^2 - 4ab + 8b^2)$ **(Ans.)**

12. $xa^8 - x^9$

Sol" $xa^8 - x^9 = x(a^8 - x^8)$
$= x\{(a^4)^2 - (x^4)^2\}$
$= x(a^4 + x^4)(a^4 - x^4)$
$= x(a^4 + x^4)\{(a^2)^2 - (x^2)^2\}$
$= x(a^4 + x^4)(a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$
$= x(a^4 + x^4)(a^2 + x^2)(a + x)(a - x)$ **(Ans.)**

13. $4x^4 + 8a^2x^2 + 9a^4$

Sol" $4x^4 + 8a^2x^2 + 9a^4$
$= (2x^2)^2 + 2.2x^2.3a^2 + (3a^2)^2 - 4x^2a^2$
$= (2x^2 + 3a^2)^2 - (2ax)^2$
$= (2x^2 + 3a^2 + 2ax)(2x^2 + 3a^2 - 2ax)$
$= (2x^2 + 2ax + 3a^2)(2x^2 - 2ax + 3a^2)$ **(Ans.)**

14. $x^2 + 2xy - 2yz - z^2$

Sol" $x^2 + 2xy - 2yz - z^2 = x^2 - z^2 + 2xy - 2yz$
$= (x + z)(x - z) + 2y(x - z)$
$= (x - z)(x + z + 2y) = (x - z)(x + 2y + z)$ **(Ans.)**

15. $2ab - a^2 - b^2 + c^2$

Sol" $2ab - a^2 - b^2 + c^2$
$= c^2 - a^2 + 2ab - b^2$
$= c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$
$= c^2 - (a - b)^2$
$= \{c + (a - b)\}\{c - (a - b)\}$
$= (c + a - b)(c - a + b)$
$= (a - b + c)(c - a + b)$ **(Ans.)**

16. $x^4 + 2x^2 + 9$

Sol" $x^4 + 2x^2 + 9$
$= (x^2)^2 + 2.x^2.3 + (3)^2 - 4x^2$
$= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$
$= (x^2 + 3 + 2x)(x^2 + 3 - 2x)$
$= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$ **(Ans.)**

TYPE 04: ঘনের সূত্র ব্যবহার সংক্রান্ত উৎপাদকে বিশ্লেষণ

01. $a^3 - 6a^2 + 12a - 9$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]*

Sol" $a^3 - 6a^2 + 12a - 9$
$= a^3 - 3.a^2.2 + 3.a.2^2 - (2)^3 - 1$
$= (a - 2)^3 - 1 = (a - 2)^3 - (1)^3$
$= (a - 2 - 1)\{(a - 2)^2 + (a - 2).1 + (1)^2\}$
$= (a - 3)(a^2 - 2.a.2 + 2^2 + a - 2 + 1)$
$= (a - 3)(a^2 - 4a + 4 + a - 2 + 1)$
$= (a - 3)(a^2 - 3a + 3)$ **(Ans.)**

02. $a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]*

Sol" $a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$
$= a^3 - b^3 + (a + b)^3 - 8b^3$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b)^3 - (2b)^3$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b - 2b)\{(a + b)^2 + (a + b)2b + (2b)^2\}$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2)$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a^2 + 4ab + 7b^2)$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$
$= (a - b)(2a^2 + 5ab + 8b^2)$ **(Ans.)**

03. $8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol" $8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$
$= (2x)^3 + 3.(2x)^2.1 + 3.2x.1^2 + 1^3 - 64$
$= (2x + 1)^3 - (4)^3$
$= (2x + 1 - 4)\{(2x + 1)^2 + (2x + 1).4 + 4^2\}$
$= (2x - 3)\{(2x)^2 + 2.2x.1 + 1^2 + 8x + 4 + 16\}$
$= (2x - 3)\{4x^2 + 4x + 1 + 8x + 4 + 16\}$
$= (2x - 3)(4x^2 + 12x + 21)$ **(Ans.)**

04. $8a^3 + \frac{b^3}{27}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

Sol" $8a^3 + \frac{b^3}{27} = (2a)^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3$
$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left\{(2a)^2 - 2a \cdot \frac{b}{3} + \left(\frac{b}{3}\right)^2\right\}$
$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left(4a^2 - \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{9}\right)$
$= \frac{1}{3}(6a + b) \cdot \frac{1}{9}(36a^2 - 6ab + b^2)$
$= \frac{1}{27}(6a + b)(36a^2 - 6ab + b^2)$ **(Ans.)**

05. $\frac{a^6}{27} - b^6$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol" $\frac{a^6}{27} - b^6 = \frac{(a^2)^3}{(3)^3} - (b^2)^3 = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 - (b^2)^3$
$= \left(\frac{a^2}{3} - b^2\right)\left\{\left(\frac{a^2}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} \cdot b^2 + (b^2)^2\right\}$
$= \left(\frac{a^2}{3} - b^2\right)\left(\frac{a^4}{9} + \frac{a^2b^2}{3} + b^4\right)$ **(Ans.)**

06. $(3a + 1)^3 - (2a - 3)^3$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৬)]

Sol" $(3a + 1)^3 - (2a - 3)^3$
$= (3a + 1 - 2a + 3)\{(3a + 1)^2 + (3a + 1).(2a - 3) + (2a - 3)^2\}$
$= (a+4)\{(3a)^2 + 2.3a.1 + 1^2 + 6a^2 - 9a + 2a - 3 + (2a)^2 - 2.2a.3 + 3^2\}$
$= (a + 4)(9a^2 + 6a + 1 + 6a^2 - 9a + 2a - 3 + 4a^2 - 12a + 9)$
$= (a + 4)(19a^2 - 13a + 7)$ **(Ans.)**

07. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২৭)]

Sol" $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
$= (2x)^3 + 3.(2x)^2.3y + 3.2x.(3y)^2 + (3y)^3$
$= (2x + 3y)^3$
$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y)$ **(Ans.)**

08. $8a^3 + 27b^3$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২৮-গ)]

Sol" $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3$
$= (2a + 3b)\{(2a)^2 - 2a.3b + (3b)^2\}$
$= (2a + 3b)\{4a^2 - 6ab + 9b^2\}$ **(Ans.)**

09. $a^6 - 64$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২৮-ঘ)]

Sol" $a^6 - 64 = (a^3)^2 - (8)^2$
$= (a^3 + 8)(a^3 - 8) = (a^3 + 2^3)(a^3 - 2^3)$
$= (a + 2)(a^2 - a.2 + 2^2)(a - 2)(a^2 + a.2 + 2^2)$
$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$
$= (a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$ **(Ans.)**

10. $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$ [৩৭তম বিসিএস] [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের অংক নং-২৯)]

Sol" $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$
$= x^3 + 3.x^2.2y + 3.x.(2y)^2 + (2y)^3 - xy^2 - 2y^3$
$= (x + 2y)^3 - y^2(x + 2y)$
$= (x + 2y)\{(x + 2y)^2 - y^2\}$
$= (x + 2y)\{(x + 2y + y)(x + 2y - y)\}$
$= (x + 2y)(x + 3y)(x + y)$
$= (x + y)(x + 2y)(x + 3y)$ **(Ans.)**

11. $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের কাজের অংশ)]

Sol" $8 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$
$= 8 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$
$= 2^3 - (a - b)^3$
$= \{2 - (a - b)\}\{2^2 + 2.(a - b) + (a - b)^2\}$
$= (2 - a + b)(4 + 2a - 2b + a^2 - 2ab + b^2)$
$= (2 - a + b)(a^2 + b^2 - 2ab + 2a - 2b + 4)$ **(Ans.)**

12. $(a + b)^3 + (a - b)^3$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের কাজের অংশ)]

Sol" $(a + b)^3 + (a - b)^3$
$= \{(a + b) + (a - b)\}\{(a + b)^2 - (a + b)(a - b) + (a - b)^2\}$
$= (a + b + a - b)\{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - 2ab + b^2\}$
$= 2a(a^2 + 3b^2)$

13. $a^3 + \frac{1}{8}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের কাজের অংশ)]

Sol" $a^3 + \frac{1}{8} = a^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$= \left(a + \frac{1}{2}\right)\left\{a^2 - a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$
$= \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(2a + 1) \cdot \frac{1}{4}(4a^2 - 2a + 1)$
$= \frac{1}{8}(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$ **(Ans.)**

14. $a^3+\frac{1}{27}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (উদাহরণের কাজের অংক)]*

Sol" $a^3+\frac{1}{27}=a^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$=\left(a+\frac{1}{3}\right)\left\{a^2-a\,.\,\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$

$=\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{a}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}(3a+1)\,.\,\frac{1}{9}(9a^2-3a+1)$

$=\frac{1}{27}(3a+1)(9a^2-3a+1)$ **(Ans.)**

15. $8x^3-27(x-y)^3$

Sol" $8x^3-27(x-y)^3=(2x)^3-\{3(x-y)\}^3$

$=\{2x-3(x-y)\}\,[(2x)^2+2x.\,3(x-y)+\{3(x-y)\}^2]$

$=(2x-3x+3y)\,\{4x^2+6x(x-y)+9(x^2-2xy+y^2)\}$

$=(3y-x)\,(4x^2+6x^2-6xy+9x^2-18xy+9y^2)$

$=(3y-x)\,(19x^2-24xy+9y^2)$ **(Ans.)**

TYPE 05 তিনপদী সূত্র ব্যবহার সংক্রান্ত উৎপাদকে বিশ্লেষণ

01. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ [৩৪তম, ৩২তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৯)]

Sol" $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=4b^2c^2-2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$

$=4b^2c^2-\{(-a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2+2(-a^2)\,.\,b^2+2b^2c^2+2c^2(-a^2)\}$

$=(2bc)^2-(-a^2+b^2+c^2)^2$

$=\{2bc+(-a^2+b^2+c^2)\}\,\{2bc-(-a^2+b^2+c^2)\}$

$=(2bc-a^2+b^2+c^2)\,(2bc+a^2-b^2-c^2)$

$=(b^2+2bc+c^2-a^2)\,\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}$

$=\{(b+c)^2-a^2\}\,\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{(b+c)+a)\}\,\{(b+c)-a)\}\,\{(a+(b-c)\}\,\{(a-(b-c)\}$

$=(b+c+a)\,(b+c-a)\,(a+b-c)\,(a-b+c)$ **(Ans.)**

02. $a^3-\frac{1}{a^3}+4$

Sol" $a^3-\frac{1}{a^3}+4=a^3+(-\frac{1}{a})^3+1^3-3.a.\,(-\frac{1}{a}).1$

$=(a-\frac{1}{a}+1)\,\{a^2+(-\frac{1}{a})^2+1^2-a.\,(-\frac{1}{a})-(-\frac{1}{a}).1-1.a\}$

$=(a-\frac{1}{a}+1)\,\{a^2+\frac{1}{a^2}+1+1-a+\frac{1}{a}\}$

$=(a-\frac{1}{a}+1)\,\{a^2+\frac{1}{a^2}+2-a+\frac{1}{a}\}$

$=(a-\frac{1}{a}+1)\,\{a^2-a+2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\}$ **(Ans.)**

Tough

03. $a^3+\frac{1}{a^3}-2$

Sol^n $a^3+\frac{1}{a^3}-2=a^3+\frac{1}{a^3}+1-3$

$=a^3+(\frac{1}{a})^3+1^3-3.a.(\frac{1}{a}).1$

$=(a+\frac{1}{a}+1)\{a^2+(\frac{1}{a})^2+1^2-a.(\frac{1}{a})-(\frac{1}{a}).1-1.a\}$

$=(a+\frac{1}{a}+1)\{a^2+\frac{1}{a^2}+1-1-a-\frac{1}{a}\}$

$=(a+\frac{1}{a}+1)\{a^2+\frac{1}{a^2}-a-\frac{1}{a}\}$

$=(a+\frac{1}{a}+1)\{a^2-a-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\}$ **(Ans.)**

TYPE 06: মান ধরে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x^2+x-(a+1)(a+2)$ [৩৩তম বিসিএস]

[অষ্টম শ্রেণীর সা.গণিত (অধ্যায়-৪.৩) অনুশীলনীর ৩৪ নং প্রশ্ন হতে]

Sol^n $x^2+x-(a+1)(a+2)$

$=x^2+x-(a+1)(a+1+1)$

$=x^2+x-p(p+1)$ [ধরি, $a+1=p$]

$=x^2+x-p^2-p$ $=x^2-p^2+x-p$

$=(x+p)(x-p)+1(x-p)$

$=(x-p)(x+p+1)$

$=\{x-(a+1)\}\{x+(a+1)+1\}$ [মান বসিয়ে]

$=(x-a-1)(x+a+1+1)$

$=(x-a-1)(x+a+2)$ **(Ans.)**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $4(a-2)x^2+a^2xy+(a+2)y^2$ [৩২তম বিসিএস]

Sol^n ধরি, $a-2=p$ এবং $a+2=q$

$\therefore$ $a^2-4=pq$ [গুণ করে]

$\therefore$ $a^2=4+pq$

$\therefore$ রাশিমালা দাঁড়ায়, $4px^2+(4+pq)xy+qy^2$

$=4px^2+4xy+pqxy+qy^2$

$=4x(px+y)+qy(px+y)$

$=(px+y)(4x+qy)$

$=\{x(a-2)+y\}\{4x+(a+2)y\}$ [মান বসিয়ে]

$=(ax-2x+y)(4x+ay+2y)$ **(Ans.)**

03. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $5(x+y)^2+18(x^2-y^2)-8(x-y)^2$ [২৫তম বিসিএস]

Sol^n $5(x+y)^2+18(x+y)(x-y)-8(x-y)^2$

মনে করি, $x+y=a$ এবং $x-y=b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=5a^2+18ab-8b^2$ $=5a^2+20ab-2ab-8b^2$

$=5a(a+4b)-2b(a+4b)$ $=(a+4b)(5a-2b)$

a ও b এর মান বসিয়ে,

$=\{(x+y)+4(x-y)\}\{(5(x+y)-2(x-y)\}$

$=(x+y+4x-4y)(5x+5y-2x+2y)$

$=(5x-3y)(3x+7y)$ **Ans:**

04. $(x^2+2x)^2+12(x^2+2x)-45$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন। [২৪তম বিসিএস]

Sol" $(x^2+2x)^2+12(x^2+2x)-45$

ধরি, $x^2+2x=a$

$\therefore \quad a^2+12a-45 = a^2+15a-3a-45 = a(a+15)-3(a+15) = (a+15)(a-3)$

a এর মান বসিয়ে, $(x^2+2x+15)(x^2+2x-3)$

$=(x^2+2x+15)(x^2+3x-x-3)$

$=(x^2+2x+15)\{x(x+3)-1(x+3)\}$

$=(x^2+2x+15)(x+3)(x-1)$

Ans: $(x-1)(x+3)(x^2+2x+15)$ **(Ans.)**

05. $3(a^2+2a)^2-22(a^2+2a)+40$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol" $3(a^2+2a)^2-22(a^2+2a)+40$

$=3x^2-22x+40$ $[a^2+2a=x$ ধরে$]$

$=3x^2-10x-12x+40 = x(3x-10)-4(3x-10)$

$=(3x-10)(x-4) = \{3(a^2+2a)-10\}(a^2+2a-4)$

$=(3a^2+6a-10)(a^2+2a-4)$ **(Ans.)**

06. $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$ [৪৩তম বিসিএস, ৩১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol" $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$

ধরি, $a-1=p$ এবং $a+1=q$

$\therefore \quad (a-1)(a+1)=pq \quad \Rightarrow a^2-1=pq \quad \Rightarrow a^2=pq+1$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= px^2+(pq+1)xy+qy^2$

$= px^2+pqxy+xy+qy^2 = px(x+qy)+y(x+qy)$

$=(x+qy)(px+y) = \{x+(a+1)y\}\{(a-1)x+y\}$

$=(x+ay+y)(ax-x+y)$

07. $14(x+z)^2-29(x+z)(x+1)-15(x+1)^2$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩০)]*

Sol" $14(x+z)^2-29(x+z)(x+1)-15(x+1)^2$

$=14a^2-29ab-15b^2$ $[x+z=a$ এবং $x+1=b$ ধরে$]$

$=14a^2-35ab+6ab-15b^2$

$=7a(2a-5b)+3b(2a-5b)$

$=(2a-5b)(7a+3b)$

$=\{2(x+z)-5(x+1)\}\{7(x+z)+3(x+1)\}$

$=(2x+2z-5x-5)(7x+7z+3x+3)$

$=(2z-3x-5)(10x+7z+3)$ **(Ans.)**

08. $(a+b)x^2+2bxy-(a-b)y^2$

Sol" $(a+b)x^2+2bxy-(a-b)y^2$

ধরি, $a+b=p$ এবং $a-b=q$

$\therefore \quad (a+b)-(a-b)=p-q \quad \Rightarrow 2b=p-q$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=(a+b)x^2+2bxy-(a-b)y^2$

$= px^2+(p-q)xy+qy^2$

$= px^2+pxy-qxy+qy^2$

$= px(x+y)-qy(x+y)$

$=(x+y)(px-qy) = (x+y)\{(a+b)x-(a-b)y\}$

$=(x+y)(ax+bx-ay+by)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24 \quad [x^2-3x=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4) \quad [p=x^2-3x \text{ বসিয়ে}]$
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15 \quad [a^2+3a=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৭)]

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore \quad x^2+7x+12 = x^2+7x+10+2 = a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24 \quad [x^2-3x=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4) \quad [p=x^2-3x \text{ বসিয়ে}]$
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15 \quad [a^2+3a=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore \quad x^2+7x+12 = x^2+7x+10+2 = a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24$ [$x^2-3x=p$ ধরে]
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4)$ [$p=x^2-3x$ বসিয়ে]
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15$ [$a^2+3a=p$ ধরে]
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৭]

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore$ $x^2+7x+12=x^2+7x+10+2=a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24$ $[x^2-3x=p$ ধরে$]$
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4)$ $[p=x^2-3x$ বসিয়ে$]$
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15$ $[a^2+3a=p$ ধরে$]$
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৭)]

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore$ $x^2+7x+12=x^2+7x+10+2=a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24$ $[x^2-3x=p$ ধরে$]$
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4)$ $[p=x^2-3x$ বসিয়ে$]$
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15$ $[a^2+3a=p$ ধরে$]$
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৭]

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore$ $x^2+7x+12=x^2+7x+10+2=a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24$ $[x^2-3x=p$ ধরে$]$
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4)$ $[p=x^2-3x$ বসিয়ে$]$
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15$ $[a^2+3a=p$ ধরে$]$
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৮]

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore$ $x^2+7x+12=x^2+7x+10+2=a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24 \quad [x^2-3x=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4) \quad [p=x^2-3x \text{ বসিয়ে}]$
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15 \quad [a^2+3a=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৭]

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore \quad x^2+7x+12=x^2+7x+10+2=a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

TYPE 07: চারটি পদ গুণ আকারে থাকলে

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$ [৩৬তম বিসি

Sol" $x(x-1)(x-2)(x-3)-24$
$= \{x(x-3)\}\ \{(x-1)(x-2)\}-24$
$= (x^2-3x)(x^2-3x+2)-24$
$= p(p+2)-24 \qquad [x^2-3x=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-24$
$= p^2+6p-4p-24$
$= p(p+6)-4(p+6)$
$= (p+6)(p-4)$
$= (x^2-3x+6)(x^2-3x-4) \qquad [p=x^2-3x \text{ বসিয়ে}]$
$= (x^2-3x+6)(x^2-4x+x-4)$
$= (x^2-3x+6)\{x(x-4)+1(x-4)\}$
$= (x^2-3x+6)(x-4)(x+1)$
$= (x+1)(x-4)(x^2-3x+6)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$. [৩০তম বিসি

Sol" $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
$= \{a(a+3)\}\ \{(a+1)(a+2)\}-15$
$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)-15$
$= p(p+2)-15 \qquad [a^2+3a=p \text{ ধরে}]$
$= p^2+2p-15$
$= p^2+5p-3p-15$
$= p(p+5)-3(p+5)$
$= (p+5)(p-3)$
$= (a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ [মান বসিয়ে]
উত্তর: $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$

03. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৭]

Sol" $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-48$
$= \{(x+2)(x+5)\}\ \{(x+3)(x+4)\}-48$
$= (x^2+2x+5x+10)(x^2+3x+4x+12)-48$
$= (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-48$
ধরি, $x^2+7x+10=a$
$\therefore\ x^2+7x+12=x^2+7x+10+2=a+2$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2)-48$
$= a^2+2a-48$
$= a^2+8a-6a-48$
$= a(a+8)-6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2+7x+10+8)(x^2+7x+10-6)$ [মান বসিয়ে]
$= (x^2+7x+18)(x^2+7x+4)$ **(Ans.)**

04. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-65$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৮)]*

Sol" $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-65$

$= \{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}-65$

$= (x^2-x-7x+7)(x^2-3x-5x+15)$

$= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-65$

ধরি, $x^2-8x+7=a$

$\therefore\ x^2-8x+15 = x^2-8x+7+8 = a+8$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+8)-65$

$= a^2+8a-65$

$= a^2+13a-5a-65$

$= a(a+13)-5(a+13)$

$= (a+13)(a-5)$

$= (x^2-8x+7+13)(x^2-8x+7-5)$ [মান বসিয়ে]

$= (x^2-8x+20)(x^2-8x+2)$ **(Ans.)**

05. $x(x+3)(x+4)(x-1)+4$

Sol" $x(x+3)(x+4)(x-1)+4$

$= \{x(x+3)\}\{(x-1)(x+4)\}+4$

$= (x^2+3x)(x^2+4x-x-4)+4$

$= (x^2+3x)(x^2+3x-4)+4$

$= p(p-4)+4$ $[x^2+3x=p$ ধরে$]$

$= p^2-4p+4 = p^2-2.p.2+2^2$

$= (p-2)^2 = (x^2+3x-2)^2$ $[p=x^2+3x$ বসিয়ে$]$

$= (x^2+3x-2)(x^2+3x-2)$ **(Ans.)**

06. দেখাও যে, $(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4) = (3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩১)]

Sol" বামপক্ষ $= (x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)$

$= \{(x+1)(3x-1)\}\{(x+2)(3x-4)\}$

$= (3x^2-x+3x-1)(3x^2-4x+6x-8)$

$= (3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8) =$ ডানপক্ষ

$\therefore (x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4) = (3x^2+2x-1)(3x^2+2x-8)$ (দেখানো হলো)

TYPE 08: ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

01. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $3x^5+2x+5$ **[৩২তম বিসিএস]**

Sol" ধরি, $f(x) = 3x^5+2x+5$

তাহলে, $f(-1) = 3(-1)^5+2(-1)+5 = -3-2+5 = 5-5 = 0$

$x=-1$ বসালে প্রদত্ত রাশিটির মান শূন্য হয় অর্থাৎ $f(-1)=0$

$\therefore$ $(x+1)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক

$\therefore$ $3x^5+2x+5$

$= 3x^5+3x^4-3x^4-3x^3+3x^3+3x^2-3x^2-3x+5x+5$

$= 3x^4(x+1)-3x^3(x+1)+3x^2(x+1)-3x(x+1)+5(x+1)$

$= (x+1)(3x^4-3x^3+3x^2-3x+5)$ **Ans.**

02. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $8x^3 - 4x - 1$ [২৮তম বিসিএস]

Sol" $8x^3 - 4x - 1$
$= 8x^3 + 1 - 4x - 2$
$= (8x^3 + 1) - 2(2x + 1)$
$= \{(2x)^3 + (1)^3\} - 2(2x + 1)$
$= (2x + 1)\{(2x)^2 - 2x.1 + (1)^2\} - 2(2x + 1)$
$= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1 - 2)$
$= (2x + 1)(4x^2 - 2x - 1)$
Ans: $(2x + 1)(4x^2 - 2x - 1)$

বিকল্প:
মনে করি, $f(x) = 8x^3 - 4x - 1$
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 8.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4.\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 8.\left(-\frac{1}{8}\right) + 2 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$
$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{2x + 1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(2x + 1) \Rightarrow (2x + 1)$ এর একটি উৎপাদক।
$\therefore 8x^3 - 4x - 1$
$= 8x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 2x - 2x - 1$
$= 4x^2(2x + 1) - 2x(2x + 1) - 1(2x + 1)$
$= (2x + 1)(4x^2 - 2x - 1)$ **(Ans.)**

03. $3a^3 + 2a + 5$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০১)

Sol" প্রদত্ত রাশি $= 3a^3 + 2a + 5$
মনে করি, $f(a) = 3a^3 + 2a + 5$
এখানে, $f(-1) = 3.(-1)^3 + 2.(-1) + 5 = -3 - 2 + 5 = -5 + 5 = 0$
$\therefore$ $a - (-1) = (a + 1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $3a^3 + 2a + 5$
$= 3a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 3a + 5a + 5$
$= 3a^2(a + 1) - 3a(a + 1) + 5(a + 1)$
$= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5)$ **(Ans.)**

04. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $a^3 - 3a^2b + 2b^3$ [২৯তম বিসিএস]

Sol" $a^3 - 3a^2b + 2b^3$
$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 - 2ab^2 + 2b^3$
$= a^2(a - b) - 2ab(a - b) - 2b^2(a - b)$
$= (a - b)(a^2 - 2ab - 2b^2)$
Ans: $(a - b)(a^2 - 2ab - 2b^2)$

অথবা,
ধরি, $a = b$
$\therefore$ $f(b) = b^3 - 3.b^2.b + 2b^3$
$= b^3 - 3b^3 + 2b^3 = 3b^3 - 3b^3 = 0$
$\therefore$ সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালায় মান শূন্য হবে তখনই যখন $a = b$ হবে।
সুতরাং $(a - b)$ উহার একটি উৎপাদক।

$\therefore$ $a^3 - 3b^2b + 2b^3$
$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 - 2ab^2 + 2b^3$
$= a^2(a - b) - 2ab(a - b) - 2b^2(a - b)$
$= (a - b)(a^2 - 2ab - 2b^2)$
Ans: $(a - b)(a^2 - 2ab - 2b^2)$

05. $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০২)]

Sol" এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।
মনে করি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$
তাহলে, $f(-y) = (-y)^3 - 7(-y)y^2 - 6y^3$
$= -y^3 + 7y^3 - 6y^3 = 7y^3 - 7y^3 = 0$
$\therefore$ $x - (-y) = (x + y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$
$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 6y^3$
$= x^2(x + y) - xy(x + y) - 6y^2(x + y)$
$= (x + y)(x^2 - xy - 6y^2)$
$= (x + y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2)$
$= (x + y)\{x(x - 3y) + 2y(x - 3y)\}$
$= (x + y)(x - 3y)(x + 2y)$ **(Ans.)**

06. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol" প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
মনে করি, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
এখানে, $f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6$
$= -1 + 2 \cdot 1 + 5 - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 7 - 7 = 0$
$\therefore$ $x - (-1) = (x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
$= x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6$
$= x^2(x + 1) + x(x + 1) - 6(x + 1)$
$= (x + 1)(x^2 + x - 6)$
$= (x + 1)(x^2 - 2x + 3x - 6)$
$= (x + 1)\{x(x - 2) + 3(x - 2)\}$
$= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

07. $x^3 + 4x^2 + x - 6$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 4x^2 + x - 6$
মনে করি, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
এখানে, $f(1) = (1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 6 = 1 + 4 + 1 - 6 = 6 - 6 = 0$
$\therefore$ $(x - 1)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 4x^2 + x - 6$
$= x^3 - x^2 + 5x^2 - 5x + 6x - 6$
$= x^2(x-1) + 5x(x-1) + 6(x-1)$
$= (x-1)(x^2 + 5x + 6)$
$= (x-1)(x^2 + 2x + 3x + 6)$
$= (x-1)\{x(x+2) + 3(x+2)\}$
$= (x-1)(x+2)(x+3)$ **(Ans.)**

08. $a^3 + 3a + 36$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol^n প্রদত্ত রাশি $= a^3 + 3a + 36$
মনে করি, $f(a) = a^3 + 3a + 36$
এখন, $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) + 36$
$= -27 - 9 + 36 = -36 + 36 = 0$
$\therefore\ a - (-3) = a + 3$
অর্থাৎ, $(a+3)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $a^3 + 3a + 36$
$= a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a + 12a + 36$
$= a^2(a+3) - 3a(a+3) + 12(a+3)$
$= (a+3)(a^2 - 3a + 12)$ **(Ans.)**

09. $a^4 - 4a + 3$

[৩৫তম, ৩৩তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol^n প্রদত্ত রাশি $= a^4 - 4a + 3$
মনে করি, $f(a) = a^4 - 4a + 3$
এখানে, $f(1) = (1)^4 - 4.1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 4 - 4 = 0$
$\therefore$ $(a-1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $a^4 - 4a + 3$
$= a^4 - a^3 + a^3 - a^2 + a^2 - a - 3a + 3$
$= a^3(a-1) + a^2(a-1) + a(a-1) - 3(a-1)$
$= (a-1)(a^3 + a^2 + a - 3)$
$= (a-1)(a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a + 3a - 3)$
$= (a-1)\{a^2(a-1) + 2a(a-1) + 3(a-1)\}$
$= (a-1)(a-1)(a^2 + 2a + 3)$
$= (a-1)^2(a^2 + 2a + 3)$ **(Ans.)**

10. $a^3 - a^2 - 10a - 8$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol^n প্রদত্ত রাশি $= a^3 - a^2 - 10a - 8$
মনে করি, $f(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$
এখানে, $f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 10(-2) - 8$
$= -8 - 4 + 20 - 8 = -20 + 20 = 0$
$\therefore$ $(a+2)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - a^2 - 10a - 8$
$= a^3 + 2a^2 - 3a^2 - 6a - 4a - 8$
$= a^2(a + 2) - 3a(a + 2) - 4(a + 2)$
$= (a + 2)(a^2 - 3a - 4)$
$= (a + 2)(a^2 + a - 4a - 4)$
$= (a + 2)\{a(a + 1) - 4(a + 1)\}$
$= (a + 2)(a + 1)(a - 4)$ **(Ans.)**

11. $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" প্রদত্ত রাশি $= x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
মনে করি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
এখানে, $f(2) = (2)^3 - 3.2^2 + 4.2 - 4$
$= 8 - 12 + 8 - 4 = 16 - 16 = 0$
$\therefore$ $(x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
$= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4$
$= x^2(x - 2) - x(x - 2) + 2(x - 2)$
$= (x - 2)(x^2 - x + 2)$ **(Ans.)**

12. $a^3 - 7a^2b + {}'ab^2 - b^3$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।
প্রদত্ত রাশি $= a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$
মনে করি, $f(a) = a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$
এখানে, $f(b) = b^3 - 7b^2b + 7bb^2 - b^3 = 0$
$\therefore$ $(a - b)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$
$= a^3 - a^2b - 6a^2b + 6ab^2 + ab^2 - b^3$
$= a^2(a - b) - 6ab(a - b) + b^2(a - b)$
$= (a - b)(a^2 - 6ab + b^2)$ **(Ans.)**

13. $x^3 - x - 24$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" প্রদত্ত রাশি $= x^3 - x - 24$
মনে করি, $f(x) = x^3 - x - 24$
এখানে, $f(3) = (3)^3 - 3 - 24 = 27 - 3 - 24 = 27 - 27 = 0$
$\therefore$ $(x - 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 - x - 24 = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 8x - 24$
$= x^2(x - 3) + 3x(x - 3) + 8(x - 3)$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 8)$ **(Ans.)**

14. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]*

Sol" প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

এখানে, $f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 11(-3) + 6$

$= -27 + 54 - 33 + 6 = -60 + 60 = 0$

$\therefore$ $(x + 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6$

$= x^2(x + 3) + 3x(x + 3) + 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x^2 + 3x + 2) = (x + 3)(x^2 + 2x + x + 2)$

$= (x + 3)\{x(x + 2) + 1(x + 2)\}$

$= (x + 3)(x + 2)(x + 1) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

15. $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]*

Sol" প্রদত্ত রাশি $= 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

মনে করি, $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

এখানে, $f(2) = 2.2^4 - 3.2^3 - 3.2 - 2$

$= 2.16 - 3.8 - 6 - 2 = 32 - 24 - 6 - 2 = 32 - 32 = 0$

$\therefore$ $(x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

$= 2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2$

$= 2x^3(x - 2) + x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 1(x - 2)$

$= (x - 2)(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$

$= (x - 2)\{x^2(2x + 1) + 1(2x + 1)\}$

$= (x - 2)(2x + 1)(x^2 + 1)$ **(Ans.)**

16. $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]*

Sol" প্রদত্ত রাশি $= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

মনে করি, $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

এখানে, $f(-1) = 4(-1)^4 + 12(-1)^3 + 7(-1)^2 - 3(-1) - 2$

$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2 = 14 - 14 = 0$

$\therefore$ $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2$

$= 4x^3(x + 1) + 8x^2(x + 1) - x(x + 1) - 2(x + 1)$

$= (x + 1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2)$

$= (x + 1)\{4x^2(x + 2) - 1(x + 2)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(4x^2 - 1)$

$= (x + 1)(x + 2)\{(2x)^2 - 1^2\}$

$= (x + 1)(x + 2)(2x + 1)(2x - 1)$ **(Ans.)**

17. $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]*

Sol" প্রদত্ত রাশি $= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

মনে করি, $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

এখানে, $f(1) = (1)^6 - (1)^5 + (1)^4 - (1)^3 + (1)^2 - 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 3 - 3 = 0$

$\therefore$ $(x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

$= x^5(x - 1) + x^3(x - 1) + x(x - 1)$

$= (x - 1)(x^5 + x^3 + x)$

$= (x - 1) \cdot x(x^4 + x^2 + 1)$

$= x(x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

$= x(x - 1)\{(x^2)^2 + 2.x^2.1 + (1)^2 - x^2\}$

$= x(x - 1)\{(x^2 + 1)^2 - (x)^2\}$

$= x(x - 1)(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$

$= x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ **(Ans.)**

18. $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]*

Sol" প্রদত্ত শি $= 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

মনে করি, $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

এখানে, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{4} - 1$

$= \frac{4}{64} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} - 1$

$= \frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} - 1$

$= \frac{1 - 5 + 20 - 16}{16}$

$= \frac{21 - 21}{16}$

$= \frac{0}{16} = 0$

$\therefore$ $x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

অর্থাৎ $(4x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

$= 4x^3 - x^2 - 4x^2 + x + 4x - 1$

$= x^2(4x - 1) - x(4x - 1) + 1(4x - 1)$

$= (4x - 1)(x^2 - x + 1)$ **(Ans.)**

19. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১*

Sol" প্রদত্ত রাশি $= 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

মনে করি, $f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

এখানে, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 18.\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15.\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 2$

$= \frac{18}{27} + \frac{15}{9} - \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{3} - 2$

$= \frac{2+5-1-6}{3} = \frac{7-7}{3} = \frac{0}{3} = 0$

$\therefore \quad x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(3x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

অর্থাৎ $(3x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$= 18x^3 - 6x^2 + 21x^2 - 7x + 6x - 2$

$= 6x^2(3x - 1) + 7x(3x - 1) + 2(3x - 1)$

$= (3x - 1)(6x^2 + 7x + 2)$

$= (3x - 1)(6x^2 + 3x + 4x + 2)$

$= (3x - 1)\{3x(2x + 1) + 2(2x + 1)\}$

$= (3x - 1)(3x + 2)(2x + 1)$ **(Ans.)**

20. $x^3 - x - 6$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (উদাহরণের অংক নং-৩*

Sol" প্রদত্ত রাশি $= x^3 - x - 6$

মনে করি, $f(x) = x^3 - x - 6$

এখানে, $f(2) = 2^3 - 2 - 6$

$= 8 - 2 - 6 \quad = 8 - 8 = 0$

$\therefore \quad (x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - x - 6$

$= x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6$

$= x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 3(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$ **(Ans.)**

21. $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$ এবং $x^2 + xy - 2y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (উদাহরণের অংক নং-

Sol" এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।

মনে করি, $f(x) \quad = x^3 - 3xy^2 + 2y^3$

তাহলে, $f(y) \quad = y^3 - 3(y)y^2 + 2y^3$

$= y^3 - 3y^3 + 2y^3 \quad = 3y^3 - 3y^3 = 0$

$\therefore \quad (x - y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$

$= x^3 - x^2y + x^2y - xy^2 - 2xy^2 + 2y^3$

$= x^2(x - y) + xy(x - y) - 2y^2(x - y)$

$= (x - y)(x^2 + xy - 2y^2)$

আবার মনে করি, $g(x) = x^2 + xy - 2y^2$

তাহলে, $g(y) = y^2 + y.y - 2y^2$

$= y^2 + y^2 - 2y^2 = 2y^2 - 2y^2 = 0$

$\therefore$ $(x - y)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^2 + xy - 2y^2$

$= x^2 - xy + 2xy - 2y^2$

$= x(x - y) + 2y(x - y)$

$= (x - y)(x + 2y)$

$\therefore x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = (x - y)(x^2 + xy - 2y^2)$

$= (x - y)(x - y)(x + 2y)$

$= (x - y)^2 (x + 2y)$ **(Ans.)**

22. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$ [৩৮তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (উদাহরণের অংক নং-৩২)]

Sol" $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

$= 27x^3(2x + a) - 8(2x + a)$

$= (2x + a)(27x^3 - 8) = (2x + a)\{(3x)^3 - (2)^3\}$

$= (2x + a)(3x - 2)\{(3x)^2 + 3x.2 + (2)^2\}$

$= (2x + a)(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ **Ans.**

23. $g(a) = a^3 + a^2 + 10a - 8$, $f(a) = a^3 - 9 + (a + 1)^3$

(ক) $g(a)$ কে $(a - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা নির্ণয় কর।

(খ) $f(a)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (উদাহরণের অংক নং-৩৩)]

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $g(a) = a^3 + a^2 + 10a - 8$

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $g(a)$ কে $(a - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $g(2)$

$\therefore g(2) = 2^3 + 2^2 + 10.2 - 8 = 8 + 4 + 20 - 8 = 32 - 8 = 24$

$\therefore$ $g(2) = 24$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ 24

(খ) $f(a) = a^3 - 9 + (a + 1)^3$

এখানে, $f(1) = 1^3 - 9 + (1 + 1)^3$

$= 1 - 9 + 8 = 9 - 9 = 0$

$\therefore$ $(a - 1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - 9 + (a + 1)^3 = a^3 - 1 + (a + 1)^3 - 8$

$= (a^3 - 1^3) + \{(a + 1)^3 - 2^3\}$

$= (a-1)(a^2 + a.1 + 1) + \{(a + 1) - 2\}\{(a + 1)^2 + (a + 1).2 + 2^2\}$

$= (a - 1)(a^2 + a + 1) + \{(a - 1)(a^2 + 2a + 1 + 2a + 2 + 4)\}$

$= (a - 1)(a^2 + a + 1) + (a - 1)(a^2 + 4a + 7)$

$= (a - 1)(a^2 + a + 1 + a^2 + 4a + 7)$

$= (a - 1)(2a^2 + 5a + 8)$ **(Ans.)**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (উদাহরণের কাজের অংক)]

24. $x^3 - 21x - 20$

Sol^n প্রদত্ত রাশি $= x^3 - 21x - 20$

মনে করি, $f(x) = x^3 - 21x - 20$

এখানে, $f(-1) = (-1)^3 - 21.(-1) - 20$

$= -1 + 21 - 20 = 21 - 21 = 0$

$\therefore \quad x - (-1) = (x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 21x - 20 = x^3 + x^2 - x^2 - x - 20x - 20$

$= x^2(x + 1) - x(x + 1) - 20(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - x - 20) = (x + 1)(x^2 - 5x + 4x - 20)$

$= (x + 1)\{x(x - 5) + 4(x - 5)\}$

$= (x + 1)(x + 4)(x - 5)$ **(Ans.)**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (উদাহরণের কাজের অংক)]

25. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Sol^n প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

মনে করি, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

এখানে, $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11.(-1) + 6$

$= -1 + 6 - 11 + 6 = 12 - 12 = 0$

$\therefore \quad x - (-1) = (x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6) = (x + 1)(x^2 + 2x + 3x + 6)$

$= (x + 1)\{x(x + 2) + 3(x + 2)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৪ (উদাহরণের কাজের অংক)]

26. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Sol^n প্রদত্ত রাশি $= 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

মনে করি, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

এখানে, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\frac{1}{2} - 1$

$= \frac{2}{8} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{2 - 6 + 12 - 8}{8} = \frac{14 - 14}{8} = \frac{0}{8} = 0$

$\therefore \quad x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

অর্থাৎ $(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

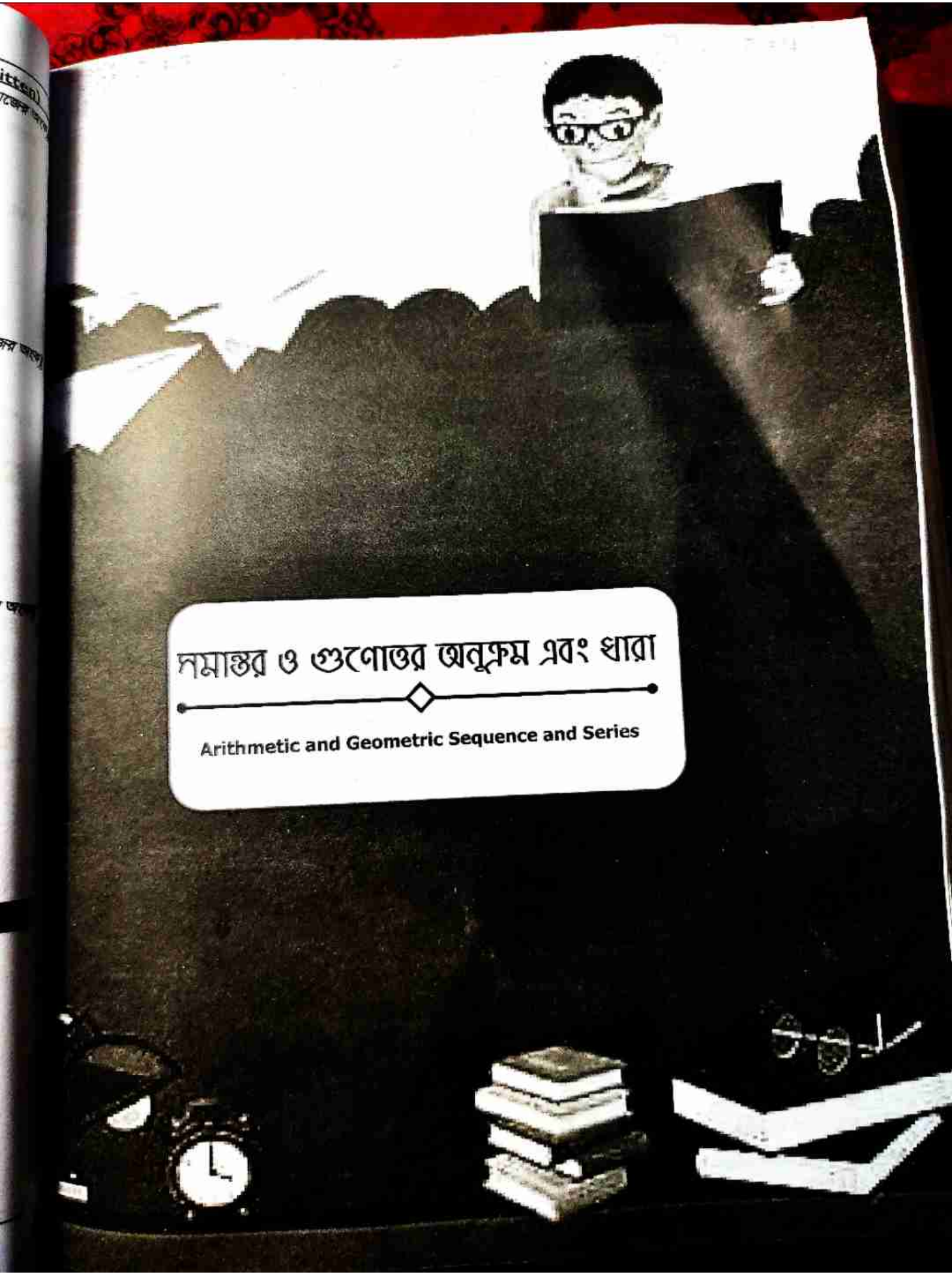
এখন, $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1$

$= x^2(2x - 1) - x(2x - 1) + 1(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	02, 03, 07
Type-02	02, 05, 07, 10, 12
Type-03	03, 05, 08, 16
Type-04	02, 05, 10, 11, 15
Type-05	01
Type-06	01, 02, 03, 06, 08
Type-07	Full
Type-08	02, 12, 14, 22


সমান্তর ও গুণোত্তর অনুক্রম এবং ধারা
Arithmetic and Geometric Sequence and Series

সমান্তর ধারার Analysis

৩৫ তম বিসিএস-এ নতুন সিলেবাস প্রবর্তিত হওয়ার পর ধারার যোগফল থেকে Written-এ প্রশ্ন আসা শুরু হয়। এ পর্যন্ত ৩৫, ৩৬, ৪০, ৪৩ ও ৪৪ তম বিসিএস-এ সমান্তর ধারা থেকে প্রশ্ন এসেছে। ৩৫তম ও ৪৪তম বিসিএস-এর প্রশ্নটি নবম-দশম শ্রেণির বইয়ের অনুরূপ আসলেও বাকীগুলো বইয়ের বাইরে থেকে এসেছে। তাই শুধু নবম-দশম শ্রেণির বইয়ের অংকগুলো পড়লে Written-এর প্রশ্নটি উত্তর করা আপনার পক্ষে সম্ভব নাও হতে পারে। তাই উল্লিখিত বইয়ের বাইরে প্রয়োজনীয় অংকগুলো এ অধ্যায়ে সন্নিবেশিত হয়েছে। আশা করি সবগুলো অংক বুঝে করতে পারলে পরীক্ষার ধারার অংকটি আপনি উত্তর করতে পারবেন ইনশাআল্লাহ্।

মৌলিক এবং তথ্যমূলক প্রয়োজনীয় আলোচনা

- ধারাঃ n সংখ্যার একটি অনুক্রম $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ যদি কোন সুনির্দিষ্ট নিয়মে গঠিত হয় তবে, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$ কে ধারা বলে। ধারার প্রতিটি সংখ্যাকে তার পদ বলে। সবগুলো পদের যোগফলকে ধারার যোগফল বলে।
- ধারা দুই প্রকারঃ
  (i) সমান্তর ধারা (Arithmetic Series).
  (ii) সমানুপাতিক বা গুণোত্তর ধারা (Geometric Series).
- ধারার যোগফল নির্ণয়ঃ

(i) **সমান্তর ধারাঃ** কোন ধারার পরপর পদগুলোর অন্তর সমান হলে অর্থাৎ, ধারাটি a, a+d, a+2d, a+3d, ... হলে, তাকে সমান্তর ধারা বলে। কোন পদ এবং তার পূর্ববর্তী পদের বিয়োগ ফলকে সাধারণ অন্তর বলে।

- সমান্তর ধারার n - তম পদ, $t_n = a + (n-1)d$;
  এখানে a = প্রথম পদ, d = সাধারণ অন্তর।
- সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের যোগফল S_n হলে, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

(ii) **সমানুপাতিক ধারা ঃ** কোন ধারার পরপর পদগুলোর অনুপাত সমান হলে, অর্থাৎ ধারাটি a, ar, ar^2, ar^3, ... ইত্যাদি হলে, তাকে সমানুপাতিক ধারা বলে। কোন পদ এবং তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাতকে সাধারণ অনুপাত বলে।

- সমানুপাতিক ধারার n-তম পদ, $t_n = ar^{n-1}$;
  এখানে, a = প্রথম পদ, r = সাধারণ অনুপাত।
- সমানুপাতিক ধারার যোগফল S_n হলে, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, যখন $r > 1$.

  এবং $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, যখন $r < 1$.
- অসীম সমানুপাতিক ধারার যোগফলঃ $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$, যখন $-1 < r < 1$ এবং $r \neq 1$.
- **কয়েকটি পরিচিত ধারার যোগফল ঃ**

01. n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি বা যোগফল, $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

02. n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি বা যোগফল, $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

03. n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি বা যোগফল, $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

04. প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল n^2 $\therefore 1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1) = n^2$.

05. প্রথম n সংখ্যক জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল n(n+1) $\therefore 2+4+6+\ldots\ldots+2n = n(n+1)$.

সমান্তর অনুক্রম ও ধারা

TYPE 01: সমান্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয় (শেষপদ দেয়া না থাকলে)

01. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots$ ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-)]

Sol" $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots$
এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 1$
সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$
পদ সংখ্যা $= n$

$\therefore$ ধারাটির n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2 \times 1 + (n-1)2\}$

$= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2)$

$= \frac{n}{2} \times 2n = n^2$

$\therefore$ ধারাটির n পদের সমষ্টি n^2.

02. $8 + 16 + 24 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-)] 02.

Sol" প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 8$
সাধারণ অন্তর, $d = 16 - 8 = 8$
পদ সংখ্যা, $n = 9$

$\therefore$ সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{9}{2}\{2.8 + (9-1)8\}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{9}{2}(16 + 8 \times 8) = \frac{9}{2} \times (16 + 64)$

$= \frac{9}{2} \times 80 = 360$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি 360.

03. $7 + 12 + 17 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম 30 টি পদের সমষ্টি কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (উদাহরণের অংক নং-)]

Sol" প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 7$
সাধারণ অন্তর, $d = 12 - 7 = 5$
পদ সংখ্যা, $n = 30$

$\therefore$ সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{30}{2}\{2.7 + (30-1)5\}$

$= 15(14 + 29 \times 5)$

$= 15 \times (14 + 145) = 15 \times 159 = 2385$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 30 টি পদের সমষ্টি 2385.

ASHRAFUL'S MATH COCKTAIL (WRITTEN)

TYPE 02: সমান্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয় (শেষপদ দেয়া থাকলে)

01. $5 + 11 + 17 + 23 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 59 =$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" $5 + 11 + 17 + 23 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 59$

এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 5$

সাধারণ অন্তর, $d = 11 - 5 = 6$

শেষ পদ, $\ell = 59$

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 59$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore \quad a + (n-1)\,d = 59$

$\Rightarrow \quad 5 + (n-1)\,6 = 59$

$\Rightarrow \quad (n-1)\,6 = 59 - 5 = 54$

$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{54}{6}$

$\Rightarrow \quad n - 1 = 9$

$\Rightarrow \quad n = 9 + 1 = 10$

$\therefore$ যোগফল, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)\,d\} = \frac{10}{2}\{2.5 + (10-1)\,6\}$

$= 5\,(10 + 9 \times 6) = 5(10 + 54) = 5 \times 64 = 320$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি 320.

02. $29 + 25 + 21 + \ldots\ldots\ldots\ldots - 23 =$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" $29 + 25 + 21 + \ldots\ldots\ldots\ldots - 23$

এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 29$

সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = -4$

শেষ পদ, $\ell = -23$

পদ সংখ্যা $= n$

কিন্তু, $\ell = a + (n-1)\,d$

$\therefore$ পদসংখ্যা, $n = \frac{\ell - a}{d} + 1 = \frac{-23 - 29}{-4} + 1 = \frac{-52}{-4} + 1 = 13 + 1 = 14$

$\therefore$ যোগফল, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)\,d\}$

$= \frac{14}{2}\{2.29 + (14-1)(-4)\}$

$[\because n = 14,\ a = 29$ এবং $d = -4]$

$= 7\{58 + 13 \times (-4)\}$

$= 7(58 - 52) = 7 \times 6 = 42$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি 42.

03. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 99 =$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (উদাহরণের অংক নং-৪)]

Sol" আমরা জানি, n সংখ্যক ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $= \frac{n(n+1)}{2}$

এখানে, $n = 99$

$\therefore$ এদের সমষ্টি $= \frac{99(99+1)}{2} = \frac{99 \times 100}{2} = 99 \times 50 = 4950$

04. দেখাও যে, $1+3+5+7+\ldots\ldots\ldots+125 = 169+171+173+\ldots\ldots\ldots+209$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২)]

Sol" বামপক্ষ $= 1+3+5+7+\ldots\ldots\ldots+125$

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অন্তর, $d = 3-1 = 2$

শেষ পদ, $\ell = 125$

$\therefore$ পদসংখ্যা, $n = \frac{\ell - a}{d} + 1 = \frac{125-1}{2} + 1 = \frac{124}{2} + 1 = 62 + 1 = 63$

$\therefore$ ধারাটির যোগফল, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{63}{2}\{2.1 + (63-1)2\}$

$= \frac{63}{2}\{2 + 62 \times 2\}$

$= \frac{63}{2} \times 2\,(1+62) = 63 \times 63 = 3969$

এখন, ডানপক্ষ $= 169+171+173+\ldots\ldots\ldots+209$

এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 169$

সাধারণ অন্তর, $d = 171-169 = 2$

শেষ পদ, $\ell = 209$

$\therefore$ পদসংখ্যা, $n = \frac{\ell - a}{d} + 1 = \frac{209-169}{2} + 1 = \frac{40}{2} + 1 = 20 + 1 = 21$

$\therefore$ যোগফল, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{21}{2}\{2 \times 169 + (21-1)2\}$

$= \frac{21}{2} \times 2(169+20) = 21 \times 189 = 3969$

$\therefore 1+3+5+7+\ldots\ldots+125 = 169+171+173+\ldots\ldots+209$

(দেখানো হলো)

TYPE 03: সমান্তর ধারার পদ সংখ্যা নির্ণয় (ধারা দেয়া থাকলে)

01. $8+11+14+17+\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ 392?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Sol" প্রথম পদ, $a = 8$

সাধারণ অন্তর, $d = 11-8 = 3$

মনে করি, n তম পদ $= 392$

কিন্তু ধারাটির n তম পদ $= a + (n-1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (n-1)\,d = 392$

$\Rightarrow 8 + (n-1)\,.\,3 = 392 \Rightarrow (n-1).3 = 392 - 8$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{384}{3} \Rightarrow n - 1 = 128$

$\Rightarrow n = 128 + 1 = 129$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 129 তম পদ 392।

02. $4 + 7 + 10 + 13 + \ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ 301?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" প্রদত্ত ধারা, $4 + 7 + 10 + 13 + \ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 4$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 4 = 3$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 301$

আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n - 1)\,d$

$\therefore \quad a + (n - 1).d = 301$

$\Rightarrow \quad 4 + (n - 1).3 = 301$

$\Rightarrow \quad 4 + 3n - 3 = 301$

$\Rightarrow \quad 3n + 1 = 301 \quad \Rightarrow 3n = 301 - 1 \quad \Rightarrow 3n = 300 \quad \Rightarrow n = \frac{300}{3} = 100$

অতএব, প্রদত্ত ধারার 100 তম পদ 301।

03. $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots\ldots$ ধারার কোন পদ 383?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (উদাহরণের অংক নং-০২)]

Sol" ধারাটি, প্রথম পদ $a = 5$; সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 3$

n তম পদ $= 383$; পদ সংখ্যা $n = ?$

n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$\Rightarrow \quad 383 = 5 + (n - 1)3$

$\Rightarrow \quad 383 = 5 + 3n - 3$

$\Rightarrow \quad 383 = 2 + 3n$

$\Rightarrow \quad 3n = 381$

$\therefore \quad n = 127$

অর্থাৎ 127 তম পদের মান 302

TYPE 04: সমান্তর ধারার পদ সংখ্যা নির্ণয় (ধারা দেয়া না থাকলে)

01. কোন সমান্তর ধারায় প্রথম পদ 17, সাধারণ অন্তর –2 এবং সমষ্টি 72 হলে, পদসংখ্যা কত?

Sol" দেওয়া আছে,

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 17$

সাধারণ অন্তর, $d = -2$ এবং সমষ্টি $= 72$

মনে করি, পদ সংখ্যা $= n$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}$

$= \frac{n}{2}\{2.17 + (n - 1).(-2)\}$

$= \frac{n}{2}\{34 - 2(n - 1)\} \quad = \frac{n}{2}.2\{17 - (n - 1)\} = n(17 - n + 1) = n(18 - n)$

প্রশ্নমতে, $n(18 - n) = 72$

$\Rightarrow \quad 18n - n^2 = 72$

$\Rightarrow \quad n^2 - 18n + 72 = 0 \quad \Rightarrow n^2 - 12n - 6n + 72 = 0 \quad \Rightarrow n(n - 12) - 6(n - 12) = 0$

$\Rightarrow \quad (n - 6)(n - 12) = 0$

$\therefore \quad n - 6 = 0$ অথবা, $n - 12 = 0$

অর্থাৎ $n = 6$ অথবা, $n = 12$

উত্তর: পদসংখ্যা 6 অথবা 12.

02. একটি সমান্তর ধারা তৃতীয় পদ 20, অষ্টম পদ 10 এবং ধারাটির সমষ্টি 150 হলে, ধারাটির পদসংখ্যা কত?

Sol ধরি, ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n-তম পদ = $a + (n-1)d$.

$\therefore$ তৃতীয় পদ = $a + (3-1)d = a + 2d$

প্রশ্নমতে, $a + 2d = 20$ ..... (i)

অষ্টম পদ = $a + (8-1)d = a + 7d$

প্রশ্নমতে, $a + 7d = 10$ ..... (ii)

$a + 7d = 10$

$a + 2d = 20$

(–) করে, $5d = -10$

$\therefore \quad d = -2$

(i) নং সমীকরণে, $d = -2$ বসিয়ে, $a + 2(-2) = 20$

$\Rightarrow \quad a - 4 = 20 \qquad \Rightarrow a = 20 + 4$

$\therefore \quad a = 24$

ধরি, পদসংখ্যা = n

তাহলে, প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

শর্তমতে, $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 150$

$\Rightarrow \quad \frac{n}{2}\{2 \times 24 + (n-1)(-2)\} = 150 \qquad \Rightarrow \frac{n}{2}(48 + 2 - 2n) = 150 \qquad \Rightarrow \frac{n}{2}(50 - 2n) = 150$

$\Rightarrow \quad \frac{n}{2} \times 2(25 - n) = 150 \quad \Rightarrow n(25 - n) = 150 \qquad \Rightarrow 25n - n^2 - 150 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 - 25n + 150 = 0$ [উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \quad n^2 - 15n - 10n + 150 = 0$

$\Rightarrow \quad n(n-15) - 10(n-15) = 0$

$\Rightarrow \quad (n-15)(n-10) = 0$

হয়, $n - 15 = 0$ অথবা, $n - 10 = 0$

$\therefore \quad n = 15 \qquad \therefore \quad n = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা 10 অথবা 15 **(উত্তর)**

TYPE 05: সমান্তর ধারার n তম পদ সংখ্যা নির্ণয়

01. কোনো সমান্তর ধারার m তম পদ n এবং n তম পদ m হলে, ধারাটির $(m+n)$ তম পদ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)

Sol ধরি, ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

প্রশ্নমতে, m তম পদ, $a + (m-1)d = n$ ..... (i)

এবং n তম পদ, $a + (n-1)d = m$ ..... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $(m - 1 - n + 1)d = n - m$

বা, $(m-n)d = -(m-n)$

বা, $d = -1$ ..... (iii)

$\therefore \quad (m+n)$ তম পদ $= a + (m + n - 1)d$

$= \{a + (m-1)d\} + nd$

$= n + n \times (-1)$ [(i) ও (iii) নং হতে]

$= n - n = 0$

$\therefore \quad (m+n)$ তম পদ 0.

02. একটি সমান্তর ধারার pতম পদটি q এবং qতম পদটি p। দেখাও যে, rতম পদটি (p + q – r) এবং (p + q) তম পদটি শূন্য হবে। [৪৪তম বিসিএস]

Sol" ধরি, ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

প্রশ্নমতে, p তম পদ, $a + (p-1).d = q$ ..... (i)

এবং q তম পদ, $a + (q-1).d = p$ ..... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $(p-1-q+1)d = q-p$

$\Rightarrow (p-q)d = -(p-q)$

$\therefore d = -1$

d এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $a + (p-1).(-1) = q \Rightarrow a - p + 1 = q \Rightarrow a = p + q - 1$

$\therefore$ r তম পদ $= a + (r-1).d$

$= (p+q-1) + (r-1).(-1)$

$= p + q - 1 - r + 1$

$= p + q - r$ (দেখানো হলো)

এবং (p + q) তমপদ $= a + (p+q-1).d$

$= (p+q-1) + (p+q-1).(-1)$

$= (p+q-1)(1-1)$

$= (p+q-1).0$

$= 0$ (দেখানো হলো)

03. একটি সমান্তর ধারার m তম পদ n^2 এবং n তম পদ m^2 হলে ধারাটির (m+n–1) তম পদ নির্ণয় করুন।

Sol" মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ ধারাটির m তম পদ $= a + (m-1)d$

এবং n তম পদ $= a + (n-1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (m-1)d = n^2$ ..... (i)

এবং $a + (n-1)d = m^2$ ..... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে,

$$\begin{array}{rrr} a + (m-1)d = n^2 \\ a + (n-1)d = m^2 \\ (-)\ \ (-) \qquad (-) \\ \hline (m-1)d - (n-1)d = n^2 - m^2 \end{array}$$

$\Rightarrow (m-1-n+1)d = -(n^2 - m^2)$

$\Rightarrow (m-n)d = -(m+n)(m-n)$

$\Rightarrow d = \dfrac{-(m+n)(m-n)}{(m-n)}$

$\Rightarrow d = -(m+n)$

$\therefore$ ধারাটির (m + n – 1) তম পদ $= a + (m+n-1-1)d$

$= a + (m-1)d + (n-1)d$

$= n^2 + (n-1)\{-(m+n)\}$ [$\because a + (m-1)d = n^2$ এবং $d = -(m+n)$]

$= n^2 - (n-1)(m+n)$ $= n^2 - (mn + n^2 - m - n)$

$= n^2 - mn - n^2 + m + n$

$= m - mn + n$ (Ans.)

TYPE 06: নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় (ধারা দেয়া না থাকলে)

01. কোনো সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]*

Sol" মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

$\therefore$ সমান্তর ধারাটির n তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= a + (12-1)d = a + 11d$

প্রশ্নমতে, $a + 11d = 77$ ..... (i)

আবার, কোনো সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

∴ ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি $S_{23} = \frac{23}{2}\{2a + (23-1)d\} = \frac{23}{2}(2a + 22d)$

$= \frac{23 \times 2}{2}(a + 11d)$

$= 23 \times 77$ [(i) নং হতে]

$= 1771$

∴ ধারাটির প্রথম 23 পদের সমষ্টি 1771.

02. একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ –20 হলে, এর প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

∴ n তম পদ = $a + (n-1)d$

∴ 16 তম পদ = $a + (16-1)d = a + 15d$

প্রশ্নমতে, $a + 15d = -20$ ..... (i)

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

∴ ধারাটির 31 পদের সমষ্টি $S_{31} = \frac{31}{2}\{2a + (31-1)d\}$

$= \frac{31}{2}(2a + 30d) = \frac{31}{2} \cdot 2(a + 15d)$

$= 31 \times (-20)$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

$= -620$

∴ ধারাটির প্রথম 31 পদের সমষ্টি –620.

TYPE 07:

01. $9 + 7 + 5 +$ ..... ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল –144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গ.), অধ্যায়-১৩.১(অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" দেওয়া আছে, $9 + 7 + 5 +$ ..... ধারাটির n সংখ্যক পদের যোগফল –144

প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার

প্রথম পদ, a = 9 এবং সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 9 = -2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

প্রশ্নমতে, $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = -144$

$\Rightarrow \frac{n}{2}\{2 \times 9 + (n-1)(-2)\} = -144$

$\Rightarrow n(18 - 2n + 2) = -288$

$\Rightarrow n(20 - 2n) = -288$ $\Rightarrow 20n - 2n^2 = -288$

$\Rightarrow -2(n^2 - 10n) = -288$ $\Rightarrow n^2 - 10n = 144$

$\Rightarrow n^2 - 10n - 144 = 0$ $\Rightarrow n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$

$\Rightarrow n(n-18) + 8(n-18) = 0$ $\Rightarrow (n-18)(n+8) = 0$

হয়, $n - 18 = 0$ ∴ $n = 18$

অথবা, $n + 8 = 0$ ∴ $n = -8$

কিন্তু $n \neq -8$, কারণ ধারার পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ n এর মান 18.

02. $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গ.), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]*

Sol" মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অন্তর, $d = 4 - 2 = 2$

পদসংখ্যা $= n$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2.2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} \times 2\{2 + n - 1\} = n(n+1) = n^2 + n$

শর্তমতে, $n^2 + n = 2550 \quad \Rightarrow \quad n^2 + n - 2550 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 + 51n - 50n - 2550 = 0 \quad \Rightarrow \quad n(n+51) - 50(n+51) = 0$

$\Rightarrow \quad (n+51)(n-50) = 0$

হয়, $n + 51 = 0 \Rightarrow n = -51$

অথবা, $n - 50 = 0 \Rightarrow n = 50$

কিন্তু $n \neq -51$, কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ n এর মান 50.

TYPE 08:

01. একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]*

Sol" মনে করি ধারাটির প্রথম পদ $= a$ এবং সাধারণ অন্তর $= d$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

এখন, 12 পদের সমষ্টি $S_{12} = \frac{12}{2}\{2a + (12-1)d\}$

$\Rightarrow 144 = 6(2a + 11d)$

$\Rightarrow 2a + 11d = \frac{144}{6}$

$\therefore 2a + 11d = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, 20 পদের সমষ্টি $S_{20} = \frac{20}{2}\{2a + (20-1)d\}$

$\Rightarrow 560 = 10(2a + 19d)$

$\Rightarrow 2a + 19d = \frac{560}{10}$

$\therefore 2a + 19d = 56 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$2a + 19d - 2a - 11d = 56 - 24 \quad \Rightarrow 8d = 32 \quad \therefore d = 4$

d এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $2a + 19 \times 4 = 56$

$\Rightarrow 2a = 56 - 76$

$\Rightarrow 2a = -20 \quad \therefore a = -10$

$\therefore$ প্রথম 6 পদের সমষ্টি $= \frac{6}{2}\{2a + (6-1)d\}$

$= \frac{6}{2}\{2 \times (-10) + (6-1)4\}$

$= 3(-20 + 5 \times 4)$

$= 3(-20 + 20) = 3 \times 0 = 0$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 6 পদের সমষ্টি 0.

02. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n এবং প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, এর প্রথম (m + n) পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

∴ ধারাটির প্রথম m পদের সমষ্টি $= \frac{m}{2}\{2a + (m-1)d\}$

বা, $n = \frac{m}{2}\{2a + (m-1)d\}$

বা, $2a + (m-1)d = \frac{2n}{m}$ ..... (i)

আবার, প্রথম n পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

বা, $m = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

বা, $2a + (n-1)d = \frac{2m}{n}$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $2a + (m-1)d - 2a - (n-1)d = \frac{2n}{m} - \frac{2m}{n}$

বা, $(m - 1 - n + 1)d = \frac{2n^2 - 2m^2}{mn}$

বা, $(m-n)d = \frac{2(n^2 - m^2)}{mn}$

বা, $(m-n)d = \frac{2(n-m)(n+m)}{mn}$

বা, $d = \frac{-2(m-n)(m+n)}{(m-n)mn}$

বা, $d = -2\frac{m+n}{mn}$

তাহলে, প্রথম (m + n) পদের সমষ্টি $= \frac{m+n}{2}\{2a + (m+n-1)d\}$

$= \frac{m+n}{2}\{2a + (m-1)d + nd\}$

$= \frac{m+n}{2}\left[\frac{2n}{m} + n \cdot \left\{\frac{-2(m+n)}{mn}\right\}\right]$ [(i) নং থেকে এবং d এর মান বসিয়ে]

$= \frac{m+n}{2}\left\{\frac{2n}{m} - \frac{2(m+n)}{m}\right\}$

$= \frac{m+n}{2}\left(\frac{2n - 2m - 2n}{m}\right)$

$= \frac{m+n}{2} \cdot \left(\frac{-2m}{m}\right)$

$= -(m+n)$

∴ ধারাটির (m + n) পদের সমষ্টি $= -(m+n)$.

TYPE 09: সৃজনশীল প্রশ্ন

01. কোন সমান্তর ধারার দুইটি নির্দিষ্ট পদ ℓ তম পদ ℓ^2 এবং k তম পদ k^2।

(ক) ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d ধরে উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ তৈরি কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol" ধরি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

∴ ধারাটির ℓ তম পদ $= a + (\ell - 1)\,d$

এবং k তম পদ $= a + (k - 1)\,d$

শর্তমতে, $a + (\ell - 1)d = \ell^2$ এবং $a + (k - 1)\,d = k^2$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $a + (\ell - 1)d = \ell^2$ এবং $a + (k - 1)\,d = k^2$ **(Ans.)**

(খ) $(\ell + k)$ তম পদ নির্ণয় কর।

Sol" (ক) নং হতে প্রাপ্ত $a + (\ell - 1)d = \ell^2$ ..... (i)

এবং $a + (k - 1)\,d = k^2$ ..... (ii)

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $a + (\ell - 1)d - a - (k - 1)d = \ell^2 - k^2$

$\Rightarrow (\ell - 1 - k + 1)d = (\ell + k)(\ell - k)$

$\Rightarrow (\ell - k)d = (\ell + k)(\ell - k)$

$\Rightarrow d = \dfrac{(\ell + k)(\ell - k)}{\ell - k}$

$\Rightarrow d = \ell + k$ ..... (iii)

∴ ধারাটির $(\ell + k)$ তম পদ $= a + (\ell + k - 1)d$

$= a + (\ell - 1)d + kd$

$= \ell^2 + k(\ell + k)$ [(i) নং ও (ii) নং হতে]

$= \ell^2 + \ell k + k^2$

∴ নির্ণেয় $(\ell + k)$ তম পদ $\ell^2 + \ell k + k^2$ **(Ans.)**

(গ) প্রমাণ কর ধারাটির প্রথম $(\ell + k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\dfrac{\ell + k}{2}(\ell^2 + k^2 + \ell + k)$

Sol" (ক) নং হতে প্রাপ্ত $a + (\ell - 1)d = \ell^2$ ..... (i)

এবং $a + (k - 1)\,d = k^2$ ..... (ii)

(খ) নং হতে প্রাপ্ত, $d = \ell + k$ ..... (iii)

ধারাটির প্রথম $(\ell + k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি, $\dfrac{\ell + k}{2}\{2a + (\ell + k - 1)\,d\}$

$= \dfrac{\ell + k}{2}\{a + a + (\ell - 1 + k)d\}$ $= \dfrac{\ell + k}{2}\{a + (\ell - 1)\,d + a + kd\}$

$= \dfrac{\ell + k}{2}\{a + (\ell - 1)\,d + a + (k - 1)\,d + d\}$ $= \dfrac{\ell + k}{2}(\ell^2 + k^2 + \ell + k)$ [(i), (ii) ও (iii) নং হতে]

∴ ধারাটির প্রথম $(\ell + k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি, $\dfrac{\ell + k}{2}(\ell^2 + k^2 + \ell + k)$ **(প্রমাণিত)**

02. একটি সমান্তর ধারার ১ম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 6।

(ক) ধারাটি নির্ণয় কর।

Sol" এখানে, সাধারণ ধারার ১ম পদ, $a = 5$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 6$

সমান্তর ধারাটির ২য় পদ $= a + (2 - 1)\,d = a + d = 5 + 6 = 11$

৩য় পদ $= a + (3 - 1)\,d = a + 2d = 5 + 2 \times 6 = 5 + 12 = 17$

৪র্থ পদ $= a + (4 - 1)\,d = a + 3d = 5 + 3 \times 6 = 5 + 18 = 23$

.....

নির্ণেয় ধারা: $5 + 11 + 17 + 23 + \ldots\ldots$

(খ) ধারাটির ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 705 হলে n এর মান নির্ণয় কর।

Sol" এখানে, সমান্তর ধারার ১ম পদ, $a = 5$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 6$

১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 705$

$\Rightarrow \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 705 \quad \Rightarrow \frac{n}{2}\{2 \times 5 + (n-1)6\} = 705$

$\Rightarrow \frac{n}{2}(10 + 6n - 6) = 705 \quad \Rightarrow \frac{n}{2}(6n + 4) = 705$

$\Rightarrow \frac{n}{2} \times 2(3n + 2) = 705 \quad \Rightarrow n(3n + 2) = 705$

$\Rightarrow 3n^2 + 2n = 705 \quad \Rightarrow 3n^2 + 2n - 705 = 0$

$\Rightarrow 3n^2 - 45n + 47n - 705 = 0 \Rightarrow 3n(n-15) + 47(n-15) = 0$

$\Rightarrow (n-15)(3n+47) = 0$

$\therefore n - 15 = 0$

$\Rightarrow n = 15$

অথবা, $3n + 47 = 0 \Rightarrow 3n = -47$

$\Rightarrow n = \frac{-47}{3}$ যা গ্রহণযোগ্য নয়

নির্ণেয় মান: $n = 15$

(গ) ধারাটির সাধারণ অন্তরকে ১ম পদ এবং ১ম পদকে সাধারণ অনুপাত ধরে গঠিত গুণোত্তর ধারার ১ম 7 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

Sol" এখানে, সমান্তর ধারার ১ম পদ $= 5$ এবং সাধারণ অন্তর $= 6$

ধারাটির সাধারণ অন্তরকে ১ম পদ এবং ১ম পদকে সাধারণ অনুপাত ধরে,

গঠিত গুণোত্তর ধারার ১ম পদ, $a = 6$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 5 > 1$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারার ১ম 7 পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^7 - 1)}{r - 1} \quad [\because r > 1]$

$= \frac{6 \times (5^7 - 1)}{5 - 1}$

$= \frac{6 \times (78125 - 1)}{4} = \frac{6 \times 78124}{4} = 117186$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারার ১ম পদ 7 পদের সমষ্টি 117186

TYPE 10: Miscellaneous

01. দেখান যে, $\frac{1}{e} = 2\left(\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \ldots\ldots \infty\right)$ [৩৬তম বিসিএস]

Sol" $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots \infty$

$x = -1$ বসিয়ে পাই, $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots\ldots \infty$

$\Rightarrow \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \ldots\ldots \infty$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \ldots\ldots \infty$

$= \frac{3-1}{6} + \frac{5-1}{120} + \frac{7-1}{5040} + \ldots\ldots \infty$

$= \frac{2}{6} + \frac{4}{120} + \frac{6}{5040} + \ldots\ldots \infty$

$= 2\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{120} + \frac{3}{5040} + \ldots\ldots \infty\right)$

$= 2\left(\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \ldots\ldots \infty\right)$ (প্রমাণিত)

02. কোনো ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি n(n + 1) হলে, ধারাটি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol দেওয়া আছে,
ধারাটির প্রথম n পদের সমষ্টি $S_n = n(n+1)$
$n = 1$ হলে, ধারাটির প্রথম পদ $= 1(1+1) = 2 = S_1$
$n = 2$ হলে, ধারাটির প্রথম দুইটি পদের সমষ্টি $= 2(2+1) = 6 = S_2$
$\therefore$ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= S_2 - S_1 = 6 - 2 = 4$
আবার, $n = 3$ হলে, ধারাটির প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি $= 3(3+1) = 12 = S_3$
$\therefore$ ধারাটির তৃতীয় পদ $= S_3 - S_2 = 12 - 6 = 6$
.....
$\therefore$ ধারাটি $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots\ldots$

03. কোনো সমান্তর ধারার p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$. *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]*

Sol মনে করি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ $= x$
এবং সাধারণ অন্তর $= d$

$\therefore$ ধারাটির p তম পদ $= x + (p-1)d = a$ ..... (i)
q তম পদ $= x + (q-1)d = b$ ..... (ii)
r তম পদ $= x + (r-1)d = c$ ..... (iii)

(i) নং সমীকরণ হতে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $x + (p-1)d - x - (q-1)d = a - b$
বা, $d(p - 1 - q + 1) = a - b$ বা, $d(p-q) = a - b$
বা, $d = \dfrac{a-b}{p-q}$ ..... (iv)

আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে (iii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $x + (q-1)d - x - (r-1)d = b - c$
বা, $(q - 1 - r + 1)d = b - c$ বা, $(q-r)d = b - c$
বা, $d = \dfrac{b-c}{q-r}$ ..... (v)

এখন, (iv) ও (v) হতে পাই, $\dfrac{a-b}{p-q} = \dfrac{b-c}{q-r}$
বা, $(a-b)(q-r) = (b-c)(p-q)$
বা, $a(q-r) - b(q-r) = b(p-q) - c(p-q)$
বা, $a(q-r) + c(p-q) - b(q-r) - b(p-q) = 0$
বা, $a(q-r) + c(p-q) - b(q-r+p-q) = 0$
বা, $a(q-r) + c(p-q) - b(p-r) = 0$
$\therefore$ $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$ (দেখানো হলো)

04. $2 + 22 + 32 + \ldots\ldots\ldots + ২০১৮২ + ২০১৯২$ কে ৮ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? [৪৩তম বিসিএস]

Sol দেওয়া আছে, $2 + 22 + 32 + \ldots\ldots\ldots + ২০১৮২ + ২০১৯২$
এখানে, ১ম পদ ২ সমান্তর ধারার অন্তর্ভুক্ত নয়।
সুতরাং ২ ব্যতিরেখে সমান্তর ধারাটি হবে, $22 + 32 + \ldots\ldots\ldots + ২০১৮২ + ২০১৯২$
যেখানে, ১ম পদ, $a = 22$
সাধারণ অন্তর, $d = 32 - 22 = ১০$
শেষ পদ, $\ell = ২০১৯২$

$\therefore$ পদসংখ্যা, $n = \dfrac{\ell - a}{d} + ১ = \dfrac{২০১৯২ - 22}{১০} + ১ = \dfrac{২০১৭০}{১০} + ১ = ২০১৭ + ১ = ২০১৮$

$\therefore$ সমষ্টি, $S_n = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-১).d\} = \dfrac{২০১৮}{২}\{2.22 + (২০১৮ - ১).১০\}$
$= ১০০৯\,(88 + ২০১৭ \times ১০) = ১০০৯\,(88 + ২০১৭০)$
$= ১০০৯ \times ২০২১৪ = ২০৩৯৫৯২৬$

$\therefore$ প্রশ্নে প্রদত্ত ধারার সমষ্টি $= ২০৩৯৫৯২৬ + ২ = ২০৩৯৫৯২৮$

এখন ৮ দিয়ে ভাগ করলে $= \dfrac{২০৩৯৫৯২৮}{৮} = ২৫৪৯৪৯১$ অর্থাৎ নিঃশেষে বিভাজ্য।

সুতরাং কোন ভাগশেষ নেই। **(Ans.)**

TYPE 11: সমান্তর ধারার প্রয়োগ বিষয়ক সমস্যা

01. গণি সাহেব একজন সরকারি চাকুরীজীবী। ২০১৬ সালের জুলাই মাসে তাঁর মূল বেতন ছিল ২২,০০০ টাকা। তাঁর বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ ১০০০ টাকা।

(ক) উপর্যুক্ত তথ্যের ভিত্তিতে একটি সমান্তর ধারা তৈরি করুন এবং ২০২৫ সালের জুলাই মাসে গণি সাহেবের মাসিক মূল বেতন কত হবে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" ২০১৬ সালের জুলাই মাসে বেতন = ২২,০০০ টাকা

বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ = ১০০০ টাকা

∴ ২০১৭ সালের জুলাই মাসে বেতন = ২২,০০০ + ১০০০ = ২৩,০০০ টাকা

২০১৮ " " " " = ২৩,০০০ + ১০০০ = ২৪,০০০ টাকা

∴ নির্ণেয় ধারাটি : ২২০০০ + ২৩০০০ + ২৪০০০ + ...

২০১৬ সালের জুলাই থেকে ২০২৫ সালের জুলাই পর্যন্ত মোট ৯ বছর

∴ ৯ বছরে বেতন বৃদ্ধি = ৯ × ১০০০ = ৯০০০ টাকা

∴ ২০২৫ সালের জুলাই মাসে বেতন = ২২০০০ + ৯০০০ = ৩১০০০ টাকা

উত্তর: ৩১০০০ টাকা

(খ) মূল বেতনের ১০% প্রতি মাসে ভবিষ্যত তহবিলে কর্তন করলে ২০ বছরে তার মোট কত টাকা ভবিষ্যত তহবিলে জমা হবে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" প্রতি মাসে ১০% কর্তন করলে ২০১৬ সালের জুলাই মাসে কর্তনের পরিমাণ

= ২২০০০ এর ১০%

$= ২২০০০ \times \frac{১০}{১০০} = ২২০০$ টাকা

∴ এক বছরে মোট কর্তন = ২২০০ × ১২ = ২৬,৪০০ টাকা

আবার, ২০১৭ সালের জুলাই মাসে কর্তন = ২৩০০০ এর ১০%

$= ২৩০০০ \times \frac{১০}{১০০} = ২৩০০$ টাকা

∴ এক বছরে মোট কর্তন = ২৩০০ × ১২ = ২৭,৬০০ টাকা

অনুরূপভাবে, ২০১৮ সালের জুলাই মাসে কর্তন = ২৪০০০ এর ১০%

$= ২৪০০০ \times \frac{১০}{১০০} = ২৪০০$ টাকা

∴ এক বছরে মোট কর্তন = ২৪০০ × ১২ = ২৮,৮০০ টাকা

∴ ১০% হারে তহবিলে বাৎসরিক কর্তনের ধারাটি হলো:

২৬৪০০ + ২৭৬০০ + ২৮৮০০ + ...

যেহেতু ২০ বছরে মোট জমা নির্ণয় করতে হবে, সুতরাং, পদসংখ্যা, n = ২০

∴ n পদের সমষ্টি $= \frac{n}{২}\{২a + (n-১).d\}$

∴ ২০ বছরের সমষ্টি $= \frac{২০}{২}\{২.২৬৪০০ + (২০-১).১২০০\}$

$= ১০(৫২৮০০ + ২২৮০০)$

$= ১০ \times ৭৫৬০০ = ৭,৫৬,০০০$

উত্তর: ৭,৫৬,০০০ টাকা

02. এক ব্যক্তি 22000 টাকায় একটি ফ্রিজ কিস্তিতে পরিশোধের মাধ্যমে কিনতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 500 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1000 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে তিনি ফ্রিজের দাম পরিশোধ করতে পারবেন এবং সর্বশেষ কিস্তির পরিমাণ কত? [৩৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর(সা. গণিত) ১৩.১ অধ্যায়ের ২৩ নং প্রশ্নের অনুরূপ]

Sol" যেহেতু, ১ম কিস্তি = 1000 টাকা

২য় " = 1000 + 500 = 1500 টাকা

৩য় " = 1500 + 500 = 2000 টাকা

মনে করি, পদসংখ্যা = n

∴ ধারাটি = 1000 + 1500 + 2000 + ... + n

ধারাটির প্রথম পদ, a = 1000

এবং সাধারণ অন্তর d = ২য় পদ − ১ম পদ = 1500 − 1000 = 500

এবং n-তম পদের সমষ্টি = 22000

$\therefore \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 22000$

$\Rightarrow \frac{n}{2}\{2.1000 + (n-1)\,500\} = 22000$

$\Rightarrow \frac{n}{2}(2000 + 500n - 500) = 22000$

$\Rightarrow \frac{n}{2}(1500 + 500n) = 22000 \Rightarrow \frac{n}{2} \times 2\,(750 + 250n) = 22000$

$\Rightarrow 750n + 250n^2 = 22000 \Rightarrow 250n^2 + 750n - 22000 = 0$

$\Rightarrow n^2 + 3n - 88 = 0 \Rightarrow n^2 + 11n - 8n - 88 = 0$

$\Rightarrow n(n+11) - 8(n+11) = 0 \Rightarrow (n+11)(n-8) = 0$

$\therefore n = -11$ [ইহা সম্ভব নয়] অথবা, $n = 8$

∴ মোট কিস্তির সংখ্যা 8টি

মনে করি, শেষ কিস্তির পরিমাণ n তম পদের সমান।

∴ ধারার n তম পদ $= a + (n-1)\,d = 1000 + (8-1) \times 500$

$= 1000 + 7 \times 500 = 4500$ টাকা

Ans: শেষ কিস্তির পরিমাণ 4500 টাকা, মোট কিস্তি 8টি।

03. এক ব্যক্তি 2500 টাকার একটি ঋণ কিছুসংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে 2 টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি 1 টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ পরিশোধ করতে পারবেন?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

Sol" প্রথম কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করেন 1 টাকা

দ্বিতীয় কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করেন (1 + 2) = 3 টাকা

তৃতীয় কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করেন (3 + 2) = 5 টাকা

∴ টাকা পরিশোধের কিস্তি একটি সমান্তর ধারা যার,

প্রথম পদ, a = 1

সাধারণ অন্তর, d = 3 − 1 = 2

মনে করি, ঐ ব্যক্তি n সংখ্যক কিস্তিতে টাকা পরিশোধ করবেন।

অতএব, পদসংখ্যা = n

$\therefore$ n পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2 \,.\, 1 + (n-1)2\}$

$= \frac{n}{2}\{2 + (n-1).2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$

শর্তমতে, $n^2 = 2500$ বা, $\sqrt{n^2} = \sqrt{2500}$ [বর্গমূল করে] বা, $n = 50$

অতএব, 50টি কিস্তিতে ঋণ পরিশোধ করতে পারবেন।

04. রশিদ তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

(ক) সমস্যাটিকে n সংখ্যক পদ পর্যন্ত ধারায় প্রকাশ কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.১ (উদাহরণের অংক নং-০৪)]*

Sol প্রশ্নানুসারে, ধারাটির প্রথম পদ, a = 1200 এবং সাধারণ অন্তর, d = 100

∴ দ্বিতীয় পদ = 1200 + 100 = 1300

তৃতীয় পদ = 1300 + 100 = 1400

∴ ধারাটি 1200 + 1300 + 1400 + ... + n পর্যন্ত। (উত্তর)

(খ) তিনি 18 তম মাসে কত টাকা এবং প্রথম 18 মাসে মোট কত টাকা সঞ্চয় করেন?

Sol আমরা জানি, n তম পদ = a + (n – 1)d

∴ 18 তম মাসে সঞ্চয় = a + (18 – 1)d = 1200 + 17 × 100 = 2900 টাকা

আবার, প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}$ {2a + (n – 1)d}

∴ প্রথম 18 মাসের সঞ্চয় = $\frac{18}{2}$ {2 × 1200 + (18 – 1) × 100} টাকা

= 9(2400 + 1700) = 36900 টাকা (উত্তর)

(গ) তিনি কত বছরে মোট 106200 টাকা সঞ্চয় করেন?

Sol মনে করি, তিনি n মাসে 106200 টাকা সঞ্চয় করেন।

প্রশ্নানুসারে, $\frac{n}{2}$ {2a + (n – 1)d} = 106200

$\Rightarrow \frac{n}{2}$ {2 × 1200 + (n – 1) × 100} = 106200

$\Rightarrow$ n(2400 + 100n – 100) = 212400

$\Rightarrow 100n^2 + 2300n - 212400 = 0$

$\Rightarrow n^2 + 23n - 2124 = 0 \quad \Rightarrow n^2 + 59n - 36n - 2124 = 0$

$\Rightarrow$ (n + 59) (n – 36) = 0

অর্থাৎ, n = – 59 অথবা, n = 36

মাস কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ নির্ণেয় সময়: 36 মাস বা 3 বছর। (উত্তর)

05. 2014 সালের জানুয়ারি মাসে একজন চাকুরীজীবীর মূল বেতন 10,000 টাকা। প্রতিমাসে তার বেতন 300 টাকা করে বৃদ্ধি পায়।

(ক) 2016 সালের জানুয়ারি মাসের শেষে তার বেতন কত হবে এবং তিনি সে পর্যন্ত মোট কত বেতন পাবেন?

Sol প্রশ্নমতে, চাকুরীজীবী লোকটির বেতন প্রতিমাসে বৃদ্ধি পায় 300 টাকা।

∴ তার মাসিক বেতন একটি সমান্তর ধারা গঠন করে যার প্রথম পদ 10,000 টাকা এবং সাধারণ অন্তর 300 টাকা।

∴ ধারাটি = 10,000 + 10,300 + 10,600 + ...

2014 সালের জানুয়ারি মাসকে প্রথম মাস ধরলে 2016 সালের জানুয়ারি 25 তম মাস

∴ বর্ণিত ধারার 25 পদের সমষ্টি, $S_{25} = \frac{25}{2}$ {2a + (25 – 1) d}

= 12.5 {2 × 10,000 + 24 × 300}

= 12.5 × (20,000 + 7,200)

= 12.5 × 27,200 = 3,40,000 টাকা

∴ 2016 সালের জানুয়ারি মাস পর্যন্ত তিনি 3,40,000 টাকা পাবেন।

আবার, 2016 সালের জানুয়ারি মাসের বেতন = বর্ণিত ধারার 25 তম পদ

$= a + (n - 1)\,d$

$= 10,000 + (25 - 1) \times 300$

$= 10,000 + 24 \times 300$

$= 10,000 + 7,200 = 17,200$ টাকা

2016 সালের জানুয়ারি মাসে তার বেতন 17,200 টাকা হবে এবং সে পর্যন্ত তার মোট বেতন 3,40,000 টাকা। **(উত্তর)**

(খ) কখন তার বেতন **18,100** টাকা হবে?

Sol" মনে করি, n তম মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে

$\therefore$ $10,000 + 10,300 + 10,600 + \ldots\ldots$ ধারার n তম পদ 18,100

প্রশ্নমতে, $a + (n - 1)\,d = 18,100$

$\Rightarrow$ $10,000 + (n - 1) \times 300 = 18,100$

$\Rightarrow$ $(n - 1) \times 300 = 18,100 - 10,000$

$\Rightarrow$ $(n - 1) \times 300 = 8100$

$\Rightarrow$ $n - 1 = \frac{8100}{300}$

$\Rightarrow$ $n = \frac{8100}{300} + 1 = 27 + 1 = 28$

2014 সালের জানুয়ারিকে প্রথম মাস ধরলে 28 তম মাসে তার বেতন হবে 18100 টাকা

অর্থাৎ 2016 সালের এপ্রিল মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে।

06. **1760 মিটার লম্বা একটি ফিতাকে 20 টি টুকরা করা হলো যেখানে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য একটি সমান্তর ধারা গঠন করে। ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 12 মিটার।**

(ক) সাধারণ অন্তর d ধরে প্রদত্ত তথ্যটিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর।

Sol" সমান্তর ধারাটির প্রথম a = ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য = 12

মোট টুকরার সংখ্যা = 20

$\therefore$ সাধারণ অন্তর d হলে, 20 তম পদ $= a + (20 - 1)d = 12 + 19d$

$\therefore$ সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$12 + (12 + d) + (12 + 2d) + \ldots\ldots + (12 + 19d) = 1760$

(খ) d এর মান ও বড় টুকরাটির মান নির্ণয় কর।

Sol" (ক) নং হতে পাই, ১ম পদ, $a = 12$

পদ সংখ্যা, $n = 20$

সাধারণ অন্তর $= d$

সমষ্টি, $S = 1760$

আমরা জানি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}$

$\Rightarrow$ $1760 = \frac{20}{2}\{2 \times 12 + (20 - 1)\,d\}$

$\Rightarrow$ $1760 = 10\,(24 + 19\,d)$

$\Rightarrow$ $24 + 19\,d = 176$ $\Rightarrow$ $19\,d = 152$ $\Rightarrow$ $d = 8$

$\therefore$ **20 তম পদ** $= a + 19d = 12 + 19 \times 8 = 164$

অতএব, d = 8 এবং বড় টুকরার দৈর্ঘ্য 164 মিটার।

আবার, 2016 সালের জানুয়ারি মাসের বেতন = বর্ণিত ধারার 25 তম পদ

$= a + (n - 1)\,d$

$= 10,000 + (25 - 1) \times 300$

$= 10,000 + 24 \times 300$

$= 10,000 + 7,200 = 17,200$ টাকা

2016 সালের জানুয়ারি মাসে তার বেতন 17,200 টাকা হবে এবং সে পর্যন্ত তার মোট বেতন 3,40,000 টাকা। **(উত্তর)**

(খ) কখন তার বেতন 18,100 টাকা হবে?

Sol মনে করি, n তম মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে

$\therefore$ 10,000 + 10,300 + 10,600 + ... ধারার n তম পদ 18,100

প্রশ্নমতে, $a + (n - 1)\,d = 18,100$

$\Rightarrow 10,000 + (n - 1) \times 300 = 18,100$

$\Rightarrow (n - 1) \times 300 = 18,100 - 10,000$

$\Rightarrow (n - 1) \times 300 = 8100$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{8100}{300}$

$\Rightarrow n = \frac{8100}{300} + 1 = 27 + 1 = 28$

2014 সালের জানুয়ারিকে প্রথম মাস ধরলে 28 তম মাসে তার বেতন হবে 18100 টাকা

অর্থাৎ 2016 সালের এপ্রিল মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে।

06. 1760 মিটার লম্বা একটি ফিতাকে 20 টি টুকরা করা হলো যেখানে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য একটি সমান্তর ধারা গঠন করে। ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 12 মিটার।

(ক) সাধারণ অন্তর d ধরে প্রদত্ত তথ্যটিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর।

Sol সমান্তর ধারাটির প্রথম a = ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য = 12

মোট টুকরার সংখ্যা = 20

$\therefore$ সাধারণ অন্তর d হলে, 20 তম পদ $= a + (20 - 1)d = 12 + 19d$

$\therefore$ সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$12 + (12 + d) + (12 + 2d) + ... + (12 + 19d) = 1760$

(খ) d এর মান ও বড় টুকরাটির মান নির্ণয় কর।

Sol (ক) নং হতে পাই, ১ম পদ, a = 12

পদ সংখ্যা, n = 20

সাধারণ অন্তর = d

সমষ্টি, S = 1760

আমরা জানি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}$

$\Rightarrow 1760 = \frac{20}{2}\{2 \times 12 + (20 - 1)\,d\}$

$\Rightarrow 1760 = 10\,(24 + 19\,d)$

$\Rightarrow 24 + 19\,d = 176 \quad \Rightarrow 19\,d = 152 \quad \Rightarrow d = 8$

$\therefore$ 20 তম পদ $= a + 19d = 12 + 19 \times 8 = 164$

অতএব, d = 8 এবং বড় টুকরার দৈর্ঘ্য 164 মিটার।

আবার, 2016 সালের জানুয়ারি মাসের বেতন = বর্ণিত ধারার 25 তম পদ

$= a + (n - 1)\,d$

$= 10,000 + (25 - 1) \times 300$

$= 10,000 + 24 \times 300$

$= 10,000 + 7,200 = 17,200$ টাকা

2016 সালের জানুয়ারি মাসে তার বেতন 17,200 টাকা হবে এবং সে পর্যন্ত তার মোট বেতন 3,40,000 টাকা। **(উত্তর)**

(খ) **কখন তার বেতন 18,100 টাকা হবে?**

Sol মনে করি, n তম মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে

$\therefore$ 10,000 + 10,300 + 10,600 + ... ধারার n তম পদ 18,100

প্রশ্নমতে, $a + (n - 1)\,d = 18,100$

$\Rightarrow 10,000 + (n - 1) \times 300 = 18,100$

$\Rightarrow (n - 1) \times 300 = 18,100 - 10,000$

$\Rightarrow (n - 1) \times 300 = 8100$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{8100}{300}$

$\Rightarrow n = \frac{8100}{300} + 1 = 27 + 1 = 28$

2014 সালের জানুয়ারিকে প্রথম মাস ধরলে 28 তম মাসে তার বেতন হবে 18100 টাকা

অর্থাৎ 2016 সালের এপ্রিল মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে।

06. 1760 মিটার লম্বা একটি ফিতাকে 20 টি টুকরা করা হলো যেখানে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য একটি সমান্তর ধারা গঠন করে। ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 12 মিটার।

(ক) সাধারণ অন্তর d ধরে প্রদত্ত তথ্যটিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর।

Sol সমান্তর ধারাটির প্রথম a = ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য = 12

মোট টুকরার সংখ্যা = 20

$\therefore$ সাধারণ অন্তর d হলে, 20 তম পদ $= a + (20 - 1)d = 12 + 19d$

$\therefore$ সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$12 + (12 + d) + (12 + 2d) + ... + (12 + 19d) = 1760$

(খ) d এর মান ও বড় টুকরাটির মান নির্ণয় কর।

Sol (ক) নং হতে পাই, ১ম পদ, a = 12

পদ সংখ্যা, n = 20

সাধারণ অন্তর = d

সমষ্টি, S = 1760

আমরা জানি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}$

$\Rightarrow 1760 = \frac{20}{2}\{2 \times 12 + (20 - 1)\,d\}$

$\Rightarrow 1760 = 10\,(24 + 19\,d)$

$\Rightarrow 24 + 19\,d = 176 \quad \Rightarrow 19\,d = 152 \quad \Rightarrow d = 8$

$\therefore$ 20 তম পদ $= a + 19d = 12 + 19 \times 8 = 164$

অতএব, d = 8 এবং বড় টুকরার দৈর্ঘ্য 164 মিটার।

আবার, 2016 সালের জানুয়ারি মাসের বেতন = বর্ণিত ধারার 25 তম পদ

$= a + (n - 1)\,d$

$= 10,000 + (25 - 1) \times 300$

$= 10,000 + 24 \times 300$

$= 10,000 + 7,200 = 17,200$ টাকা

2016 সালের জানুয়ারি মাসে তার বেতন 17,200 টাকা হবে এবং সে পর্যন্ত তার মোট বেতন 3,40,000 টাকা। **(উত্তর)**

(খ) **কখন তার বেতন 18,100 টাকা হবে?**

Sol মনে করি, n তম মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে

∴ 10,000 + 10,300 + 10,600 + ... ধারার n তম পদ 18,100

প্রশ্নমতে, $a + (n - 1)\,d = 18,100$

$\Rightarrow 10,000 + (n - 1) \times 300 = 18,100$

$\Rightarrow (n - 1) \times 300 = 18,100 - 10,000$

$\Rightarrow (n - 1) \times 300 = 8100$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{8100}{300}$

$\Rightarrow n = \frac{8100}{300} + 1 = 27 + 1 = 28$

2014 সালের জানুয়ারিকে প্রথম মাস ধরলে 28 তম মাসে তার বেতন হবে 18100 টাকা

অর্থাৎ 2016 সালের এপ্রিল মাসে তার বেতন 18,100 টাকা হবে।

06. **1760 মিটার লম্বা একটি ফিতাকে 20 টি টুকরা করা হলো যেখানে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য একটি সমান্তর ধারা গঠন করে। ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 12 মিটার।**

(ক) **সাধারণ অন্তর d ধরে প্রদত্ত তথ্যটিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর।**

Sol সমান্তর ধারাটির প্রথম a = ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য = 12

মোট টুকরার সংখ্যা = 20

∴ সাধারণ অন্তর d হলে, 20 তম পদ $= a + (20 - 1)d = 12 + 19d$

∴ সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে পাই,

$12 + (12 + d) + (12 + 2d) + ... + (12 + 19d) = 1760$

(খ) **d এর মান ও বড় টুকরাটির মান নির্ণয় কর।**

Sol (ক) নং হতে পাই, ১ম পদ, a = 12

পদ সংখ্যা, n = 20

সাধারণ অন্তর = d

সমষ্টি, S = 1760

আমরা জানি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}$

$\Rightarrow 1760 = \frac{20}{2}\{2 \times 12 + (20 - 1)\,d\}$

$\Rightarrow 1760 = 10\,(24 + 19\,d)$

$\Rightarrow 24 + 19\,d = 176 \quad \Rightarrow 19\,d = 152 \quad \Rightarrow d = 8$

∴ 20 তম পদ $= a + 19d = 12 + 19 \times 8 = 164$

অতএব, d = 8 এবং বড় টুকরার দৈর্ঘ্য 164 মিটার।

(গ) শেষ দশটি টুকরার মোট দৈর্ঘ্য কত?

Sol ধারাটির ১ম পদ, $a = 12$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 8$ [(খ) থেকে]

$\therefore$ 11 তম পদ $= a + (11 - 1)d$

$= 12 + 10 \times 8 = 92$

$\therefore$ শেষ দশটি পদের জন্য ধারাটি হবে,

$92 + (92 + 8) + (92 + 8 + 8) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 164$

$\Rightarrow 92 + 100 + 108 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 164$

এখানে, পদ সংখ্যা, $n = 10$

প্রথম পদ, $a = 92$

সাধারণ অন্তর, $d = 8$

$\therefore$ সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$= \frac{10}{2}\{2 \times 92 + (10 - 1) \times 8\}$

$= 5(184 + 9 \times 8)$

$= 1280$

অতএব, শেষ 10 টি টুকরার মোট দৈর্ঘ্য 1280 মিটার।

07. 1 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি লৌহ দন্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো। যদি টুকরাগুলো 1 সে.মি. অন্তর করে সমান্তর ধারা গঠন করে সেক্ষেত্রে প্রথম টুকরাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

Sol দেওয়া আছে,

টুকরার সংখ্যা, $n = 10$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 1$

মনে করি, টুকরার সংখ্যা প্রথম পদ $= a$

প্রশ্নমতে, $\frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\} = 100$ [1 মিটার = 100 সে.মি.]

$\Rightarrow \frac{10}{2}\{2.a + (10 - 1)1\} = 100$

$\Rightarrow 5(2a + 9) = 100$

$\Rightarrow 2a + 9 = \frac{100}{5}$

$\Rightarrow 2a + 9 = 20$

$\Rightarrow 2a = 20 - 9$

$\Rightarrow 2a = 11$

$\Rightarrow a = \frac{11}{2}$

$\therefore a = 5.5$

প্রথম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 5.5 সে.মি.। **(Ans.)**

08. একটি ব্যাটারিচালিত খেলনা গাড়ি প্রথম মিনিটে 21 মিটার এবং পরবর্তীতে প্রতি মিনিটে 3 মিটার হারে কম পথ অতিক্রম করে। ধারাটির n তম পদের একটি সাধারণ সূত্র প্রকাশ করুন এবং ৪র্থ ও ৫ম মিনিটের অতিক্রান্ত দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন।

Sol" গাড়িটি ১ম মিনিটে অতিক্রম করে 21 মিটার। ২য় মিনিটে অতিক্রম করে (21–3) মিটার বা 18 মিটার। ৩য় মিনিটে অতিক্রম করে (18 – 3) মিটার বা 15 মিটার।

অর্থাৎ প্রতি মিনিটে 3 মিটার কমে।

শর্তানুসারে, ধারাটি হবে: 21 + 18 + 15 + ...

এখানে, ১ম পদ, a = 21

সাধারণ অন্তর, d = 18 – 21 = – 3

ধারাটির n তম পদ = a + (n – 1) d

= 21 + (n – 1) (–3)

= 21 – 3n + 3

= 24 – 3n

∴ ধারাটির n-তম পদের সাধারণ সূত্রটি = 24 – 3n

৪র্থ মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব = (24 – 3.4) = (24 – 12) = 12 মিটার

৫ম মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব = (24 – 3.5) = (24 – 15) = 9 মিটার

ধরি, ৪র্থ মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব ৫ম মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্বের P গুণ

অর্থাৎ, $12 = P \times 9$

$\Rightarrow P = \frac{12}{9}$

$\Rightarrow P = \frac{4}{3}$

∴ ৪র্থ মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{4}{3} \times$ ৫ম মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব।

09. আবিরকে তার মা একদিন টিফিনের জন্য 5 টাকা দিয়ে বললেন গুণোত্তর ধারায় প্রতিদিনের টাকা দিবেন। যদি প্রতিদিনের টিফিনের টাকা সমান্তর ধারায় দিতেন তবে সে মাসিক কত টাকা পাবে? উল্লেখ্য যে, আবির দ্বিতীয় দিন 11 টাকা পেয়েছিল?

Sol" সমান্তর ধারা বিবেচনা করলে, ধারাটির প্রথম পদ, a = 5

ধরি, সাধারণ অন্তর, d = 11 – 5 = 6

∴ এক মাসে মোট পাবে $= \frac{n}{2} \{2a + (n - 1) d\}$

$= \frac{30}{2} \{2 \times 5 + (30 - 1) 6\}$

$= 15 (10 + 29 \times 6)$

$= 15 (10 + 174)$

$= 15 \times 184$

$= 2760$

∴ এক মাসে মোট পাবে 2760 টাকা। **(Ans.)**

10. 600 মিটার রাস্তা নির্মাণ করতে নিম্নরূপ খরচ হয়। প্রথম মিটারের জন্য 20 টাকা এবং পরবর্তী প্রত্যেক মিটারের জন্য অতিরিক্ত 2 টাকা করে। রাস্তাটির শেষ মিটারের জন্য এবং সমগ্র রাস্তাটি তৈরি করতে খরচ নির্ণয় করুন।

Sol" প্রথম মিটারের জন্য খরচ = 20 টাকা

দ্বিতীয় " " " = 20 + 2 = 22 টাকা

তৃতীয় " " " = 20 + 2 × 2 = 24 টাকা

অর্থাৎ নির্মাণ খরচ নিম্নরূপ = 20 + 22 + 24 + ... যা একটি সমান্তর ধারা এবং এর

প্রথম পদ, $a = 20$

সাধারণ অন্তর, $d = 22 - 20 = 2$

পদ সংখ্যা, $n = 600$

∴ রাস্তাটির শেষ মিটারের জন্য খরচ অর্থাৎ 600 তম পদ

$= a + (n - 1)\,d = 20 + (600 - 1)\,2 = 20 + 599 \times 2 = 20 + 1198 = 1218$ টাকা

এবং মোট খরচ অর্থাৎ 600 টি পদের যোগফল, $S_{600} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)\,d\}$

$$= \frac{600}{2}\{2 \times 20 + (600 - 1) \times 2\}$$

$$= 300\,(40 + 599 \times 2)$$

$$= 300 \times (40 + 1198)$$

$$= 300 \times 1238 = 3,71,400 \text{ টাকা}$$

রাস্তাটির শেষ মিটারের জন্য খরচ 1218 টাকা

এবং রাস্তাটি তৈরির মোট খরচ 3,71,400 টাকা। **(উত্তর)**

11. এক ব্যক্তি 2000 টাকা ঋণ গ্রহণ করলেন এবং তা 340 টাকা সুদসহ 12 টি মাসিক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হলেন। কিস্তিগুলোর পরিমাণ এমনভাবে ঠিক করা হলো যেন, প্রতিটি কিস্তি তার ঠিক পূর্ববর্তী কিস্তি অপেক্ষা 10 টাকা কম হয়। প্রথম এবং শেষ কিস্তির পরিমাণ পৃথকভাবে নির্ণয় করুন।

Sol" সুদ 340 টাকাসহ মোট টাকা পরিশোধ করতে হবে = (2000 + 340) টাকা = 2340 টাকা

প্রশ্নমতে, প্রথম মাসের কিস্তি x টাকা

দ্বিতীয় মাসের কিস্তি (x − 10) টাকা

তৃতীয় মাসের কিস্তি (x − 2 × 10) = (x − 20) টাকা

কিস্তির পরিমাণ = x + (x − 10) + (x − 20) + ... যা একটি সমান্তর ধারা।

প্রথম পদ, $a = x$

সাধারণ অন্তর, $d = x - 10 - x = -10$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n-তম পদ = $a + (n-1)\,d$

∴ 12-তম পদ $= a + (12 - 1)\,d = a + 11d = a + 11\,(-10)$

$= a - 110$ ..... (i)

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)\,d\}$

∴ 12 টি পদের সমষ্টি, $S_{12} = \frac{12}{2}\{2a + (12-1)\,d\} = 6\,(2a + 11d)$

প্রশ্নমতে, $6\,(2a + 11d) = 2340$

$\Rightarrow 2a + 11d = 390$ [উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 2x + 11\,(-10) = 390$ [a = x, d = − 10 বসিয়ে]

$\Rightarrow 2x - 110 = 390 \quad \Rightarrow 2x = 390 + 110 \quad \Rightarrow 2x = 500 \quad \Rightarrow x = \frac{500}{2}$

∴ $x = 250$

(i) নং সমীকরণে $a = x = 250$ মান বসিয়ে

12-তম পদ = 250 − 110 = 140

∴ প্রথম কিস্তি 250 টাকা এবং শেষ কিস্তি 140 টাকা। **(উত্তর)**

গুণোত্তর ধারা

এক নজরে গুণোত্তর ধারা থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ:

01. $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+$ ..... একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। $x=\frac{3}{2}$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং ৫ম পদ কত? [৪১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (উ.গণিত) অধ্যায় - ৭ এর উদাহরণ-০৪ নং প্রশ্নের অনুরূপ]
[সমাধান দেখুন: Type-08,Question No.- 03]

এক নজরে গুণোত্তর ধারা সম্পর্কিত নবম-দশম শ্রেণীর সাধারণ গণিত (অধ্যায় ১৩.২) এর প্রশ্নসমূহ:

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও উত্তর

01. a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক $b=\frac{c+d}{2}$ খ $a=\frac{b+c}{2}$ গ $c=\frac{b+d}{2}$ ঘ $d=\frac{a+c}{2}$

[প্রিলি উপযোগী প্রশ্ন, Written এর জন্য দরকার নেই]

02. $n \in N$ এর জন্য-

(i) $\sum i=\frac{n^2+n}{2}$

(ii) $\sum i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(iii) $\sum i^3=\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও ii ঘ i, ii ও iii

[প্রিলি উপযোগী প্রশ্ন, Written এর জন্য দরকার নেই]

☐ নিচের ধারাটির ভিত্তিতে 3 ও 4 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\log 2+\log 4+\log 8+$ .....

03. ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক 2 খ 4 গ $\log 2$ ঘ $2\log 2$

[প্রিলি উপযোগী প্রশ্ন, Written এর জন্য দরকার নেই]

04. ধারাটির সপ্তম পদ কোনটি?

ক $\log 32$ খ $\log 64$ গ $\log 128$ ঘ $\log 256$

[প্রিলি উপযোগী প্রশ্ন, Written এর জন্য দরকার নেই]

05. $64+32+16+8+$ ..... ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর। *[প্রিলি উপযোগী প্রশ্ন, Written এর জন্য দরকার নেই]*

06. $3+9+27+$ ..... ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[প্রিলির জন্য বেশি গুরুত্বপূর্ণ, Written এর জন্য কম গুরুত্বপূর্ণ]
[সমাধান দেখুন: Type-01,Question No.- 01]

07. $128+64+32+$ ..... ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$? *[প্রিলির জন্য বেশি গুরুত্বপূর্ণ, Written এর জন্য কম গুরুত্বপূর্ণ]*

[সমাধান দেখুন: Type-02,Question No.- 01]

08. একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ কত? *[Written এর জন্য গুরুত্বপূর্ণ]*

[সমাধান দেখুন: Type-03,Question No.- 01]

এক নজরে গুণোত্তর ধারা সম্পর্কিত নবম-দশম শ্রেণীর উচ্চতর গণিত (অধ্যায় ৭) এর রিটেনের জন্য প্রয়োজনীয় প্রশ্নসমূহ:

11. প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর:

(ক) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

(খ) $\frac{1}{5}-\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}-\frac{8}{5^4}+\ldots\ldots\ldots$

(গ) $8+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}\ldots\ldots\ldots$

(ঘ) $1+2+4+8+16+\ldots\ldots\ldots$

(ঙ) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{16}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$

[সমাধান দেখুন: Type-08, Question No.- 01]

12. নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর:

(ক) $7+77+777+\ldots\ldots\ldots$ (খ) $5+55+555+\ldots\ldots\ldots$

[সমাধান দেখুন: Type-09, Question No.- 01]

14. প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(ক) $0.\dot{2}\dot{7}$

(খ) $2.\dot{3}0\dot{5}$

(গ) $0.0\dot{1}2\dot{3}$

(ঘ) $3.0\dot{4}0\dot{3}$

[সমাধান দেখুন: Type-10, Question No.- 01]

গুণোত্তর ধারার Analysis

৪১ রিটেন ব্যতিত গুণোত্তর ধারা থেকে এ পর্যন্ত Written-এ প্রশ্ন আসে নি। তবে এবার আসার সম্ভাবনা প্রবল। যেহেতু সমান্তর ধারা থেকে প্রয়োগ বিষয়ক প্রশ্ন বেশি এসেছে তাই আশা করা যায় গুণোত্তর ধারার প্রয়োগের অংক আসার সম্ভাবনা প্রবল। সুতরাং আপনারা Type-07 টি একটু বেশি গুরুত্ব দিয়ে পড়বেন।

TYPE 01: গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়

01. $3+9+27+\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol^n প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার, ১ম পদ, $a = 3$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{9}{3} = 3 > 1$ এবং পদ সংখ্যা, $n = 14$

$\therefore$ ১ম 14 টি পদের সমষ্টি, $S_{14} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$= \frac{3(3^{14}-1)}{3-1} = \frac{3}{2}(3^{14}-1)$$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি, $\frac{3}{2}(3^{14}-1)$

02. $2-4+8-16+\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" $2-4+8-16+\ldots\ldots$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার ১ম পদ, $a=2$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{-4}{2}=-2<1$

পদ সংখ্যা, $n=7$

$\therefore$ প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি, $S_7=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{2\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)}=\frac{2\{1+128\}}{1+2}=\frac{2\times 129}{3}=86$

$\therefore$ প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি 86।

03. $12+24+48+\ldots\ldots$ 768 ধারাটির সমষ্টি কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (উদাহরণের অংক নং-১০)]

Sol" প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a=12$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{24}{12}=2>1$

$\therefore$ ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $=768$

আমরা জানি, n তম পদ $=ar^{n-1}$

$\therefore \quad ar^{n-1}=768 \Rightarrow 12\times 2^{n-1}=768 \Rightarrow 2^{n-1}=\frac{768}{12}=64$

$\Rightarrow 2^{n-1}=2^6 \Rightarrow n-1=6$

$\therefore \quad n=7$

সুতরাং, ধারাটির সমষ্টি $=\frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$, যখন $r>1$

$=\frac{12(2^7-1)}{(2-1)}=12\times(128-1)=12\times 127=1524$ **(Ans.)**

04. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol" গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $a=1$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}<1$ এবং পদ সংখ্যা, $n=8$

$\therefore$ প্রথম আটটি পদের সমষ্টি, $S_8=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{256-1}{256}}{\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}\times\frac{2}{1}=\frac{255}{128}$

05. $1-1+1-1+\ldots\ldots$ ধারাটির $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" $1-1+1-1+\ldots\ldots$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a=1$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{-1}{1}=-1<1$

∴ ধারাটি $(2n+1)$ পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^{2n+1})}{1-r} = \frac{1\{1-(-1)^{2n+1}\}}{1-(-1)}$

$= \frac{1\{1-(-1)\}}{1-(-1)}$ [$\because (2n+1)$ একটি বিজোড় সংখ্যা]

$= \frac{1(1+1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

∴ ধারাটির $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি 1.

06. $2-2+2-2+\ldots\ldots$ ধারাটির $(2n+2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol: প্রদত্ত ধারার ১ম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ এবং পদ সংখ্যা, $m = 2n+2$

সুতরাং এটি একটি গুণোত্তর ধারা যেখানে, $r < 1$

∴ সমষ্টি, $S = \frac{a(1-r^m)}{1-r} = \frac{2\{1-(-1)^{2n+2}\}}{1-(-1)}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{2(1-1)}{1+1}$ [$\because (2n+2)$ একটি জোড় স্বাভাবিক যেকোনো সংখ্যা]

$= \frac{2\times 0}{2} = 0$

∴ ধারাটির $(2n+2)$ পদের সমষ্টি 0 শূন্য।

07. $2+4+8+16+\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol: $2+4+8+16+\ldots\ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 2$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{4}{2} = 2 > 1$

∴ n পদের সমষ্টি, $S_n = a.\frac{r^n-1}{r-1} = 254$ বা, $2.\frac{2^n-1}{2-1} = 254$

বা, $\frac{2^n-1}{1} = 127$ বা, $2^n - 1 = 127$

বা, $2^n = 127+1$ বা, $2^n = 128$

বা, $2^n = 2^7$ ∴ $n = 7$

TYPE 02: গুণোত্তর ধারার পদের তম নির্ণয়

01. $128+64+32+\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol: প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার,

প্রথম পদ, $a = 128$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $\frac{1}{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ, ar^{n-1}

তাহলে, $ar^{n-1} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow 128.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256}$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$\Rightarrow n-1 = 8$ $\Rightarrow n = 8+1 = 9$

∴ ধারাটির ৯ম পদ $\frac{1}{2}$

02. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $8\sqrt{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

প্রশ্নমতে, $ar^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 16$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = (-\sqrt{2})^8$

বা, $n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1 = 9$

∴ ধারাটির ৯ম পদ $8\sqrt{2}$

03. $\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \sqrt{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ $81\sqrt{3}$?

Sol" প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $81\sqrt{3}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

প্রশ্নমতে, $ar^{n-1} = 81\sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\sqrt{3})^{n-1} = 81\sqrt{3}$

বা, $(-\sqrt{3})^{n-1} = 81\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

বা, $(-\sqrt{3})^{n-1} = 81 \times 3$

বা, $(-\sqrt{3})^{n-1} = (-\sqrt{3})^{10}$

বা, $n - 1 = 10$

বা, $n = 10 + 1 = 11$

∴ ধারাটির ১১ম পদ $81\sqrt{3}$

TYPE 03: গুণোত্তর ধারার n তম পদ নির্ণয়

01. একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অনুপাত = r

∴ পঞ্চম পদ, $ar^{5-1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ [∵ n তম পদ = ar^{n-1}]

বা, $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ..... (i)

এবং দশম পদ, $ar^{10-1} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \Rightarrow ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81}$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^9}{ar^4} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \div \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2})^4 . \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^4 . \sqrt{3}}$$

বা, $r^5 = \frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{3})^5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5 \quad \therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = \frac{ar^4}{r^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}$ [∵ $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$]

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} . \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

∴ ধারাটির তৃতীয় পদ $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

02. একটি গুণোত্তর ধারার তৃতীয় পদ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ নির্ণয় করুন।

Sol" মনে করি,

ধারাটির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = q.

তাহলে, তৃতীয় পদ = $aq^{3-1} = aq^2$

এবং দশম পদ = $aq^{10-1} = aq^9$

প্রশ্নমতে, $aq^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ..... (i)

এবং $aq^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81}$ ..... (ii)

(ii) নং কে (i) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{aq^9}{aq^2} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \div \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow q^{9-2} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow q^7 = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow q^7 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^7 \quad \therefore q = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

q এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $a\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad a \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$

$\therefore \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ধারাটির পঞ্চম পদ $= aq^{5-1} = aq^4 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

03. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 27 এবং 9 হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ এবং দশম পদ নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (উদাহরণের অংক নং-০৯)]

Sol" প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 27$ এবং দ্বিতীয় পদ $= 9$

তাহলে, সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ পঞ্চম পদ $= ar^{5-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{27 \times 1}{27 \times 3} = \frac{1}{3}$

এবং দশম পদ $= ar^{10-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{3^3}{3^3 \times 3^6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$ **(Ans.)**

TYPE 04 গুণোত্তর ধারার মধ্যবর্তী পদ সংখ্যা নির্ণয়

01. $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" মনে করি, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ, $a = 5$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

তাহলে, ২য় পদ, $ar = x$ [$\because$ n তম পদ $= ar^{n-1}$]

৩য় পদ, $ar^2 = y$

৪র্থ পদ, $ar^3 = 135$

এখন, $ar^3 = 135 \Rightarrow 5r^3 = 135 \Rightarrow r^3 = 27$ [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow r^3 = 3^3 \quad \therefore r = 3$

$\therefore$ ২য় পদ, $x = 5 \times 3 = 15$

৩য় পদ, $y = 5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$

নির্ণেয় মান: $x = 15$ এবং $y = 45$

02. $3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" মনে করি, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ, $a = 3$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

তাহলে, ২য় পদ, $ar = x$ [$\because$ n তম পদ $= ar^{n-1}$]

৩য় পদ, $ar^2 = y$

৪র্থ পদ, $ar^3 = z$

৫ম পদ, $ar^4 = 243$

এখন, $ar^4 = 243 \Rightarrow 3r^4 = 243 \Rightarrow r^4 = 81$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow r^4 = 3^4 \quad \therefore r = 3$

$\therefore$ ২য় পদ, $x = 3 \times 3 = 9$

৩য় পদ, $y = 3 \times 3^2 = 3 \times 9 = 27$

৪র্থ পদ, $z = 3 \times 3^3 = 3 \times 27 = 81$

নির্ণেয় মান: $x = 9$, $y = 27$ এবং $z = 81$.

TYPE 05: n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি/ বর্গের সমষ্টি/ ঘনের সমষ্টি সংক্রান্ত

Pattern-01

01. $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" প্রদত্ত ধারাটি, $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots\ldots$ 10 টি পদ

$= \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 \ldots\ldots$ 10 টি পদ

$= \log 2 + 2\log 2 + 3\log 2 + 4\log 2 \ldots\ldots$ 10 টি পদ

$= (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10)\log 2$

$= \frac{10(10+1)}{2}\log 2 \left[\because 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$

$= (5 \times 11)\log 2 = 55 \log 2$

$\therefore$ প্রথম দশটি পদের সমষ্টি $55 \log 2$.

02. $\log 2 + \log 16 + \log 512 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" প্রদত্ত ধারাটি $= \log 2 + \log 16 + \log 512 + \ldots\ldots$12 টি পদ

$= \log 2 + \log 2^4 + \log 2^9 + \ldots\ldots$12 টি পদ

$= \log 2 + 4\log 2 + 9\log 2 + \ldots\ldots$12 টি পদ

$= (1 + 4 + 9 + \ldots\ldots$ 12 টি পদ$)\log 2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 12^2)\log 2$

এখানে, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

অতএব, প্রথম 12টি পদের সমষ্টি, $S_{12} = \frac{12(12+1)(2\times12+1)}{6} = \frac{12\times13\times25}{6} = 650$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার প্রথম বারটি পদের সমষ্টি $650 \log 2$.

Pattern-02

03. দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10)^2$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol" বামপক্ষ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + 10^3$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$\therefore \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + 10^3 = \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2$

$= \left\{\frac{10 \times 11}{2}\right\}^2 = (55)^2 = 3025$

ডানপক্ষ $= (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots 10)^2$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি,

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 10 = \frac{10(10+1)}{2} = 5 \times 11 = 55$

সুতরাং $(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10)^2 = (55)^2 = 3025$

অতএব, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10)^2$ (দেখানো হলো)

04. $\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3}{1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n}=210$ হলে n এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol দেওয়া আছে, $\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3}{1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n}=210$

বা, $\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}}=210$ $\left[\because 1^3+2^3+3^3+\ldots..+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \text{ এবং } 1+2+3+\ldots..+n=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}\right]$

বা, $\frac{n(n+1)}{2}=210$

বা, $n^2+n=420$

বা, $n^2+n-420=0$

বা, $n^2+21n-20n-420=0$

বা, $n(n+21)-20(n+21)=0$

বা, $(n+21)(n-20)=0$

হয়, $n+21=0 \therefore n=-21$

অথবা, $n-20=0 \therefore n=20$

কিন্তু $n\neq-21$ [কারণ পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

সুতরাং n এর মান 20.

Part-03

05. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নমতে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=441$ বা, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=(21)^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2}=21$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]

বা, $n(n+1)=42$

বা, $n^2+n-42=0$

বা, $n^2+7n-6n-42=0$

বা, $n(n+7)-6(n+7)=0$

বা, $(n+7)(n-6)=0$

হয়, $n+7=0 \therefore n=-7$

অথবা, $n-6=0 \therefore n=6$

সুতরাং $n=6$ [$n=-7$ গ্রহণযোগ্য নয় কেননা পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore$ ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি, $S=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{6(6+1)}{2}=\frac{6\times7}{2}=21$

$\therefore$ $n=6$ এবং সমষ্টি, $S=21$.

06. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গ.), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নমতে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 225 = (15)^2$ বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 15$

বা, $n^2 + n = 30$ বা, $n^2 + n - 30 = 0$

বা, $n^2 + 6n - 5n - 30 = 0$ বা, $n(n+6) - 5(n+6) = 0$

বা, $(n+6)(n-5) = 0$

হয়, $n + 6 = 0 \therefore n = -6$

অথবা, $n - 5 = 0 \therefore n = 5$

সুতরাং $n = 5$ [কেননা পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

আবার, আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n = 5$ হলে সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি $= \frac{5(5+1)(2\times5+1)}{6} = \frac{5\times6\times11}{6} = 55$

$\therefore$ $n = 5$ এবং বর্গের সমষ্টি 55.

TYPE 06: সৃজনশীল প্রশ্ন

01. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির চতুর্থ পদ -2 এবং নবম পদ $8\sqrt{2}$।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

(ক) উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

Sol" উপরোক্ত তথ্যগুলোকে নিম্নলিখিত দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো:

ধারাটির চতুর্থ পদ, $ar^{4-1} = -2$ [$\because$ n তম পদ $= ar^{n-1}$]

$\Rightarrow$ $ar^3 = -2$ ..... (i)

এবং ধারাটির নবম পদ, $ar^{9-1} = 8\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $ar^8 = 8\sqrt{2}$ ..... (ii)

(খ) ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।

Sol" ধারাটির 12 তম পদ $= ar^{12-1}$

(ক) হতে প্রাপ্ত সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{ar^8}{ar^3} = \frac{8\sqrt{2}}{-2}$

$\Rightarrow$ $r^5 = -\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ $r^5 = -\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $r^5 = (-\sqrt{2})^5$

$\Rightarrow$ $r = -\sqrt{2}$

(ক) হতে প্রাপ্ত (i) নং সমীকরণে r এর মান বসিয়ে পাই, $a.(-\sqrt{2})^3 = -2$

$\Rightarrow$ $a = \frac{-\sqrt{2}.\sqrt{2}}{-\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

অতএব, 12 তম পদ $= \frac{1}{\sqrt{2}}.(-\sqrt{2})^{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{2})^{11} = -(\sqrt{2})^{10} = -32$

$\therefore$ নির্ণেয় 12 তম পদ -32 **(Ans.)**

(গ) ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

Sol" (খ) হতে প্রাপ্ত, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\sqrt{2}$

∴ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}) = -1$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^2 = \frac{1 \times 2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^3 = -2$ .....

.....

∴ নির্ণেয় ধারাটি, $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - 2 +$ .....

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$; যখন $r < 1$

সুতরাং ধারাটির প্রথম 7টি পদের সমষ্টি, $= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{1-(-\sqrt{2})^7\}}{1-(-\sqrt{2})} = \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$

$= \frac{(1+8\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$ [লব ও হরকে $(\sqrt{2}-1)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{\sqrt{2}+8.2-1-8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \frac{15-7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}-7.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{1}{2}(15\sqrt{2}-14)$ ∴ 7 টি পদের সমষ্টি $\frac{1}{2}(15\sqrt{2}-14)$ **(Ans.)**

02. কোন ধারার n তম পদ $2n - 4$

(ক) ধারাটি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol" দেওয়া আছে, ধারাটির n তম পদ $2n - 4$

∴ $n = 1, 2, 3,$ ..... বসিয়ে পাই, ১ম পদ $2.1 - 4 = -2$

২য় পদ $2.2 - 4 = 0$

৩য় পদ $2.3 - 4 = 2$

৪র্থ পদ $2.4 - 4 = 4$

.....

নির্ণেয় ধারা: $-2 + 0 + 2 + 4$ ..... **(Ans.)**

(খ) ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 20 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, n তম পদ $= 2n - 4$

∴ ধারাটির 10 তম পদ $2.10 - 4 = 16$

(ক) হতে প্রাপ্ত ধারাটির, প্রথম পদ $a = -2$

সাধারণ অন্তর, $d = 0 - (-2) = 2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

সুতরাং ধারাটির 20 টি পদের সমষ্টি, $S_{20} = \frac{20}{2}\{2(-2) + (20-1)(2)\}$

$= 10(-4 + 19 \times 2) = 10(-4 + 38) = 10 \times 34 = 340$

∴ ধারাটির 20 টি প্রথম পদের সমষ্টি 340। **(Ans.)**

(গ) প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং ত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

Sol" (ক) হতে, প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = -2$

সাধারণ অন্তর $d = 0 - (-2) = 2$

প্রাপ্ত ধারার প্রথম পদকে প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত $[r = 2]$ ধরে যে গুণোত্তর ধারা পাওয়া যাবে তার পদগুলো নিম্নরূপ:

∴ গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ, $ar^{1-1} = (-2) \cdot 2^0 = -2$

দ্বিতীয় পদ, $ar^{2-1} = -2 \times 2 = -4$

তৃতীয় পদ, $ar^{3-1} = -2 \times 2^2 = -8$

চতুর্থ পদ, $ar^{4-1} = -2 \times 2^3 = -16$

.....

∴ নির্ণেয় ধারা: $-2 - 4 - 8 - 16$ ..... n পর্যন্ত

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S^n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$; যখন $r > 1$

∴ ধারাটির প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি, $S^n = \frac{-2(2^8 - 1)}{2 - 1} = -2(256 - 1)$

$= -2 \times 255 = -510$

∴ নির্ণেয় ধারাটির প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি -510 **(Ans.)**

03. $\log 3 + \log 9 + \log 27 + ...$

(ক) এটি কোন ধরনের ধারা?

Sol" $\log 3 + \log 9 + \log 27 + ...$

$= \log 3 + \log 3^2 + \log 3^3 + ...$

$= \log 3 + 2\log 3 + 3\log 3 + ...$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \log 3$

সাধারণ অন্তর, $d = 2\log 3 - \log 3 = \log 3$

∴ ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

(খ) ধারার পঞ্চম ও দশম পদ নির্ণয় কর।

Sol" (ক) নং হতে প্রাপ্ত, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \log 3$

এবং সাধারণ অন্তর, $d = \log 3$

∴ ধারাটির পঞ্চম পদ $= a + (5 - 1)d = \log 3 + 4\log 3 = 5\log 3$

ধারাটির দশম পদ $= a + (10 - 1)d = \log 3 + 9\log 3 = 10\log 3$

∴ ধারাটির পঞ্চম পদ $5\log 3$ এবং দশম পদ $10\log 3$.

(গ) ধারার প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

Sol" (ক) নং হতে প্রাপ্ত, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \log 3$

এবং সাধারণ অন্তর, $d = \log 3$

∴ সমান্তর ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি $= \frac{12}{2}\{2a + (12 - 1)d\}$

$= 6(2\log 3 + 11\log 3)$

$= 6 \times 13\log 3 = 78\log 3$

∴ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি $78\log 3$.

TYPE 07: গুণোত্তর ধারার প্রয়োগ বিষয়ক সমস্যা

01. 1 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি লৌহ দন্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol" প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= a.r^{n-1}$

∴ গুণোত্তর ধারার 10 তম পদ $= a.r^{10-1} = ar^9$

প্রশ্নমতে, $10a = ar^9$ বা, $r^9 = 10$ ∴ $r = (10)^{\frac{1}{9}}$

আবার, গুণোত্তর ধারার n পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

∴ গুণোত্তর ধারার 10 পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1}$

প্রশ্নমতে, $\frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 100$ [∵ 1 মিটার = 100 সে.মি.]

বা, $a \times \frac{\left(\frac{1}{109}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{109} - 1} = 100$ বা, $a \times \frac{12.915 - 1}{1.2915 - 1} = 100$

বা, $a = \frac{100 \times 0.2915}{11.915} = 2.447$ সে.মি. $= 24.47$ মি.মি. (প্রায়) [∵ 10 সে.মি. = 1 মি.মি.]

∴ ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য 24.47 মি.মি. (প্রায়)।

02. পলাশ সরকার 2005 সালের জানুয়ারি মাসে বার্ষিক 120000 টাকা বেতনে চাকুরীতে যোগদান করলেন। তার বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ প্রতি বছর 5000 টাকা। প্রতি বছর তার বেতন থেকে 10% ভবিষ্যৎ তহবিল হিসেবে কর্তন করা হয়। তিনি বেতন থেকে বার্ষিক 12% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে বছর শেষে একটি ব্যাংকে 12000 টাকা জমা রাখেন। তিনি 2030 সালের 31 ডিসেম্বর চাকুরী থেকে অবসরে যাবেন।

(ক) পলাশ সরকারের মূল বেতন কোন ধারাকে সমর্থন করে? ধারাটি লিখ।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১৩.২ (উদাহরণের অংক নং-১২)]

Sol" পলাশ সরকারের মূল বেতন সমান্তর ধারা সমর্থন করে।

ধারাটির প্রথম পদ, a = 120000 এবং সাধারণ অন্তর = 5000

∴ দ্বিতীয় পদ = 120000 + 5000 = 125000

তৃতীয় পদ = 125000 + 5000 = 130000

∴ ধারাটি, 120000 + 125000 + 130000 + ... **(Ans.)**

(খ) ভবিষ্যৎ তহবিল ব্যতিত সে বেতন হিসেবে চাকুরী জীবনে মোট কত টাকা পাবেন।

Sol" 2005 সালের জানুয়ারি থেকে 2030 সালের 31 ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট (2030 – 2005 + 1)

বা, 26 বছর ভবিষ্যৎ তহবিল ব্যতিত তাঁর বেতন বাবদ প্রাপ্য টাকার পরিমাণ,

(120000 – 120000 এর 10%) + (125000 – 125000 এর 10%) +

(130000 – 130000 এর 10%) + ...

= (120000 – 12000) + (125000 – 12500) + (130000 – 13000) + ...

= 108000 + 112500 + 117000 + ...

এক্ষেত্রে সৃষ্ট ধারাটি একটি সমান্তর ধারা। যার প্রথম পদ, a = 108000

সাধারণ অন্তর, d = 112500 – 108000 = 4500 এবং পদ সংখ্যা, n = 26

∴ 26 বছরে তাঁর প্রাপ্য মোট বেতনের পরিমাণ $= \frac{26}{2}\{2 \times 108000 + (26 - 1) \times 4500\}$ টাকা

$= 13(216000 + 112500) = 13 \times 328500 = 4270500$ টাকা **(Ans.)**

03. বেগম জামিলা খাতুনের ছয় ছেলে-মেয়ের মধ্যে সবচেয়ে বড় ছেলে আনোয়ার সাহেবের মাসিক আয় 3000 টাকা এবং সবচেয়ে ছোট ছেলে মোফাজ্জল সাহেবের মাসিক আয় 96000 টাকা। বড় ছেলে থেকে ছোটক্রমে প্রত্যেকের মাসিক আয় গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে-

(ক) জামিলা খাতুনের প্রত্যেক ছেলের মাসিক বেতনের ক্রমিক অনুপাত কত?

(খ) জামিলা খাতুনের ২য় ছেলে মনোয়ার সাহেব এবং ৫ম ছেলে তোফাজ্জল সাহেবের বেতনের পার্থক্য কত?

(গ) ঐ পরিবারের মোট মাসিক আয় কত?

Sol এখানে, আনোয়ার সাহেবের মাসিক আয় 3000 টাকা ধারাটি প্রথম হবে।
ধারাটির সর্বশেষ বা ষষ্ঠ পদ হবে মোফাজ্জল সাহেবের মাসিক আয়।
মনে করি, ২য় ছেলে মনোয়ার সাহেবের মাসিক আয় = M
৫ম ছেলে তোফাজ্জল সাহেবের মাসিক আয় = T
মনে করি, ধারাটির তৃতীয় ও চতুর্থ পদ যথাক্রমে N ও P
∴ ধারাটি $3000 + M + N + P + T + 96000$

(ক) মনে করি, প্রত্যেক ছেলের মাসিক বেতনের ক্রমিক অনুপাত = r
এখানে, ১ম পদ, $a = 3000$
৬ষ্ঠ পদ, $ar^{6-1} = 96000$
$\Rightarrow 3000.r^5 = 96000 \Rightarrow r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$

(খ) ২য় ছেলের মাসিক আয় $= ar^{2-1} = ar = 3000 \times 2 = 6000$ টাকা
৫ম ছেলের মাসিক আয় $= ar^{5-1} = ar^4 = 3000 \times 2^4 = 48{,}000$ টাকা
তাদের বেতনের পার্থক্য $= 48{,}000 - 6000 = 42{,}000$ টাকা

(গ) পরিবারের মোট মাসিক আয় বা ধারাটির সমষ্টি, $S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$
$= \frac{3000(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3000 \times 63 = 1{,}89{,}000$ টাকা

04. রনি সাহেবের একটি বাগান করার জন্য কিছু গাছ লাগাবে। সে ঠিক করল যে প্রথম দিনে 2টি, দ্বিতীয় দিনে 4টি এভাবে পরবর্তী দিনগুলোতে পূর্বের দিনের দ্বিগুণ হারে গাছ লাগাবে।

(ক) রনি সাহেবের গাছ লাগানো ধারায় প্রকাশ কর।

(খ) রনি সাহেব কোন দিনে 128 টি গাছ লাগাবে?

(গ) কত দিনে রনি সাহেব মোট 1024 টি গাছ লাগাবে?

Sol রনি সাহেব তৃতীয় দিনে গাছ লাগাবেন $= 4 \times 2 = 8$ টি
" " চতুর্থ " " " $= 8 \times 2 = 16$ টি

(ক) ∴ ধারাটি, $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(খ) ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$
সাধারণ অনুপাত, $r = 2$
মনে করি, n দিনে 128 টি গাছ লাগানো হবে।
∴ $ar^{n-1} = 128$
$\Rightarrow 2.2^{n-1} = 128$
$\Rightarrow 2^{n-1} = 64$
$\Rightarrow 2^{n-1} = 2^6$
$\Rightarrow n - 1 = 6$
$\Rightarrow n = 7$
∴ ৭ম দিনে 128 টি গাছ লাগানো হবে।

(গ) মোট 1024 টি গাছ লাগানো হবে
অর্থাৎ ধারাটির সমষ্টি হবে 1024
মনে করি, n দিনে সর্বমোট 1024 টি গাছ লাগানো হবে।

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ $\Rightarrow 1024 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1}$

$\Rightarrow 2^n - 1 = 512 \Rightarrow 2^n = 513$

যেহেতু $2^9 = 512$ এবং $2^{10} = 1024$

তাই এক্ষেত্রে $9 < n < 10$

$\therefore$ মোট সময় লাগবে 9 দিনের অধিক অর্থাৎ 10 দিন।

05. ক তার ছেলেকে স্কুলে নেয়া-আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হলো প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গ.), অধ্যায়-১৩.২ (উদাহরণের কাজ)]

Sol যেহেতু প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন দুই পয়সা, তৃতীয় দিন চার পয়সা পারিশ্রমিক পাবেন, সুতরাং লোকটির পারিশ্রমিক গুণোত্তর ধারাভুক্ত।

সুতরাং, ধারাটি $1 + 2 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = 2 \div 1 = 2$

সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এপ্রিল মাস 30 দিনে।

$\therefore$ পদ সংখ্যা, $n = 30$

$\therefore$ এপ্রিল মাসে মোট পাবে $= \frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1}$ $[\because r > 1]$

$= \frac{1(2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1 = 1073741824$

$\therefore$ মোট পাবে $= 1073741824$ পয়সা

$= \frac{1073741824}{100}$ টাকা $[\because 100$ পয়সা $= 1$ টাকা$]$

$= 10737418.24$ টাকা

$\therefore$ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি পাবেন 10737418.24 টাকা **(Ans.)**

06. মি. সোহাগ বিনা সুদে 6138 টাকা 10টি মাসিক কিস্তিতে পরিশোধ করতে স্বীকৃত হন। যদি প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ ঠিক পূর্ববর্তী কিস্তির দ্বিগুণ হয়, তাহলে প্রথম ও শেষ কিস্তির টাকা পৃথকভাবে নির্ণয় করুন।

Sol ধরি, প্রথম কিস্তির টাকার পরিমাণ = x টাকা

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি: $x + 2x + 4x + 8x + \ldots\ldots\ldots\ldots = 6138$

এখানে, প্রথম পদ, $a = x$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2x}{x} = 2$

পদসংখ্যা, $n = 10$

যেহেতু সাধারণ অনুপাত, $r > 1$ তাই দশটি পদের সমষ্টি, $S_{10} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$\Rightarrow 6138 = \frac{x(2^{10} - 1)}{2 - 1}$ $[\because a = x]$

$\Rightarrow x(1024 - 1) = 6138 \Rightarrow x \times 1023 = 6138 \Rightarrow x = \frac{6138}{1023} \therefore x = 6$

$\therefore$ দশম পদ বা শেষ কিস্তি $= ar^{n-1} = 6 \times 2^{10-1} = 6 \times 2^9 = 6 \times 512 = 3072$

উত্তর: প্রথম ও শেষ কিস্তি যথাক্রমে 6 টাকা ও 3072 টাকা।

07. কি. কাওসার 2.76% হার সরল সুদে 8000 টাকা ঋণ গ্রহণ করেন। স্থির হয় যে আসল ও সুদ 10 টি মাসিক কিস্তিতে পরিশোধ করতে হবে। যদি প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ পূর্ববর্তী কিস্তির দ্বিগুণ হয় তবে প্রথম ও শেষ কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন।

Sol" মি. কাওসার 10 মাসে সুদ পরিশোধ করবেন

$$\text{মোট সুদ} = 2.76\% \times \frac{10}{12} \times 8000 = \frac{2.76}{100} \times \frac{10}{12} \times 8000$$

$$= \frac{276}{100 \times 100} \times \frac{10}{12} \times 8000 = 184 \text{ টাকা}$$

সুদ সহ তিনি পরিশোধ করবেন $= 184 + 8000 = 8184$ টাকা

মনে করি, তিনি প্রথম কিস্তি দেন x টাকা

প্রশ্নমতে, দ্বিতীয় " " $2x$ টাকা

তৃতীয় " " $2x \times 2 = 4x$ টাকা

সুতরাং তার ঋণ পরিশোধ একটি গুণোত্তর ধারা

অর্থাৎ $x + 2x + 4x + \ldots\ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = x$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2x}{x} = 2 \quad [r > 1]$

10 টি পদের সমষ্টি, $S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1}$

$$\Rightarrow \quad 8184 = \frac{x(2^{10} - 1)}{2 - 1} \qquad [\because a = x]$$

$$\Rightarrow \quad 8184 = x\,(1024 - 1)$$

$$\Rightarrow \quad 8184 = 1023\,x$$

$$\Rightarrow \quad 1023x = 8184$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{8184}{1023}$$

$$\therefore \quad x = 8$$

দশম পদ $= ar^{n-1} = 8 \times 2^{10-1}$

$= 8 \times 2^9$

$= 8 \times 512 = 4096$

উত্তর: প্রথম কিস্তি 8 টাকা এবং শেষ কিস্তি 4096 টাকা।

TYPE 08: অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়

01. প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর:

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৭ (অনুশীলনীর অংক নং-১)]

(ক) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$

Sol" ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$

এখানে, $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ Ans.}$$

(খ) $\frac{1}{5}-\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}-\frac{8}{5^4}+$ .....

Sol" ধারাটির ১ম পদ, $a=\frac{1}{5}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=-\frac{2}{5^2}\div\frac{1}{5}=-\frac{2}{5^2}\times 5=-\frac{2}{5}$

এখানে, $|r|=\left|-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}<1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{1}{7}$ **Ans.**

(গ) $8+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$ .....

Sol" ধারাটির ১ম পদ, $a=8$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=2\div 8=\frac{1}{4}$

এখানে, $|r|=\left|\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}<1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{8}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{\frac{3}{4}}=\frac{32}{3}$ **Ans.**

(ঘ) $1+2+4+8+16+$ .....

Sol" ধারাটির ১ম পদ, $r=1$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{2}{1}=2$

এখানে, $|r|=|2|=2>1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নেই। **Ans.**

(ঙ) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{16}\right)+$ .....

Sol" ধারাটির ১ম পদ, $a=\frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=-\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\times 2=-\frac{1}{2}$

এখানে, $|r|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ **Ans.**

02. $0.3+.03+.003+\cdots\infty$ এ অসীম ধারাটির যোগফল কত?

Sol" প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

এখানে, প্রথম পদ, $a=0.3$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=0.1$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটির অসীম পর্যন্ত যোগফল $=\frac{a}{1-r}=\frac{0.3}{1-0.1}=\frac{0.3}{0.9}=\frac{1}{3}$

03. $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+$ ..... একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। $x=\frac{3}{2}$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং ৫ম পদ কত? [৪১তম বিসিএস]

Sol" এখানে, $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+$ ..... একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির, ১ম পদ, $a=\frac{1}{2x+1}$

সাধারণ অনুপাত, $q=\frac{1}{(2x+1)^2}\div\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{(2x+1)^2}\times\frac{2x+1}{1}$

$=\frac{1}{2x+1}$

$=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}+1}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$ (Ans.)

ধারাটির ৫ম পদ, $aq^{5-1}=\frac{1}{2x+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}+1}\cdot\frac{1}{256}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{256}=\frac{1}{1024}$ (Ans.)

TYPE 09: n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয়

01. নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর:

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৭ (অনুশীলনীর অংক নং-১)]

(ক) $7+77+777+$ .....

Sol" $7+77+777+$ ..... + n তম পদ

$=7(1+11+111+$ ..... + n তম পদ)

$=\frac{7}{9}(9+99+999+$ ..... + n তম পদ)

$=\frac{7}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+$ ..... + n তম পদ$\}$

$=\frac{7}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots+$ n তম পদ$)-(1+1+1+\ldots+$ n তম পদ$)\}$

$=\frac{7}{9}\left\{\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}\right)-n\right\}=\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$

অতএব, ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n=\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$ Ans.

(খ) $5+55+555+$ .....

Sol" $5+55+555+$ ..... + n তম পদ

$=5(1+11+111+$ ..... + n তম পদ)

$=\frac{5}{9}(9+99+999+$ ..... + n তম পদ)

$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+$ ..... + n তম পদ$\}$

$=\frac{5}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots+$ n তম পদ$)-(1+1+1+\ldots+$ n তম পদ$)\}$

$=\frac{5}{9}\left\{\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}\right)-n\right\}=\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$

অতএব, ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n=\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$ Ans.

TYPE 10: পৌনঃপুনিক দশমিককে গুণোত্তর ধারার সাহায্যে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ

01. প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৭ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

(ক) $0.\dot{2}\dot{7}$

Sol^n $0.\dot{2}\dot{7} = 0.27\ 27\ 27\ 27\ 27\ .....$

$= 0.27 + 0.0027 + 0.000027 + ...$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির ১ম পদ, $a = 0.27$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.0027}{0.27} = 0.01 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.27}{1-0.01} = \frac{0.27}{0.99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

$\therefore\ 0.\dot{2}\dot{7} = \frac{3}{11}$ **Ans.**

(খ) $2.3\dot{0}\dot{5}$

Sol^n $2.3\dot{0}\dot{5} = 2.305\ 305\ 305\ .....$

$= 2 + 0.305 + 0.000305 + 0.000000305 + ...$

এখানে, $0.305 + 0.000305 + 0.000000305 + ...$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির ১ম পদ, $a = 0.305$ এবং সাধারণ অন্তর, $r = \frac{0.000305}{0.305} = 0.001 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.305}{1-0.001} = \frac{0.305}{0.999} = \frac{305}{999}$

$\therefore\ 2.3\dot{0}\dot{5} = 2 + \frac{305}{999} = 2\frac{305}{999}$ **Ans.**

(গ) $0.0\dot{1}2\dot{3}$

Sol^n $0.0\dot{1}2\dot{3} = 0.0123123123\ .....$

$= 0.0123 + 0.0000123 + 0.0000000123 + ...$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির ১ম পদ, $a = 0.0123$

এবং সাধারণ অন্তর, $r = \frac{0.0000123}{0.0123} = 0.001 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.0123}{1-0.001} = \frac{0.0123}{0.999}$

$= \frac{123}{9990} = \frac{41}{3330}$

$\therefore\ 0.0\dot{1}2\dot{3} = \frac{41}{3330}$ **Ans.**

(ঘ) $3.0\dot{4}0\dot{3}$

Sol" $3.0\dot{4}0\dot{3} = 3.0403403403 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 3 + 0.0403 + 0.0000403 + 0.0000000403 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

এখানে, $0.0403 + 0.0000403 + 0.0000000403 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

যার ১ম পদ, $a = 0.0403$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.0000403}{0.0403} = 0.001 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0.0403}{1-0.001} = \frac{0.0403}{0.999} = \frac{403}{9990}$

$\therefore \quad 3.0\dot{4}0\dot{3} = 3 + \frac{403}{9990} = 3\frac{403}{9990}$ **Ans.**

সমান্তর ধারার Suggestion

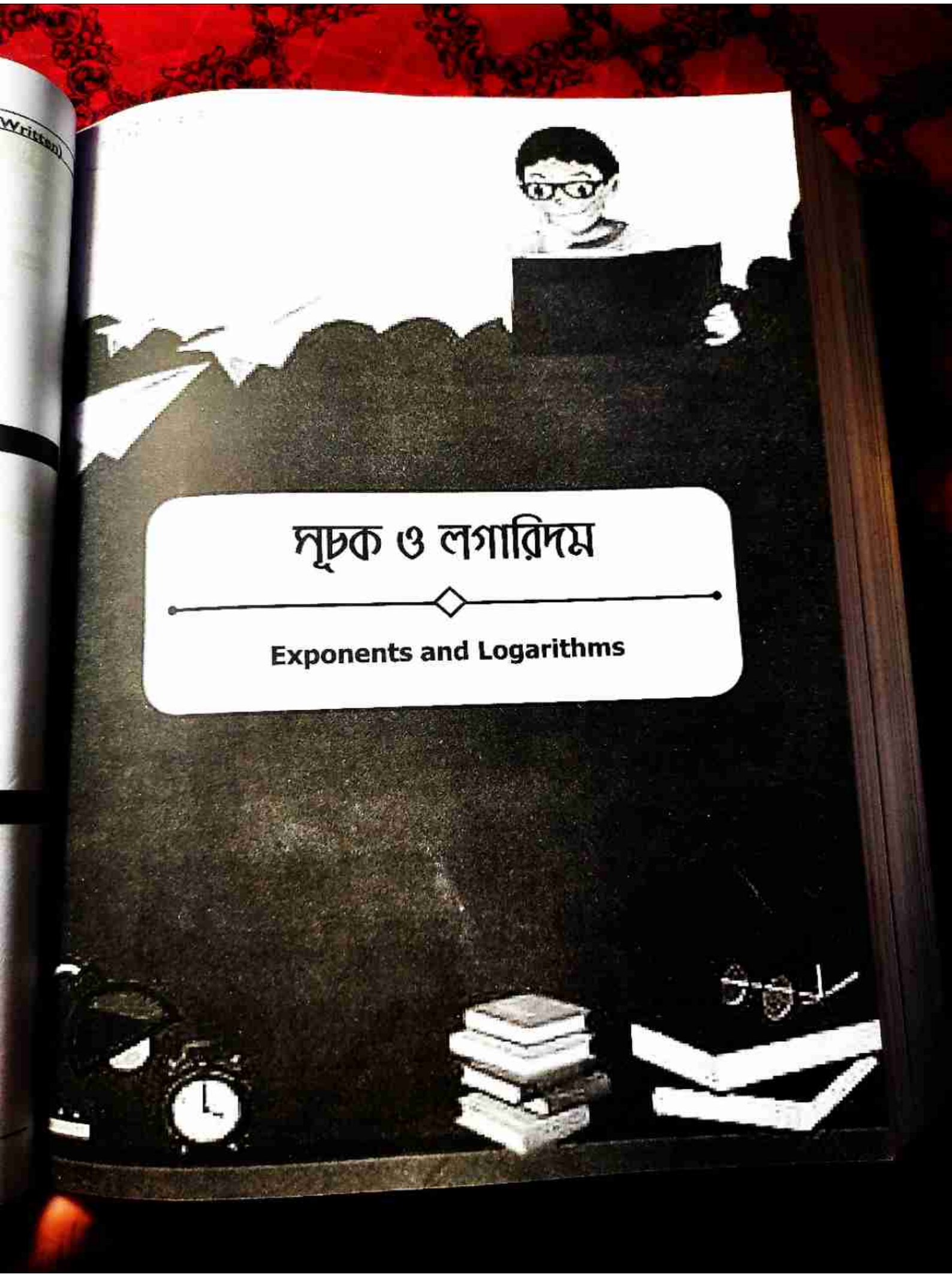
শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	02
Type-02	02, 04
Type-03	02
Type-05	01
Type-06	01
Type-07	Full
Type-08	01, 02
Type-09	01
Type-10	01, 03
Type-11	01, 02, 03, 06

গুণোত্তর ধারার Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	04, 05, 06, 07
Type-02	02
Type-03	01, 03
Type-04	01, 02
Type-05	01, 02, 05, 06
Type-06	01
Type-07	02, 03, 05
Type-08	03


সূচক ও লগারিদম
Exponents and Logarithms

সূচকের প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ:

$a \in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং $m, n \in N$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট) হলে,

(i) গুণের সূত্র: $a^m.a^n = a^{m+n}$

(ii) ভাগের সূত্র: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ অথবা, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

(iii) গুণফলের ঘাত: $(ab)^n = a^n b^n$

(iv) ভাগফলের ঘাত: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

(v) ঘাতের ঘাত: $(a^m)^n = a^{mn}, a \neq 0$

(vi) শুন্য সূচক: $a^0 = 1 (a \neq 0)$,

ঋণাত্মক সূচক: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in N)$

(vii) $a > 0$ এবং $a \neq 0$ শর্ত সাপেক্ষে, $a^x = a^y$ হলে $x = y$

(viii) $a > 0, b > 0$ এবং $x \neq 0$ শর্ত সাপেক্ষে, $a^x = b^x$ হলে $a = b$

(ix) a এর n তম মূল $(a)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: সরলীকরণ

01. সরল করুন: $\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^m\left(p-\frac{1}{q}\right)^m}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^m\left(q-\frac{1}{p}\right)^m}$ [২২তম বিসিএস]

Sol^n $\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^m\left(p-\frac{1}{q}\right)^m}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^m\left(q-\frac{1}{p}\right)^m} = \frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^m\left(\frac{pq-1}{q}\right)^m}{\left(\frac{pq+1}{p}\right)^m\left(\frac{pq-1}{p}\right)^m}$

$= \left(\frac{pq+1}{q} \times \frac{p}{pq+1}\right)^m \times \left(\frac{pq-1}{q} \times \frac{p}{pq-1}\right)^m$

$= \left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^m = \left(\frac{p}{q}\right)^{m+m} = \left(\frac{p}{q}\right)^{2m}$

Ans: $\left(\frac{p}{q}\right)^{2m}$

02. সরল করুন: $a - \{a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}\}^{-1}$ যেখানে $ab \neq 0$ এবং $ab \neq 1$ [২০তম, ১৮তম, ১১তম বিসিএস]

Sol^n $a - \{a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}\}^{-1}$

$= a - \left\{\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{b} - a\right)^{-1}\right\}^{-1} \quad \left[\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right]$

$= a - \left\{\frac{1}{a} + \left(\frac{1-ab}{b}\right)^{-1}\right\}^{-1}$

$= a - \left\{\frac{1}{a} + \frac{b}{1-ab}\right\}^{-1} = a - \left\{\frac{1-ab+ab}{a(1-ab)}\right\}^{-1} = a - \left\{\frac{1}{a(1-ab)}\right\}^{-1}$

$= a - a(1-ab) = a - a + a^2b = a^2b$ **(Ans.)**

03. $\left\{\frac{x^{(a-b)^2}}{x^{-3ab}}\right\}^{(a-b)}\left\{\frac{x^{(b-c)^2}}{x^{-3bc}}\right\}^{(b-c)}\left\{\frac{x^{(c-a)^2}}{x^{-3ca}}\right\}^{(c-a)}$ = কত? [১৮তম বিসিএস]

Sol" $\left\{\frac{x^{(a-b)^2}}{x^{-3ab}}\right\}^{(a-b)}\left\{\frac{x^{(b-c)^2}}{x^{-3bc}}\right\}^{(b-c)}\left\{\frac{x^{(c-a)^2}}{x^{-3ca}}\right\}^{(c-a)}$

$= \left(x^{a^2-2ab+b^2+3ab}\right)^{(a-b)}\left(x^{b^2-2bc+c^2+3bc}\right)^{(b-c)}\left(x^{c^2-2ca+a^2+3ca}\right)^{(c-a)}$

$= \left(x^{a^2+ab+b^2}\right)^{(a-b)}\left(x^{b^2+bc+c^2}\right)^{(b-c)}\left(x^{c^2+ca+a^2}\right)^{(c-a)}$

$= x^{a^3-b^3}.x^{b^3-c^3}.x^{c^3-a^3}$

$= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= x^0 = 1$ **(Ans.)**

04. সরল করুন: $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$ [১৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}} = \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{m^2-1}}$

$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$

$= 3^{2m-m^2+1} \div 3^{2m-m^2+3}$

$= 3^{2m-m^2+1-2m+m^2-3}$

$= 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ **(Ans.)**

05. $\frac{2^{n+4}-4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol" $\frac{2^{n+1+3}-4.2^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}.2^3-4.2^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}(2^3-4)}{2^{n+1}} = 8-4 = 4$ **(Ans.)**

06. (ক) $\frac{3.2^n-4.2^{n-2}}{2^n-2^{n+1}}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (উদাহরনের অংক নং-০২(খ))]*

Sol" $\frac{3.2^n-4.2^{n-2}}{2^n-2^{n+1}} = \frac{3.2^n-2^2.2^{n-2}}{2^n-2^n.2^1} = \frac{3.2^n-2^{2+n-2}}{2^n(1-2)}$

$= \frac{2^n(3-1)}{2^n(-1)} = \frac{2}{-1} = -2$ **(Ans.)**

(খ) মান বের করুন: $\frac{5.3^m-9.3^{m-1}}{3^m-3^{m-1}}$ [৪৪তম বিসিএস]

Sol" $\frac{5.3^m-9.3^{m-1}}{3^m-3^{m-1}} = \frac{5.3^m-3^2.3^m.3^{-1}}{3^m-3^m.3^{-1}} = \frac{3^m\left(5-3^2.\frac{1}{3}\right)}{3^m\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{5-3}{\frac{3-1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 2\times\frac{3}{2} = 3$ **(Ans.)**

07. $\frac{5^{n+2}+35\times5^{n-1}}{4\times5^n}$

Sol" $\frac{5^{n+2}+35\times5^{n-1}}{4\times5^n} = \frac{5^n.5^2+35\times5^n\times\frac{1}{5}}{4\times5^n} = \frac{5^n.25+7\times5^n}{4\times5^n} = \frac{5^n(25+7)}{4\times5^n} = \frac{32}{4} = 8$ **(Ans.)**

সরল কর : $\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}}+\frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}}+\frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের অংক নং-১৫)]

Sol" এখানে, $\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}}=\frac{a^{-y}}{a^{-y}(1+a^{y-z}+a^{y-x})}=\frac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}}$

একইভাবে, $\frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}}=\frac{a^{-z}}{a^{-z}(1+a^{z-x}+a^{z-y})}+\frac{a^{-z}}{a^{-z}+a^{-x}+a^{-y}}$

এবং $\frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}=\frac{a^{-x}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}}+\frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}}+\frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$

$=\frac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}}+\frac{a^{-z}}{a^{-z}+a^{-x}+a^{-y}}+\frac{a^{-x}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$

$=\frac{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}=1$ **(Ans.)**

সরল কর : $\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫(ক))]

Sol" $\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

$=\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}}\ \left[\because \frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}\right]$

$=\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}=\left(\frac{a+b}{b}\right)^{1}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{1}$

$=\frac{a+b}{b}\times\frac{a-b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}$ (Ans.)

বিকল্প নিয়ম : $\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

$=\frac{\left(\frac{a+b}{b}\times\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\times\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}=\frac{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

$=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}}$

$=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}=\frac{a^2-b^2}{ab}$ Ans.

10. সরল কর : $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫(গ)]

Sol" $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}=\dfrac{a(\sqrt{a}+b)}{b(a-b^2)}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$ $[\because a^{\frac{3}{2}}=a.a^{\frac{1}{2}}=a\sqrt{a}]$

$=\dfrac{a(\sqrt{a}+b)}{b\{(\sqrt{a})^2-(b)^2\}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}=\dfrac{a(\sqrt{a}+b)}{b(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

$=\dfrac{a}{b(\sqrt{a}-b)}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}=\dfrac{a-b\sqrt{a}}{b(\sqrt{a}-b)}$

$=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-b)}{b(\sqrt{a}-b)}$ $[\because a=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.\sqrt{a}]$

$=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ (Ans.)

11. সরল কর : $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫(ঘ)]

Sol" $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}=\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}\times\frac{a}{a+b}}$ $[\because (a^r)^s=a^{rs}]$

$=x^{\frac{1}{a}\times\frac{a^2-b^2}{a-b}\times\frac{a}{a+b}}=x^{\frac{1}{a}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}\times\frac{a}{(a+b)}}=x^1=x$ (Ans.)

12. সরল কর : $\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\dfrac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\dfrac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫(ঙ)]

Sol" $\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\dfrac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\dfrac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশ $=\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}$

$=\dfrac{a^m}{a^m(1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p)}$ [লব ও হরকে a^m দ্বারা গুণ করে]

$=\dfrac{a^m}{a^m+a^{-m+m}b^n+a^{-m+m}c^p}=\dfrac{a^m}{a^m+a^0b^n+a^0c^p}$

$=\dfrac{a^m}{a^m+b^n+c^p}$ $[\because a^0=1]$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় অংশ $=\dfrac{b^n}{a^m+b^n+c^p}$

এবং তৃতীয় অংশ $=\dfrac{c^p}{a^m+b^n+c^p}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\dfrac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\dfrac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

$=\dfrac{a^m}{a^m+b^n+c^p}+\dfrac{b^n}{a^m+b^n+c^p}+\dfrac{c^p}{a^m+b^n+c^p}$

$=\dfrac{a^m+b^n+c^p}{a^m+b^n+c^p}=1$ (Ans.)

13. সরল কর : $\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫(ঙ))]

Sol" $\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}} = \left(\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}\right)^{\frac{1}{ca}} \times \left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{1}{ab}}$

$= \left(x^{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(x^{\frac{c}{a}-\frac{a}{c}}\right)^{\frac{1}{ca}} \times \left(x^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{ab}} \quad \left[\because \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}\right]$

$= \left(x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(x^{\frac{c^2-a^2}{ca}}\right)^{\frac{1}{ca}} \times \left(x^{\frac{a^2-b^2}{ab}}\right)^{\frac{1}{ab}}$

$= x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}} \cdot x^{\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}} \cdot x^{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}} = x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}+\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}} = x^{\frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)}{a^2b^2c^2}}$

$= x^{\frac{a^2b^2-c^2a^2+b^2c^2-a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = x^{\frac{0}{a^2b^2c^2}} = x^0 = 1$ (Ans.)

বিকল্প নিয়ম :

Sol" $\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}} = \frac{x^{\frac{b}{c}\times\frac{1}{bc}}}{x^{\frac{c}{b}\times\frac{1}{bc}}} \times \frac{x^{\frac{c}{a}\times\frac{1}{ca}}}{x^{\frac{a}{c}\times\frac{1}{ca}}} \times \frac{x^{\frac{a}{b}\times\frac{1}{ab}}}{x^{\frac{b}{a}\times\frac{1}{ab}}}$

$= \frac{x^{\frac{1}{c^2}}}{x^{\frac{1}{b^2}}} \times \frac{x^{\frac{1}{a^2}}}{x^{\frac{1}{c^2}}} \times \frac{x^{\frac{1}{b^2}}}{x^{\frac{1}{a^2}}} = 1$ Ans.

14. সরল কর : $\frac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫(চ))]*

Sol" $\frac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}} = \frac{\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b^2-\frac{1}{a^2}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$

$= \frac{\left\{\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{b}\right)\right\}^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left\{\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{a}\right)\right\}^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}} = \frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^b\left(b-\frac{1}{a}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$

$= \frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{a+b-a}}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{b+a-b}} = \frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^b}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^a}$

$= \frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^a\left(\frac{ab-1}{b}\right)^b}{\left(\frac{ab-1}{a}\right)^b\left(\frac{ab+1}{a}\right)^a} = \left(\frac{ab+1}{b}\times\frac{a}{ab+1}\right)^a \times \left(\frac{ab-1}{b}\times\frac{a}{ab-1}\right)^b$

$= \left(\frac{a}{b}\right)^a \times \left(\frac{a}{b}\right)^b = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$ (Ans.)

15. সরল কর :

(১) $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}}$

(২) $[1-1\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের কাজের অংশ)

Sol" (১) $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6.a^2)}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^8)}}$

$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^4)^2}} = \sqrt[12]{a^8.a^4}$

$= \sqrt[12]{a^{8+4}} = \sqrt[12]{a^{12}} = (a^{12})^{\frac{1}{12}} = a$

∴ নির্ণেয় সরল মান = a

(২) $[1-1\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1} = \left[1-1\left\{1-\frac{1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$

$= \left[1-1\left\{\frac{1-x^3-1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1} = \left[1-1\left\{\frac{-x^3}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$

$= \left[1-\left(\frac{1-x^3}{-x^3}\right)\right]^{-1} = \left[1+\frac{1-x^3}{x^3}\right]^{-1} = \left[\frac{x^3+1-x^3}{x^3}\right]^{-1}$

$= \left[\frac{1}{x^3}\right]^{-1} = x^3$

∴ নির্ণেয় সরল মান = x^3

TYPE 02: মান নির্ণয়

01. $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$ হলে xyz-এর মান নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(গ)] এবং [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯]

Sol" দেওয়া আছে, $a^x = b$, $b^y = c$

এবং $c^z = a$

$\Rightarrow (c^z)^x = a^x \quad \Rightarrow c^{zx} = b \; [\because a^x = b]$

$\Rightarrow c^{yzx} = b^y$

$\Rightarrow c^{xyz} = c^1 \; [\because b^y = c]$

$\therefore xyz = 1$ **Ans.**

02. যদি $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের অংক নং-১১]

Sol" দেওয়া আছে, $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$

বা, $(x^x)^{\sqrt{x}} = \left(x.x^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^x = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^x = (x^x)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore (x^x)^{\sqrt{x}} = (x^x)^{\frac{3}{2}}$

বা, $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ বা, $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\therefore x = \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

03. যদি $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab + bc + ca$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(খ))]

Sol^n ধরি, $x^a = y^b = z^c = k$

$\therefore x^a = k$ বা, $(x^a)^{\frac{1}{a}} = k^{\frac{1}{a}}$ $\therefore x = k^{\frac{1}{a}}$

অনুরূপভাবে, $y = k^{\frac{1}{b}}$ এবং $z = k^{\frac{1}{c}}$

এখন, $xyz = 1$

বা, $k^{\frac{1}{a}}.k^{\frac{1}{b}}.k^{\frac{1}{c}} = 1$ [$\because x = k^{\frac{1}{a}}$, $y = k^{\frac{1}{b}}$ এবং $z = k^{\frac{1}{c}}$]

বা, $k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 1$

বা, $k^{\frac{bc+ca+ab}{abc}} = k^0$ [$\because a^0 = 1$]

বা, $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 0$

বা, $ab + bc + ca = 0 \times abc$

$\therefore ab + bc + ca = 0$ (Ans.)

বিকল্প সমাধান: দেওয়া আছে, $x^a = y^b = z^c$

$\therefore x^a = y^b$ বা, $(x^a)^{\frac{1}{a}} = (y^b)^{\frac{1}{a}}$ $\therefore x = y^{\frac{b}{a}}$

আবার, $y^b = z^c$ বা, $(y^b)^{\frac{1}{c}} = (z^c)^{\frac{1}{c}}$ $\therefore z = y^{\frac{b}{c}}$

এখন, $xyz = 1$

বা, $y^{\frac{b}{a}}.y.y^{\frac{b}{c}} = 1$ [$\because x = y^{\frac{b}{a}}$ এবং $z = y^{\frac{b}{c}}$]

বা, $y^{\frac{b}{a}+\frac{1}{1}+\frac{b}{c}} = 1$

বা, $y^{\frac{bc+ca+ab}{ac}} = y^0$ [$\because y^0 = 1$]

বা, $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 0$

বা, $ab + bc + ca = 0 \times abc$

$\therefore ab + bc + ca = 0$ (Ans.)

04. যদি $9^x = 27^y$ হয়, তাহলে $\frac{x}{y}$ এর মান এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(গ))]

Sol^n দেওয়া আছে, $9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$ বা, $3^{2x} = 3^{3y}$ বা, $2x = 3y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ (Ans.)

TYPE 03: সরলীকরণের সাহায্যে প্রমাণ

01. দেখান যে, $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p^2+pq+q^2}\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q^2+qr+r^2}\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r^2+rp+p^2} = 1$ [১৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২১(গ))]

Sol^n বামপক্ষ $= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p^2+pq+q^2}\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q^2+qr+r^2}\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r^2+rp+p^2}$

$= (x^{p-q})^{p^2+pq+q^2}(x^{q-r})^{q^2+qr+r^2}(x^{r-p})^{r^2+rp+p^2}$

$= x^{(p-q)(p^2+pq+q^2)} \times x^{(q-r)(q^2+qr+r^2)} \times x^{(r-p)(r^2+rp+p^2)}$

$= x^{p^3-q^3} \cdot x^{q^3-r^3} \cdot x^{r^3-p^3}$

$= x^{p^3-q^3+q^3-r^3+r^3-p^3}$

$= x^0 = 1$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

02. নিম্নলিখিত সম্পর্কটি প্রমাণ করুন : $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+q} \times \left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q+r}\left(\frac{a^r}{a^p}\right)^{r+p} = 1$ [১৩তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol^n L.H.S $= \left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+q} \times \left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q+r}\left(\frac{a^r}{a^p}\right)^{r+p}$

$= (a^{p-q})^{p+q} \times (a^{q-r})^{q+r} \times (a^{r-p})^{r+p}$

$= a^{p^2-q^2} \times a^{q^2-r^2} \times a^{r^2-p^2}$

$= a^{p^2-q^2+q^2-r^2+r^2-p^2} = a^0 = 1$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. (Proved)

03. $\frac{4^n-1}{2^n-1}=2^n+1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৭)]

Sol" বামপক্ষ $=\frac{4^n-1}{2^n-1}$

$=\frac{(2^2)^n-1}{2^n-1}=\frac{(2^n)^2-1^2}{2^n-1}$

$=\frac{(2^n+1)(2^n-1)}{(2^n-1)}=2^n+1$

$\therefore \frac{4^n-1}{2^n-1}=2^n+1$ (প্রমাণিত)

04. $\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 6^p}{3^{p-2}\cdot 6^{2p+2}\cdot 10^p\cdot 15^q}=\frac{1}{2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৮)]

Sol" বামপক্ষ $=\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 6^p}{3^{p-2}\cdot 6^{2p+2}\cdot 10^p\cdot 15^q}$

$=\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot (2.3)^p}{3^{p-2}\cdot (2.3)^{2p+2}\cdot (2.5)^p\cdot (3.5)^q}$

$=\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 2^p\cdot 3^p}{3^{p-2}\cdot 2^{2p+2}\cdot 3^{2p+2}\cdot 2^p\cdot 5^p\cdot 3^q\cdot 5^q}$

$=\frac{2^{2p+1+p}\cdot 3^{2p+q+p}\cdot 5^{p+q}}{2^{2p+2+p}\cdot 3^{p-2+2p+2+q}\cdot 5^{p+q}}$

$=\frac{2^{3p+1}\cdot 3^{3p+q}\cdot 5^{p+q}}{2^{3p+2}\cdot 3^{3p+q}\cdot 5^{p+q}}$

$=2^{3p+1-3p-2}\cdot 3^{3p+q-3p-q}\cdot 5^{p+q-p-q}$

$=2^{-1}\cdot 3^0\cdot 5^0=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 6^p}{3^{p-2}\cdot 6^{2p+2}\cdot 10^p\cdot 15^q}=\frac{1}{2}$ (প্রমাণিত)

05. $\left(\frac{a^\ell}{a^m}\right)^n\cdot\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^\ell\cdot\left(\frac{a^n}{a^\ell}\right)^m=1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৯)]

Sol" বামপক্ষ $=\left(\frac{a^\ell}{a^m}\right)^n\cdot\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^\ell\cdot\left(\frac{a^n}{a^\ell}\right)^m$

$=(a^{\ell-m})^n\,(a^{m-n})^\ell\,(a^{n-\ell})^m$

$=a^{\ell n-mn}\cdot a^{\ell m-\ell n}\cdot a^{mn-\ell m}$

$=a^{\ell n-mn+\ell m-\ell n+mn-\ell m}$

$=a^0=1$

$\therefore \left(\frac{a^\ell}{a^m}\right)^n\cdot\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^\ell\cdot\left(\frac{a^n}{a^\ell}\right)^m=1$ (প্রমাণিত)

03. $\frac{4^n-1}{2^n-1}=2^n+1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Sol" বামপক্ষ $=\frac{4^n-1}{2^n-1}$

$=\frac{(2^2)^n-1}{2^n-1}=\frac{(2^n)^2-1^2}{2^n-1}$

$=\frac{(2^n+1)(2^n-1)}{(2^n-1)}=2^n+1$

$\therefore \quad \frac{4^n-1}{2^n-1}=2^n+1$ (প্রমাণিত)

04. $\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 6^p}{3^{p-2}\cdot 6^{2p+2}\cdot 10^p\cdot 15^q}=\frac{1}{2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১)]

Sol" বামপক্ষ $=\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 6^p}{3^{p-2}\cdot 6^{2p+2}\cdot 10^p\cdot 15^q}$

$=\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot (2.3)^p}{3^{p-2}\cdot (2.3)^{2p+2}\cdot (2.5)^p\cdot (3.5)^q}$

$=\frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 2^p\cdot 3^p}{3^{p-2}\cdot 2^{2p+2}\cdot 3^{2p+2}\cdot 2^p\cdot 5^p\cdot 3^q\cdot 5^q}$

$=\frac{2^{2p+1+p}\cdot 3^{2p+q+p}\cdot 5^{p+q}}{2^{2p+2+p}\cdot 3^{p-2+2p+2+q}\cdot 5^{p+q}}$

$=\frac{2^{3p+1}\cdot 3^{3p+q}\cdot 5^{p+q}}{2^{3p+2}\cdot 3^{3p+q}\cdot 5^{p+q}}$

$=2^{3p+1-3p-2}\cdot 3^{3p+q-3p-q}\cdot 5^{p+q-p-q}$

$=2^{-1}\cdot 3^0\cdot 5^0=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad \frac{2^{2p+1}\cdot 3^{2p+q}\cdot 5^{p+q}\cdot 6^p}{3^{p-2}\cdot 6^{2p+2}\cdot 10^p\cdot 15^q}=\frac{1}{2}$ (প্রমাণিত)

05. $\left(\frac{a^\ell}{a^m}\right)^n\cdot\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^\ell\cdot\left(\frac{a^n}{a^\ell}\right)^m=1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Sol" বামপক্ষ $=\left(\frac{a^\ell}{a^m}\right)^n\cdot\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^\ell\cdot\left(\frac{a^n}{a^\ell}\right)^m$

$=(a^{\ell-m})^n\,(a^{m-n})^\ell\,(a^{n-\ell})^m$

$=a^{\ell n-mn}\cdot a^{\ell m-\ell n}\cdot a^{mn-\ell m}$

$=a^{\ell n-mn+\ell m-\ell n+mn-\ell m}$

$=a^0=1$

$\therefore \quad \left(\frac{a^\ell}{a^m}\right)^n\cdot\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^\ell\cdot\left(\frac{a^n}{a^\ell}\right)^m=1$ (প্রমাণিত)

06. $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" বামপক্ষ $= \frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}}$

$= a^{p+q-2r} \cdot a^{q+r-2p} \cdot a^{r+p-2q}$

$= a^{p+q-2r+q+r-2p+r+p-2q}$

$= a^{2p+2q+2r-2p-2q-2r}$

$= a^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$ (প্রমাণিত)

07. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" বামপক্ষ $= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$= (x^{a-b})^{\frac{1}{ab}} \cdot (x^{b-c})^{\frac{1}{bc}} \cdot (x^{c-a})^{\frac{1}{ca}}$

$= x^{\frac{a-b}{ab}} \cdot x^{\frac{b-c}{bc}} \cdot x^{\frac{c-a}{ca}} = x^{\frac{ac-bc+ab-ac+bc-ab}{abc}}$

$= x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$ (প্রমাণিত)

08. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" বামপক্ষ $= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

$= (x^{a-b})^{a+b} \cdot (x^{b-c})^{b+c} \cdot (x^{c-a})^{c+a}$

$= x^{a^2-b^2} \cdot x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2}$

$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$

$= x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$ (প্রমাণিত)

09. $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" বামপক্ষ $= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$

$= (x^{p-q})^{p+q-r} \times (x^{q-r})^{q+r-p} \times (x^{r-p})^{r+p-q}$

$= x^{p^2+qp-rp-pq-q^2+rq} \times x^{q^2+rq-pq-rq-r^2+rp} \times x^{r^2+rp-rq-rp-p^2+pq}$

$= x^{p^2-q^2-rp+rq} \times x^{q^2-r^2-pq+rp} \times x^{r^2-p^2-rq+pq}$

$= x^{p^2-q^2-rp+rq+q^2-r^2-pq+rp+r^2-p^2-rq+pq}$

$= x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

10. $P = x^a$, $Q = x^b$ এবং $R = x^c$.

(ক) $P^{bc} \cdot Q^{-ca}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) দেখান যে, $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২)]

Sol"

(ক) দেওয়া আছে, $P = x^a$ এবং $Q = x^b$

∴ প্রদত্ত রাশি $= P^{bc} \cdot Q^{-ca}$

$= (x^a)^{bc} \cdot (x^b)^{-ca}$

$= x^{abc} \cdot x^{-abc}$

$= x^{abc-abc}$

$= x^0 = 1$

∴ নির্ণেয় মান 1

(খ) দেওয়া আছে, $P = x^a$, $Q = x^b$ এবং $R = x^c$

∴ প্রদত্ত রাশি $= \left(\frac{P}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \div 2(x^c.x^a)^{a-c}$

$= (x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \div 2(x^{a+c})^{a-c}$

$= x^{a^2-b^2} \times x^{b^2-c^2} \div 2x^{a^2-c^2}$

$= x^{a^2-b^2} \times x^{b^2-c^2} \times \frac{1}{2x^{a^2-c^2}}$

$= \frac{1}{2} x^{a^2-b^2+b^2-c^2-a^2+c^2}$

$= \frac{1}{2} x^0 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

∴ নির্ণেয় মান $\frac{1}{2}$

(গ) দেওয়া আছে, $P = x^a$, $Q = x^b$ এবং $R = x^c$

∴ বামপক্ষ $= \left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= (x^{a-b})^{a^2+ab+b^2} \times (x^{b-c})^{b^2+bc+c^2} \times (x^{c-a})^{c^2+ca+a^2}$

$= x^{a^3-b^3} \times x^{b^3-c^3} \times x^{c^3-a^3}$

$= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

∴ $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$. (দেখানো হলো)

11. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^{c}+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^{a}+x^{-b}+1}=1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(ছ))]

Sol" বামপক্ষ $=\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^{c}+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^{a}+x^{-b}+1}$

$=\frac{1}{x^{b}+\frac{1}{x^{c}}+1}+\frac{1}{x^{c}+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^{a}+x^{-b}+1}$

$=\frac{x^{c}}{x^{b+c}+1+x^{c}}+\frac{1}{x^{c}+x^{b+c}+1}+\frac{1}{x^{a}+\frac{1}{x^{b}}+1}$ [$\because a+b+c=0 \therefore b+c=-a$]

$=\frac{x^{c}}{1+x^{c}+x^{b+c}}+\frac{1}{1+x^{c}+x^{b+c}}+\frac{x^{b}}{x^{a+b}+x^{b}+1}$

$=\frac{x^{c}}{1+x^{c}+x^{b+c}}+\frac{1}{1+x^{c}+x^{b+c}}+\frac{x^{b}}{\frac{1}{x^{c}}+x^{b}+1}$

$=\frac{x^{c}}{1+x^{c}+x^{b+c}}+\frac{1}{1+x^{c}+x^{b+c}}+\frac{x^{b}.x^{c}}{1+x^{c}+x^{b+c}}$

$=\frac{x^{c}+1+x^{b+c}}{1+x^{c}+x^{b+c}}=\frac{1+x^{c}+x^{b+c}}{1+x^{c}+x^{b+c}}=1$

$\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^{c}+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^{a}+x^{-b}+1}=1$ (দেখানো হলো)

বিকল্প সমাধান :

দেওয়া আছে, $a+b+c=0$

বামপক্ষ $=\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^{c}+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^{a}+x^{-b}+1}$

$=\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{1}{\frac{1}{x^{-c}}+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^{a}+\frac{1}{x^{b}}+1}$

$=\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{x^{-c}}{1+x^{-(a+c)}+x^{-c}}+\frac{x^{b}}{x^{a+b}+1+x^{b}}$

$=\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{x^{-c}}{1+x^{b}+x^{-c}}+\frac{x^{b}}{x^{-c}+1+x^{b}}$ [$\because a+b+c=0 \quad \therefore a+b=-c \quad \therefore b=-(a+c)$]

$=\frac{1+x^{-c}+x^{b}}{x^{b}+x^{-c}+1}=1=$ ডানপক্ষ

TYPE 04: প্রশ্নে প্রদত্ত মানের সাহায্যে প্রমাণ

01. $p=xy^{a-1}$, $q=xy^{b-1}$, $r=xy^{c-1}$ হলে, $\left(\frac{p}{q}\right)^{c}\times\left(\frac{q}{r}\right)^{a}\times\left(\frac{r}{p}\right)^{b}=$ কত? [৪০তম বিসিএস]

Sol" $\left(\frac{p}{q}\right)^{c}\times\left(\frac{q}{r}\right)^{a}\times\left(\frac{r}{p}\right)^{b}$

$=\left(\frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}}\right)^{c}\times\left(\frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}}\right)^{a}\times\left(\frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}\right)^{b}=(y^{a-1-b+1})^{c}\times(y^{b-1-c+1})^{a}\times(y^{c-1-a+1})^{b}$

$=(y^{a-b})^{c}\times(y^{b-c})^{a}\times(y^{c-a})^{b}=y^{ac-bc}\times y^{ab-ac}\times y^{bc-ab}$

$=y^{ac-bc+ab-ac+bc-ab}=y^{0}=1$ **Ans.**

02. $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1$ [৩৮তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-৩)]

Sol" L. H. S $= a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q}$

$= (xy^{p-1})^{q-r} \cdot (xy^{q-1})^{r-p} \cdot (xy^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r} \cdot y^{(p-1)(q-r)} \cdot x^{r-p} \cdot y^{(q-1)(r-p)} \cdot x^{p-q} \cdot y^{(r-1)(p-q)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q} \cdot y^{pq-q-pr+r} \cdot y^{qr-r-pq+p} \cdot y^{pr-p-qr+q}$

$= x^0 \cdot y^{pq-q-pr+r+qr-r-pq+p+pr-p-qr+q}$

$= x^0 y^0$

$= 1 \times 1$

$= 1$ = R. H. S. **(Proved)**

03. দেখাও যে, যদি $x = a^{q+r}b^p$, $y = a^{r+p}b^q$, $z = a^{p+q}b^r$ হয়, তবে $x^{q-r} \cdot y^{r-p} \cdot z^{p-q} = 1$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬(গ))]

Sol" দেওয়া আছে, $x = a^{q+r}b^p$, $y = a^{r+p}b^q$, $z = a^{p+q}b^r$

বামপক্ষ $= x^{q-r} \cdot y^{r-p} \cdot z^{p-q}$

$= (a^{q+r}b^p)^{q-r} (a^{r+p}b^q)^{r-p} (a^{p+q}b^r)^{p-q}$ [মান বসিয়ে]

$= a^{(q+r)(q-r)} b^{p(q-r)} a^{(r+p)(r-p)} b^{q(r-p)} a^{(p+q)(p-q)} b^{r(p-q)}$

$= a^{q^2-r^2} b^{pq-rp} \cdot a^{r^2-p^2} b^{qr-pq} \cdot a^{p^2-q^2} b^{rp-qr}$

$= a^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2} \cdot a^{pq-rp+qr-pq+rp-qr}$

$= a^0 \cdot b^0$

$= 1.1$ [$\because a^0 = 1$]

$= 1$ = ডানপক্ষ

$\therefore x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q} = 1$ (দেখানো হলো)

04. দেখাও যে, যদি $a^x = p$, $a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y \cdot q^x)^z$ হয়, তবে $xyz = 1$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬(খ))]

Sol" দেওয়া আছে, $a^x = p$, $a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y q^x)^z$

এখানে, $(p^y q^x)^z = a^2$

বা, $\{(a^x)^y (a^y)^x\}^z = a^2$ [$\because p = a^x, q = a^y$]

বা, $(a^{xy} a^{xy})^z = a^2$ [$\because (a^r)^s = a^{rs}$]

বা, $a^{(xy+xy)z} = a^2$ [$\because a^r \cdot a^s = a^{r+s}$]

বা, $a^{(2xy)z} = a^2$ [$\because (a^r)^s = a^{rs}$]

বা, $2xyz = 2$

$\therefore xyz = 1$ (দেখানো হলো)

05. যদি $a^b = b^a$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ এবং এ থেকে প্রমাণ কর যে, $a = 2b$ হলে, $b = 2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের অংক নং-১০)]

Sol" দেওয়া আছে, $a^b = b^a$ বা, $(a^b)^{\frac{1}{a}} = (b^a)^{\frac{1}{a}}$

$\therefore b = (a^b)^{\frac{1}{a}} = (a)^{\frac{b}{a}}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{a^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(a^1 \cdot a^{-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{a}{b}}$

$= a^{\frac{a}{b}} \cdot a^{-1} = a^{\frac{a}{b}-1}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

পুনরায়, $a = 2b$ হলে, $\left(\frac{2b}{b}\right)^{\frac{2b}{b}} = (2b)^{\frac{2b}{b}-1}$ বা, $(2)^2 = (2b)^{2-1}$ বা, $4 = 2b$ $\therefore b = 2$ (প্রমাণিত)

06. যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের অংক নং-১২)]

Sol" দেওয়া আছে, $a^x = b^y$ বা, $(a^x)^{\frac{1}{x}} = (b^y)^{\frac{1}{x}}$ বা, $a = b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y$ বা, $(c^z)^{\frac{1}{z}} = (b^y)^{\frac{1}{z}}$ বা, $c = b^{\frac{y}{z}}$

এখন, $b^2 = ac$ বা, $b^2 = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$ বা, $2 = \frac{y}{x}+\frac{y}{z}$ বা, $\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$ [উভয়পক্ষকে y দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ (প্রমাণিত)

07. যদি $m^x = n^y = p^z = r^w$ হয়, তবে দেখান যে, $\log_n(mpr) = y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$. [৪৪তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $m^x = n^y = p^z = r^w$

$\therefore \quad m^x = n^y$

$\Rightarrow (m^x)^{\frac{1}{x}} = (n^y)^{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow m = n^{\frac{y}{x}}$

আবার, $p^z = n^y$

$\Rightarrow (p^z)^{\frac{1}{z}} = (n^y)^{\frac{1}{z}}$

$\Rightarrow p = n^{\frac{y}{z}}$

আবার, $r^w = n^y$

$\Rightarrow (r^w)^{\frac{1}{w}} = (n^y)^{\frac{1}{w}}$

$\Rightarrow r = n^{\frac{y}{w}}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \log_n(mpr) = \log_n\left(n^{\frac{y}{x}}.n^{\frac{y}{z}}.n^{\frac{y}{w}}\right) = \log_n n^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{y}{w}} = \left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{y}{w}\right)\log_n n$

$= y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)\times 1 = y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right) =$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

08. যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $x + y + z = 0$. [৪১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের অংক নং-১৪)]

Sol" ধরি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

তাহলে পাই, $a = k^x$, $b = k^y$, $c = k^z$

$\therefore abc = k^x . k^y . k^z = k^{x+y+z}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

$\therefore k^{x+y+z} = 1 = k^0$

$\therefore x + y + z = 0$ (দেখানো হল)

বিকল্প সমাধান: দেওয়া আছে, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$

$\therefore a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}}$ বা, $(a^{\frac{1}{x}})^x = (b^{\frac{1}{y}})^x \therefore a = b^{\frac{x}{y}}$

আবার, $c^{\frac{1}{z}} = b^{\frac{1}{y}}$ বা, $(c^{\frac{1}{z}})^z = (b^{\frac{1}{y}})^z \therefore c = b^{\frac{z}{y}}$

এখন, $abc = 1$ বা, $b^{\frac{x}{y}}.b.b^{\frac{z}{y}} = 1$

বা, $b^{\frac{x}{y}+\frac{1}{1}+\frac{z}{y}} = 1$ বা, $b^{\frac{x+y+z}{y}} = b^0$ [$\because b^0 = 1$]

বা, $\frac{x+y+z}{y} = 0$ বা, $x + y + z = 0$ (Ans.)

09. যদি $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $abc = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x + y + z = 1$.

[বইয়ে প্রশ্নটি ভুল আছে, প্রশ্নটি নিম্নরূপে হবে]

যদি $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $abc = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x + y + z = 0$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-৮)]

Sol" ধরি, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c} = k$

$\Rightarrow a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

$\Rightarrow a^{\frac{1}{x}} = k;\ b^{\frac{1}{y}} = k;\ c^{\frac{1}{z}} = k$

$\therefore a = k^x,\ b = k^y,\ c = k^z$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

$\Rightarrow k^x k^y k^z = 1 \quad \Rightarrow k^{x+y+z} = k^0 \quad \therefore \quad x + y + z = 0$ (প্রমাণিত)

10. যদি $a^m.a^n = (a^m)^n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m(n-2) + n(m-2) = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-৩)]

Sol" দেওয়া আছে, $a^m.a^n = (a^m)^n$

$\Rightarrow a^{m+n} = a^{mn}$

$\therefore m + n = mn$

এখন, বামপক্ষ $= m(n-2) + n(m-2)$

$= mn - 2m + nm - 2n = 2mn - 2(m+n) = 2mn - 2mn$ $[\because m + n = mn]$

$= 0$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ $m(n-2) + n(m-2) = 0$ (প্রমাণিত)

TYPE 05: উৎপাদকীয় সূত্র ব্যবহারের সাহায্যে প্রমাণ

01. যদি $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$ হয়, হবে দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(গ))]

Sol" দেওয়া আছে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$

এখানে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $x\sqrt[3]{a} = -(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c})$

বা, $(x\sqrt[3]{a})^3 = -(y\sqrt[3]{b})^3 - (z\sqrt[3]{c})^3 - 3y\sqrt[3]{b}\,.\,z\sqrt[3]{c}\,.\,(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c})$ $[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $ax^3 = -by^3 - cz^3 - 3yz\sqrt[3]{bc}(-x\sqrt[3]{a})$ $[\because x\sqrt[3]{a} = -(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c})]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz(a^2)^{\frac{1}{3}}(a)^{\frac{1}{3}}$ $[\because a^2 = bc]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyza^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$

$\therefore ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ (দেখানো হলো)

02. যদি $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(খ))]

Sol" দেওয়া আছে, $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$

এখানে, $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3.(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $x^3 = a + b + a - b + 3(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}.x$ $[\because (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}} = x]$

বা, $x^3 = 2a + 3.(c^3)^{\frac{1}{3}}.x$ $[\because a^2 - b^2 = c^3]$

বা, $x^3 = 2a + 3cx$

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ (দেখানো হলো)

03. যদি $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(গ))]

Sol" দেওয়া আছে, $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$ $[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $a^3 = 2^1 + 2^{-1} + 3.2^0.a]$ $[\because 2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^0$ এবং $2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} = a]$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$ বা, $a^3 = \frac{4+1+6a}{2}$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

$\therefore 2a^3 - 6a = 5$ (দেখানো হলো)

04. যদি $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a \geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(ঘ))]

Sol" দেওয়া আছে, $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}$ $[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^0 = 1]$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$ বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয় পক্ষে বর্গমূল এবং $a \geq 0$ সুতরাং, ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$ $[\because (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^0.a$ $[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0$ এবং $3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = a]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$ বা, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$ $\therefore 3a^3 + 9a = 8$ (দেখানো হলো)

05. যদি $a^2 = b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(ঙ))]

Sol" এখানে, $a^2 = b^3$ $\therefore a = b^{\frac{3}{2}}$

আবার, $a^2 = b^3$ বা, $b^3 = a^2$ $\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{b}$ $[\because a = b^{\frac{3}{2}}, b = a^{\frac{2}{3}}]$

$= a^{\frac{3}{2}-1} + b^{\frac{2}{3}-1} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ (দেখানো হলো)

06. যদি $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(i)]

Sol" এখানে, $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ বা, $b - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(b-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 3^2 + 3 + 3.3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}.(b-1)$ $[\because 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} = b - 1]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 9 + 3 + 3.3^1(b-1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 - 12 - 9b + 9 = 0$

$\therefore b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ (দেখানো হলো)

07. যদি $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$ [৪১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের অংক নং-১)]

Sol" দেওয়া আছে, $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a-2)^3 = (2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^2 + 2 + 3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}) = 4 + 2 + 6(a-2)$

$[\because 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = a - 2]$

বা, $a^3 - 3a^2.2 + 3a.2^2 - 2^3 = 6 + 6a - 12$

বা, $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 6a - 6$

$\therefore a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$ (দেখানো হল)

08. দেখাও যে, (ক) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$

(খ) $\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" (ক) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3$ $[\because (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3]$

$= a^{\frac{3}{3}} - b^{\frac{3}{3}}\left[\because \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a^1\right]$

$= a^1 - b^1 = a - b$ ডানপক্ষ

$\therefore (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$ (দেখানো হলো)

(খ) বামপক্ষ $= \dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(a^{\frac{-3}{2}}\right)^2 + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1}$

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}\right)^2 - 2.a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{-3}{2}} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1}$ [$\because x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}\right)^2 - 2.a^{\circ} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}} + 1}$ [$\because a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{-3}{2}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = a^{\circ}$]

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}\right)^2 - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1}$ [$\because a^{\circ} = 1$]

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1\right)}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} =$ [$\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$]

$= a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1 =$ ডানপক্ষ

TYPE 06: সমাধান করণ

01. সমাধান করুন: $4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$ [৩৮তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের অংক নং-১৭)]

Sol" $4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$

$\Rightarrow 2^{2x} - 3(2^x.2^2) + 2^5 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 3(2^x.4) + 32 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 8.2^x - 4.2^x + 32 = 0$

$\Rightarrow 2^x(2^x - 8) - 4(2^x - 8) = 0$

$\Rightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$

$\Rightarrow 2^x - 8 = 0$ | অথবা, $2^x - 4 = 0$

$\Rightarrow 2^x = 8$ | $\Rightarrow 2^x = 4$

$\Rightarrow 2^x = 2^3$ | $\Rightarrow 2^x = 2^2$

$\Rightarrow x = 3$ | $\Rightarrow x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = (2, 3)$

02. সমাধান করুন: $2^x + 2^{1-x} = 3$ [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol" $2^x + 2^{1-x} = 3$

$\Rightarrow 2^x + 2^1 . 2^{-x} = 3$

$\Rightarrow 2^x + 2 . \dfrac{1}{2^x} = 3$

$\Rightarrow 2^x + \dfrac{2}{2^x} = 3$

এখন, $2^x = a$ ধরে,

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি, $a + \frac{2}{a} = 3$

$\Rightarrow \frac{a^2+2}{a} = 3 \quad \Rightarrow a^2 + 2 = 3a$

$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \Rightarrow a^2 - 2a - a + 2 = 0$

$\Rightarrow a(a-2) - 1(a-2) = 0 \quad \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0$

$\therefore a = 2$ বা, $a = 1$

a এর মান বসিয়ে, $a = 2$ হলে, $2^x = 2 \quad \Rightarrow 2^x = 2^1 \quad \therefore x = 1$

আবার, $a = 1$ হলে, $2^x = 1 \quad \Rightarrow 2^x = 2^0 \quad \therefore x = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0$ বা 1

03. $(\sqrt{3})^{x+1} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x-1}$ [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol" দেওয়া আছে, $(\sqrt{3})^{x+1} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x-1}$

$\Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+1} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1}$

$\Rightarrow 3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{2x-1}{3}}$

$\Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{2x-1}{3}$

$\Rightarrow 2(2x-1) = 3(x+1)$

$\Rightarrow 4x - 2 = 3x + 3$

$\Rightarrow 4x - 3x = 3 + 2$

$\therefore x = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 5$

04. সমাধান করুন: $8y^x - y^{2x} = 16, 2^x = y^2$ [৩২তম বিসিএস]

Sol" $8y^x - y^{2x} = 16, 2^x = y^2$

$\therefore 8y^x - y^{2x} = 16 \quad \Rightarrow 8y^x - (y^x)^2 = 16$

$\Rightarrow 8a - a^2 = 16 \quad [y^x = a \text{ ধরে}]$

$\Rightarrow a^2 - 8a + 16 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 2.a.4 + 4^2 = 0$

$\Rightarrow (a-4)^2 = 0$

$\Rightarrow a - 4 = 0$

$\therefore a = 4$

$\therefore y^x = 4 = 2^2$

$\therefore y = 2^{\frac{2}{x}}$ ..... (i)

আবার, $2^x = y^2 \Rightarrow 2^x = \left(2^{\frac{2}{x}}\right)^2 \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{4}{x}} \Rightarrow x = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = \pm 2$

$x = 2$ হলে (i) হতে, $y = 2$

আবার, $x = -2$ হলে (i) হতে, $y = \frac{1}{2}$

$\therefore (x, y) = (2, 2)$ অথবা, $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ **Ans.**

05. $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংকে নং-০৯(ক))]*

Sol^n $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

বা, $3^{2x}.3^2 + 27^x.27^1 = 36$

বা, $3^{2x}.3^2 + (3^3)^x.27^1 = 36$ বা, $(3^x)^2.3^2 + (3^x)^3.27 = 36$

বা, $9(3^x)^2 + 27(3^x)^3 = 36$ বা, $9a^2 + 27a^3 = 36$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $a^2 + 3a^3 = 4$ [9 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3a^3 + a^2 - 4 = 0$

বা, $3a^3 - 3a^2 + 4a^2 - 4a + 4a - 4 = 0$

বা, $3a^2(a-1) + 4a(a-1) + 4(a-1) = 0$

বা, $(a-1)(3a^2 + 4a + 4) = 0$

$\therefore a - 1 = 0$ [$3a^2 + 4a + 4 \neq 0$]

বা, $3^x = 1$

বা, $3^x = 3^0$ [$\because a^0 = 1$]

$\therefore x = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0$

06. $5^x + 3^y = 8$; $5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংকে নং-০৯(খ))]*

Sol^n $5^x + 3^y = 8$ ..... (i)

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$ .....(ii)

(ii) নং থেকে পাই, $5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$ বা, $\frac{5^x}{5} + 3^{y-1} = 2$

$\therefore 5^x + 5.3^{y-1} = 10$ ..... (iii)

সমীকরণ (iii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই, $5.3^{y-1} - 3^y = 2$

বা, $5.\frac{3^y}{3} - 3^y = 2$ বা, $5.3^y - 3.3^y = 6$ বা, $2.3^y = 6$

বা, $3^y = 3$ বা, $3^y = 3^1$ $\therefore y = 1$

(iii) নং এ $y = 1$ বসিয়ে পাই, $5^x + 5.3^{1-1} = 10$

বা, $5^x + 5.1 = 10$ [$\because 3^0 = 1$] বা, $5^x = 10 - 5$ বা, $5^x = 5^1$ $\therefore x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (1, 1)$

07. $4^{3y-2} = 16^{x+y}$; $3^{x+2y} = 9^{2x+1}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংকে নং-০৯(গ))]*

Sol^n $4^{3y-2} = 16^{x+y}$ ..... (i)

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$ ..... (ii)

(i) নং থেকে পাই, $4^{3y-2} = (4^2)^{x+y}$ বা, $4^{3y-2} = 4^{2x+2y}$

বা, $3y - 2 = 2x + 2y$ [$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

$\therefore 2x - y + 2 = 0$ ..... (iii)

(ii) নং থেকে পাই, $3^{x+2y} = (3^2)^{2x+1}$

বা, $3^{x+2y} = 3^{4x+2}$ বা, $x + 2y = 4x + 2$

$\therefore 3x - 2y + 2 = 0$ ..... (iv)

(iii) নং কে 3 দ্বারা এবং (iv) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে বিয়োগ করে পাই, $6x - 3y + 6 - 6x + 4y - 4 = 0$ বা, $y + 2 = 0$

$\therefore y = -2$

y এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই, $3x - 2(-2) + 2 = 0$

বা, $3x + 4 + 2 = 0$ বা, $3x + 6 = 0$ বা, $3x = -6$

$\therefore x = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (-2, -2)$

08. $2^{2x+1} \cdot 2^{3y+1} = 8;\ 2^{x+2} \cdot 2^{y+2} = 16$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" $2^{2x+1} \cdot 2^{3y+1} = 8$ ..... (i)

$2^{x+2} \cdot 2^{y+2} = 16$ .....(ii)

(i) নং থেকে পাই, $2^{2x+1} \cdot 2^{3y+1} = 8$

বা, $2^{2x+1+3y+1} = 2^3$ $[a^m.a^n = a^{m+n}]$

বা, $2^{2x+3y+2} = 2^3$ বা, $2x + 3y + 2 = 3$

$\therefore 2x + 3y - 1 = 0$ ..... (iii)

(ii) নং থেকে পাই, $2^{x+2} \cdot 2^{y+2} = 16$

বা, $2^{x+2+y+2} = 2^4$ বা, $x + y + 4 = 4$ বা, $x + y = 0$

$\therefore x = -y$ ..... (iv)

(iv) নং থেকে x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই, $-2y + 3y - 1 = 0$

$\therefore y = 1$

(iv) নং এ $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$\therefore x = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x,y) = (-1, 1)$

09. সমাধান কর: (১) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

(২) $9^{2x} = 3^{x+1}$

(৩) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-]

Sol" (১) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

$\Rightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 2^{2x} + 2^{2x} \cdot 2^{-1} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3^x \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow 2^{2x}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow 2^{2x}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow 2^{2x-1} \cdot 3 = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 4$

$\Rightarrow 2^{2x-1} \cdot 3 = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 2^2$

$\Rightarrow 2^{2x-1-2} = 3^{x-\frac{1}{2}-1}$

$\Rightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow 2^{2x-3} = 3^{\frac{2x-3}{2}}$

$\Rightarrow 2^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2x-3}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3} = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3}$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{0}$

$\Rightarrow \quad 2x - 3 = 0$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{3}{2}$

(২) $9^{2x} = 3^{x+1}$

$\Rightarrow (3^2)^{2x} = 3^{x+1}$

$\Rightarrow 3^{4x} = 3^{x+1}$

$\Rightarrow 4x = x + 1$

$\Rightarrow 3x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{1}{3}$

(৩) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320$

$\Rightarrow 2^x.2^3 + 2^x.2 = 320$

$\Rightarrow 2^x(2^3 + 2) = 320$

$\Rightarrow 2^x (8 + 2) = 320$

$\Rightarrow 2^x = \frac{320}{10}$

$\Rightarrow 2^x = 32$

$\Rightarrow 2^x = 2^5$

$\therefore x = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 5$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	04, 06, 07, 08, 09, 12
Type-02	01, 03
Type-03	01, 02, 06, 09, 11
Type-04	Full (VVI)
Type-05	04, 06, 07
Type-06	01, 02, 03, 04, 06, 09(৩)

Logarithm এর প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

$a > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে,

01. (i) $\log_a 1 = 0$ (ii) $\log_a a = 1$
02. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
03. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
04. M ধনাত্মক এবং r যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, $\log_a M^r = r\log_a M$
05. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b = \frac{\log_b M}{\log_b a}$
06. $\log_a M = x$ হলে $a^x = M$ হবে।

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: Logarithm এর মান নির্ণয়

01. $\log_{2\sqrt{5}} 400$ এর মান কত? [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০১(ঘ)]

Sol" $\log_{2\sqrt{5}} 400$

এখানে, $400 = 16 \times 25 = 2^4.5^2 = 2^4(\sqrt{5})^4 = (2\sqrt{5})^4$

$\therefore \log_{2\sqrt{5}} 400 = \log_{2\sqrt{5}}(2\sqrt{5})^4 = 4\log_{2\sqrt{5}}(2\sqrt{5}) = 4.1 = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 4 **Ans.**

02. $\log_3 81$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০১(ক)]

Sol" $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4\times 1 = 4$ [$\because \log_a{}^a = 1$]

03. $\log_5 \sqrt[3]{5}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০১(খ)]

Sol" $\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_5 5 = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$ [$\because \log_a{}^a = 1$]

04. $\log_4 2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০১(গ)]

Sol" $\log_4 2 = \log_4(2^2)^{\frac{1}{2}} = \log_4(4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_4 4$

$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$ [$\because \log_a{}^a = 1$]

05. $\log_5\left(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5}\right)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০১(ঙ)]

Sol" $\log_5\left(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5}\right) = \log_5 5^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{2}}$

$= \log_5 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \log_5 5^{\frac{2+3}{6}}$

$= \log_5 5^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}\log_5 5 = \frac{5}{6}\times 1 = \frac{5}{6}$

06. $\log_{10}100 =$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৬(ক))]

Sol" $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10 = 2 \times 1 = 2$ [$\because \log_a a = 1$]

07. $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ এর মান-

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৬(খ))]

Sol" $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3(3^{-2}) = -2.\log_3 3 = -2$ [$\because \log_a a = 1$]

08. $\log_{\sqrt{3}}81$ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৬(গ))]

Sol" $\log_{\sqrt{3}}81 = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^8 = 8 \times \log_{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 8$ [$\because \log_a a = 1$]

09. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = ?$

Sol" $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3^3}\right) = \log_3 3^{-3} = -3\times\log_3 3 = (-3\times1) = -3$

10. $\log_{3\sqrt{2}}\frac{1}{324} =$ কত?

Sol" $\log_{3\sqrt{2}}\frac{1}{324} = \log_{3\sqrt{2}}\frac{1}{(3\sqrt{2})^4} = \log_{3\sqrt{2}}(3\sqrt{2})^{-4}$

$= -4\log_{3\sqrt{2}}3\sqrt{2} = -4 \times 1 = -4$ [$\because \log_a a = 1$]

11. $5\sqrt{5}$ এর 5 ভিত্তিক লগ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৭(ক))]

Sol" $\log_5 5\sqrt{5} = \log_5 5^{1+\frac{1}{2}} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}$ [$\because \log_5 5 = 1$]

12. 400 এর log 4; ভিত্তি কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৭(খ))]

Sol" ধরি, ভিত্তি a

$\therefore \log_a 400 = 4 \Rightarrow a^4 = 400 \Rightarrow a^4 = (2\sqrt{5})^4 \therefore a = 2\sqrt{5}$

TYPE 02: x এর মান নির্ণয়

[৩৭তম বিসিএস]

01. $\log_x\left(\frac{1}{16}\right) = -2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০২(গ))]

Sol" দেওয়া আছে, $\log_x\left(\frac{1}{16}\right) = -2$

$\therefore x^{-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 = 16$

$\Rightarrow x = \pm 4$ [উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে]

$\therefore x = 4$ [যেহেতু Logarithm এর Base ঋণাত্মক হয় না]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 4$

02. $\log_5 x = 3$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০২(ক))]*

Sol" $\log_5 x = 3 \Rightarrow x = 5^3 \quad \therefore x = 125.$

03. $\log_x 25 = 2$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০২(খ))]*

Sol" $\log_x 25 = 2$

$\Rightarrow 25 = x^2$

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 5^2 \therefore x = 5$

[৪৪তম বিসিএস]

04. সমাধান করুন: $\log_{10} x = -3$

Sol" $\log_{10} x = -3$

$\Rightarrow x = 10^{-3}$ [$\because \log_a M = p$ হলে $a^p = M$ হয়]

$\Rightarrow x = \frac{1}{10^3} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{1000} \quad \therefore x = 0.001$ **(Ans.)**

05. $\log_{10} x = -2$ হলে x এর মান- *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৮(ক))]*

Sol" $\log_{10} x = -2 \quad \therefore x = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

06. $\log_x 324 = 4$ হলে, x এর মান কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৮(খ))]*

Sol" $\log_x 324 = 4$

$\Rightarrow x^4 = 324$

$\Rightarrow x^4 = (3\sqrt{2})^4 \therefore x = 3\sqrt{2}$

07. x এর মান নির্ণয় কর যখন

(ক) $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ (খ) $\log_{10}[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\,] = 2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-২৩)]

Sol" (ক) $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

বা, $x = (\sqrt{8})^{\frac{10}{3}} = (\sqrt{2^3})^{\frac{10}{3}}$

বা, $x = 2^{\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3}} = 2^5 = 32$

$\therefore x = 32$ **(Ans.)**

(খ) $\log_{10}[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\,] = 2$

বা, $98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 10^2 = 100$

বা, $\sqrt{x^2 - 12x + 36} = 100 - 98 = 2$

বা, $x^2 - 12x + 36 = 4$

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$

বা, $(x - 4)(x - 8) = 0$

$\therefore x = 4$ বা $x = 8$ **(Ans.)**

TYPE 03: সরলীকরণ

01. $7\log_{10}\frac{10}{9} - 2\log_{10}\frac{25}{24} + 3\log_{10}\frac{81}{80}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪(ক))]

Sol^n $7\log_{10}\frac{10}{9} - 2\log_{10}\frac{25}{24} + 3\log_{10}\frac{81}{80}$

$= 7\log_{10}\frac{2.5}{3^2} - 2\log_{10}\frac{5^2}{2^3.3} + 3\log_{10}\frac{3^4}{2^4.5}$

$= \log_{10}\left(\frac{2.5}{3^2}\right)^7 - \log_{10}\left(\frac{5^2}{2^3.3}\right)^2 + \log_{10}\left(\frac{3^4}{2^4.5}\right)^3$

$= \log_{10}\frac{2^7.5^7}{3^{14}} - \log_{10}\frac{5^4}{2^6.3^2} + \log_{10}\frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}$

$= \log_{10}\left(\frac{2^7.5^7}{3^{14}} \times \frac{2^6.3^2}{5^4} \times \frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}\right)$

$= \log_{10}\left(\frac{2^{13}.3^{14}.5^7}{2^{12}.3^{14}.5^7}\right)$

$= \log_{10}(2^{13-12} \times 5^{7-7} \times 3^{14-14})$

$= \log_{10}(2^1 \times 5^0 \times 3^0)$

$= \log_{10}(2 \times 1 \times 1) \quad = \log_{10}2$ **Ans.**

02. $\log_7\left(\sqrt[5]{7}.\sqrt{7}\right) - \log_3\sqrt[3]{3} + \log_4 2.$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪(খ))]

Sol^n $\log_7\left(\sqrt[5]{7}.\sqrt{7}\right) - \log_3\sqrt[3]{3} + \log_4 2.$

$= \log_7\{\left(7^{\frac{1}{5}}\right)(7)^{\frac{1}{2}}\} - \log_3(3)^{\frac{1}{3}} + \log_4(4)^{\frac{1}{2}}$

$= \log_7 7^{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\log_3 3 + \frac{1}{2}\log_4 4 = \log_7 7^{\frac{2+5}{10}} - \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{2}.1$

$= \frac{7}{10}\log_7 7 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{21-10+15}{30} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$ **Ans.**

03. $\log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - 3\log_e b^2c$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪(গ))]

Sol^n $\log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - \log_e(b^2c)^3$

$= \log_e\left(\frac{a^3b^3}{c^3}.\frac{b^3c^3}{d^3}.\frac{c^3d^3}{a^3} \div b^6c^3\right)$

$= \log_e\left(\frac{a^3b^3}{c^3}.\frac{b^3c^3}{d^3}.\frac{c^3d^3}{a^3}.\frac{1}{b^6c^3}\right)$

$= \log_e 1 = 0$ **Ans.**

04. সরল কর: $\frac{\log_{10}\sqrt{27}+\log_{10}8-\log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1.2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-...]

Sol" $\frac{\log_{10}\sqrt{27}+\log_{10}8-\log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1.2}$

$$=\frac{\log_{10}(3^3)^{\frac{1}{2}}+\log_{10}8-\log_{10}(10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}\frac{12}{10}}=\frac{\log_{10}3^{\frac{3}{2}}+\log_{10}2^3-\log_{10}(10)^{\frac{3}{2}}}{\log_{10}12-\log_{10}10}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\log_{10}3+3\log_{10}2-\frac{3}{2}\log_{10}10}{\log_{10}(3\times2^2)-\log_{10}10}=\frac{\frac{3}{2}(\log_{10}3+2\log_{10}2-1)}{\log_{10}3+2\log_{10}2-1} \quad [\because \log_{10}10=1]$$

$=\frac{3}{2}$ **Ans.**

TYPE 04: সরলীকরণের সাহায্যে প্রমাণ

01. $5\log_{10}5-\log_{10}25=\log_{10}125$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩(গ)]

Sol" $5\log_{10}5-\log_{10}25=\log_{10}125$

বামপক্ষ $=5\log_{10}5-\log_{10}25$

$=\log_{10}5^5-\log_{10}5^2$

$=\log_{10}\frac{5^5}{5^2}$

$=\log_{10}5^{5-2} \quad =\log_{10}5^3$

$=\log_{10}125=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad 5\log_{10}5-\log_{10}25=\log_{10}125$ (দেখানো হলো)

02. $\log_{10}\frac{50}{147}=\log_{10}2+2\log_{10}5-\log_{10}3-2\log_{10}7$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩(গ)]

Sol" বামপক্ষ $=\log_{10}\frac{50}{147}$

$=\log_{10}\frac{5\times5\times2}{3\times7\times7}$

$=\log_{10}\frac{2\times5^2}{3\times7^2}$

$=\log_{10}(2\times5^2)-\log_{10}(3\times7^2)$

$=\log_{10}2+\log_{10}5^2-(\log_{10}3+\log_{10}7^2)$

$=\log_{10}2+2\log_{10}5-\log_{10}3-2\log_{10}7=$ ডানপক্ষ

$\therefore \log_{10}\frac{50}{147}=\log_{10}2+2\log_{10}5-\log_{10}3-2\log_{10}7$ (দেখানো হলো)

03. $3\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + \log_{10}5 = \log_{10}360$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩(গ))]

Sol^n বামপক্ষ $= 3\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + \log_{10}5$

$= \log_{10}2^3 + \log_{10}3^2 + \log_{10}5$

$= \log_{10}(2^3 \times 3^2 \times 5)$

$= \log_{10}(8 \times 9 \times 5)$

$= \log_{10}360$ = ডানপক্ষ

$\therefore 3\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + \log_{10}5 = \log_{10}360$ (দেখানো হলো)

04. $3\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}40$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (উদাহরণের অংক নং-০৯)]

Sol^n $3\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}40$

বামপক্ষ $= 3\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}2^3 + \log_{10}5$

$= \log_{10}8 + \log_{10}5 = \log_{10}(8 \times 5)$

$= \log_{10}40$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ $3\log_{10}2 + \log_{10}5 = \log_{10}40$ (দেখানো হলো)

05. দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬(ক))]

Sol^n $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$

$= \log_k\left(\frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{b^n}{c^n} \cdot \frac{c^n}{a^n}\right)$ [$\because \log a + \log b = \log(ab)$]

$= \log_k 1$

$= 0$ [$\because \log 1 = 0$] = ডানপক্ষ

$\therefore$ $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$ (দেখানো হলো)

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right) = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬(খ))]

Sol^n বামপক্ষ $= \log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)$

$= (\log_k a + \log_k b)(\log_k a - \log_k b) + (\log_k b + \log_k c)(\log_k b - \log_k c) + (\log_k c + \log_k a)(\log_k c - \log_k a)$

$= (\log_k a)^2 - (\log_k b)^2 + (\log_k b)^2 - (\log_k c)^2 + (\log_k c)^2 - (\log_k a)^2$

$= 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right) = 0$ (দেখানো হলো)

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol" বামপক্ষ $= \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$

$= \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{b})^2 \times \log_{\sqrt{b}} (\sqrt{c})^2 \times \log_{\sqrt{c}} (\sqrt{a})^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P^r = r\log_a P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}$

$= 8.1 \quad [\because \log_a a = 1]$

$= 8$

= ডানপক্ষ

$\therefore \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$ (দেখানো হলো)

(ঘ) $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol" বামপক্ষ $= \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right)$

$= \log_a \log_a a^{a^b} \log_a a$ [$\because \log_a P^r = r\log_a P$]

$= \log_a \log_a a^{a^b} . 1 \quad [\because \log_a a^1 = 1]$

$= \log_a a^b \log_a a$

$= \log_a a^b \quad [\because \log_a a = 1]$

$= b \log_a a = b.1 = b$

= ডানপক্ষ

$\therefore \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$ (দেখানো হলো)

06. দেখাও যে, $a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-৯)]

Sol" ধরি, $p = a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b}$

তাহলে, $\log_k p = (\log_k b - \log_k c)\log_k a + (\log_k c - \log_k a)\log_k b + (\log_k a - \log_k b)\log_k c$

বা, $\log_k p = \log_k a . \log_k b - \log_k a . \log_k c + \log_k b . \log_k c - \log_k a . \log_k b$

$+ \log_k a . \log_k c - \log_k b . \log_k c$

বা, $\log_k p = 0$ বা $p = k^0 = 1$

$\therefore a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$ (দেখানো হল)

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬(গ)]

Sol" বামপক্ষ $= \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$

$= \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{b})^2 \times \log_{\sqrt{b}} (\sqrt{c})^2 \times \log_{\sqrt{c}} (\sqrt{a})^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P^r = r\log_a P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}$

$= 8.1 \quad [\because \log_a a = 1]$

$= 8$

= ডানপক্ষ

$\therefore \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$ (দেখানো হলো)

(ঘ) $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬(ঘ)]

Sol" বামপক্ষ $= \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right)$

$= \log_a \log_a a^{a^b} \log_a a$ [$\because \log_a P^r = r\log_a P$]

$= \log_a \log_a a^{a^b} . 1 \quad [\because \log_a a^1 = 1]$

$= \log_a a^b \log_a a$

$= \log_a a^b \quad [\because \log_a a = 1]$

$= b \log_a a = b.1 = b$

= ডানপক্ষ

$\therefore \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$ (দেখানো হলো)

06. দেখাও যে, $a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

Sol" ধরি, $p = a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b}$

তাহলে, $\log_k p = (\log_k b - \log_k c)\log_k a + (\log_k c - \log_k a)\log_k b + (\log_k a - \log_k b)\log_k c$

বা, $\log_k p = \log_k a . \log_k b - \log_k a . \log_k c + \log_k b . \log_k c - \log_k a . \log_k b$

$+ \log_k a . \log_k c - \log_k b . \log_k c$

বা, $\log_k p = 0$ বা $p = k^0 = 1$

$\therefore a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$ (দেখানো হল)

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" বামপক্ষ $= \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$

$= \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{b})^2 \times \log_{\sqrt{b}} (\sqrt{c})^2 \times \log_{\sqrt{c}} (\sqrt{a})^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P^r = r\log_a P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}$

$= 8.1 \quad [\because \log_a a = 1]$

$= 8$

= ডানপক্ষ

$\therefore \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$ (দেখানো হলো)

(ঘ) $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{ab}}\right) = b$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" বামপক্ষ $= \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{ab}}\right)$

$= \log_a \log_a a^{a^b} \log_a a$ [$\because \log_a P^r = r\log_a P$]

$= \log_a \log_a a^{a^b} . 1 \quad [\because \log_a a^1 = 1]$

$= \log_a a^b \log_a a$

$= \log_a a^b \quad [\because \log_a a = 1]$

$= b \log_a a = b.1 = b$

= ডানপক্ষ

$\therefore \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{ab}}\right) = b$ (দেখানো হলো)

06. দেখাও যে, $a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

Sol" ধরি, $p = a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b}$

তাহলে, $\log_k p = (\log_k b - \log_k c)\log_k a + (\log_k c - \log_k a)\log_k b + (\log_k a - \log_k b)\log_k c$

বা, $\log_k p = \log_k a . \log_k b - \log_k a . \log_k c + \log_k b . \log_k c - \log_k a . \log_k b$

$+ \log_k a . \log_k c - \log_k b . \log_k c$

বা, $\log_k p = 0$ বা $p = k^\circ = 1$

$\therefore a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$ (দেখানো হল)

07. দেখাও যে, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-২৫)]*

Sol ধরি, $p = \log_a y$ এবং $q = \log_a x$

সুতরাং $a^p = y$ এবং $a^q = x$

$\therefore (a^p)^q = y^q$ বা, $y^q = a^{pq}$ .....(i)

এবং $(a^q)^p = x^p$ বা, $x^p = a^{pq}$ .....(ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) নং হতে পাই, $x^p = y^q$ বা $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

08. দেখাও যে, $\log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b = \log_a b$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-২৬)]*

Sol বামপক্ষ $= \log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b$

$= (\log_a p \times \log_p q) \times (\log_q r \times \log_r b)$

$= \log_a q \times \log_q b = \log_a b =$ ডানপক্ষ

09. দেখাও যে, $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-২৭)]*

Sol ধরি, $\log_a(abc) = x$, $\log_b(abc) = y$, $\log_c(abc) = z$

সুতরাং, $a^x = abc$, $b^y = abc$, $c^z = abc$

$\therefore a = (abc)^{\frac{1}{x}}$, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$, $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$

এখন, $(abc)^1 = abc = (abc)^{\frac{1}{x}} (abc)^{\frac{1}{y}} (abc)^{\frac{1}{z}} = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

অর্থাৎ $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$

10. দেখাও যে, $\log_k \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(খ))]*

Sol বামপক্ষ $= \log_k \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$= \log_k \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$ $= \log_k \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}$

$= \log_k \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-x^2+1}$ $= \log_k (x-\sqrt{x^2-1})^2$

$= 2\log_k (x-\sqrt{x^2-1})$ $[\because \log_k P^r = r\log_k P]$

$\therefore \log_k \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ (দেখানো হলো)

11. $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$

(ক) $\sqrt{y^3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ নির্ণয় করুন।

(খ) $w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) দেখান যে, $\frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z} = \log_y \sqrt{y^3}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা.গণিত), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৭)]

Sol

(ক) দেওয়া আছে, $y = 3$

$\sqrt{y^3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ $= \log_3\sqrt{y^3} = \log_3\sqrt{3^3}$ [$\because y = 3$] $= \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log 3^3 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, $x = 2$; $y = 3$; $z = 5$ এবং $w = 7$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$

$= 7\log\frac{2.5}{3^2} - 2\log\frac{5^2}{2^2.3} + 3\log\frac{3^4}{2^4.5}$

$= \log\left(\frac{2.5}{3^2}\right)^7 - \log\left(\frac{5^2}{2^2.3}\right)^2 + \log\left(\frac{3^4}{2^4.5}\right)^3 = \log\frac{2^7.5^7}{3^{14}} - \log\frac{5^4}{2^4.3^2} + \log\frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}$

$= \log\left(\frac{2^7.5^7}{3^{14}} \div \frac{5^4}{2^4.3^2} \times \frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}\right) = \log\left(\frac{2^7.5^7}{3^{14}} \times \frac{2^4.3^2}{5^4} \times \frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}\right)$

$= \log\left(\frac{2^{11}.3^{14}.5^7}{2^{12}.3^{14}.5^7}\right)$ $= \log(2^{11-12}.3^{14-14}.5^{7-7})$

$= \log(2^{-1}.3^0.5^0)$ $= \log(2^{-1}.1.1) = \log 2^{-1} = -\log 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $-\log 2$ **(Ans.)**

(গ) বামপক্ষ $= \frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z}$

$= \frac{\log\sqrt{3^3} + 3\log 2 - \frac{3}{2}\log(2.5)}{\log(2.3) - \log 5} = \frac{\log 3^{\frac{3}{2}} + \log 2^3 - \frac{3}{2}\log 10}{\log 6 - \log 5}$

$= \frac{\log 3^{\frac{3}{2}} + \log\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 - \frac{3}{2}\log 10}{\log\frac{6}{5}} = \frac{\log 3^{\frac{3}{2}} + \log 4^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\log 10}{\log 1.2}$

$= \frac{\frac{3}{2}\log 3 + \frac{3}{2}\log 4 - \frac{3}{2}\log 10}{\log 1.2} = \frac{\frac{3}{2}\log(3\times 4) - \frac{3}{2}\log 10}{\log 1.2}$

$= \frac{\frac{3}{2}\log 12 - \frac{3}{2}\log 10}{\log 1.2} = \frac{\frac{3}{2}\log\frac{12}{10}}{\log 1.2} = \frac{\frac{3}{2}\log 1.2}{\log 1.2} = \frac{3}{2}$

ডানপক্ষ $= \log_y\sqrt{y^3} = \log_3\sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $\frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z} = \log_y\sqrt{y^3}$ **(দেখানো হলো)**

TYPE 05: প্রশ্নে প্রদত্ত মানের সাহায্যে প্রমাণ (Pattern-01)

01. $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $r = xy^{c-1}$ হলে, প্রমাণ করুন: $\log p^{b-c} + \log q^{c-a} + \log r^{a-b} = 0$

[৪০তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (উ.গণিত) অধ্যায়-৯.২-অনুশীলনীর ৭(চ) নং প্রশ্ন]

Sol" L. H. S $= \log p^{b-c} + \log q^{c-a} + \log r^{a-b}$

$= \log(xy^{a-1})^{b-c} + \log(xy^{b-1})^{c-a} + \log(xy^{c-1})^{a-b}$

$= (b-c)\log(xy^{a-1}) + (c-a)\log(xy^{b-1}) + (a-b)\log(xy^{c-1})$

$= (b-c)\log x + (b-c)\log y^{a-1} + (c-a)\log x + (c-a)\log y^{b-1} + (a-b)\log x + (a-b)\log y^{c-1}$

$= (b-c+c-a+a-b)\log x + (b-c)(a-1)\log y + (c-a)(b-1)\log y + (a-b)(c-1)\log y$

$= 0.\log x + (ab - b - ac + c)\log y + (bc - c - ab + a)\log y + (ac - a - bc + b)\log y$

$= 0 + (ab - b - ac + c + bc - c - ab + a + ac - a - bc + b)\log y$

$= 0 + 0.\log y$

$= 0$

$=$ R. H. S. (প্রমাণিত)

02. যদি $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(ঙ))]

Sol" দেওয়া আছে, $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$

$\Rightarrow \frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$

$\Rightarrow b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

$\Rightarrow b^{2x} = a^{2+2x}$

$\Rightarrow b^{2x} = a^2 . a^{2x}$

$\Rightarrow \frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$

$\Rightarrow \log_k \frac{b^{2x}}{a^{2x}} = \log_k a^2$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

$\Rightarrow \log_k \left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2$

$\Rightarrow 2x \log_k \left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_k a$ [$\because \log_k P^r = r\log_k P$]

$\therefore x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ (দেখানো হলো)

03. যদি $p = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$, $r = \log_c(ab)$ হয় তবে দেখাও যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-৬)]

Sol" $1 + p = 1 + \log_a(bc) = \log_a a + \log_a(bc) = \log_a(abc)$

একইভাবে, $1 + q = \log_b(abc)$ এবং $1 + r = \log_c(abc)$

আবার ধরি, $\log_a(abc) = x$, $\log_b(abc) = y$, $\log_c(abc) = z$

সুতরাং, $a^x = abc$, $b^y = abc$, $c^z = abc$

$\therefore a = (abc)^{\frac{1}{x}}$, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$, $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$

এখন, $(abc)^1 = abc = (abc)^{\frac{1}{x}} (abc)^{\frac{1}{y}} (abc)^{\frac{1}{z}} = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

অর্থাৎ $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ [মান বসিয়ে]

$\therefore \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1$ [মান বসিয়ে]

04. যদি a, b, c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\log(1 + ac) = 2\log b$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের কাজের অংক নং-৭)]

Sol" a, b, c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা।

ধরি, $a < b < c$

$\therefore \quad a = b - 1$ এবং $c = b + 1$

$\therefore \quad \frac{a}{b-1} = \frac{b+1}{c} \quad \left[\because \frac{a}{b-1} = \frac{a}{a} = \frac{b+1}{c} = \frac{c}{c} = 1\right]$

$\Rightarrow \quad ac = (b + 1)(b - 1)$

$\Rightarrow \quad ac = b^2 - 1 \qquad \Rightarrow ac + 1 = b^2$

$\Rightarrow \quad \log(ac + 1) = \log b^2$ [উভয় পাশে log নিয়ে]

$\therefore \quad \log(1 + ac) = 2 \log b$ (প্রমাণিত)

05. যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, তবে দেখাও যে, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের কাজের অংক নং-৪)]

Sol" দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 7ab$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab$ [উভয় পক্ষে 2ab যোগ করে]

$\Rightarrow \quad (a + b)^2 = 9ab$

$\Rightarrow \quad \frac{(a+b)^2}{9} = ab \qquad \Rightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

$\Rightarrow \quad \log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab)$ [উভয় পাশে log নিয়ে]

$\Rightarrow \quad 2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$

$\Rightarrow \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [$\because \log(M \times N) = \log M + \log N$]

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ (দেখানো হলো)

06. যদি $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের কাজের অংক নং-ঘ)]

Sol^n দেওয়া আছে, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

$\Rightarrow 2\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \log x + \log y$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \log\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = \log(xy)$ [$\because \log M + \log N = \log(MN)$]

$\Rightarrow \left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = xy \qquad \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{9} = xy$

$\Rightarrow (x+y)^2 = 9xy \qquad \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 9xy$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9xy - 2xy \qquad \Rightarrow x^2 + y^2 = 7xy$

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} = 7$ [উভয় পক্ষকে xy দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = 7$

$\therefore \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$ (দেখানো হলো)

07. যদি $x = 1 + \log_a(bc)$, $y = 1 + \log_b(ca)$ এবং $z = 1 + \log_c(ab)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের কাজের অংক নং-ঙ)]

Sol^n দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

$\Rightarrow x = \log_a a + \log_a bc$

$\Rightarrow x = \log_a abc$

$\Rightarrow a^x = abc$

$\Rightarrow a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ ..... (i)

অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ ..... (ii)

এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$ ..... (iii)

(i) × (ii) × (iii) থেকে পাই, $abc = (abc)^{\frac{1}{x}} \cdot (abc)^{\frac{1}{y}} \cdot (abc)^{\frac{1}{z}}$

$\Rightarrow (abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

$\Rightarrow \frac{yz + zx + xy}{xyz} = 1$

$\therefore xyz = xy + yz + zx$ **(প্রমাণিত)**

TYPE 06: প্রশ্নে প্রদত্ত মানের সাহায্যে প্রমাণ (Pattern-02)

01. যদি $\frac{\log a}{q-r}=\frac{\log b}{r-p}=\frac{\log c}{p-q}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, $a^{q+r}\,b^{r+p}\,c^{p+q}=1$ [৩৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (উ.গণিত) অধ্যায়-৯.২-অনুশীলনীর ৭(খ-১) নং প্রশ্ন হতে]

Sol" ধরি, $\frac{\log a}{q-r}=\frac{\log b}{r-p}=\frac{\log c}{p-q}=k$

$\Rightarrow \frac{\log a}{q-r}=k, \frac{\log b}{r-p}=k, \frac{\log c}{p-q}=k$

১ম অংশ,

$\Rightarrow \log a=k(q-r)$

$\Rightarrow (q+r)\log a=k(q-r)(q+r)$ [উভয়পক্ষে $(q+r)$ গুণ করে]

$\Rightarrow \log a^{(q+r)}=k(q^2-r^2)$ ..... (i)

২য় অংশ, $\log b=k(r-p)$

$\Rightarrow (r+p)\log b=k(r-p)(r+p)$ [উভয়পক্ষে $(r+p)$ গুণ করে]

$\Rightarrow \log b^{(r+p)}=k(r^2-p^2)$ ..... (ii)

৩য় অংশ, $\log c=k(p-q)$

$\Rightarrow (p+q)\log c=k(p-q)(p+q)$ [উভয়পক্ষে $(p+q)$ গুণ করে]

$\Rightarrow \log c^{(p+q)}=k(p^2-q^2)$ ..... (iii)

(i) + (ii) + (iii) হতে পাই, ... (iv)

$\Rightarrow \log a^{(q+r)}+\log b^{(r+p)}+\log c^{(p+q)}=k(q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2)$

$\Rightarrow \log a^{(q+r)}+\log b^{(r+p)}+\log c^{(p+q)}=0$

$\Rightarrow \log(a^{q+r}.b^{r+p}.c^{p+q})=\log 1$ [$\because \log 1=0$]

$\Rightarrow a^{q+r}\,b^{r+p}\,c^{p+q}=1$ **(প্রমাণিত)**

02. যদি $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}=1$

[নবম-দশম শ্রেণীর (উ.গণিত) অধ্যায়-৯.২-অনুশীলনীর ৭(খ-২) নং প্রশ্ন হতে]

Sol" ধরি, $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}=p$

$\Rightarrow \frac{\log_k a}{y-z}=p, \frac{\log_k b}{z-x}=p, \frac{\log_k c}{x-y}=p$

১ম অংশ,

$\Rightarrow \log_k a=p(y-z)$

$\Rightarrow (y^2+yz+z^2)\log_k a=p(y-z)(y^2+yz+z^2)$ [উভয়পক্ষে (y^2+yz+z^2)) গুণ করে]

$\Rightarrow \log_k a^{y^2+yz+z^2}=p(y^3-z^3)$ ..... (i)

২য় অংশ, $\log_k b=p(z-x)$

$\Rightarrow (z^2+zx+x^2)\log_k b=p(z-x)(z^2+zx+x^2)$ [উভয়পক্ষে (z^2+zx+x^2)গুণ করে]

$\Rightarrow \log_k b^{z^2+zx+x^2}=p(z^3-x^3)$ ..... (ii)

৩য় অংশ, $\log_k c = p(x-y)$

$\Rightarrow (x^2+xy+y^2)\log_k c = p(x-y)(x^2+xy+y^2)$ [উভয়পক্ষে (x^2+xy+y^2) গুণ করে]

$\Rightarrow \log_k c^{x^2+xy+y^2} = p(x^3-y^3)$ ..... (iii)

(i) + (ii) + (iii) হতে পাই, ... (iv)

$\Rightarrow \log_k a^{y^2+yz+z^2} + \log_k b^{z^2+zx+x^2} + \log_k c^{x^2+xy+y^2} = p(y^3-z^3+z^3-x^3+x^3-y^3)$

$\Rightarrow \log_k a^{y^2+yz+z^2} + \log_k b^{z^2+zx+x^2} + \log_k c^{x^2+xy+y^2} = 0$

$\Rightarrow \log_k (a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}) = \log 1$ [$\because \log_k 1 = 0$]

$\Rightarrow a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2} = 1$ **(প্রমাণিত)**

03. যদি $\frac{\log a}{y-z} = \frac{\log b}{z-x} = \frac{\log c}{x-y}$ হয় তবে দেখাও যে, $a^x b^y c^z = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের অংক নং-২৯)]

Sol^n ধরি, $\frac{\log a}{y-z} = \frac{\log b}{z-x} = \frac{\log c}{x-y} = k$

হলে, $\log a = k(y-z)$, $\log b = k(z-x)$, $\log c = k(x-y)$

সুতরাং, $x\log a = kx(y-z)$, $y\log b = ky(z-x)$, $z\log c = kz(x-y)$

$\therefore x\log a + y\log b + z\log c = k(xy-zx+yz-xy+zx-yz)$

বা, $\log a^x + \log b^y + \log c^z = k.0$

বা, $\log(a^x b^y c^z) = 0$

বা, $\log(a^x b^y c^z) = \log 1$ [$\because \log 1 = 0$]

$\therefore a^x b^y c^z = 1$

04. যদি $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ হয়, তাহলে $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (উদাহরণের কাজের অংক নং-ক)]

Sol^n ধরি, $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = m$

$\therefore \log a = m(b-c)$

$\Rightarrow a\log a = ma(b-c)$[উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log a^a = ma(b-c)$ ..... (i)

আবার, $\log b = m(c-a)$

$\Rightarrow b\log b = mb(c-a)$ [উভয় পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log b^b = mb(c-a)$ ..... (ii)

এবং $\log c = m(a-b)$

$\Rightarrow c\log c = mc(a-b)$ [উভয় পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log c^c = mc(a-b)$ ..... (iii)

এখন, (i) + (ii) (iii) থেকে পাই,

$\log a^a + \log b^b + \log c^c = m(ab-ac+bc-ab+ac-bc)$

$\Rightarrow \log(a^a b^b c^c) = 0$

$\Rightarrow \log(a^a b^b c^c) = \log 1$

$\therefore a^a b^b c^c = 1$ **(Ans.)**

05. $\frac{\log_k a}{b-a} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ হলে, $a^a\, b^b\, c^c$ এর মান কত? [৪৩তম বিসিএস]

বি.দ্র.: প্রশ্নটি নিয়ে বিতর্ক আছে। অনেকের মতে অংকটি ভুল ছিল। আমার ব্যক্তিগত মতামত অংকটিতে টাইপিং ভুল ছিল। তাই আমি দুইভাবে সমাধান দিলাম।

☑ অংকটি ভুল নয় বিবেচনা করলে সমাধান হবে-

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{\log_k a}{b-a} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$

ধরি, $\frac{\log_k a}{b-a} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b} = m$

$\therefore \quad \frac{\log_k a}{b-a} = m \quad \Rightarrow \log_k a = m(b-a) \quad \Rightarrow \log_k a = mb - ma$

$\therefore \quad a = k^{mb-ma}$

অনুরূপভাবে, $b = k^{mc-ma}$

এবং $c = k^{ma-mb}$

$$\therefore \quad a^a \cdot b^b \cdot c^c = (k^{mb-ma})^a \cdot (k^{mc-ma})^b \cdot (k^{ma-mb})^c$$
$$= k^{mba-ma^2} \cdot k^{mbc-mab} \cdot k^{mac-mbc}$$
$$= k^{mba-ma^2+mbc-mab+mac-mbc}$$
$$= k^{mac-ma^2}$$
$$= k^{ma(c-a)} = k^{m(c-a)\cdot a}$$
$$= \{k^{m(c-a)}\}^a = b^a \textbf{ (Ans.)}$$

☑ অংকটি ভুল বিবেচনা করলে অংকটি ও সমাধান হবে-

যদি $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তাহলে $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol" ধরি, $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b} = m$

$\therefore \quad \log_k a = m(b-c)$

$\Rightarrow \quad a \log_k a = ma\,(b-c)$ [উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \quad \log_k a^a = ma\,(b-c)$ ..... (i)

আবার, $\log_k b = m\,(c-a)$

$\Rightarrow \quad b \log_k b = mb\,(c-a)$ [উভয় পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \quad \log_k b^b = mb(c-a)$ ..... (ii)

এবং $\log_k c = m(a-b)$

$\Rightarrow \quad c \log_k c = mc\,(a-b)$ [উভয় পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \quad \log_k c^c = mc\,(a-b)$ ..... (iii)

এখন, (i) + (ii) (iii) থেকে পাই,

$\log_k a^a + \log_k b^b + \log_k c^c = m(ab - ac + bc - ab + ac - bc)$

$\Rightarrow \quad \log_k (a^a b^b c^c) = 0$

$\Rightarrow \quad \log_k (a^a b^b c^c) = \log_k 1$

$\therefore \quad a^a b^b c^c = 1$ **(Ans.)**

06. যদি $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(ছ))]

Sol^n ধরি, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = p$

তাহলে, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = p \quad \Rightarrow ab\log_k ab = p(a+b)$

$\Rightarrow \log_k ab = \frac{p(a+b)}{ab} \quad \Rightarrow \log_k a + \log_k b = p\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$ ..... (i)

অনুরূপভাবে, $\log_k b + \log_k c = p\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)$ ..... (ii)

এবং $\log_k c + \log_k a = p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ ..... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই,

$$2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = 2p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\therefore \quad \log_k a + \log_k b + \log_k c = p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \text{ ..... (iv)}$$

আবার, (iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\log_k c = p\left(\frac{1}{c}\right) \quad \Rightarrow c\log_k c = p \quad \therefore \log_k c^c = p$$

(iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\log_k a = p\left(\frac{1}{a}\right) \quad \Rightarrow a\log_k a = p$$

$\therefore \quad \log_k a^a = p[\because r\log_k p = \log_k p^r]$

(iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\log_k b = p\left(\frac{1}{b}\right) \quad \Rightarrow b\log_k b = p \quad \therefore \log_k b^b = p$$

সুতরাং, $\log_k a^a = \log_k b^b = \log_k c^c$

$\therefore \quad a^a = b^b = c^c$ (দেখানো হলো)

07. যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৯.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭(জ))]

Sol^n ধরি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = m$

$$\therefore \quad \log_k x = \frac{x(y+z-x)}{m}$$

আবার, $\log_k y = \frac{y(z+x-y)}{m}$

এবং $\log_k z = \frac{z(x+y-z)}{m}$

এখন, $y\log_k x + x\log_k y = \frac{xy(y+z-x)}{m} + \frac{xy(z+x-y)}{m}$

$= \frac{xy}{m}(y+z-x+z+x-y) = \frac{2xyz}{m}$

$\Rightarrow \log_k x^y + \log_k y^x = \frac{2xyz}{m}$ $[\because \log_k p^r = r\log_k p]$

$\Rightarrow \log_k x^y y^x = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore x^y y^x = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ..... (i)

আবার, $z\log_k y + y\log_k z = \frac{yz(z+x-y)}{m} + \frac{yz(x+y-z)}{m}$

$\Rightarrow \log_k y^z + \log_k z^y = \frac{yz}{m}(z+x-y+x+y-z)$

$\Rightarrow \log_k y^z z^y = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore y^z z^y = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ..... (ii)

পুনরায়, $x\log_k z + z\log_k x = \frac{zx(x+y-z)}{m} + \frac{zx(y+z-x)}{m}$

$\Rightarrow \log_k z^x + \log_k x^z = \frac{zx}{m}(x+y-z+y+z-x)$

$\Rightarrow \log_k z^x y^z = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore z^x x^z = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ..... (iii)

সুতরাং (i), (ii) ও (iii) নং থেকে পাই, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ (দেখানো হলো)

TYPE 07: Miscellaneous

01. প্রমাণ করুন যে, $\log_a\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \log_a x_i$ [৩৮তম বিসিএস]

Sol^n L. H. S $= \log_a\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$

$= \log_a (x_1.x_2.x_3.x_4 \ldots\ldots\ldots x_n)$

$= \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots\ldots\ldots + \log_a x_n$

$= \sum_{i=1}^{n} \log_a x_i$

= R. H. S **(Proved)**

02. দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$.

(ক) প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণে প্রমাণ করুন।

(খ) প্রাপ্ত সমীকরণটিকে সমাধান করুন এবং দেখান যে, x-এর কেবলমাত্র একটি বীজ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

(গ) প্রমাণ করুন যে, মূলদ্বয়ের প্রতিটির বর্গ তার স্বীয় মান অপেক্ষা 1 বেশি এবং তাদের লেখচিত্র পরস্পর সমান্তরাল।

[৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (উ.গণিত) অধ্যায়-৯.২-অনুশীলনীর ৭(গ) নং প্রশ্ন হুবহু ও তার কনসেপ্ট]

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$

$\Rightarrow 2\log x = \log(1+x)$

$\Rightarrow \log x^2 = \log(1+x)$

$\Rightarrow x^2 = 1 + x$

$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - x - 1 = 0$

(খ) **Sol"** (ক) হতে পাই, $x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$ [$ax^2+bx+c=0$ হলে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$]

$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

যেহেতু লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়। সুতরাং $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

অতএব, x এর কেবল এই মানটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। **(Ans.)**

(গ) **Sol"** (খ) হতে পাই, মূলদ্বয় যথাক্রমে,

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ এবং $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ..... (i)

$\therefore x_1^2 - x_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{4}{4} = 1$

এবং $x_2^2 - x_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{6-2\sqrt{5}}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{4}{4}$

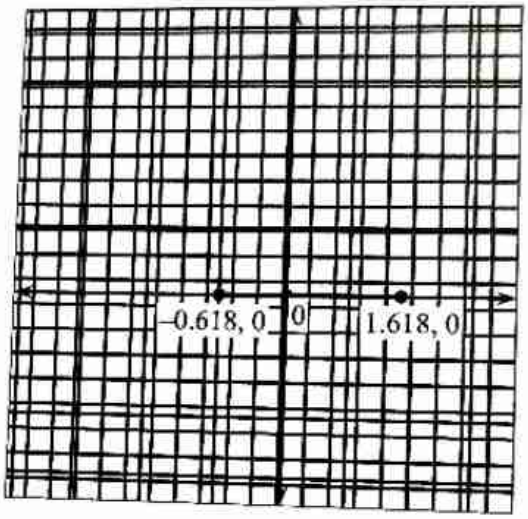
$= 1$

সুতরাং মূলদ্বয়ের প্রতিটির বর্গ তার স্বীয় মান অপেক্ষা 1 (এক) বেশি।

আবার, (i) হতে,

$x_1 = 1.618, x_2 = -0.618$

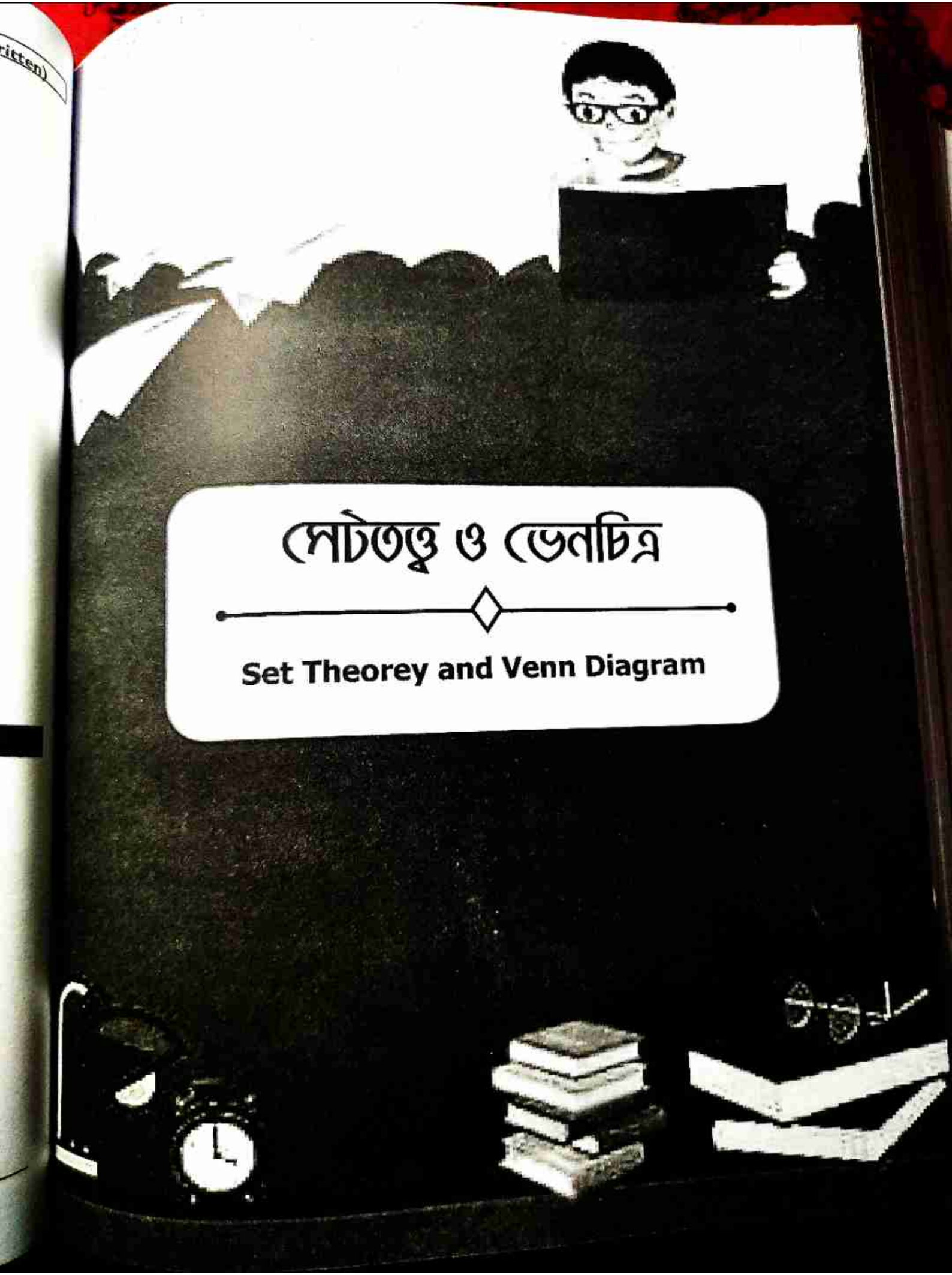
সমীকরণদ্বয়ের লেখ অঙ্কন করি। স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (1.618, 0) ও (–0.618, 0) বিন্দু দিয়ে y-অক্ষের সমান্তরাল করে রেখা দুটি অঙ্কন করি। লেখ হতে দেখা যায় মূলদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।



এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 05, 09, 11
Type-02	01, 05, 06, 07
Type-03	03, 04
Type-04	05, 09
Type-05	01, 02, 03, 06
Type-06	01, 02, 03, 04
Type-07	02


সেটতত্ত্ব ও ভেনচিত্র
Set Theorey and Venn Diagram

Important Problem & Solutions:

TYPE 01 সেট গঠন পদ্ধতি থেকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ

01 নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর: [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০১)]

(ক) $\{x \in N : x^2 > 9 \text{ এবং } x^3 < 130\}$

Sol'n দেওয়া আছে, $\{x \in N : x^2 > 9 \text{ এবং } x^3 < 130\}$

অর্থাৎ, যেসকল স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 9 অপেক্ষা বড় এবং ঘন 130 অপেক্ষা ছোট তাদের সেট।

এখানে, $N = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots\ldots\}$

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1 \ngtr 9$ এবং $x^3 = 1 < 130$

$x = 2$ হলে, $x^2 = 4 \ngtr 9$ এবং $x^3 = 8 < 130$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 9 \ngtr 9$ এবং $x^3 = 27 < 130$

$x = 4$ হলে, $x^2 = 16 > 9$ এবং $x^3 = 64 < 130$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 25 > 9$ এবং $x^3 = 125 < 130$

$x = 6$ হলে, $x^2 = 36 > 9$ এবং $x^3 = 216 \nless 130$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{4, 5\}$.

(খ) $\{x \in Z : x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 \leq 36\}$

Sol'n দেওয়া আছে, $\{x \in Z : x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 \leq 36\}$

অর্থাৎ, যেসকল পূর্ণ সংখ্যার বর্গ 5 অপেক্ষা বড় এবং ঘন 36 এর চেয়ে ছোট অথবা সমান তাদের সেট।

এখানে, $Z = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\}$

$x = 0$ হলে, $x^2 = 0^2 = 0 \ngtr 5$ এবং $x^3 = 0^3 = 0 < 36$

$x = \pm 1$ হলে, $x^2 = (\pm 1)^2 = 1 \ngtr 5$ এবং $x^3 = (\pm 1)^3 = \pm 1 < 36$

$x = \pm 2$ হলে, $x^2 = (\pm 2)^2 = 4 \ngtr 5$ এবং $x^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8 < 36$

$x = \pm 3$ হলে, $x^2 = (\pm 3)^2 = 9 > 5$ এবং $x^3 = (\pm 3)^3 = \pm 27 < 36$

$x = -4$ হলে, $x^2 = (-4)^2 = 16 > 5$ এবং $x^3 = (-4)^3 = -64 < 36$

$x = 4$ হলে, $x^2 = (4)^2 = 16 > 5$ এবং $x^3 = (4)^3 = 64 \nless 36$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{\ldots\ldots -4, -3, 3\}$

(গ) $\{x \in N : x, 36 \text{ এর গুণনীয়ক এবং } 6 \text{ এর গুণিতক}\}$

Sol'n দেওয়া আছে, $\{x \in N : x, 36 \text{ এর গুণনীয়ক এবং } 6 \text{ এর গুণিতক}\}$

এখানে, 36 এর গুণনীয়কগুলো হলো 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

6 এর গুণিতক হলো 6, 12, 18, 24, 30, 36 .....

$\therefore$ 36 এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতকগুলোর হলো যথাক্রমে 6, 12, 18, 36

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{6, 12, 18, 36\}$.

(ঘ) $\{x \in N : x^3 > 25 \text{ এবং } x^4 < 264\}$

Sol দেওয়া আছে, $\{x \in N : x^3 > 25 \text{ এবং } x^4 < 264\}$

অর্থাৎ, যেসকল স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন 25 অপেক্ষা বড় এবং 4 তম সূচক 264 অপেক্ষা ছোট তাদের সেট নির্ণয় করতে হবে।

এখানে, $N = \{1, 2, 3, 4, 5 .....\}$

$x = 1$ হলে, $x^3 = 1 \ngtr 25$ এবং $x^4 = 1 < 264$

$x = 2$ হলে, $x^3 = 8 \ngtr 25$ এবং $x^4 = 16 < 264$

$x = 3$ হলে, $x^3 = 27 > 25$ এবং $x^4 = 81 < 264$

$x = 4$ হলে, $x^3 = 64 > 25$ এবং $x^4 = 256 < 264$

$x = 5$ হলে, $x^3 = 125 > 25$ এবং $x^4 = 625 \nless 264$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{3, 4\}$

02. $C = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 18\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-০৩)]*

Sol ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ 1, 2, 3, 4, 5, ...

এখানে,

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1 < 18$

$x = 2$ হলে, $x^2 = 2^2 = 4 < 18$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9 < 18$

$x = 4$ হলে, $x^2 = 4^2 = 16 < 18$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25$; যা 18 এর চেয়ে বড়।

$\therefore$ শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাসমূহ 1, 2, 3 এবং 4

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $C = \{1, 2, 3, 4\}$

TYPE 02 তালিকা পদ্ধতি থেকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ

01. নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর: *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০২)]*

(ক) $\{3, 5, 7, 9, 11\}$

Sol ধরি, $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

A সেটের উপাদানসমূহ 3, 5, 7, 9, 11.

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান বিজোড় সংখ্যা এবং এরা 1 থেকে বড় ও 13 থেকে ছোট।

$\therefore A = \{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 13\}$

(খ) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Sol ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

A সেটের উপাদানসমূহ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 36 এর গুণনীয়ক।

$\therefore$ $A = \{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক$\}$

(গ) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

Sol ধরি, $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

A সেটের উপাদানসমূহ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40;

এরা প্রত্যেকে 4 এর গুণিতক এবং এদের সর্বোচ্চ মান 40.

$\therefore$ $A = \{x \in N : x, 4$ এর গুণিতক এবং $x \leq 40\}$

TYPE 03 মান নির্ণয় ও সত্যতা যাচাই (প্রশ্ন তালিকা পদ্ধতিতে থাকলে)

01. $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, a\}$ এবং $C = \{2, a, b\}$ হলে, নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর:

(ক) $B \setminus C$ (খ) $A \cup B$, (গ) $A \cap C$

(ঘ) $A \cup (B \cap C)$ (ঙ) $A \cap (B \cup C)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, a\}$ এবং $C = \{2, a, b\}$

(ক) $B \setminus C = \{1, 2, a) \setminus \{2, a, b\} = \{1\}$

(খ) $A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{1, 2, a\} = \{1, 2, 3, 4, a\}$

(গ) $A \cap C = \{2, 3, 4\} \cap \{2, a, b\} = \{2\}$

(ঘ) $(B \cap C) = \{1, 2, a\} \cap \{2, a, b\} = \{2, a\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4\} \cup \{2, a\} = \{2, 3, 4, a\}$

(ঙ) $(B \cup C) = \{1, 2, a\} \cup \{2, a, b\} = \{1, 2, a, b\}$

$A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, a, b\} = \{2\}$

02. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই কর:

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

(ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Sol" দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$A = \{1, 3, 5\}$,

$B = \{2, 4, 6\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6, 7\}$

$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5, 7\}$

বামপক্ষ $= (A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{7\}$

ডানপক্ষ $= A' \cap B' = \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{7\}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (সত্যতা যাচাই করা হলো)

(খ) $(B \cap C)' = B' \cup C'$

Sol" দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$A = \{1, 3, 5\}$,

$B = \{2, 4, 6\}$ এবং

$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

এখন, $B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 6\}$

আবার, $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5, 7\}$

এবং $C' = U - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2\}$

বামপক্ষ $= (B \cap C)' = U - (B \cap C)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{4, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

ডানপক্ষ $= B' \cup C' = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (সত্যতা যাচাই করা হলো)

(গ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Sol দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

এখন, $A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

বামপক্ষ $= (A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4, 5, 6\}$

এখন, $A \cap C = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 5\}$

$B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 6\}$

ডানপক্ষ $= (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{3, 5\} \cup \{4, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (সত্যতা যাচাই করা হলো)

(ঘ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Sol দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

এখন, $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing$

বামপক্ষ $= (A \cap B) \cup C = \{\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

এখন, $A \cup C = \{1, 3, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ডানপক্ষ $= (A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (সত্যতা যাচাই করা হলো)

03. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ এবং $B = \{1, 3, 5\}$ হলে A^c ও B^c নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-০৭)]

Sol $A^c = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 7\} = \{1, 3, 5\}$

এবং $B^c = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6, 7\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $A^c = \{1, 3, 5\}$ এবং $B^c = \{2, 4, 6, 7\}$

04. $A = \{a, b, x\}$ এবং $B = \{c, y\}$ সার্বিক সেট $U = \{a, b, c, x, y, z\}$ এর উপসেট হলে-

(ক) যাচাই কর যে, (i) $A \subset B'$ (ii) $A \cup B' = B'$ (iii) $A' \cap B = B$।

(খ) নির্ণয় কর: $(A \cap B) \cup (A \cap B')$।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol দেওয়া আছে, $U = \{a, b, c, x, y, z\}$, $A = \{a, b, x\}$ এবং $B = \{c, y\}$

(ক) (i) $B' = U - B = \{a, b, c, x, y, z\} - \{c, y\} = \{a, b, x, z\}$

$\therefore$ $A \subset B'$ **(যাচাই করা হলো)**

(ii) $B' = \{a, b, x, z\}$

এবং $A \cup B' = \{a, b, x\} \cup \{a, b, x, z\} = \{a, b, x, z\} = B'$

$\therefore$ $A \cup B' = B'$ **(যাচাই করা হলো)**

(iii) $A' = U - A = \{a, b, c, x, y, z\} - \{a, b, x\} = \{c, y, z\}$

অতএব, $A' \cap B = \{c, y, z\} \cap \{c, y\} = \{c, y\} = B$

$\therefore$ $A' \cap B = B$ **(যাচাই করা হলো)**

(খ) $A \cap B = \{a, b, x\} \cap \{c, y\} = \varnothing$

এবং $B' = U - B = \{a, b, c, x, y, z\} - \{c, y\} = \{a, b, x, z\}$

$\therefore$ $A \cap B' = \{a, b, x\} \cap \{a, b, x, z\} = \{a, b, x\}$

সুতরাং $(A \cap B) \cup (A \cap B') = \varnothing \cup \{a, b, x\} = \{a, b, x\} = A$

Ans: A

TYPE 04 মান নির্ণয় ও সত্যতা যাচাই (প্রশ্ন সেট গঠন পদ্ধতিতে থাকলে)

01. $P = \{x : x, 12 \text{ এর গুণনীয়কসমূহ}\}$ এবং $Q = \{x : x, 3 \text{ এর গুণিতক এবং } x \le 12\}$ হলে $P - Q$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-০৬)]

Sol" দেওয়া আছে, $P = \{x : x, 12 \text{ এর গুণনীয়কসমূহ}\}$

এখানে, 12 এর গুণনীয়কসমূহ 1, 2, 3, 4, 6, 12

$\therefore \quad P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

আবার, $Q = \{x : x, 3 \text{ এর গুণিতক এবং } x \le 12\}$

এখানে, 12 পর্যন্ত 3 এর গুণিতকসমূহ 3, 6, 9, 12

$\therefore \quad Q = \{3, 6, 9, 12\}$

$\therefore \quad P - Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} - \{3, 6, 9, 12\} = \{1, 2, 4\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট: $\{1, 2, 4\}$

02. $P = \{x \in N : 2 < x \le 6\}$ এবং $Q = \{x \in N : x \text{ জোড় সংখ্যা এবং } x \le 8\}$ হলে, $P \cap Q$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-০৯)]

Sol" দেওয়া আছে,

$P = \{x \in N : 2 < x \le 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$

$Q = \{x \in N : x \text{ জোড় সংখ্যা এবং } x \le 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$

$\therefore P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{4, 6\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $\{4, 6\}$

03. যদি $U = \{x : x \text{ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা}\}$, $A = \{x : x \ge 5\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x < 12\} \subset U$ হয়, তবে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" দেওয়া আছে,

$U = \{x : x \text{ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা}\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\ldots\ldots\}$

$A = \{x : x \ge 5\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\ldots\ldots\}$

$B = \{x : 5x \le 12\} = \{1, 2\}$

$\therefore \quad A \cap B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\ldots\ldots\} \cap \{1, 2\} = \varnothing$

$\therefore \quad n(A \cap B) = 0$

এবং $A' \cup B = (U - A) \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore \quad n(A' \cup B) = 4$

Ans: 0, 4

04. যদি $U = \{x : x \text{ জোড় পূর্ণসংখ্যা}\}$, $A = \{x : 3x \ge 25\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x < 12\} \subset U$ হয়, তাহলে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cap B')$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" $U = \{x : x \text{ জোড় পূর্ণসংখ্যা}\}$

$= \{\ldots\ldots -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\ldots\}$

$A = \{x : 3x \ge 25\} = \{10, 12, 14, \ldots\ldots\ldots\}$

$B = \{x : 5x < 12\} = \{\ldots\ldots, -4, -2, 0, 2\}$

এখানে, $A \cap B = \{10, 12, 14, \ldots\ldots\} \cap \{\ldots, -4, -2, 0, 2\} = \varnothing$

$\therefore \quad n(A \cap B) = 0$

আবার, $A' = U - A = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\} - \{10, 12, 14, ...\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$
$B' = U - B = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...\} - \{..., -4, -2, 0, 2\} = \{4, 6, 8, 10, ...\}$
$\therefore A' \cap B' = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{4, 6, 8, 10, ...\} = \{4, 6, 8\}$
$\therefore n(A' \cap B') = 3$

Ans: $n(A \cap B) = 0$ এবং $n(A' \cap B') = 3$

05. দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$। নিম্নের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

(ক) $A \cap B$ (খ) $A' \cap B'$ (গ) $A' \cup B$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol" দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

(ক) $A \cap B = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\} \cap \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\} = \{x : 2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

(খ) এখানে, $U = \mathbb{R}$

$\therefore A \cup B = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\} \cup \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\} = \{x : 1 \le x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$

দ্যা মরগানের সূত্রানুসারে,

$A' \cap B' = (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \mathbb{R} - \{x : 1 \le x \le 5, x \in \mathbb{R}\} = \{x : x < 1$ অথবা $x > 5, x \in \mathbb{R}\}$

(গ) এখানে, $U = \mathbb{R}$

$\therefore A' = \mathbb{R} - \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x : x \le 2$ অথবা $x > 5, x \in \mathbb{R}\}$
$B = \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$
$\therefore A' \cup B = \{x : x \le 2$ অথবা $x > 5, x \in \mathbb{R}\} \cup \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$
$= \{x : x < 3$ অথবা $x > 5, x \in \mathbb{R}\}$
$= \mathbb{R} \setminus \{3 \le x \le 5\}$

06. দেওয়া আছে, $U = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\}$, $A = \{x : 1 < x \le 4\}$ এবং $B = \{x : 3 \le x < 6\}$। নিচের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

(ক) $A \cap B$ (খ) $A' \cap B$ (গ) $A \cap B'$ (ঘ) $A' \cap B'$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol" দেওয়া আছে, $U = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\}$
$A = \{x : 1 < x \le 4\}$
এবং $B = \{x : 3 \le x < 6\}$

(ক) $A \cap B = \{x : 1 < x \le 4\} \cap \{x : 3 \le x < 6\} = \{x : 3 \le x \le 4\}$

(খ) $A' = U - A = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\} - \{x : 1 < x \le 4\}$
$= \{x : x \le 1$ অথবা $4 < x < 10\}$
$\therefore A' \cap B = \{x : x \le 1$ অথবা $4 < x < 10\} \cap \{x : 3 \le x < 6\}$
$= \{x : 4 < x < 6\}$

(গ) $B' = U - B = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\} - \{x : 3 \le x < 6\}$
$= \{x : x < 3$ অথবা $6 \le x < 10\}$
$\therefore A \cap B' = \{x : 1 < x < 4\} \cap \{x : x < 3$ অথবা $6 < x < 10\}$
$= \{x : 1 < x < 3\}$

(ঘ) $A \cup B = \{x : 1 < x \le 4\} \cup \{x : 3 \le x < 6\} = \{x : 1 < x < 6\}$

দ্যা মরগানের সূত্রানুসারে, $A' \cap B' = (A \cup B)' = U - (A \cup B)$
$= \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\} - \{x : 1 < x < 6\}$
$= \{x : x \le 1$ অথবা $6 \le x < 10\}$

আবার, $A' = U - A = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\} - \{10, 12, 14, ...\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

$B' = U - B = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...\} - \{..., -4, -2, 0, 2\} = \{4, 6, 8, 10, ...\}$

$\therefore A' \cap B' = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{4, 6, 8, 10, ...\} = \{4, 6, 8\}$

$\therefore n(A' \cap B') = 3$

Ans: $n(A \cap B) = 0$ এবং $n(A' \cap B') = 3$

05. দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$। নিম্নের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

(ক) $A \cap B$ (খ) $A' \cap B'$ (গ) $A' \cup B$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

(ক) $A \cap B = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\} \cap \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\} = \{x : 2 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

(খ) এখানে, $U = \mathbb{R}$

$\therefore A \cup B = \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\} \cup \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\} = \{x : 1 \le x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$

দ্যা মরগানের সূত্রানুসারে,

$A' \cap B' = (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \mathbb{R} - \{x : 1 \le x \le 5, x \in \mathbb{R}\} = \{x : x < 1 \text{ অথবা } x > 5, x \in \mathbb{R}\}$

(গ) এখানে, $U = \mathbb{R}$

$\therefore A' = \mathbb{R} - \{x : 2 < x \le 5, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x : x \le 2 \text{ অথবা } x > 5, x \in \mathbb{R}\}$

$B = \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

$\therefore A' \cup B = \{x : x \le 2 \text{ অথবা } x > 5, x \in \mathbb{R}\} \cup \{x : 1 \le x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x : x < 3 \text{ অথবা } x > 5, x \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{3 \le x \le 5\}$

06. দেওয়া আছে, $U = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\}$, $A = \{x : 1 < x \le 4\}$ এবং $B = \{x : 3 \le x < 6\}$। নিচের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

(ক) $A \cap B$ (খ) $A' \cap B$ (গ) $A \cap B'$ (ঘ) $A' \cap B'$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol দেওয়া আছে, $U = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\}$

$A = \{x : 1 < x \le 4\}$

এবং $B = \{x : 3 \le x < 6\}$

(ক) $A \cap B = \{x : 1 < x \le 4\} \cap \{x : 3 \le x < 6\} = \{x : 3 \le x \le 4\}$

(খ) $A' = U - A = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\} - \{x : 1 < x \le 4\}$

$= \{x : x \le 1 \text{ অথবা } 4 < x < 10\}$

$\therefore A' \cap B = \{x : x \le 1 \text{ অথবা } 4 < x < 10\} \cap \{x : 3 \le x < 6\}$

$= \{x : 4 < x < 6\}$

(গ) $B' = U - B = \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\} - \{x : 3 \le x < 6\}$

$= \{x : x < 3 \text{ অথবা } 6 \le x < 10\}$

$\therefore A \cap B' = \{x : 1 < x < 4\} \cap \{x : x < 3 \text{ অথবা } 6 < x < 10\}$

$= \{x : 1 < x < 3\}$

(ঘ) $A \cup B = \{x : 1 < x \le 4\} \cup \{x : 3 \le x < 6\} = \{x : 1 < x < 6\}$

দ্যা মরগানের সূত্রানুসারে, $A' \cap B' = (A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$= \{x : x < 10, x \in \mathbb{R}\} - \{x : 1 < x < 6\}$

$= \{x : x \le 1 \text{ অথবা } 6 \le x < 10\}$

TYPE 05 মান নির্ণয় (সূত্রাবলীর প্রয়োগ সংক্রান্ত)

01. সেটের উপাদান সংখ্যার ক্ষেত্রে $n(U) = 80$, $n(A) = 40$, $n(B) = 50$ এবং $n(A \cap B) = 20$ হলে, সংশ্লিষ্ট সূত্রসমূহ উল্লেখ করে $n(A \cup B)$, $n(A \setminus B)$, $n(A^c)$, $n(A^c \cap B^c)$ এবং $n(A \oplus B)$ এর মান নির্ণয় করুন। [৩৫তম বিসিএস]

Sol" $n(U) = 80$, $n(A) = 40$, $n(B) = 50$, $n(A \cap B) = 20$

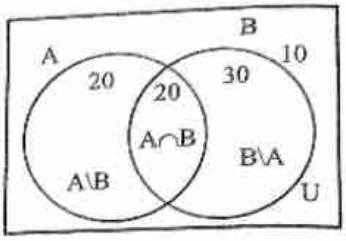
$\therefore$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 40 + 50 - 20 = 70$ Ans.

এখন, $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$
$= 40 - 20$
$= 20$ Ans.

$n(A^c) = n(U) - n(A) = 80 - 40 = 40$ Ans.

$n(A^c \cap B^c) = n(A \cup B)^c = n(U) - n(A \cup B) = 80 - 70 = 10$ Ans.

এবং $n(A \oplus B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A)$
$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 40 - 20 + 50 - 20$
$= 50$ Ans.



Ans: যথাক্রমে- 70, 20, 40, 10, 50

02. সেটের উপাদান সংখ্যার ক্ষেত্রে $n(U) = 100$, $n(A) = 50$, $n(B) = 40$ এবং $n(A \cap B) = 10$ হলে, সংশ্লিষ্ট সূত্রসমূহ উল্লেখ করে $n(A \cup B)$, $n(A - B)$, $n(B - A)$, $n(A')$, $n(B')$, $n(A' \cap B')$ এবং $n(A \oplus B)$ এর মান নির্ণয় করুন।

Sol" দেওয়া আছে, $n(U) = 100$
$n(A) = 50$
$n(B) = 40$,
এবং $n(A \cap B) = 10$

- আমরা জানি, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 50 + 40 - 10 = 90 - 10 = 80$ **Ans.**
- আমরা জানি, $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 10 = 40$ **Ans.**
- আমরা জানি, $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 10 = 30$ **Ans.**
- আমরা জানি, $n(A') = n(U) - n(A) = 100 - 50 = 50$ **Ans.**
- আমরা জানি, $n(B') = n(U) - n(B) = 100 - 40 = 60$ **Ans.**
- আমরা জানি, $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$
$= 100 - 80 = 20$ **Ans.**
- আমরা জানি, $n(A \oplus B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A) = 40 + 30 = 70$ **Ans.**

03. $A = \{1, 3, 5, 6\}$ এবং $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে-
(ক) $|A \cup B|$ এবং $|A \cap B|$ নির্ণয় করুন।
(খ) $A \oplus B$ অথবা $A \Delta B$ নির্ণয় করুন।

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
এখানে, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$\therefore$ $|A \cup B| = n(A \cup B) = 6$
এবং $A \cap B = \{1, 3, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 5, 6\}$
$\therefore$ $|A \cap B| = n(A \cap B) = 3$

(খ) দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore$ $A - B = \{1, 3, 5, 6\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1\}$

এবং $B - A = \{3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5, 6\} = \{4, 7\}$

$\therefore$ $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{1\} \cup \{4, 7\} = \{1, 4, 7\}$ **Ans.**

Symmetric Difference of Two Sets: A ও B সেটের প্রতিসম পার্থক্য (Symmetric Defference) কে $A \oplus B$ অথবা $A \Delta B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

*** $A \oplus B \Rightarrow A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

*** $n(A \oplus B) = n(A \backslash B) + n(B \backslash A) =$ Only A + Only B

04. $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ এবং $B = \{x : x^2 - 11x + 24 = 0\}$ হলে-

(ক) $|A \cup B|$ এবং $|A \cap B|$ নির্ণয় করুন।

(খ) $A \oplus B$ অথবা $A \Delta B$ নির্ণয় করুন।

Sol দেওয়া আছে, $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$

এখানে, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow$ $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$

$\therefore$ $x - 3 = 0$ অথবা, $x - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3$ $\Rightarrow$ $x = 2$

$\therefore$ $A = \{2, 3\}$

এবং $B = \{x : x^2 - 11x + 24 = 0\}$

এখানে, $x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 3x + 24 = 0$

$\Rightarrow x(x - 8) - 3(x - 8) = 0 \Rightarrow (x - 8)(x - 3) = 0$

$\therefore$ $x = 3, 8$

$\therefore$ $B = \{3, 8\}$

(ক) এখানে, $A \cup B = \{2, 3\} \cup \{3, 8\} = \{2, 3, 8\}$

$\therefore$ $|A \cup B| = n(A \cup B) = 3$

এবং $A \cap B = \{2, 3\} \cap \{3, 8\} = \{3\}$

$\therefore$ $|A \cap B| = n(A \cap B) = 1$

(খ) $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 3, 8\} - \{3\} = \{2, 8\}$ **Ans.**

বিকল্প:

এখানে, $A - B = \{2, 3\} - \{3, 8\} = \{2\}$

$B - A = \{3, 8\} - \{2, 3\} = \{8\}$

$\therefore$ $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{2\} \cup \{8\} = \{2, 8\}$ **Ans.**

TYPE 06 শক্তি সেট সম্পর্কিত সমস্যা

01. $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, l\}$ হলে, $P(Q)$ এবং $P(R)$ নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]*

Sol দেওয়া আছে, $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, l\}$

$\therefore$ $P(Q) = \{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \varnothing\}$

$\therefore$ $P(R) = \{\{m, n, l\}, \{m, n\}, \{m, l\}, \{n, l\}, \{m\}, \{n\}, \{l\}, \varnothing\}$

02. $A = \{x, x \in N : x^3 > 25 \text{ এবং } x^4 < 264\}$ হলে P(A) নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

Sol" $\{x, x \in N : x^3 > 25 \text{ এবং } x^4 < 264\}$

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\}$

$x = 1$ হলে, $x^3 = 1^3 = 1 \ngtr 25$ এবং $x^4 = 1^4 = 1 < 264$

$x = 2$ হলে, $x^3 = 2^3 = 8 \ngtr 25$ এবং $x^4 = 2^4 = 16 < 264$

$x = 3$ হলে, $x^3 = 3^3 = 27 > 25$ এবং $x^4 = 3^4 = 81 < 264$

$x = 4$ হলে, $x^3 = 4^3 = 64 > 25$ এবং $x^4 = 4^4 = 256 < 264$

$x = 5$ হলে, $x^3 = 5^3 = 125 > 25$ এবং $x^4 = 5^4 = 625 \nless 264$

$\therefore$ শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য সংখ্যাসমূহ = 3 ও 4

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $A = \{3, 4\}$

$\therefore$ A সেটের উপাদান সংখ্যা $2^n = 2^2 = 4$

$\therefore$ $P(A) = \{\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{\}\}$ **Ans.**

03. $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$ এবং $C = A \cup B$ হলে, দেখাও যে, P(C) এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০১)]*

Sol" দেওয়া আছে, $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$

এবং $C = A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

$\therefore$ $P(C) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}$

$\therefore$ P(C) এর উপাদান সংখ্যা 8

এখানে, C এর উপাদান সংখ্যা, $n = 3$

$\therefore$ P(C) সেটের উপাদান সংখ্যা $= 2^3 = 8$

$\therefore$ C সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে,

P(C) এর উপাদান সংখ্যা 2^n. (দেখানো হলো)

04. $U = \{3, 5, 6, 7, 9\}, A = \{x : x, 3\text{-এর গুণিতক এবং } x < 12\}$;

$P(A \cup A')$ এবং $P(A \cap A')$ এর উপাদান সংখ্যা সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করুন। [৩৬তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে,

$U = \{3, 5, 6, 7, 9\}, A = \{x : x, 3\text{-এর গুণিতক এবং } x < 12\}$

$\therefore$ x এর মান 12 থেকে ছোট সকল গুণিতক বা, $A = \{3, 6, 9\}$

$\therefore$ $A' = U - A = \{3, 5, 6, 7, 9\} - \{3, 6, 9\} = \{5, 7\}$

$\therefore$ $A \cup A' = \{3, 6, 9\} \cup \{5, 7\} = \{3, 5, 6, 7, 9\}$

$\therefore$ $A \cup A'$ এর উপাদান সংখ্যা $n = 5$ টি

$\therefore$ $P(A \cup A')$ এর উপাদান সংখ্যা $2^n = 2^5 = 32$ টি

এবং $A \cap A' = \{3, 6, 9\} \cap \{5, 7\} = \{\}$

$\therefore$ $A \cap A'$ এর উপাদান সংখ্যা $n = 0$ টি

$\therefore$ $P(A \cap A')$ এর উপাদান সংখ্যা $2^n = 2^0 = 1$ টি **(Ans.)**

05. $A = \{a, b\}$ এবং $B = \{b, c\}$ হলে দেখাও যে, $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-০৫)]

Sol" এখানে, $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,

$P(B) = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$

$\therefore$ $P(A) \cup P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

$A \cup B = \{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$

$P(A \cup B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

সুতরাং, $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ [দেখানো হল]

06. $A = \{x : x, \text{Fibonacci সংখ্যা এবং } x^2 < 64\}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, A এর উপাদান সংখ্যা n হলে, P(A) এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।

Sol" আমরা জানি, Fibonacci সংখ্যার সিরিজ = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

এখানে,

x এর মান	$x^2 < 64$
x = 0	$0^2 < 64$
x = 1	$1^2 < 64$
x = 2	$2^2 < 64$
x = 3	$3^2 < 64$
x = 5	$5^2 < 64$
x = 8	$8^2 \not< 64$

∴ A = {0, 1, 2, 3, 5}

∴ P(A) = {0}, {1}, {2}, {3}, {5}, {0, 1}, {0, 2}, {0, 3}, {0, 5}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {0, 1, 2}, {0, 1, 3}, {0, 1, 5}, {0, 2, 3}, {0, 2, 5}, {0, 3, 5}, {1,2,3} {1, 2, 5}, {2, 3, 5}, {0, 1, 2, 3}, {0, 1, 2, 5}, {0, 1, 3, 5}, {0, 2, 3, 5}, {1, 2, 3, 5}, {0, 1, 2, 3, 5}, ∅

এখানে, A সেটের উপাদান সংখ্যা = 5 টি

এবং P(A) সেটের উপাদান সংখ্যা = 32 টি = $2^5 = 2^n$ **(প্রমাণিত)**

TYPE 07 কার্তেসীয় গুণজ সেট সম্পর্কিত সমস্যা

01. *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]*

(ক) P = {a}, Q = {b, c} হলে, P × Q এবং Q × P নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, P = {a}, এবং Q = {b, c}

এখন, P × Q = {a} × {b, c} = {(a, b), (a, c)}

আবার, Q × P = {b, c} × {a} = {(b, a), (c, a)}

(খ) A = {3, 4, 5}, B = {4, 5, 6} এবং C = {x, y} হলে, (A ∩ B) × C নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, A = {3, 4, 5}, B = {4, 5, 6} এবং C = {x, y}

∴ A ∩ B = {3, 4, 5} ∩ {4, 5, 6} = {4, 5}

এখন, (A ∩ B) × C = {4, 5} × {x, y} = {(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)}

(গ) P = {3, 5, 7}, Q = {5, 7} এবং R = P\Q হলে, (P ∪ Q) × R নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, P = {3, 5, 7}, Q = {5, 7} এবং R = P\Q

∴ P ∪ Q = {3, 5, 7} ∪ {5, 7} = {3, 5, 7}

এখন, R = P\Q = {3, 5, 7} \ {5, 7} = {3}

∴ (P ∪ Q) × R = {3, 5, 7} × {3} = {(3, 3), (5, 3), (7, 3)}

02. **P = {1, 2, 3}, Q = {3, 4}, R = P ∩ Q হলে P × R এবং R × Q নির্ণয় কর।** *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১২)]*

Sol" দেওয়া আছে, P = {1, 2, 3}, Q = {3, 4}

এবং R = P ∩ Q = {1, 2, 3} ∩ {3, 4} = {3}

∴ P × R = {1, 2, 3} × {3} = {(1, 3), (2, 3), (3, 3)}

এবং R × Q = {3} × {3, 4}

= {(3, 3), (3, 4)}

03. $U = \{3, 5, 6, 7, 9\}$, $A = \{x : x, 3\text{-এর গুণিতক এবং } x < 12\}$; $A \times A'$ নির্ণয় করুন।

Sol" দেওয়া আছে,

$U = \{3, 5, 6, 7, 9\}$, $A = \{x : x, 3\text{-এর গুণিতক এবং } x < 12\}$

∴ x এর মান 12 থেকে ছোট সকল গুণিতক বা, $A = \{3, 6, 9\}$

$\therefore A' = U - A = \{3, 5, 6, 7, 9\} - \{3, 6, 9\} = \{5, 7\}$

∴ $A \times A' = \{3, 6, 9\} \times \{5, 7\}$

$= \{(3, 5), (3, 7), (6, 5), (6, 7), (9, 5), (9, 7)\}$ (Ans.)

TYPE 08 ক্রমজোড়ের সমতা সম্পর্কিত সমস্যা

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

01. **(ক) $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।**

Sol" দেওয়া আছে, $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$

এখন, ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে পাই, $x - 1 = y - 2 \Rightarrow x - y = -2 + 1$

$\therefore x - y = -1$ ..... (i)

এবং $y + 2 = 2x + 1$

$\Rightarrow y - 2x = 1 - 2$

$\Rightarrow y - 2x = -1$

$\therefore 2x - y = 1$ ..... (ii) [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

(i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$x - y = -1$

$2x - y = 1$

বা, $-x = -2 \quad \therefore x = 2$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

এবার, (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই, $x - y = -1$

$\Rightarrow 2 - y = -1$

$\Rightarrow -y = -1 - 2 \quad \Rightarrow -y = -3$

$\therefore y = 3$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

∴ নির্ণেয় মান $x = 2$ এবং $y = 3$.

(খ) $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$

ক্রমজোড়ের নিয়মানুসারে, $ax - cy = 0$ ..... (i)

এবং $a^2 - c^2 = ay - cx$

$\Rightarrow ay - cx = a^2 - c^2$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণকে a দ্বারা এবং (ii) নং সমীকরণকে c দ্বারা গুণ করে যোগ করে পাই,

$\Rightarrow a^2x - acy + acy - c^2x = 0 + a^2c - c^3$

$\Rightarrow a^2x - c^2x = a^2c - c^3$

$\Rightarrow x(a^2 - c^2) = c(a^2 - c^2)$

$\Rightarrow x = \frac{c(a^2 - c^2)}{a^2 - c^2} \quad \therefore x = c$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $a \cdot c - cy = 0 \Rightarrow ac - cy = 0$

$\Rightarrow cy = ac \quad \Rightarrow y = \frac{ac}{c}$

$\Rightarrow y = a$

∴ নির্ণেয় মান $(x, y) = (c, a)$.

(গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

Sol দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে, $6x - y = 1$ ..... (i)

$3x + 2y = 13$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং সমীকরণে যোগ করি।

$$12x - 2y = 2$$
$$\underline{3x + 2y = 13}$$
$$15x = 15$$

$\Rightarrow x = \frac{15}{15} \quad \therefore x = 1.$

এখন, x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $3x + 2y = 13$

$\Rightarrow 3 \times 1 + 2y = 13 \Rightarrow 3 + 2y = 13 \Rightarrow 2y = 13 - 3 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $(x, y) = (1, 5)$.

02. $(2x + y, 3) = (6, x - y)$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol দেওয়া আছে, $(2x + y, 3) = (6, x - y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $2x + y = 6$ ..... (i)

$x - y = 3$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $3x = 9$ বা, $x = 3$

সমীকরণ (ii) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $3 - y = 3$ বা, $y = 0$

$\therefore (x, y) = (3, 0)$

TYPE 09 গুণনীয়কের সেট সম্পর্কিত সমস্যা

01. A ও B যথাক্রমে 36 ও 45 এর গুণনীয়কের সেট হলে $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

Sol এখানে, $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$

$\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

এবং $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 36, 45\}$

এবং $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 9\}$

02. A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $(A \cup B)$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol $35 = 1 \times 35 = 5 \times 7 \quad 45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

35 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 5, 7, 35

সুতরাং $A = \{1, 5, 7, 35\}$

আবার, 45 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 3, 5, 9, 15, 45

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

এখন, $A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$

আবার, $A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 5\}$

(গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

Sol দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে, $6x - y = 1$ ..... (i)

$3x + 2y = 13$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং সমীকরণে যোগ করি।

$$\begin{array}{r} 12x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 13 \\ \hline 15x = 15 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{15}{15} \quad \therefore x = 1.$

এখন, x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $3x + 2y = 13$

$\Rightarrow 3 \times 1 + 2y = 13 \Rightarrow 3 + 2y = 13 \Rightarrow 2y = 13 - 3 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $(x, y) = (1, 5)$.

02. $(2x + y, 3) = (6, x - y)$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol দেওয়া আছে, $(2x + y, 3) = (6, x - y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $2x + y = 6$ ..... (i)

$x - y = 3$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $3x = 9$ বা, $x = 3$

সমীকরণ (ii) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $3 - y = 3$ বা, $y = 0$

$\therefore (x, y) = (3, 0)$

TYPE 09 গুণনীয়কের সেট সম্পর্কিত সমস্যা

01. A ও B যথাক্রমে 36 ও 45 এর গুণনীয়কের সেট হলে $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

Sol এখানে, $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$

$\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

এবং $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 36, 45\}$

এবং $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 9\}$

02. A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $(A \cup B)$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol $35 = 1 \times 35 = 5 \times 7 \qquad 45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

35 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 5, 7, 35

সুতরাং $A = \{1, 5, 7, 35\}$

আবার, 45 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 3, 5, 9, 15, 45

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

এখন, $A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$

আবার, $A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 5\}$

(গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

Sol দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে, $6x - y = 1$ ..... (i)

$3x + 2y = 13$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং সমীকরণে যোগ করি।

$$\begin{array}{r} 12x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 13 \\ \hline 15x = 15 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{15}{15}$ $\therefore x = 1.$

এখন, x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $3x + 2y = 13$

$\Rightarrow 3 \times 1 + 2y = 13 \Rightarrow 3 + 2y = 13 \Rightarrow 2y = 13 - 3 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $(x, y) = (1, 5)$.

02. $(2x + y, 3) = (6, x - y)$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol দেওয়া আছে, $(2x + y, 3) = (6, x - y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $2x + y = 6$ ..... (i)

$x - y = 3$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $3x = 9$ বা, $x = 3$

সমীকরণ (ii) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $3 - y = 3$ বা, $y = 0$

$\therefore (x, y) = (3, 0)$

TYPE 09 গুণনীয়কের সেট সম্পর্কিত সমস্যা

01. A ও B যথাক্রমে 36 ও 45 এর গুণনীয়কের সেট হলে $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

Sol এখানে, $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$

$\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

এবং $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 36, 45\}$

এবং $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 9\}$

02. A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $(A \cup B)$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol $35 = 1 \times 35 = 5 \times 7$ $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

35 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 5, 7, 35

সুতরাং $A = \{1, 5, 7, 35\}$

আবার, 45 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 3, 5, 9, 15, 45

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

এখন, $A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$

আবার, $A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 5\}$

(গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

Sol দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে, $6x - y = 1$ ..... (i)

$3x + 2y = 13$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং সমীকরণে যোগ করি।

$$\begin{array}{r} 12x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 13 \\ \hline 15x = 15 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{15}{15}$ $\therefore x = 1.$

এখন, x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $3x + 2y = 13$

$\Rightarrow 3 \times 1 + 2y = 13 \Rightarrow 3 + 2y = 13 \Rightarrow 2y = 13 - 3 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $(x, y) = (1, 5)$.

02. $(2x + y, 3) = (6, x - y)$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol দেওয়া আছে, $(2x + y, 3) = (6, x - y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $2x + y = 6$ ..... (i)

$x - y = 3$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $3x = 9$ বা, $x = 3$

সমীকরণ (ii) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $3 - y = 3$ বা, $y = 0$

$\therefore (x, y) = (3, 0)$

TYPE 09 গুণনীয়কের সেট সম্পর্কিত সমস্যা

01. A ও B যথাক্রমে 36 ও 45 এর গুণনীয়কের সেট হলে $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

Sol এখানে, $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$

$\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

এবং $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 36, 45\}$

এবং $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 9\}$

02. A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $(A \cup B)$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol $35 = 1 \times 35 = 5 \times 7$ $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

35 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 5, 7, 35

সুতরাং $A = \{1, 5, 7, 35\}$

আবার, 45 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 3, 5, 9, 15, 45

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

এখন, $A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$

আবার, $A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 5\}$

(গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে, $6x - y = 1$ ..... (i)

$3x + 2y = 13$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং সমীকরণে যোগ করি।

$$\begin{array}{r} 12x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 13 \\ \hline 15x = 15 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{15}{15} \quad \therefore x = 1.$

এখন, x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $3x + 2y = 13$

$\Rightarrow 3 \times 1 + 2y = 13 \Rightarrow 3 + 2y = 13 \Rightarrow 2y = 13 - 3 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $(x, y) = (1, 5)$.

02. $(2x + y, 3) = (6, x - y)$ হলে (x, y) নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol" দেওয়া আছে, $(2x + y, 3) = (6, x - y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $2x + y = 6$ ..... (i)

$x - y = 3$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $3x = 9$ বা, $x = 3$

সমীকরণ (ii) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $3 - y = 3$ বা, $y = 0$

$\therefore (x, y) = (3, 0)$

TYPE 09 গুণনীয়কের সেট সম্পর্কিত সমস্যা

01. A ও B যথাক্রমে 36 ও 45 এর গুণনীয়কের সেট হলে $A \cup B$ এবং $A \cap B$ নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

Sol" এখানে, $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$

$\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

এবং $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 36, 45\}$

এবং $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 9\}$

02. A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $(A \cup B)$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" $35 = 1 \times 35 = 5 \times 7 \qquad 45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$

35 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 5, 7, 35

সুতরাং $A = \{1, 5, 7, 35\}$

আবার, 45 এর গুণনীয়কগুলো হচ্ছে 1, 3, 5, 9, 15, 45

$\therefore B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

এখন, $A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$

আবার, $A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} = \{1, 5\}$

03. যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, এদের সেট নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যাটি 31 অপেক্ষা বড় এ সংখ্যা $(346 - 31) = 315$ ও $(556 - 31) = 525$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনে করি, 31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়কের সেট = A

এবং 525 এর গুণনীয়কের সেট = B

$315 = 1 \times 315$
$= 3 \times 105$
$= 5 \times 63$
$= 7 \times 45$
$= 9 \times 35$
$= 15 \times 21$

$525 = 1 \times 525$
$= 3 \times 175$
$= 5 \times 105$
$= 7 \times 75$
$= 15 \times 35$
$= 21 \times 25$

$\therefore$ A = {35, 45, 63, 105, 315}

এবং B = {35, 75, 105, 175, 525}

$\therefore$ নির্ণেয় সেট, $A \cap B = \{35, 105\}$.

04. যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতি ক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে এদের সেট নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১৪)]

Sol যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যাটি 23 অপেক্ষা বড় এ সংখ্যা $(311 - 23) = 288$ ও $(419 - 23) = 396$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনে করি, 23 অপেক্ষা বড় 288 এর গুণনীয়কের সেট = A

এবং 396 এর গুণনীয়কের সেট = B

$288 = 1 \times 288$
$= 2 \times 144$
$= 3 \times 96$
$= 4 \times 72$
$= 6 \times 48$
$= 8 \times 36$
$= 9 \times 32$
$= 12 \times 24$
$= 16 \times 18$

$396 = 1 \times 396$
$= 2 \times 198$
$= 3 \times 132$
$= 4 \times 99$
$= 6 \times 66$
$= 9 \times 44$
$= 11 \times 36$
$= 12 \times 33$
$= 18 \times 22$

$\therefore$ A = {24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, 288}

এবং B = {33, 36, 44, 66, 99, 132, 198, 396}

$\therefore$ নির্ণেয় সেট, $A \cap B = \{36\}$.

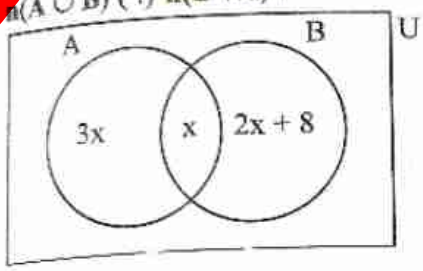
TYPE 10: ভেনচিত্র সম্পর্কিত সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic, Pattern 01 এবং Pattern 02 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

Pattern-01 (প্রশ্নে ভেনচিত্র দেয়া থাকলে)

01. ভেনচিত্রে A ও B সেটের উপাদানগুলোর সংখ্যা দেখানো হয়েছে। যদি $n(A) = n(B)$ হয়, তবে নির্ণয় কর (ক) x এর মান (খ) $n(A \cup B)$ (গ) $n(B \setminus A)$।



[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Solⁿ (ক) ভেনচিত্র থেকে পাই, $n(A) = 3x + x = 4x$

$n(B) = x + (2x + 8) = 3x + 8$

প্রশ্নানুসারে, $n(A) = n(B)$

$\Rightarrow 4x = 3x + 8$

$\Rightarrow 4x - 3x = 8$

$\therefore x = 8$ **(Ans.)**

(খ) ভেনচিত্র থেকে পাই,

$n(A \cup B) = 3x + x + 2x + 8$

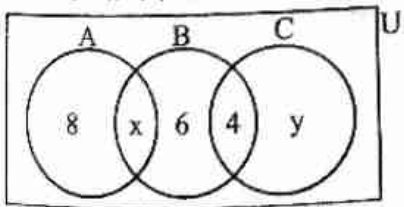
$= 6x + 8 = 6 \times 8 + 8$ [as $\because x = 8$]

$= 48 + 8 = 56$ **(Ans.)**

(গ) ভেনচিত্র থেকে পাই,

$n(B \setminus A) = 2x + 8 = 2 \times 8 + 8 = 16 + 8 = 24$ **(Ans.)**

02. নিচের ভেনচিত্রে সার্বিক সেট $U = A \cup B \cup C$।



(ক) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

(খ) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $n(A \cap B) = n(B \cap C)$

$\Rightarrow x = 4$ [ভেনচিত্র হতে]

$\therefore x = 4$

(খ) দেওয়া আছে, $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$

$\Rightarrow x + 6 = 4 + y$ [ভেনচিত্র হতে]

$\Rightarrow 4 + 6 = 4 + y$ [$\because x = 4$]

$\Rightarrow 6 = y$

$\therefore y = 6$

(গ) $n(U) = 8 + x + 6 + 4 + y$ [ভেনচিত্র হতে]

$= 8 + 4 + 6 + 4 + 6$ [$\because x = 4, y = 6$]

$= 28$

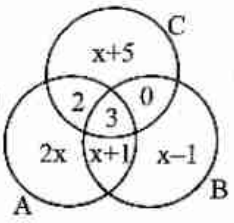
$\therefore n(U) = 28$ **(Ans.)**

03. নিচের ভেনচিত্রে $U = A \cup B \cup C$ এবং $n(U) = 50$।

(ক) x এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $n(B \cap C')$ এবং $n(A' \cap B)$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $n(A \cap B \cap C')$ এর মান নির্ণয় কর।



[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Sol"

(ক) এখানে, $n(U) = 2x + (x + 1) + (x - 1) + 2 + 3 + 0 + (x + 5)$ [ভেনচিত্র হতে]

$\therefore n(U) = 5x + 10$

দেওয়া আছে, $n(U) = 50$

$\Rightarrow 5x + 10 = 50$

$\Rightarrow 5x = 40$ $\therefore x = 8$ **(Ans.)**

(খ) ভেনচিত্র থেকে,

$\therefore n(B \cap C') = x + 1 + x - 1$

$= 2x = 2 \times 8$ [$\because x = 8$]

$= 16$ **(Ans.)**

$\therefore n(A' \cap B) = x - 1 + 0 = 8 - 1 = 7$ **(Ans.)**

(গ) ভেনচিত্র থেকে,

$\therefore n(A \cap B \cap C') = x + 1 = 8 + 1 = 9$

$\therefore n(A \cap B \cap C') = 9$ **(Ans.)**

Pattern-02

2 উপাদান বিশিষ্ট সমস্যা: সেটের এই প্যাটার্নের সমস্যাগুলো দুইভাবে সমাধান করা যায়। যথা- (i) সূত্রের সাহায্যে (ii) ভেনচিত্রের সাহায্যে।

তবে আমি মনে করি দুই উপাদানবিশিষ্ট অংকগুলো সূত্রের সাহায্যে করাটাই উত্তম। যদিও আমি এখানে একটি অংক [illegible] পদ্ধতিতে, কিছু অংক শুধু সূত্রের মাধ্যমে এবং কিছু অংক শুধু ভেনচিত্রের মাধ্যমে সমাধান করে দেখিয়েছি। আপনাদের যে পদ্ধতি ভাল লাগে সেটা অবলম্বন করবেন।

দুই উপাদানবিশিষ্ট ভেনচিত্রের ব্যাসিক:

মনে করি, ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 50 জন শিক্ষার্থীর সেট S এবং আরবি ও বাংলা বলতে পারে তাদের সেট যথাক্রমে A ও B দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে 1, 2, 3, 4 দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

এখানে,

$n(U)$ = A ও B এর সাথে সম্পর্কিত বা সম্পর্কিত নয় এমন উপাদান সংখ্যা $= 1 + 2 + 3 + 4$

$n(A \cup B)$ = A ও B এর যে কোন একটি বা উভয়ের সাথে সম্পর্কিত এমন উপাদান সংখ্যা $= 1 + 2 + 3$

$n(A)$ = A এর মোট উপাদান সংখ্যা $= 1 + 3$

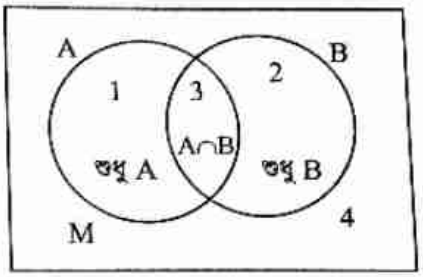
$n(A) - n(A \cap B)$ = শুধু A এর উপাদান সংখ্যা $= 1$

$n(B)$ = B এর মোট উপাদান সংখ্যা $= 2 + 3$

$n(B) - n(A \cap B)$ = শুধু B এর উপাদান সংখ্যা $= 2$

$n(A \cap B)$ = A ও B উভয়ের সাথে সম্পর্কিত উপাদান সংখ্যা $= 3$

$n(M)$ = A ও B কোনটির সাথে সম্পর্কিত নয় এমন উপাদান সংখ্যা $= 4$



04. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলাই পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10। কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]*

Sol" ধরি, সকল শিক্ষার্থীর সেট S, ফুটবল পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থীর সেট F, ক্রিকেট পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থীর সেট C.

$n(S) = 30$; $n(F) = 20$; $n(C) = 15$; $n(F \cap C) = 10$; $\therefore n(F \cup C)' = ?$

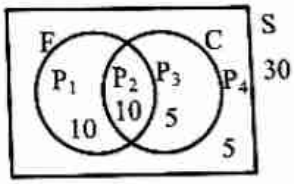
আমরা জানি, $n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C) = 20 + 15 - 10 = 25$

$\therefore$ যেকোনো একটি খেলা পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থীর সেট $= n(F \cup C) = 25$

$\therefore$ কোনো খেলাই পছন্দ করে না এমন শিক্ষার্থীর সেট $= n(F \cup C)' = n(S) - n(F \cup C) = 30 - 25 = 5$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান (ভেনচিত্রের সাহায্যে):

মনে করি, ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 30 জন শিক্ষার্থীর সেট S এবং ফুটবল ও ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে তাদের সেট যথাক্রমে F ও C দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P_1, P_2, P_3, P_4 দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।



এখানে, উভয় খেলা পছন্দ করে তাদের সেট, $P_2 = F \cap C$; যার সদস্য সংখ্যা $= 10$

শুধু ফুটবল খেলা পছন্দ করে তাদের সেট, $P_1 = F \backslash P_2$; যার সদস্য সংখ্যা $20 - 10 = 10$

শুধু ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে তাদের সেট, $P_3 = C \backslash P_2$; যার সদস্য সংখ্যা $15 - 10 = 5$

একটি এবং উভয় খেলা পছন্দ করে তাদের সেট $= F \cup C$; যার সদস্য সংখ্যা $10 + 10 + 5 = 25$

যারা উভয় খেলাই পছন্দ করে না তাদের সেট, $P_4 = S \backslash (F \cup C)$ এবং যার সদস্য সংখ্যা $= 30 - 25 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় শিক্ষার্থীর সংখ্যা 5 জন। (Ans)

05. 50 জন লোকের মধ্যে 35 জন ইংরেজি বলতে পারে, 25 জন ইংরেজি ও বাংলা বলতে পারে এবং প্রত্যেকেই দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে। বাংলা বলতে পারে কতজন? কেবল মাত্র বাংলা বলতে পারে কতজন? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৫)]*

Sol" ধরি, সকল লোকের সেট S, ইংরেজি বলতে পারে এমন লোকের সেট E, বাংলা বলতে পারে এমন লোকের সেট B.

যেহেতু প্রত্যেক লোক দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে, সেহেতু $S = E \cup B$

$n(S) = 50$; $n(E \cup B) = 50$; $n(E) = 35$; $n(E \cap B) = 25$; $n(B) = ?$

আমরা জানি, $n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$

$\Rightarrow 50 = 35 + n(B) - 25$

$\Rightarrow n(B) = 50 - 35 + 25 \quad \therefore n(B) = 40$

$\therefore$ বাংলায় বলতে পারে এমন লোকের সেট $= n(B) = 40$

$\therefore$ কেবল বাংলা বলতে পারে এমন লোকের সেট $= n(B) - n(E \cap B) = 40 - 25 = 15$

$\therefore$ Answer: 40 & 15

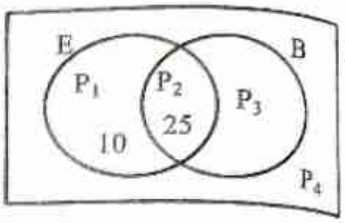
বিকল্প সমাধান (ভেনচিত্রের সাহায্যে):

মনে করি, ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 50 জন শিক্ষার্থীর সেট S এবং ইংরেজি ও বাংলা বলতে পারে তাদের সেট যথাক্রমে E ও B দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P_1, P_2, P_3, P_4 দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

একটি এবং উভয় ভাষা বলতে পারে তাদের সেট $= E \cup B = P_1 + P_2 + P_3$

যার সদস্য সংখ্যা $= 50$

$\therefore$ যারা কোন ভাষাই বলতে পারে না তাদের সেট, $P_4 = 0$



এখানে, উভয় ভাষা বলতে পারে তাদের সেট, $P_2 = E \cap B$; যার সদস্য সংখ্যা $= 25$

কেবল ইংরেজি বলতে পারে তাদের সেট, $P_1 = E \backslash P_2$; যার সদস্য সংখ্যা $35 - 25 = 10$

$\therefore$ কেবল বাংলা বলতে পারে তাদের সেট, $P_3 = (E \cup B) - (P_1 + P_2)$

$= 50 - (25 + 10)$

$= 50 - 35 = 15$

$\therefore$ যারা বাংলা বলতে পারে তাদের সেট , $B = P_2 + P_3$

$= 25 + 15 = 40$

$\therefore$ Answer: 40 & 15

10. কোনো শ্রেণির 30 জন ছাত্রের 20 জন ফুটবল এবং 15 জন দাবা পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত যেকোনো একটি খেলা পছন্দ করে। কতজন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-৩]

Sol" ধরি, সকল ছাত্রের সেট S,

ফুটবল পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট F, দাবা পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট C,

যেহেতু প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত একটি খেলা পছন্দ করে, সেহেতু $S = F \cup C$

$n(S) = 30$; $n(F \cup C) = 30$; $n(F) = 20$; $n(C) = 15$; $n(F \cap C) = ?$

আমরা জানি, $n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C)$

$\Rightarrow 30 = 20 + 15 - n(F \cap C)$

$\Rightarrow 30 = 35 - n(F \cap C)$

$\Rightarrow n(F \cap C) = 35 - 30$

$\therefore n(F \cap C) = 5$

অর্থাৎ, দুটি খেলাই পছন্দ করে 5 জন ছাত্র। **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান (ভেনচিত্রের সাহায্যে):

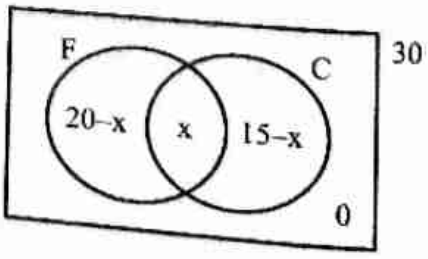
ধরি, ফুটবল পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট F, দাবা পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট C

ধরি, দুটি খেলাই পছন্দ করে x জন ছাত্র

$\therefore$ কেবল ফুটবল পছন্দ করে $= 20 - x$ জন

$\therefore$ কেবল দাবা পছন্দ করে $= 15 - x$ জন

এবং কিছুই খেলে না $= 0$ জন



$\therefore$ ভেনচিত্রের শর্তানুযায়ী, $20 - x + x + 15 - x = 30$

$\Rightarrow 35 - x = 30 \quad \therefore x = 5$ **(Ans.)**

বি:দ্র: দুই উপাদাননিবিশিষ্ট এধরণের অংকগুলো ভেনচিত্রের সাহায্যে না করে সূত্রের সাহায্যে করাই উত্তম।

07. কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 50 জন বাংলা, 20 জন ইংরেজি এবং 10 জন বাংলা ও ইংরেজি বলতে পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষা কতজন বলতে পারে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-খ)]

Sol ধরি, দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষা বলতে পারে এমন লোকের সেট S এবং তাদের মধ্যে যারা বাংলা বলতে পারে তাদের সেট B ও ইংরেজি বলতে পারে তাদের সেট E।

তাহলে প্রশ্নানুসারে, $n(B) = 50, n(E) = 20, n(B \cap E) = 10$

আবার, $n(S) = n(B \cup E) = n(B) + n(E) - n(B \cap E)$

$= 50 + 20 - 10 = 70 - 10 = 60$

∴ দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে 60 জন। **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান (ভেনচিত্রের সাহায্যে):

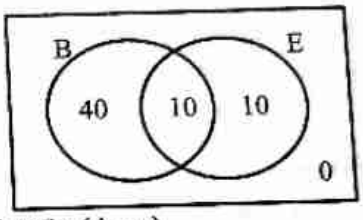
ধরি, যারা বাংলা বলতে পারে তাদের সেট B ও ইংরেজি বলতে পারে তাদের সেট E

∴ দুটি ভাষাই বলতে পারে = 10 জন

∴ কেবল বাংলা বলতে পারে = 50 − 10 = 40 জন

∴ কেবল ইংরেজী বলতে পারে = 20 − 10 = 10 জন

এবং কিছুই বলতে পারে না = 0 জন



∴ ভেনচিত্রের শর্তানুযায়ী, দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে = 40 + 10 + 10 = 60 জন। **(Ans.)**

বি:দ্র: দুই উপাদনিবিশিষ্ট এধরণের অংকগুলো ভেনচিত্রের সাহায্যে না করে সূত্রের সাহায্যে করাই উত্তম।

08. কোনো স্কুলের নবম শ্রেণির বিজ্ঞান শাখার 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29 জন জীববিজ্ঞান, 24 জন উচ্চতর গণিত এবং 11 জন জীববিজ্ঞান ও উচ্চতর গণিত উভয় বিষয় নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী জীববিজ্ঞান বা উচ্চতর গণিত বিষয় দুইটির কোনটিই নেয়নি?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-ঘ)]

Sol মনে করি, মোট শিক্ষার্থীর সেট S,

জীববিজ্ঞান নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট B, উচ্চতর গণিত নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট H।

দুইটি বিষয়ের যেকোনো একটি বিষয় নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সেট = $B \cup H$

প্রশ্নমতে, $n(S) = 50, n(B) = 29, n(H) = 24$ এবং $n(B \cap H) = 11$

আমরা জানি, $n(B \cup H) = n(B) + n(H) - n(B \cap H)$

$= 29 + 24 - 11 = 53 - 11 = 42$

∴ দুইটি বিষয়ের কোনোটিই নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা,

$n(S) - n(B \cup H) = 50 - 42 = 8$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান (ভেনচিত্রের সাহায্যে):

ধরি, জীববিজ্ঞান নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট B, উচ্চতর গণিত নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট H

দুটি বিষয়ই নিয়েছে = 11 জন শিক্ষার্থী

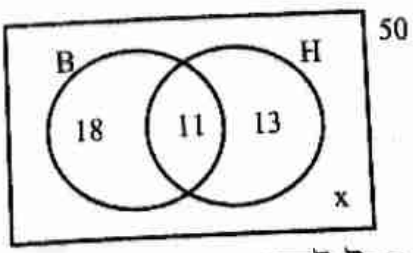
∴ কেবল জীববিজ্ঞান নিয়েছে = 29 − 11 = 18 জন

∴ কেবল উচ্চতর গণিত নিয়েছে = 24 − 11 = 13 জন

ধরি, দুইটি বিষয়ের কোনোটিই নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x জন

∴ ভেনচিত্রের শর্তানুযায়ী, $18 + 11 + 13 + x = 50$

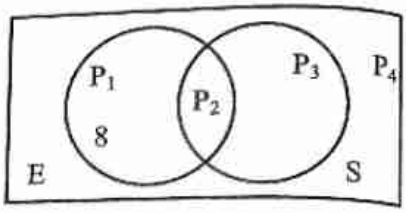
$\Rightarrow 42 + x = 50 \quad \therefore x = 8$ **(Ans.)**



বি:দ্র: দুই উপাদনিবিশিষ্ট এধরণের অংকগুলো ভেনচিত্রের সাহায্যে না করে সূত্রের সাহায্যে করাই উত্তম।

09. একটি ক্লাসে 25 জন শিক্ষার্থী আছে। তাদের মধ্যে 12 জন অর্থনীতি পাঠ করে, 8 জন অর্থনীতি পাঠ করে কিন্তু সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে না। কতজন অর্থনীতি ও সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে এবং কতজন সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে কিন্তু অর্থনীতি পাঠ করে না তা নির্ণয় করুন। [৪৪তম বিসি.এস.]

Sol" এখানে, আয়তাকার ক্ষেত্র U দ্বারা 25 জন শিক্ষার্থীর সেট নির্দেশ করে। E এবং S চিহ্নিত বৃত্তাকারে ক্ষেত্র দুটি যথাক্রমে অর্থনীতি ও সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে এমন শিক্ষার্থীদের সেট নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P, P_2, P_3 ও P_4 দ্বারা নির্দেশ করা হলো।



এখানে, $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 25$

E = অর্থনীতি পাঠ করে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$= P_1 + P_2$

$= 12$

P_1 = অর্থনীতি পাঠ করে কিন্তু সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে না এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা $= 8$

P_2 = $E \cap S$ = অর্থনীতি ও সমাজবিজ্ঞান উভয়ই পাঠ করে এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা $= E - P_1 = 12 - 8 = 4$ জন **(Ans.)**

P_4 = কোন বিষয় পাঠ করে না এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা $= 0$

P_3 = সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে কিন্তু অর্থনীতি পাঠ করে না এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা

$\therefore P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 25 \Rightarrow 8 + 4 + P_3 + 0 = 25 \Rightarrow P_3 = 25 - 12 = 13$ জন **(Ans.)**

বিকল্প:

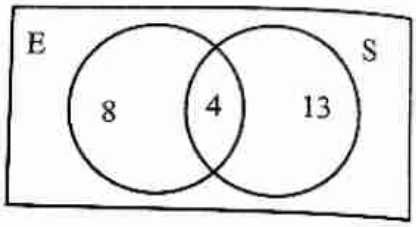
মোট শিক্ষার্থী, $n(U) = 25$ জন

অর্থনীতি পাঠ করে, $n(E) = 12$ জন

অর্থনীতি পাঠ করে কিন্তু সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে না, $n(E \cap S') = 8$ জন

অর্থনীতি ও সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে, $n(E \cap S) = ?$

সমাজবিজ্ঞান পাঠ করে কিন্তু অর্থনীতি পাঠ করে না, $n(S \cap E') = ?$



এখন, $n(E) = n(E \cap S') + n(E \cap S) \Rightarrow 12 = 8 + n(E \cap S) \Rightarrow n(E \cap S) = 12 - 8 = 4$ জন **(Ans.)**

আবার, $n(U) = n(E \cap S') + n(E \cap S) + n(S \cap E')$

$\Rightarrow 25 = 8 + 4 + n(S \cap E') \Rightarrow n(S \cap E') = 25 - 8 - 4 = 13$ জন **(Ans.)**

10. 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 88 জন বাংলায়, 80 জন গণিতে এবং 70 জন উভয় বিষয়ে পাশ করেছে। ভেনচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ কর এবং কতজন শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে, তা নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-১)]*

Sol" মনে করি, মোট শিক্ষার্থীর সেট S,

বাংলায় পাস শিক্ষার্থীর সেট B, গণিতে পাস শিক্ষার্থীর সেট M।

দুইটি বিষয়ের যেকোনো একটি বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীর সেট $= B \cup M$

প্রশ্নমতে, $n(S) = 100$, $n(B) = 88$, $n(M) = 80$ এবং $n(B \cap M) = 70$

আমরা জানি, $n(B \cup M) = n(B) + n(M) - n(B \cap M) = 88 + 80 - 70 = 168 - 70 = 98$

$\therefore$ উভয় বিষয়ে ফেল অর্থাৎ দুইটি বিষয়ের কোনোটিই পাস করে নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= n(S) - n(B \cup M)$

$= 100 - 98 = 2$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান (ভেনচিত্রের সাহায্যে):

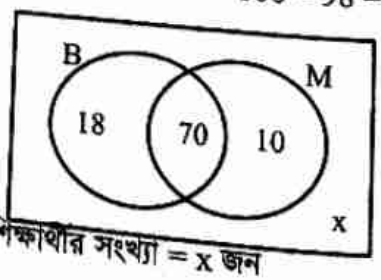
ধরি, বাংলায় পাস শিক্ষার্থীর সেট B, গণিতে পাস শিক্ষার্থীর সেট M

দুটি বিষয়ই পাস করেছে = 70 জন শিক্ষার্থী

$\therefore$ কেবল বাংলায় পাস করেছে $= 88 - 70 = 18$ জন

$\therefore$ কেবল গণিতে পাস করেছে $= 80 - 70 = 10$ জন

ধরি, উভয় বিষয়ে ফেল অর্থাৎ দুইটি বিষয়ের কোনোটিই পাস করে নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x জন



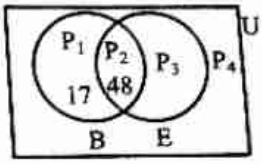
$\therefore$ ভেনচিত্রের শর্তানুযায়ী, $18 + 70 + 10 + x = 100$

$\Rightarrow 98 + x = 100 \quad \therefore x = 2$ **(Ans.)**

11. 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65 শিক্ষার্থী বাংলায়, 48 শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাশ এবং 15 শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।
(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।
(খ) শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাশ করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।
(গ) উভয় বিষয়ে পাশ এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol^n (ক) এখানে আয়তাকার ক্ষেত্র U দ্বারা 100 জন শিক্ষার্থীর সেট নির্দেশ করে। B এবং E চিহ্নিত বৃত্তাকার ক্ষেত্র দুইটি দ্বারা যথাক্রমে বাংলা ও ইংরেজি বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P_1, P_2, P_3, P_4 দ্বারা নির্দেশ করা হলো।



(খ) এখানে, $P_2 = B \cap E$
= উভয় বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা
= 48

$P_1 = B \backslash P_2$
= শুধু বাংলায় পাশ শিক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 65 – 48 = 17

P_4 = উভয় বিষয়ে ফেল শিক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 15

$B \cup E = U \backslash P_4$
= এক বা উভয় বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 100 – 15 = 85

$P_3 = (B \cup E) - (P_1 \cup P_2)$
= শুধু ইংরেজিতে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 85 – 65 = 20

∴ শুধু বাংলায় পাশ করেছে 17 শিক্ষার্থী
এবং শুধু ইংরেজিতে পাশ করেছে 20 শিক্ষার্থী।

(গ) উভয় বিষয়ে পাশ করে 48 শিক্ষার্থী এবং উভয় বিষয়ে ফেল করে 15 শিক্ষার্থী
ধরি, 48 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট = A এবং 15 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট = B
এখন, 48 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহ হচ্ছে 2, 3
∴ $A = \{2, 3\}$
15 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহ হচ্ছে 3, 5
∴ $B = \{3, 5\}$
∴ $A \cup B = \{2, 3\} \cup \{3, 5\} = \{2, 3, 5\}$

Pattern-03

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic এবং Pattern 03 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

3 উপাদান বিশিষ্ট সমস্যা: সেটের এই প্যাটার্নের সমস্যাগুলো দুইভাবে সমাধান করা যায়।
যথা- (i) সূত্রের সাহায্যে (ii) ভেনচিত্রের সাহায্যে।
তবে আমি মনে করি, তিন উপাদানবিশিষ্ট অংকগুলো ভেনচিত্রের সাহায্যে করাটাই উত্তম। তবে কিছু অংকে আবশ্যিকভাবে সূত্রের প্রয়োজন পড়ে। তাই আপনারা খুব ভালভাবে খেয়াল করবেন আমি কোন অংকটি কোন পদ্ধতিতে করেছি।
আপনারা ঐ ধরনের অংকে সেটিই করার চেষ্টা করবেন। আশা করি এর বাইরে কোন ধরনের অংক আসবে না ইনশাআল্লাহ।

তিন উপাদানবিশিষ্ট ভেনচিত্র বুঝতে নিচের অংকটি ভালভাবে বুঝে করুন, এই অংকটির মাঝেই সব রকম প্রশ্নের ধরণ অন্তর্ভুক্ত আছে।

12. ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফ্রেঞ্চ, 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

(ক) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি?

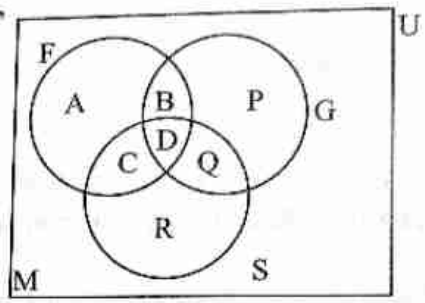
(খ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে?

(গ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের কাজের অংক নং-৭)]

Sol" ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 100 জন শিক্ষার্থীর সেট U এবং ফ্রেঞ্চ, জার্মান ও স্প্যানিশ নেয়া শিক্ষার্থীর সেট যথাক্রমে F, G ও S দ্বারা নির্দেশ করে। ফলে

ভেনচিত্রটি আটটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে A, B, C, D, P, Q, R, M দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।



এখানে, তিনটি ভাষা নিয়েছে এরূপ শিক্ষার্থীর সেট, $D = F \cap G \cap S$,
যার সদস্য সংখ্যা = 3

কেবল ফ্রেঞ্চ ও জার্মান ভাষা নিয়েছে এরূপ শিক্ষার্থীর সেট B, যার সদস্য সংখ্যা $= n(F \cap G) - n(F \cap G \cap S)$
$= 5 - 3 = 2$

কেবল জার্মান ও স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট Q, যার সদস্য সংখ্যা
$= n(G \cap S) - n(F \cap G \cap S) = 8 - 3 = 5$

কেবল ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট C, যার সদস্য সংখ্যা
$= n(F \cap S) - n(F \cap G \cap S) = 10 - 3 = 7$

শুধু ফ্রেঞ্চ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট, $A = F - B - D - C = 42 - 2 - 3 - 7 = 30$

শুধু জার্মান ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট, $P = G - B - D - Q = 30 - 2 - 3 - 5 = 20$

শুধু স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট, $R = S - C - D - Q = 28 - 7 - 3 - 5 = 13$

(১) তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি এরূপ শিক্ষার্থীর
সেট, $M = U - A - B - C - D - P - Q - R$
$= 100 - 30 - 2 - 7 - 3 - 20 - 5 - 13$
$= 100 - 80 = 20$ **(Ans.)**

(২) তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= A + P + R$
$= 30 + 20 + 13$
$= 63$ **(Ans.)**

(৩) তিনটি ভাষার কেবল দুটি ভাষা নিয়েছে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= B + C + Q$
$= 2 + 7 + 5$
$= 14$ **(Ans.)**

Note: আরো যত প্রকারের প্রশ্ন হতে পারে.....

(৪) শুধু ফ্রেঞ্চ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol" শুধু ফ্রেঞ্চ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট, $A = F - B - D - C$
$= 42 - 2 - 3 - 7 = 30$ **(Ans.)**

(৫) শুধু জার্মান ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol শুধু জার্মান ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট, $P = G - B - D - Q = 30 - 2 - 3 - 5 = 20$ **(Ans.)**

(৬) শুধু স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol শুধু স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট, $R = S - C - D - Q = 28 - 7 - 3 - 5 = 13$ **(Ans.)**

(৭) কেবল ফ্রেঞ্চ ও জার্মান ভাষা নিয়েছে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol কেবল ফ্রেঞ্চ ও জার্মান ভাষা নিয়েছে এরূপ শিক্ষার্থীর সেট B,
যার সদস্য সংখ্যা $= n(F \cap G) - n(F \cap G \cap S) = 5 - 3 = 2$ **(Ans.)**

(৮) কেবল জার্মান ও স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol কেবল জার্মান ও স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট Q,
যার সদস্য সংখ্যা $= n(G \cap S) - n(F \cap G \cap S) = 8 - 3 = 5$ **(Ans.)**

(৯) কেবল ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol কেবল ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ ভাষা নেয়া শিক্ষার্থীর সেট C,
যার সদস্য সংখ্যা $= n(F \cap S) - n(F \cap G \cap S) = 10 - 3 = 7$ **(Ans.)**

(১০) কমপক্ষে একটি ভাষা নিয়েছে এরুপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol কমপক্ষে একটি ভাষা নিয়েছে এরুপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= U - M = 100 - 20 = 80$ **(Ans.)**

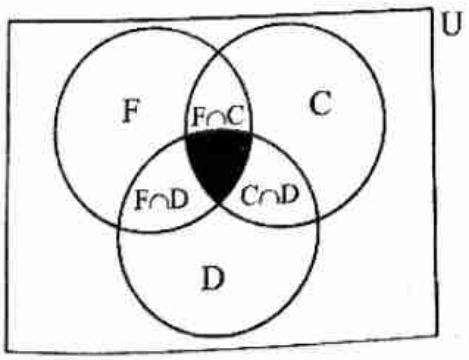
(১১) কমপক্ষে দুটি ভাষা নিয়েছে এরুপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

Sol কমপক্ষে দুটি ভাষা নিয়েছে এরুপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= B + C + Q + D = 2 + 7 + 5 + 3 = 17$ **(Ans.)**

13. একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন দাবা খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও দাবা এবং 12 জন ফুটবল ও দাবা খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়।
(ক) উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী এমন ছাত্রদের সেট এবং কোনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট ভেনচিত্রে দেখাও।
(খ) কতজন ছাত্র উল্লিখিত তিনটি খেলায়ই পারদর্শী তা নির্ণয় কর।
(গ) কতজন ছাত্র কেবলমাত্র একটি খেলায় পারদর্শী? কতজন অন্তত দুইটি খেলায় পারদর্শী।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৭)]

Sol

(ক)



ভেনচিত্রে ছায়াঘেরা অংশ তিনটি খেলায় পারদর্শী ছাত্রদের সেট এবং বৃত্তের বাইরে কিন্তু আয়তক্ষেত্রের ভিতরের অংশ কোনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট নির্দেশ করে।

(খ) ধরি, সকল ছাত্রের সেট U, ফুটবল খেলায় পারদর্শী ছাত্রদের সেট F, ক্রিকেট খেলায় পারদর্শী ছাত্রদের সেট C, দাবা খেলায় পারদর্শী ছাত্রদের সেট D.

$n(U) = 100$

$n(F) = 42, n(C) = 46, n(D) = 39$

$n(F \cap C) = 13, n(C \cap D) = 14, n(F \cap D) = 12$

$n(F \cup C \cup D)' = 7$

আমরা জানি, $n(F \cup C \cup D)' = n(U) - n(F \cup C \cup D) \Rightarrow 7 = 100 - n(F \cup C \cup D)$

$\therefore \quad n(F \cup C \cup D) = 93$

এখন, $n(F \cup C \cup D) = n(F) + n(C) + n(D) - n(F \cap C) - n(F \cap D) - n(C \cap D) + n(F \cap C \cap D)$

$\Rightarrow \quad 93 = 42 + 46 + 39 - 13 - 12 - 14 + n(F \cap C \cap D) \Rightarrow n(F \cap C \cap D) + 88 = 93$

$\therefore \quad n(F \cap C \cap D) = 5$

$\therefore$ তিনটি খেলায়ই পারদর্শী শিক্ষার্থীর সংখ্যা 5 জন।

Ans: 5 জন

(গ) কেবল ফুটবল খেলে $= n(F) - n(F \cap C) - n(F \cap D) + n(F \cap C \cap D)$
$= 42 - 13 - 12 + 5 = 22$

কেবল ক্রিকেট খেলে $= n(C) - n(F \cap C) - n(C \cap D) + n(F \cap C \cap D)$
$= 46 - 13 - 14 + 5 = 24$

কেবল দাবা খেলে $= n(D) - n(D \cap C) - n(D \cap F) + n(F \cap C \cap D)$
$= 39 - 14 - 12 + 5 = 18$

$\therefore$ কেবল একটি খেলায় পারদর্শী $= 22 + 24 + 18 = 64$ জন।

কেবল ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে $= n(F \cap C) - n(F \cap C \cap D) = 13 - 5 = 8$

কেবল ক্রিকেট ও দাবা খেলে $= n(C \cap D) - n(F \cap C \cap D) = 14 - 5 = 9$

কেবল ফুটবল ও দাবা খেলে $= n(F \cap D) - n(F \cap C \cap D) = 12 - 5 = 7$

$\therefore$ অন্তত দুটি খেলায় পারদর্শী শিক্ষার্থী সংখ্যা $= (8 + 9 + 7 + 5) = 29$ জন

Ans: 64 জন এবং 29 জন।

14. একজন টিভি পর্যবেক্ষক টিভি দর্শকদের সম্পর্কে নিম্নের তথ্যাদি প্রদান করেন:
60% প্রোগ্রাম A, 50% প্রোগ্রাম B, 50% প্রোগ্রাম C, 30% প্রোগ্রাম A ও B, 20% প্রোগ্রাম B ও C, 30% প্রোগ্রাম A ও C দেখেন এবং 10% কোনো প্রোগ্রামই দেখেন না। তাহলে-
(ক) শতকরা কতজন প্রোগ্রাম A, B ও C দেখেন? [৪১তম বিসিএস]

Sol" প্রোগ্রাম A দেখে $n(A) = 60\%$
" B " $n(B) = 50\%$
" C " $n(C) = 50\%$
" A ও B " $n(A \cap B) = 30\%$
" B ও C " $n(B \cap C) = 20\%$
" A ও C " $n(A \cap C) = 30\%$

সুতরাং যে কোন একটি দেখে $n(A \cup B \cup C) = 100\% - 10\% = 90\%$

(ক) তিনটি প্রোগ্রাম দেখেন $n(A \cap B \cap C)$ হলে

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$\Rightarrow \quad 90\% = 60\% + 50\% + 50\% - 30\% - 20\% - 30\% + n(A \cap B \cap C)$

$\Rightarrow \quad n(A \cap B \cap C) = 90\% - 80\%$

$\Rightarrow \quad n(A \cap B \cap C) = 10\%$

অতএব, প্রোগ্রাম A, B ও C দেখে 10%

(খ) শতকরা কতজন কেবল দুটি প্রোগ্রাম দেখেন?

Sol" কেবল A ও B দেখে = $n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 30\% - 10\% = 20\%$
কেবল B ও C দেখে = $n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 20\% - 10\% = 10\%$
কেবল C ও A দেখে = $n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C) = 30\% - 10\% = 20\%$
কেবল দুটি দেখে = $20\% + 10\% + 20\% = 50\%$

(গ) শতকরা কতজন শুধু প্রোগ্রাম A দেখেন?

Sol" শুধু A দেখে = $n(A) - (\text{কেবল A ও B}) - (\text{কেবল A ও C}) - n(A \cap B \cap C)$
$= 60\% - 20\% - 20\% - 10\% = 10\%$

15. বেগম রোকেয়া কলেজের ছাত্রীদের মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকায় পাঠ্যাভাস সম্পর্কে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল 60% ছাত্রী বিচিত্রা, 50% ছাত্রী সন্ধানী, 50% ছাত্রী পূর্বাণী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও সন্ধানী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও পূর্বাণী, 20% ছাত্রী সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

(ক) শতকরা কত জন ছাত্রী উক্ত পত্রিকা তিনটির কোনটিই পড়ে না?

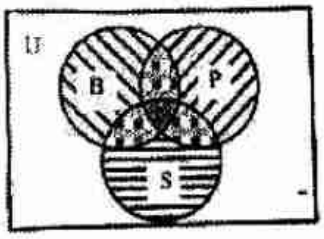
(খ) শতকরা কত জন ছাত্রী উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুইটি পড়ে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৫)]

Sol" ধরি, সকল ছাত্রীর সেট U, বিচিত্রা পড়া ছাত্রীর সেট B, সন্ধানী পড়া ছাত্রীর সংখ্যা S, পূর্বাণী পড়া ছাত্রীর সেট P.

$\therefore$ $n(U) = 100\%$, $n(B) = 60\%$, $n(S) = 50\%$, $n(P) = 50\%$,
$n(B \cap S) = 30\%$, $n(B \cap P) = 30\%$, $n(P \cap S) = 20\%$
$n(P \cap B \cap S) = 10\%$

(i) তিনটি পত্রিকার অন্তত একটি পড়ে এমন ছাত্রীর সেট $(B \cup P \cup S)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]



$\therefore$ তিনটির কোনটিই পড়ে না এমন ছাত্রীর সংখ্যা = $n(U) - n(B \cup P \cup S)$ [ভেনচিত্রের সাদা অংশ]
এখন, $n(B \cup P \cup S) = n(B) + n(P) + n(S) - n(B \cap P) - n(B \cap S) - n(P \cap S) + n(B \cap P \cap S)$
$= 60\% + 50\% + 50\% - 30\% - 30\% - 20\% + 10\% = 90\%$
$\therefore$ কোনো পত্রিকাই পড়ে না এমন ছাত্রীর সংখ্যা = $n(U) - n(B \cup P \cup S) = 100\% - 90\% = 10\%$ **Ans.**

(ii) শুধু বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা = $n(B \cap P) - n(B \cap P \cap S)$
$= 30\% - 10\% = 20\%$

শুধু বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা = $n(B \cap S) - n(B \cap P \cap S)$
$= 30\% - 10\% = 20\%$

শুধু পূর্বাণী ও সন্ধানী পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা = $n(P \cap S) - n(P \cap B \cap S)$
$= 20\% - 10\% = 10\%$

$\therefore$ শুধু দুইটি পত্রিকা পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা = $20\% + 20\% + 10\% = 50\%$ **Ans.**

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol: দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

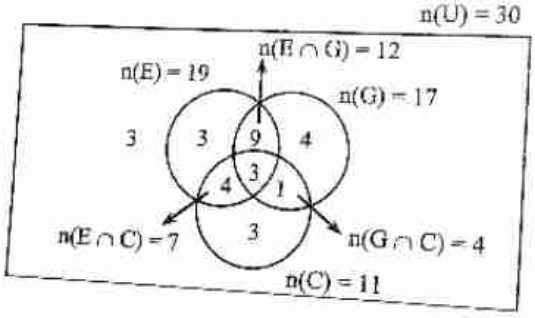
$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol:

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

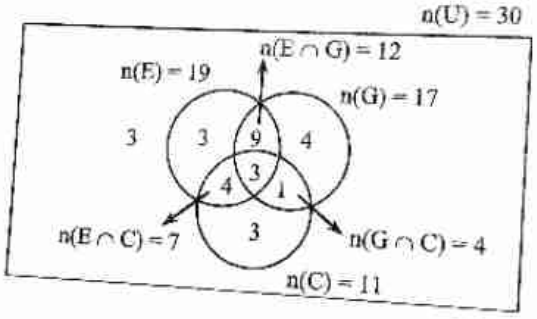
$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol"

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

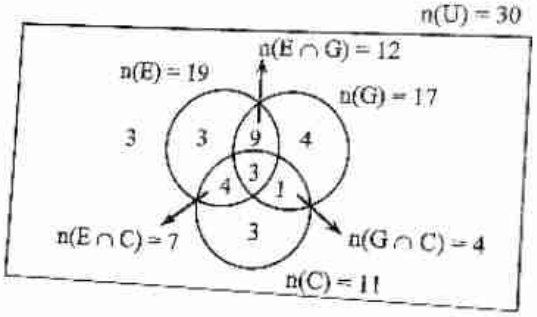
$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol' দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

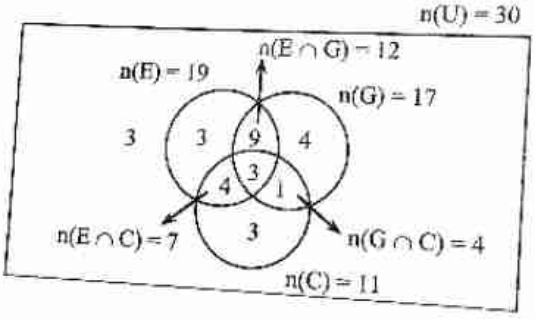
$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 7 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol'

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

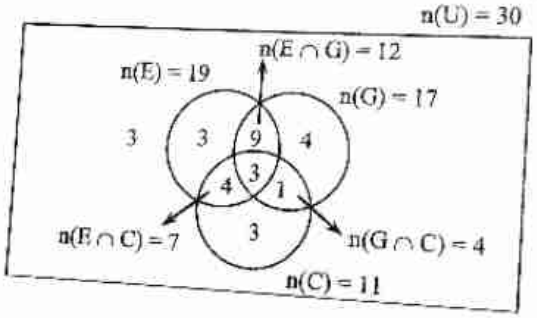
$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, ৭ জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

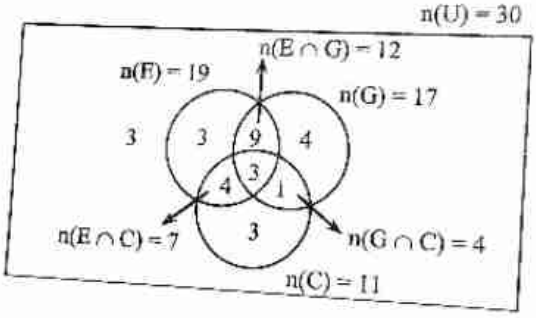
$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol"

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$
$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$
$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে = ১০%

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০%

∴ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০% − ১০% = ১০%

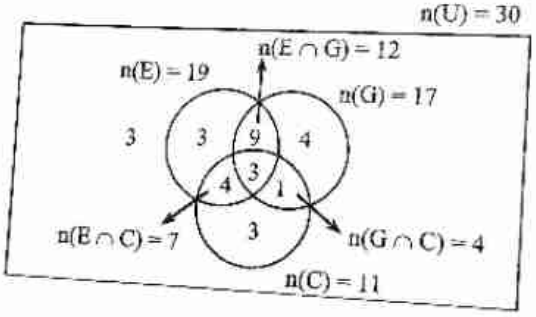
∴ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে = ২০% + ২০% + ১০% = ৫০%

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$
$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে = 27 জন।

∴ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$
$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। অতএব কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে = ১০%

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০%

∴ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০% − ১০% = ১০%

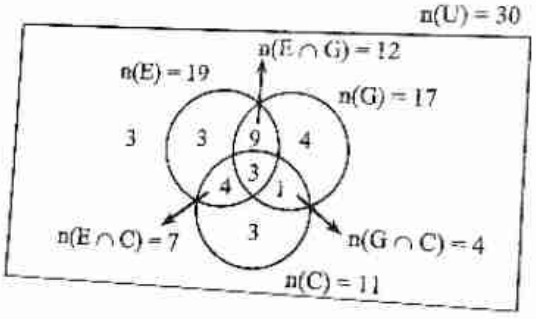
∴ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে = ২০% + ২০% + ১০% = ৫০%

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

এখানে, n(E) = 19
n(G) = 17
n(C) = 11
n(E ∩ G) = 12
n(E ∩ C) = 7
n(G ∩ C) = 4
n(E ∩ G ∩ C) = 3



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে = 27 জন।

∴ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

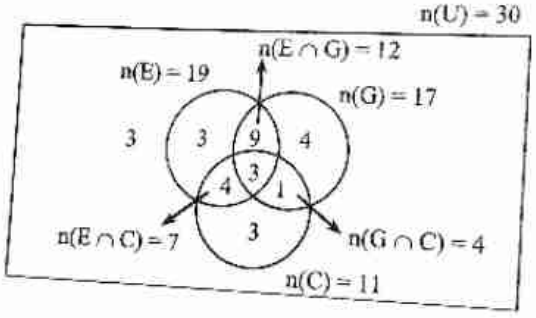
$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে = ১০%

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০%

∴ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০% − ১০% = ১০%

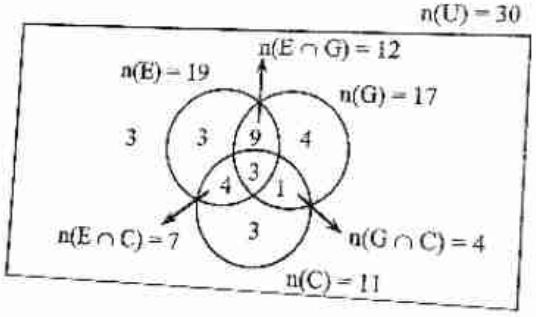
∴ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে = ২০% + ২০% + ১০% = ৫০%

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 7 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

এখানে, n(E) = 19
n(G) = 17
n(C) = 11
n(E ∩ G) = 12
n(E ∩ C) = 7
n(G ∩ C) = 4
n(E ∩ G ∩ C) = 3



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে = 27 জন।

∴ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন = 3 জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

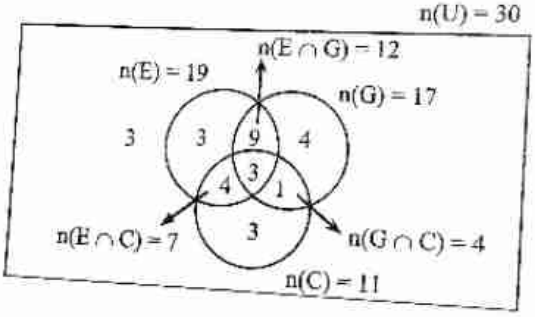
উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, ৪ জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? 15

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে $= ১০\%$

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\%$

$\therefore$ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে $= ৩০\% - ১০\% = ২০\%$

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\%$

$\therefore$ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে $= ২০\% - ১০\% = ১০\%$

$\therefore$ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে $= ২০\% + ২০\% + ১০\% = ৫০\%$

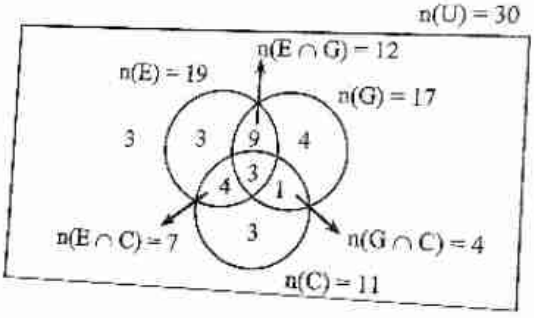
উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে $= 27$ জন।

$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol' দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে = ১০%

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০%

∴ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০% − ১০% = ১০%

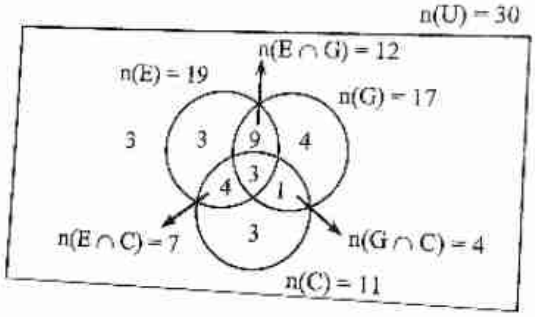
∴ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে = ২০% + ২০% + ১০% = ৫০%

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 7 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol'

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে = 27 জন।

∴ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol' দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে = ১০%

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০%

∴ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০% − ১০% = ১০%

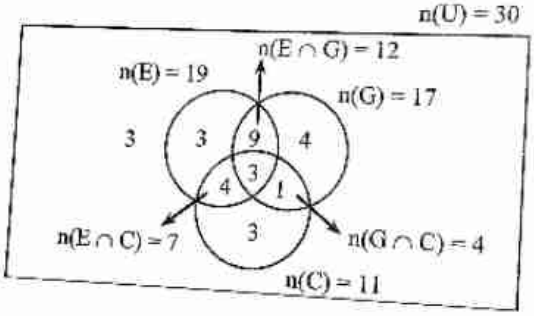
∴ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে = ২০% + ২০% + ১০% = ৫০%

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 7 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol'

এখানে, n(E) = 19
n(G) = 17
n(C) = 11
n(E ∩ G) = 12
n(E ∩ C) = 7
n(G ∩ C) = 4
n(E ∩ G ∩ C) = 3



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে = 27 জন।

∴ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস

Sol দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে = ১০%

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০%

∴ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০% − ১০% = ১০%

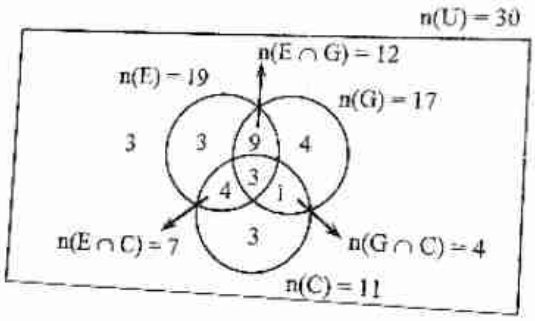
∴ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে = ২০% + ২০% + ১০% = ৫০%

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol

এখানে, $n(E) = 19$
$n(G) = 17$
$n(C) = 11$
$n(E \cap G) = 12$
$n(E \cap C) = 7$
$n(G \cap C) = 4$
$n(E \cap G \cap C) = 3$



আমরা জানি,

$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$

$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে = 27 জন।

∴ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি $= n(U) - n(E \cup G \cup C)$

$= (30 - 27)$ জন $= 3$ জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

16. ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol দেওয়া আছে, তিনটি পত্রিকাই পড়ে = ১০%

বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

আবার, বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০%

∴ কেবল বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে = ৩০% − ১০% = ২০%

এবং সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০%

∴ কেবল সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে = ২০% − ১০% = ১০%

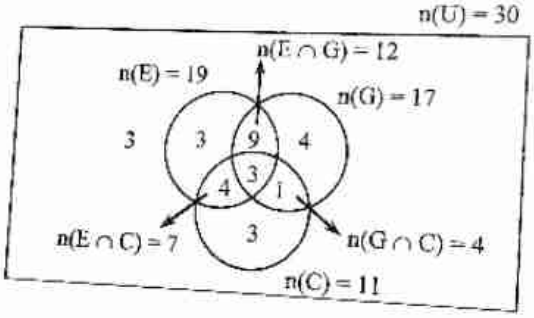
∴ কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে = ২০% + ২০% + ১০% = ৫০%

উত্তর: ৫০%

17. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol

এখানে, n(E) = 19
n(G) = 17
n(C) = 11
n(E ∩ G) = 12
n(E ∩ C) = 7
n(G ∩ C) = 4
n(E ∩ G ∩ C) = 3



আমরা জানি,

$$n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(E \cap C) - n(G \cap C) + n(E \cap G \cap C)$$

$$= 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 4 + 3 = 27$$

সুতরাং অন্তত একটি বিষয় নিয়েছে = 27 জন।

∴ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি = n(U) − n(E ∪ G ∪ C)
= (30 − 27) জন = 3 জন **(Ans.)**

18. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, 2x জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

(ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

(খ) x নির্ণয় কর।

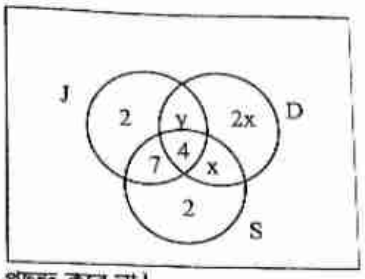
(গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

(ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৬)]

Sol (ক)
ধরি, J = যারা দৌড় পছন্দ করে,
S = যারা সাঁতার পছন্দ করে,
D = যারা নাচ পছন্দ করে।

এবার পাশের ভেনচিত্র লক্ষ করি।



(খ) ভেনচিত্র হতে, J′ = {যে সব বালিকা দৌড় পছন্দ করে না}
অর্থাৎ $n(J') = 35 - 15 = 20$
বা, $2x + x + 2 = 20$ বা, $3x = 18$ বা, $x = 6$

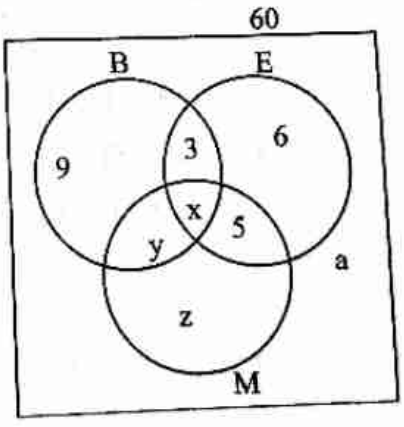
(গ) যে সব বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না: $J \cap D \cap S'$

(ঘ) ভেনচিত্রে $n(J \cap D \cap S') = y$ এবং দেওয়া আছে $n(J) = 15$
$\therefore y + 4 + 7 + 2 = 15$ বা, $y = 2$
$\therefore$ শুধু 2 জন দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না

19. কোনো পরীক্ষায় 60 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন বাংলায়, 24 জন ইংরেজিতে এবং 32 জন গণিতে ফেল করেছে। 9 জন কেবলমাত্র বাংলায়, 6 জন কেবলমাত্র ইংরেজিতে, 5 জন কেবল ইংরেজি ও গণিতে এবং 3 জন কেবল বাংলা ও ইংরেজিতে ফেল করেছে। কতজন পরীক্ষার্থী তিন বিষয়ে ফেল এবং কতজন তিন বিষয়ে পাস করেছে?

[৩৬তম বিসিএস]

Sol ধরি, সকল শিক্ষার্থীর সেট U, বাংলায় ফেল করা শিক্ষার্থীর সেট B, ইংরেজীতে ফেল করা শিক্ষার্থীর সেট E এবং গণিতে ফেল করা শিক্ষার্থীর সেট M.
ধরি, তিন বিষয়ে ফেল করে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x জন।
এখন, প্রদত্ত তথ্যগুলি চিত্রে প্রদর্শন করা হলো:



চিত্র হতে, ইংরেজিতে ফেল করে
$= (3 + 6 + x + 5)$ জন
$= (14 + x)$ জন
শর্তমতে, $14 + x = 24 \Rightarrow x = 10$ জন
$\therefore$ তিন বিষয়ে ফেল করে 10 জন। **(Ans.)**

২য় অংশ,
ধরি, বাংলা এবং গণিতে ফেল করে y জন
$\therefore \quad 9 + 3 + x + y = 25$
$\Rightarrow \quad 9 + 3 + 10 + y = 25 \quad [\because x = 10]$
$\Rightarrow \quad 22 + y = 25$
$\therefore \quad y = 3$
আবার,
ধরি, কেবল গণিতে ফেল করে = z জন
$\therefore \quad x + y + z + 5 = 32 \quad \Rightarrow 10 + 3 + z + 5 = 32 \quad \therefore z = 14$
আবার,
ধরি, সকল বিষয়ে পাস করে = a জন
$\therefore \quad 9 + 3 + 6 + 5 + x + y + z + a = 60$
$\Rightarrow \quad 23 + 10 + 3 + 14 + a = 60 \quad \Rightarrow 50 + a = 60 \quad \therefore a = 10$
Ans: 10 জন।

TYPE 11 সৃজনশীল প্রশ্ন

01. সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N \text{ এবং } x \le 6\}$, $A = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } x \le 5\}$, $B = \{x : x \text{ জোড় সংখ্যা এবং } x \le 6\}$ এবং $C = A \setminus B$.

(ক) A^c নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

(গ) দেখাও যে, $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (উদাহরণের অংক নং-২৪)]

Sol" দেওয়া আছে, $U = \{x : x \in N \text{ এবং } x \le 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } x \le 5\} = \{2, 3, 5\}$

$\therefore A^c = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4, 6\}$

(খ) দেওয়া আছে, $B = \{x : x \text{ জোড় সংখ্যা এবং } x \le 6\} = \{2, 4, 6\}$

$\therefore A \cup B = \{2, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ..... (i)

$A \setminus B = \{2, 3, 5\} - \{2, 4, 6\} = \{3, 5\}$

$B \setminus A = \{2, 4, 6\} - \{2, 3, 5\} = \{4, 6\}$

$A \cap B = \{2, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$

$\therefore (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{3, 5\} \cup \{4, 6\} \cup \{2\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ..... (ii)

সুতরাং (i) ও (ii) তুলনা করে পাই, $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

(গ) (ii) হতে পাই, $C = A \setminus B = \{3, 5\}$

$A \cap C = \{2, 3, 5\} \cap \{3, 5\} = \{3, 5\}$

$\therefore (A \cap C) \times B = \{3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$ ..... (iii)

$A \times B = \{2, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$

$C \times B = \{3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$

$\therefore (A \times B) \cap (C \times B)$

$= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$

$\cap \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$

$= \{(3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$ ..... (iv)

সুতরাং (iii) ও (iv) তুলনা করে পাই, $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$

02. সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

$A = \{x : x \in N$ এবং $2 \le x \le 7\}$

$B = \{x : x \in N$ এবং $3 < x < 6\}$

$C = \{x : x \in N$ এবং $x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

(ক) A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(খ) A' এবং $C \setminus B$ নির্ণয় কর।

(গ) $B \times C$ এবং $P(A \cap C)$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol^n (ক) এখানে, $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$

এবং $A = \{x : x \in N$ এবং $2 \le x \le 7\}$

2 থেকে 7 পর্যন্ত বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হলো 3, 5, 7

$\therefore A = \{3, 5, 7\}$

(খ) ক-হতে প্রাপ্ত, $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$

এবং $A = \{3, 5, 7\}$

এখানে, $B = \{x : x \in N$ এবং $3 < x < 6\}$

3 অপেক্ষা বড় এবং 6 অপেক্ষা ছোট বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা হলো 5

$\therefore \quad B = \{5\}$

এবং $C = \{x : x \in N$ এবং $x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

অর্থাৎ যে সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 5 অপেক্ষা বড় এবং ঘন 130 অপেক্ষা ছোট তাদের সেট।

এখানে, $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1 \ngtr 5$ এবং $x^3 = 1^3 = 1 < 130$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9 > 5$ এবং $x^3 = 3^3 = 27 < 130$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25 > 5$ এবং $x^3 = 5^3 = 125 < 130$

$x = 7$ হলে, $x^2 = 7^2 = 49 > 5$ এবং $x^3 = 7^3 = 343 \nless 130$

অর্থাৎ $C = \{3, 5\}$

$\therefore \quad A' = U \setminus A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\} \setminus \{3, 5, 7\}$

$= \{1, 9, 11, 13, ...\}$

এবং $C \setminus B = \{3, 5\} \setminus \{5\} = \{3\}$

(গ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, $A = \{3, 5, 7\}$

'খ' হতে প্রাপ্ত, $B = \{5\}$ এবং $C = \{3, 5\}$

$\therefore \quad B \times C = \{5\} \times \{3, 5\} = \{(5, 3), (5, 5)\}$

$A \cap C = \{3, 5, 7\} \cap \{3, 5\} = \{3, 5\}$

$\therefore \quad P(A \cap C) = \{\{3, 5\}, \{3\}, \{5\}, \varnothing\}.$

৫৩. সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

$A = \{x : x \in N$ এবং $2 \le x \le 7\}$

$B = \{x : x \in N$ এবং $3 < x < 6\}$

$C = \{x : x \in N$ এবং $x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

(ক) A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(খ) A' এবং $C \setminus B$ নির্ণয় কর।

(গ) $B \times C$ এবং $P(A \cap C)$ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol (ক) এখানে, $U = \{x : x \in N$ এবং x বিজোড় সংখ্যা$\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$

এবং $A = \{x : x \in N$ এবং $2 \le x \le 7\}$

2 থেকে 7 পর্যন্ত বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হলো 3, 5, 7

$\therefore A = \{3, 5, 7\}$

(খ) ক-হতে প্রাপ্ত, $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$

এবং $A = \{3, 5, 7\}$

এখানে, $B = \{x : x \in N$ এবং $3 < x < 6\}$

3 অপেক্ষা বড় এবং 6 অপেক্ষা ছোট বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা হলো 5

$\therefore B = \{5\}$

এবং $C = \{x : x \in N$ এবং $x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$

অর্থাৎ যে সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ 5 অপেক্ষা বড় এবং ঘন 130 অপেক্ষা ছোট তাদের সেট।

এখানে, $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1 \ngtr 5$ এবং $x^3 = 1^3 = 1 < 130$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9 > 5$ এবং $x^3 = 3^3 = 27 < 130$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25 > 5$ এবং $x^3 = 5^3 = 125 < 130$

$x = 7$ হলে, $x^2 = 7^2 = 49 > 5$ এবং $x^3 = 7^3 = 343 \nless 130$

অর্থাৎ $C = \{3, 5\}$

$\therefore A' = U \setminus A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\} \setminus \{3, 5, 7\}$

$= \{1, 9, 11, 13, ...\}$

এবং $C \setminus B = \{3, 5\} \setminus \{5\} = \{3\}$

(গ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, $A = \{3, 5, 7\}$

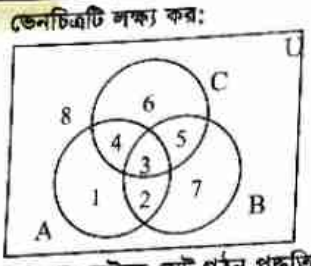
'খ' হতে প্রাপ্ত, $B = \{5\}$ এবং $C = \{3, 5\}$

$\therefore B \times C = \{5\} \times \{3, 5\} = \{(5, 3), (5, 5)\}$

$A \cap C = \{3, 5, 7\} \cap \{3, 5\} = \{3, 5\}$

$\therefore P(A \cap C) = \{\{3, 5\}, \{3\}, \{5\}, \varnothing\}$.

03. ভেনচিত্রটি লক্ষ্য কর:

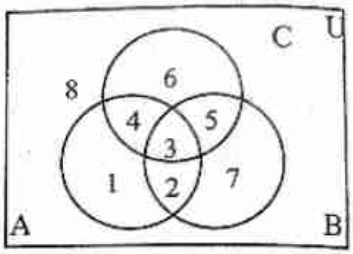


(ক) B সেটকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

(খ) উদ্দীপক ব্যবহার করে $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২)]

Sol"



(ক) ভেনচিত্র হতে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 3, 5, 7\}$

$= \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $1 \le x \le 8\}$

(খ) ভেনচিত্র হতে, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 5, 7\}$

$C = \{3, 4, 5, 6\}$

এখন, $B \cap C = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

বামপক্ষ $= A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ডানপক্ষ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ সম্পর্কটি সঠিক।

04. $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$, $B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

(ক) A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$।

(গ) প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২)]

Sol" (ক) $A = \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$

$= \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x^2 - ax - bx + ab = 0\}$

$= \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x(x - a) - b(x - a) = 0\}$

$= \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $(x - a)(x - b) = 0\}$

$= \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x = a, b\}$

$\therefore$ A সেটের উপাদানসমূহ a ও b।

(খ) দেওয়া আছে, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 4, 5\}$

$P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \varnothing\}$

$P(C) = \{\{2\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \varnothing\}$

$\therefore$ $P(B) \cap P(C) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \varnothing\} \cap \{\{2\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \varnothing\} = \{\{2\}, \varnothing\}$

আবার, $B \cap C = \{1, 2\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2\}$

$\therefore$ $P(B \cap C) = \{\{2\}, \varnothing\}$

$\therefore$ $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$. (দেখানো হলো)

(গ) দেওয়া আছে, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 4, 5\}$ এবং $A = \{a, b\}$ ['ক' হতে]

$B \cup C = \{1, 2\} \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 4, 5\}$

বামপক্ষ $= A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{1, 2, 4, 5\}$

$= \{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 1), (b, 2), (b, 4), (b, 5)\}$

আবার, $A \times B = \{a, b\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

এবং $A \times C = \{a, b\} \times \{2, 4, 5\} = \{(a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 4), (b, 5)\}$

ডানপক্ষ $= (A \times B) \cup (A \times C)$

$= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\} \cup \{(a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 4), (b, 5)\}$

$= \{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 1), (b, 2), (b, 4), (b, 5)\}$

$\therefore$ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (প্রমাণিত)

05. 24 জন ছাত্রের 18 জন বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে, 12 জন ভলিবল খেলা পছন্দ করে। দেওয়া আছে, U = শ্রেণির ছাত্রদের সেট, B = বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট, V = ভলিবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রদের সেট। মনে কর $n(B \cap V) = x$ এবং ভেনচিত্রে নিচের তথ্যগুলো ব্যাখ্যা কর:

(ক) $B \cup V$ সেটের বর্ণনা দাও এবং $n(B \cup V)$ কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

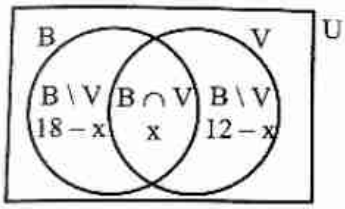
(খ) x এর সম্ভাব্য ন্যূনতম মান নির্ণয় কর।

(গ) x এর সম্ভাব্য বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (উদাহরণের অংক নং-১৭)]

Sol"

(ক) $B \cup V$ হলো এমন সব ছাত্রর সেট যারা বাস্কেটবল বা ভলিবল খেলা পছন্দ করে।



$n(B \cup V) = (18 - x) + x + (12 - x) = 30 - x$

(খ) x বা $n(B \cap V)$ ক্ষুদ্রতম যখন $B \cup V = U$

অর্থাৎ $n(B \cup V) = n(U)$ বা, $30 - x = 24$ বা, $x = 6$

$\therefore$ সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম মান $x = 6$।

(গ) $n(B \cap V)$ বৃহত্তম যখন $V \subset B$

তখন, $n(B \cap V) = n(V)$ বা, $x = x + (12 - x) = 12$

$\therefore$ সম্ভাব্য বৃহত্তম মান $x = 12$।

TYPE 12 সেটের প্রতিজ্ঞা সম্পর্কিত সমস্যা

01. দেখাও যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" সংজ্ঞানুসারে, $A \times (B \cup C)$

$= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cup C)\}$

$= \{(x, y) : x \in A, (y \in B \text{ অথবা } y \in C)\}$

$= \{(x, y) : (x \in A, y \in B) \text{ অথবা } (x \in A, y \in C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \text{ অথবা } (x, y) \in (A \times C)\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\}$

$\therefore$ $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

আবার, $(A \times B) \cup (A \times C)$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ অথবা $(x, y) \in A \times C\}$
$= \{(x, y) : x \in A, y \in B$ অথবা $x \in A, y \in C\}$
$= \{(x, y) : x \in A, (y \in B$ অথবা $y \in C\}$
$= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cup C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times (B \cup C)\}$
$\therefore \quad (A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$
সুতরাং $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (দেখানো হলো)

02. দেখাও যে, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$।

Sol সংজ্ঞানুসারে, $A \times (B \cap C)$
$= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cap C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A, (y \in B$ এবং $y \in C)\}$
$= \{(x, y) : (x \in A, y \in B)$ এবং $(x \in A, y \in C\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B)$ এবং $(x, y) \in (A \times C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\}$
$\therefore \quad A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$
আবার, $(A \times B) \cap (A \times C)$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$
$= \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x \in A, y \in C\}$
$= \{(x, y) : x \in A, (y \in B$ এবং $y \in C\}$
$= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cap C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times (B \cap C)\}$
$\therefore \quad (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$
সুতরাং $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (দেখানো হলো)

03. (ডি মরগ্যানের সূত্র)।

সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য প্রমাণ করুন:
(ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
প্রমাণ: কেবল প্রথমটির প্রমান নিচে দেখানো হয়েছে। পরেরটির প্রমাণ নিজে করুন।
মনে করি, $x \in (A \cup B)'$। তাহলে, $x \notin A \cup B$।
$\Rightarrow \quad x \notin A$ এবং $x \notin B \quad \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B' \quad \Rightarrow x \in A' \cap B'$
$\therefore \quad (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$
আবার মনে করি, $x \in A' \cap B'$। তাহলে, $x \in A'$ এবং $x \in B'$
$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B \quad \Rightarrow x \notin A \cup B \quad \Rightarrow x \in (A \cup B)'$
$\therefore \quad A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$
সুতরাং $(A \cup B)' = A' \cap B'$।

04. যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol ধরি, $(x, y) \in (A \times C)$
তাহলে, $x \in A, y \in C$
$\Rightarrow \quad x \in B, y \in D \quad [\because A \subset B$ এবং $C \subset D]$
$\Rightarrow \quad (x, y) \in (B \times D)$
$\therefore \quad (A \times C) \subset (B \times D)$ (দেখানো হলো)

05. প্রমাণ কর যে, A, B, C সান্ত সেট হলে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - (C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]*

Sol" আমরা জানি, যেকোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

এখন, $n(A \cup B \cup C) = n[A \cup (B \cup C)]$

$[\because A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$, সংযোজন নিয়ম$]$

$= n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$[\because A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [\{n(A \cap B) + n(A \cap C)$

$- n\{(A \cap B) \cap (A \cap C)\}]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$[\because (A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$[\because A \cap C = C \cap A]$

$\therefore$ $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$

$- n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ (প্রমাণিত)

TYPE 13 Miscellaneous

01. দেখাও যে, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-০৪)]*

Sol" স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$

N সেট থেকে বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ নিয়ে গঠিত সেট $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$

N সেট থেকে জোড় স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ নিয়ে গঠিত সেট $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

N সেট থেকে 3 এর গুণিতকসমূহের সেট $C = \{3, 6, 9, 12, ...\}$

এখানে, N সেট থেকে গঠিত উপরের সেটসমূহের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না। ফলে A, B, C অসীম সেট।

$\therefore$ N একটি অসীম সেট।

02. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে A ও B সেট দেওয়া আছে, $A \cup B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে, $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$।

(ক) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-3, 0, 3\}$

(খ) $A = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 2 এর গুণিতক$\}$ এবং $B = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 3 এর গুণিতক$\}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-3, 0, 3\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cup \{-3, 0, 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **(Ans.)**

$\therefore$ $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$ (যাচাই করা হলো)

(খ) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 10$ এবং x, 2 এর গুণিতক$\}$

$\therefore$ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 10$ এবং x, 3 এর গুণিতক$\}$

$\therefore$ $B = \{3, 6, 9\}$

$\therefore$ $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ **(Ans.)**

$\therefore$ $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$ (যাচাই করা হলো)

[বি.দ্র.: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে]

03. একটি শ্রেণিতে 100 জন ছাত্র ছিল। বার্ষিক পরীক্ষায় 94 জন ছাত্র গণিতে পাশ করেছে, 80 জন ছাত্র ইংরেজিতে পাশ করেছে ও 75 জন ছাত্র উভয় বিষয়ে পাশ করেছে। কত জন ছাত্র উভয় বিষয়ে ফেল করেছে? [২৫তম বিসিএস]

Sol" মোট ছাত্র 100 জন

উভয় বিষয়ে পাশ করে 75 জন

∴ শুধু গণিতে পাশ করে $(94 - 75)$ জন $= 19$ জন

∴ শুধু ইংরেজিতে পাশ করে $(80 - 75)$ জন $= 5$ জন

∴ অন্তত এক বিষয়ে পাশ করে $(75 + 19 + 5)$ জন $= 99$ জন

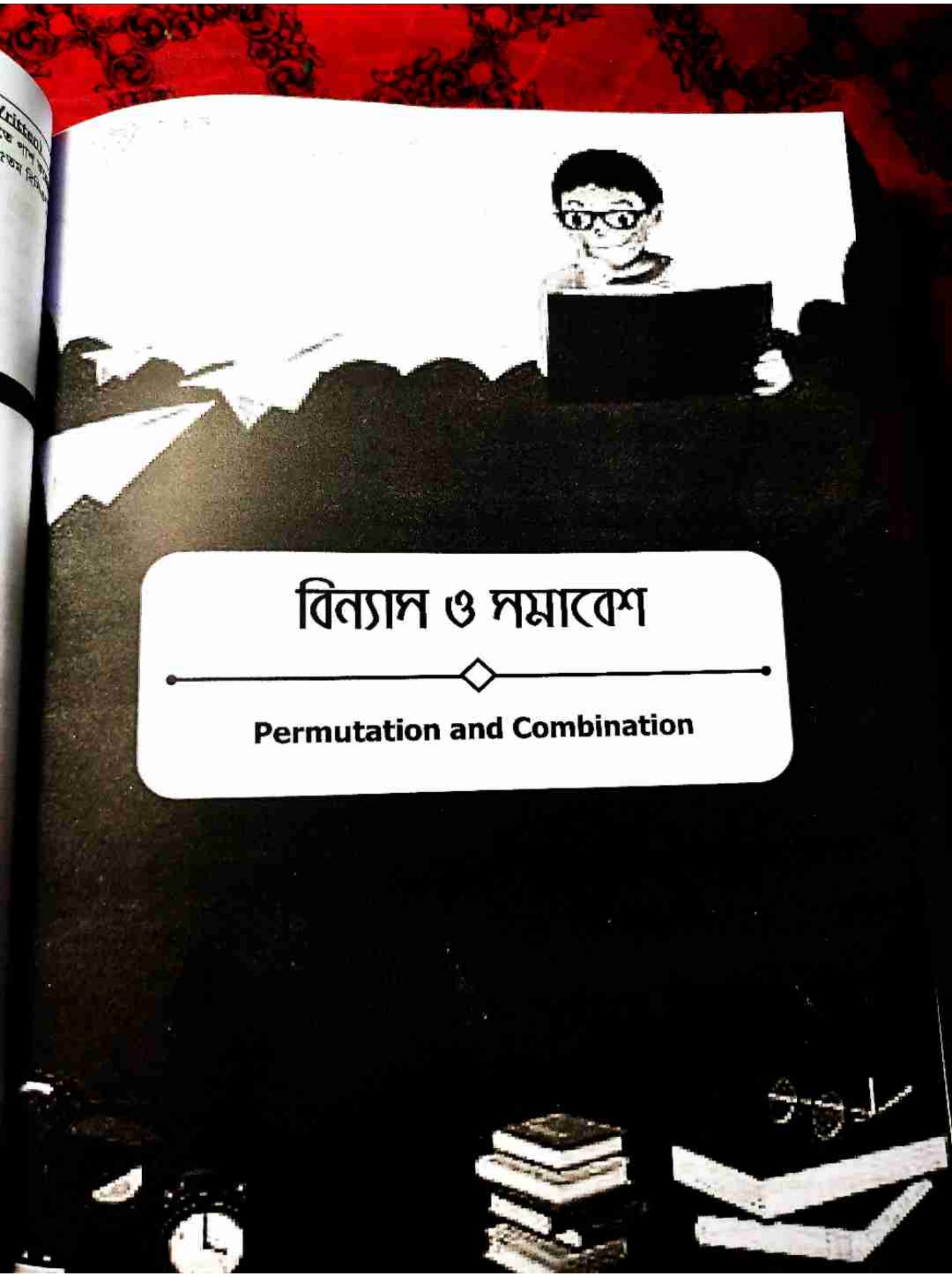
∴ উভয় বিষয়ে ফেল করে $(100 - 99)$ জন $= 1$ জন

উত্তর: 1 জন।

এই অধ্যায়ের Suggestion:

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01 (ক, ঘ)
Type-02	×
Type-03	04
Type-04	01, 03, 06
Type-05	Full (VVI)
Type-06	02, 03, 04
Type-07	02, 03
Type-08	×
Type-09	01, 03
Type-10	VVI (03, 05, 08, 09, 11, 13,
Type-11	01, 03
Type-12	01, 05
Type-13	×



বিন্যাস ও সমাবেশ

Permutation and Combination

বিন্যাস

মৌলিক এবং তথ্যমূলক প্রয়োজনীয় আলোচনা

✦ বিন্যাস (Permutation)ঃ কতগুলো জিনিস হতে কয়েকটি বা, সবকয়টি একবারে নিয়ে যত প্রকারে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায়, তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলে।

✦ সমাবেশ (Combination)ঃ কতগুলো জিনিস হতে কয়েকটি বা, সবকয়টি যত প্রকারে **বাছাই করা যায়**, তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে।

✦ বিন্যাস ও সমাবেশের মধ্যে মৌলিক পার্থক্যঃ বিন্যাসের ক্ষেত্রে দলের মধ্যে জিনিসগুলোর **সাজানোর ক্রম বিবেচনা করা হয়**, কিন্তু সমাবেশের ক্ষেত্রে সাজানোর ক্রম উপেক্ষা করা হয়।

Notes: (i) সাধারণত প্রশ্নের মধ্যে সাজানো বা **বিন্যস্ত করা** বা সংখ্যা গঠন বা শব্দ গঠন বা **মন্ত্রীসভা গঠন** উল্লেখ থাকলে বিন্যাস হয়।

(ii) সাধারণত প্রশ্নের মধ্যে **বাছাই** বা দল গঠন বা **কমিটি** গঠন বা ক্ষেত্র গঠন উল্লেখ থাকলে সমাবেশ হয়।

✦ n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস হতে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস বিবেচনা করলে, তাদের বিন্যাস সংখ্যা, ${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$; $[n, r \in Z^{+}; n \geq r]$

Notes: (i) ${}^{n}P_{r}$ প্রতীকটিকে আরো যেভাবে লিখা হয়ে থাকে : nPr বা P(n, r)

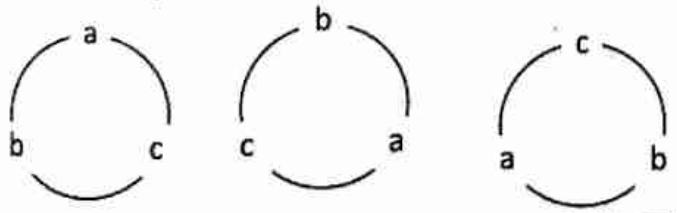
(ii) ${}^{n}P_{1} = n$, ${}^{n}P_{2} = n(n-1)$, ${}^{n}P_{3} = n(n-1)(n-2)$, ⋯ and so on.

✦ n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস হতে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস বিবেচনা করলে, তাদের বাছাই করার সংখ্যা, ${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$; $[n, r \in Z^{+}; n \geq r]$

Notes: (i) ${}^{n}C_{r}$ প্রতীকটিকে আরো যেভাবে লিখা হয়ে থাকে : nCr বা C(n, r) বা $\binom{n}{r}$

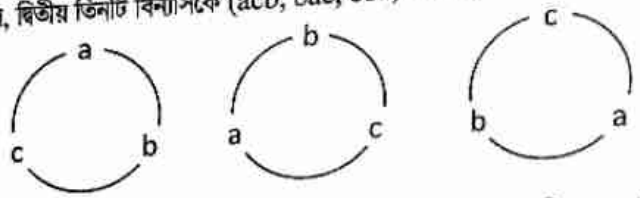
(ii) ${}^{n}C_{1} = \frac{n}{1!}$, ${}^{n}C_{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$, ${}^{n}C_{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$, ⋯ and so on.

✦ abc বর্ণগুলোর সবগুলোকে নিয়ে বিন্যাস = 3! = 6 এবং বিন্যাসগুলো হচ্ছেঃ abc, bca, cab, acb, bac, cba উপরিউক্ত প্রথম তিনটি বিন্যাসকে (abc, bca, cab) চক্রবদ্ধ করলে দাঁড়ায়-



সুতরাং, আমরা দেখছি যে চক্রবিন্যাস তিনটি অভিন্ন শুধু চক্রটিকে clockwise ঘুরানো হয়েছে।

আবার, দ্বিতীয় তিনটি বিন্যাসকে (acb, bac, cba) চক্রবদ্ধ করলে দাঁড়ায়-



এ ক্ষেত্রেও আমরা দেখছি যে চক্রবিন্যাস তিনটি অভিন্ন শুধু চক্রটিকে anti-clockwise ঘুরানো হয়েছে।

সুতরাং, আমরা দেখলাম যে abc বর্ণগুলোকে চক্রাকারে সাজানোর প্রকৃত উপায় = 2

অতএব, চক্রবিন্যাসের ক্ষেত্রে প্রকৃত বিন্যাস পাবার জন্য যে কোন একটি বস্তুকে স্থির রেখে বাকীগুলোকে নিজের মধ্যে বিন্যাস করা হবে।

∴ 'abc' 3টি বর্ণকে চক্রাকারে সাজানোর উপায় = $(3-1)! = 2! = 2$

একইভাবে, n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে চক্রাকারে সাজানোর উপায় = $(n-1)!$

কিছু গুরুত্বপূর্ণ ফ্যাক্টোরিয়াল সংখ্যার মান মুখস্থ রাখলে খুব দ্রুত হিসেব করা সম্ভব হবে।							
$0! = 1$	$1! = 1$	$2! = 2$	$3! = 6$	$4! = 24$	$5! = 120$	$6! = 720$	$7! = 5040$

Important Problems with Solution

✦ Type-01 (n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস হতে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস নিয়ে বিন্যাস):

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic, Type 01, Type 02, Type 03, Type 04 এবং Type 05 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

শব্দ বা কিছু অঙ্ক নিয়ে বিন্যাস করতে বললে শব্দটিতে মোট বর্ণ বা মোট অঙ্কের সংখ্যা হিসাব করে ${}^{n}P_{r}$ এর সূত্রে বসিয়ে দিলেই নির্ণেয় বিন্যাস পাওয়া যাবে; যেখানে n মোট বর্ণ বা অঙ্কের সংখ্যা এবং r হলো যতটি বর্ণ বা অঙ্ক নিয়ে বিন্যাস করতে হবে।

01. Cautions শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবারে 4টি নিয়ে কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ তৈরী করা সম্ভব?

Sol" Cautions শব্দটিতে 8টি বিভিন্ন অক্ষর আছে।

∴ 8টি থেকে প্রতিবার 4টি করে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে = ${}^{8}P_{4}$

$$= \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!} = 1680 \text{ Ans.}$$

02. Logarithm শব্দটির সবগুলি অক্ষর একসঙ্গে নিয়ে কতভাবে বিন্যাস করা যায়?

Sol" Logarithm শব্দটিতে 9 টি বিভিন্ন অক্ষর আছে।

∴ 9 টি অক্ষরের সবগুলি নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = ${}^{9}P_{9} = 9!$ **Ans.**

✦ Type-02 (পুনরাবৃত্তিমূলক বিন্যাস) ঃ

n সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তুকে যতবার ইচ্ছা অর্থাৎ পুনরাবৃত্তিমূলক ভাবে(এক বা একাধিকবার) নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = n^{r}

Note: n^{r} সূত্রের ক্ষেত্রেঃ **(i)** r হচ্ছে compulsory element.

(ii) $r > n$ হতে পারে, কিন্তু ${}^{n}P_{r}$ সূত্রের ক্ষেত্রে কখনই $r > n$ হতে পারে না।

01. 1, 2, 3, 4, 5 অংকগুলির প্রত্যেকটিকে যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে তিন অংকের কতগুলি বিভিন্ন রকম সংখ্যা গঠন করা যায়?

Sol^n এখানে, মোট বর্ণ 5 টি। $\therefore n = 5, r = 3$ $\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 5^3 = 125$ **Ans.**

02. 1, 2, 4, 6, 8, 9 অঙ্কগুলি পুনরাবৃত্তি সহ ব্যবহার করে তিন অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা তৈরী করা যাবে?

Sol^n এখানে, মোট অঙ্ক 6টি। $\therefore n = 6, r = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 6^3 = 216$ **Ans.**

✦ Type-03 (সবগুলি বস্তু বিভিন্ন নহে এরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাস):

যদি n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p সংখ্যক বস্তু এক প্রকার, q সংখ্যক দ্বিতীয় প্রকার, r সংখ্যক তৃতীয় প্রকার এবং অবশিষ্ট সবগুলি বস্তু ভিন্ন ভিন্ন হয়, তাহলে n সংখ্যক বস্তুর সবগুলি একসঙ্গে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{n!}{p!q!r!}$

01. 'CRITICAL' শব্দটির সব বর্ণ ব্যবহার করে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায়?

Sol^n 'CRITICAL' শব্দটিতে মোট 8 টি অক্ষর আছে। তাদের মধ্যে 2 টি C, 2 টি I আছে।

$\therefore$ বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{8!}{2!2!} = 10080$ **(Ans.)**

02. Mississippi শব্দটির সবগুলি অক্ষর একসঙ্গে নিয়ে মোট কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যাবে?

Sol^n Mississippi শব্দটিতে মোট 11 টি অক্ষর আছে; যার মধ্যে 4 টি s, 4 টি i, 2 টি p আছে এবং অবশিষ্ট 1 টি স্বতন্ত্র।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{11!}{4!4!2!}$ **Ans.**

03. MATHEMATICS শব্দটির অক্ষরগুলি দ্বারা কতভাবে বিন্যাস করা সম্ভব? নির্ণয় করুন। [৩৮ তম বিসিএস]

Sol^n MATHEMATICS শব্দটির মধ্যে 11টি বর্ণ আছে।

যেখানে, M = 2 টি; A = 2 টি; T = 2টি

$\therefore$ মোট বিন্যাস হবে, $\frac{11!}{2!2!2!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 4989600$ **(উত্তর)**

04. CALCUTTA শব্দটির বর্ণগুলোকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা AMERICA শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যার কত গুণ?

Sol^n CALCUTTA শব্দটিতে মোট অক্ষর 8 টি, যার মধ্যে 2টি C, 2টি A এবং 2টি T।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{8 \times 7!}{2 \times 2 \times 2} = 7!$

আবার, AMERICA শব্দটিতে মোট অক্ষর 7টি, যার মধ্যে 2টি A।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{7!}{2!} = \frac{7!}{2}$

অতএব, প্রথম শব্দটি দ্বিতীয়টির বিন্যাস সংখ্যা থেকে বেশি $= \frac{7!}{\frac{7!}{2}} = 2$ গুণ। **Ans.**

05. RAJSHAHI শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যা BARISAL শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যার কত গুণ?

Sol^n RAJSHAHI শব্দটিতে মোট অক্ষর 8 টি, যার মধ্যে 2টি A এবং 2টি H।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{8!}{2!2!} = \frac{8 \times 7!}{2 \times 2} = 2 \times 7!$

আবার, BARISAL শব্দটিতে মোট অক্ষর 7টি, যার মধ্যে 2টি A।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{7!}{2!} = \frac{7!}{2}$

অতএব, প্রথম শব্দটি দ্বিতীয়টির বিন্যাস সংখ্যা থেকে বেশি $= \frac{2 \times 7!}{\frac{7!}{2}} = 4$ গুণ। **Ans.**

06. AMERICA শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যা CANADA শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যার কত গুণ?

Sol" AMERICA শব্দটিতে মোট অক্ষর 7 টি, যার মধ্যে 2 টি A।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{7!}{2!} = \frac{7\times6!}{2!}$

আবার, CANADA শব্দটিতে মোট অক্ষর 6 টি, যার মধ্যে 3 টি A।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{6!}{3!} = \frac{6!}{3\times2!}$

অতএব, প্রথম শব্দটি দ্বিতীয়টির বিন্যাস সংখ্যা থেকে বেশি $= \frac{\frac{7\times6!}{2!}}{\frac{6!}{3\times2!}} = 21$ গুণ। **Ans.**

নিজে করুন:

07. 'MATURITY' শব্দটির সব বর্ণ ব্যবহার করে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায়? Ans: 20160

08. 'MILLENNIUM' শব্দটির সব বর্ণ ব্যবহার করে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায়? Ans: 226800

09. 'PARALLEL' শব্দটির সব বর্ণ ব্যবহার করে কতগুলি বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যায়? Ans: 3360

10. 9টি বলের মধ্যে 7টি লাল ও 7টি সাদা। বর্ণগুলিকে এক সারিতে কত রকমে সাজানো যায়? Ans: 36

11. BANDARBAN শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যা SYLHET শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যার কত গুণ?

Ans: 21 কত গু

✦ Type-04 (কিছু সংখ্যক বস্তু বা বর্ণ একত্রে রেখে বিন্যাস):

যদি প্রশ্নে উল্লেখ থাকে যে কতগুলো বর্ণ বা বস্তু একত্রে থাকবে, তবে তাদেরকে একটি মাত্র বর্ণ বা বস্তু বিবেচনা করে মোট বর্ণ বিন্যাস সংখ্যার সঙ্গে যে বর্ণ বা বস্তুগুলো একত্রে থাকবে তাদের নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা গুণ করতে হয়।

01. Triangle শব্দটির বর্ণগুলিকে কতভাবে সাজানো যায়, যেখানে স্বরবর্ণগুলি সর্বদা একত্রে থাকবে?

Sol" Triangle শব্দটিতে মোট বর্ণ = 8 টি (সবই ভিন্ন) এবং স্বরবর্ণ = 3 টি।

যেহেতু, স্বরবর্ণ 3 টি একত্রে থাকবে,সেহেতু, স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 6 টি।

এই 6 টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় = 6! উপায়ে।

আবার, স্বরবর্ণ তিনটিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় 3! ভাবে।

∴ সর্বমোট বিন্যাস সংখ্যা = $6! \times 3! = 4320$ **Ans.**

Note: কিছু সংখ্যক নির্দিষ্ট বর্ণ একত্রে রেখে বিন্যাস বা কিছু সংখ্যক নির্দিষ্ট বর্ণের সবগুলোকে একত্রে রেখে বিন্যাস বা কিছু সংখ্যক নির্দিষ্ট বর্ণ পাশাপাশি রেখে বিন্যাস বা কিছু সংখ্যক নির্দিষ্ট বর্ণের সবগুলোকে পাশাপাশি রেখে বিন্যাস সবগুলো কথার অর্থ একই।

02. SCIENCE শব্দটির স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে সব কয়টি বর্ণকে সম্ভাব্য যত উপায়ে সাজানো যায়, তাদের সংখ্যা কত?

Sol" SCIENCE শব্দটিতে মোট বর্ণ 7টি যাতে C আছে দুইটি এবং স্বরবর্ণ 3টি যাতে E আছে দুইটি।

যেহেতু, স্বরবর্ণ 3টি একত্রে থাকবে, সেহেতু, স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 5টি।

এই 5টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= \frac{5!}{2!}$ উপায়ে।

আবার, স্বরবর্ণ তিনটিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= \frac{3!}{2!}$ ভাবে।

∴ সর্বমোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{5!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 180$ **Ans.**

03. 'MATHEMATICS' শব্দটির সবগুলি বর্ণ একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে থাকবে?

Sol" 'MATHEMATICS' শব্দটিতে মোট 11 টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি M, 2টি A, 2টি L আছে এবং বাকীগুলো ভিন্ন।

সুতরাং সবগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{11!}{2!\,2!\,2!} = 4989600$ **Ans.**

MATHEMATICS শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণের মধ্যে 4টি স্বরবর্ণ এবং 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ।

স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে অর্থাৎ একত্রে রেখে একটি বর্ণ বিবেচনা করলে মোট বর্ণসংখ্যা 8টি

এই 8টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= \frac{8!}{2!\,2!}$ উপায়ে $= 10080$ উপায়ে

আবার, স্বরবর্ণ 4টির নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{4!}{2!} = 12$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 10080 \times 12 = 120960$ **Ans.**

04. 'PARALLEL' শব্দটির সবগুলি বর্ণ একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর; এবং স্বরবর্ণগুলিকে পৃথক না রেখে বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায়, তা বের কর।

Sol" 'PARALLEL' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 2টি A, 3টি L আছে।

সুতরাং সবগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{8!}{2!\,3!} = 3360$ **Ans.**

PARALLEL' শব্দটিতে মোট 8টি বর্ণের মধ্যে 3টি স্বরবর্ণ এবং 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ।

স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে অর্থাৎ একত্রে রেখে একটি বর্ণ বিবেচনা করলে মোট বিন্যাস $= \frac{6!}{3!}$

আবার, স্বরবর্ণ 3টির নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{3!}{2!}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{6!}{3!} \times \frac{3!}{2!} = 360$ **Ans.**

05. 3 জন বালক এবং 4জন বালিকাকে একটি সারিতে কত প্রকারে বিন্যাস করা যাবে, যাতে 3 জন বালক সর্বদাই একত্রে থাকবে?

Sol" যেহেতু, 3 জন বালক সর্বদাই একত্রে থাকবে,

সেহেতু, 3জন বালককে একজন ধরে মোট লোকসংখ্যা 5 জন। এই 5 জনকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= 5!$ উপায়ে।

আবার, 3 জন বালক নিজেদের মধ্যে সাজে 3! ভাবে। $\therefore$ সর্বমোট বিন্যাস সংখ্যা $= 5! \times 3! = 720$ **Ans.**

06. স্বরবর্ণগুলোকে সব সময় একত্রে রেখে **KACHUA** শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানোর সংখ্যা হবে-

Sol" KACHUA শব্দটিতে মোট বর্ণ 6টি যাতে স্বরবর্ণ আছে 3টি এবং A আছে দুইটি।

যেহেতু, স্বরবর্ণ 3টি একত্রে থাকবে, সেহেতু, স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 4টি।

এই 4টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= 4!$ উপায়ে। আবার, স্বরবর্ণ তিনটিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= \frac{3!}{2!}$ ভাবে।

$\therefore$ সর্বমোট বিন্যাস সংখ্যা $= 4! \times \frac{3!}{2!} = 72$ **Ans.**

07. প্রত্যেকবার সব অক্ষর নিয়ে এবং স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে 'Aluminium' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে মোট কয়টি বিন্যাস পাওয়া যাবে?

Sol" 'Aluminium' শব্দটিতে মোট 9টি অক্ষর আছে যার মধ্যে 2টি করে m, u ও i আছে। আবার শব্দটির মধ্যে 5টি স্বরবর্ণ এবং বাকি 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ রয়েছে।

5টি স্বরবর্ণকে একটি অক্ষর বিবেচনা করলে মোট অক্ষর হয় (4 + 1) টি বা 5টি যার মধ্যে 2টি m আছে।

$\therefore$ 5টি বর্ণ নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$

আবার, 5টি স্বরবর্ণের (যার মধ্যে 2টি u এবং 2টি i আছে) নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2} = 30$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 60 \times 30 = 1800$ **(Ans.)**

08. 'ENGINEERING' শব্দের সকল E গুলো একসঙ্গে রেখে সকল অক্ষরগুলোর বিন্যাসের সংখ্যা-

Sol" 'ENGINEERING' শব্দটিতে মোট বর্ণ 11টি যাতে E ও N আছে তিনটি করে এবং I ও G আছে দুইটি করে।
যেহেতু, E 3টি একত্রে থাকবে, সেহেতু, E তিনটিকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 9টি।

$\therefore$ E গুলো একসঙ্গে রেখে সকল অক্ষরগুলোর বিন্যাসের সংখ্যা $= \frac{9!}{3!2!2!} = 15120$ **Ans.**

09. 8 টি ভিন্ন ভিন্ন জিনিসকে এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে যেন দুইটি বিশেষ জিনিস একত্রে থাকে?

Sol" দুইটি বিশেষ বস্তুকে একটি মনে করে আমরা সাজানোর জন্য মোট 7টি বস্তু পাই। এই 7টি বস্তুর সবগুলো একবারে নিয়ে সাজানো সংখ্যা = 7!।
এখন এই দুইটি বিশেষ বস্তুকে তাদের নিজেদের মধ্যে 2! = 2 উপায়ে সাজানো যায়।
$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = $7! \times 2 = 10080$ **(Ans.)**

✦ Type-05 (কিছু সংখ্যক বস্তু বা বর্ণ একত্রে/পাশাপাশি না রেখে বিন্যাস):

01. **Daughter শব্দটির বর্ণগুলিকে কতভাবে সাজানো যায়, যেখানে সবগুলো স্বরবর্ণ একত্রে থাকবে না।**

Sol" **Daughter** শব্দটিতে মোট বর্ণ = 8টি (সবই ভিন্ন) এবং স্বরবর্ণ = 3টি।
প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানোর উপায় = 8!
আবার, তিনটি স্বরবর্ণকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 6 টি। এই 6 টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানোর উপায় = 6! এবং স্বরবর্ণ তিনটিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো উপায় = 3!
$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানোর উপায় $= 6! \times 3! = 4320$
$\therefore$ সবগুলো স্বরবর্ণ একত্রে না রেখে Daughter শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানো উপায় $= 8! - (6! \times 3!)$ **Ans.**

02. **স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে Triangle শব্দটির অক্ষরগুলো কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়?**

Sol" Triangle শব্দটিতে মোট বর্ণ 8টি(সবই ভিন্ন) , ব্যঞ্জন বর্ণ 5টি, স্বরবর্ণ 3টি।
$\therefore$ সবগুলি নিয়ে বিন্যাস = 8!=40320
আবার, তিনটি স্বরবর্ণকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 6 টি।
এই 6 টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানোর উপায় = 6! এবং স্বরবর্ণ তিনটিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো উপায় = 3!
$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানোর উপায় $= 6! \times 3! = 4320$
$\therefore$ সবগুলো স্বরবর্ণ পাশাপাশি না রেখে Daughter শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানো উপায়
$= 8! - (6! \times 3!) = 40320 - 4320 = 36000$ **Ans.**

03. **Vowel গুলোকে পাশাপাশি না রেখে BIOCHEM শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত উপায়ে সাজানো যায়?**

Sol" "BIOCHEM" শব্দটিতে মোট বর্ণ 7টি (সবই ভিন্ন) এবং স্বরবর্ণ 3টি।
যেহেতু, স্বরবর্ণ 3টি একত্রে থাকবে, সেহেতু, স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 5টি।
এই 5টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায়= 5! উপায়ে।
আবার, স্বরবর্ণ তিনটিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় 3! ভাবে।
$\therefore$ Vowel গুলোকে পাশাপাশি রেখে "BIOCHEM" শব্দটির অক্ষরগুলোকে সাজানো সংখ্যা = 5!×3!=720;
$\therefore$ Vowel গুলোকে পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = 7!–(5!×3!) = 4320 Ans.

04. **THESIS শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায়, যাতে স্বরবর্ণগুলি একত্রে না থাকে?**

Sol" THESIS শব্দটিতে মোট বর্ণ 6টি যাতে স্বরবর্ণ আছে 2টি যার সবগুলি ভিন্ন এবং ব্যঞ্জনবর্ণ আছে 4টি যার মধ্যে S আছে দুইটি।
প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানোর উপায় $= \frac{6!}{2!} = 360$
আবার, 2 টি স্বরবর্ণকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 5 টি।
এই 5 টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানোর উপায় $= \frac{5!}{2!}$ এবং স্বরবর্ণ দুইটিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো উপায় = 2!
$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে একত্রে রেখে প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানোর উপায় $= \frac{5!}{2!} \times 2! = 5! = 120$
$\therefore$ সবগুলো স্বরবর্ণ একত্রে না রেখে THESIS শব্দটির বর্ণগুলোকে সাজানো উপায় $= 360 - 120 = 240$ **Ans.**

5. 'Arrange' শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায়, যদি 'r' দুটি পাশাপাশি না থাকে?

Sol" 'ARRANGE' শব্দটিতে মোট বর্ণ 7টি যাতে A, R আছে দুইটি করে।
যেহেতু, 2টি R একত্রে থাকবে, সেহেতু, বর্ণ 2টিকে একটি মাত্র বর্ণ ধরে মোট বর্ণসংখ্যা 6টি।
এই 6টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= \frac{6!}{2!}$ উপায়ে। 2টি R নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $= \frac{2!}{2!} = 1$ ভাবে।
∴ দুইটি P পাশাপাশি রেখে 'ARRANGE' শব্দটির অক্ষরগুলোকে সাজানো সংখ্যা $= \frac{6!}{2!} \times 1 = \frac{6!}{2!}$
∴ দুইটি R পাশাপাশি না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা $= \frac{7!}{2!2!} - \frac{6!}{2!} = 900$ **Ans.**

6. 9 টি বলের মধ্যে 7টি লাল ও 2টি সাদা। দুইটি সাদা বল পাশাপাশি না রেখে বলগুলিকে যত প্রকারে সারিতে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন।

Sol" এখানে মোট 9টি বলের মধ্যে 7টি লাল এবং 2টি সাদা বল আছে।
∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \frac{9!}{7!\,2!} = 36$
2টি সাদা বলকে একটি মনে করে মোট বল সংখ্যা (7 + 1) বা 8টি।
∴ 8টি বলের (যার মধ্যে 7টি লাল বল আছে) বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{8!}{7!} = 8$
∴ সাদা বল দুইটি পাশাপাশি না রেখে সাজানোর সংখ্যা = 36 – 8 = 28 **(Ans.)**

7. দুইটি বিশেষ পুস্তককে একত্রে না রেখে 7 টি বিভিন্ন পুস্তককে যত প্রকারে সাজানো যায়, তার সংখ্যা-

Sol" যেহেতু, দুইটি বিশেষ পুস্তক একত্রে থাকবে, সেহেতু, পুস্তক 2টিকে একটি মাত্র ধরে মোট সাজানো সংখ্যা=6!; আবার, পুস্তক 2টির নিজেদের মধ্যে সাজানো সংখ্যা= 2!;
∴ দুইটি বিশেষ পুস্তক একত্রে রেখে সাজানো সংখ্যা= 6!×2!
∴ দুইটি বিশেষ পুস্তক একত্রে না রেখে মোট সাজানো সংখ্যা = 7!–(6!×2!) = 7.6!–2.6!=5.6! **Ans.**

8. 8টি ভিন্ন ভিন্ন জিনিসকে এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে যেন দুইটি বিশেষ জিনিস প্রতি সাজানো ব্যবস্থায় একত্রে না থাকে?

Sol" আটটি বস্তু একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা = 8! = 40320।
দুইটি বিশেষ বস্তুকে একটি মনে করে আমরা সাজানোর জন্য মোট 7টি বস্তু পাই। এই 7টি বস্তুর সবগুলো একবারে নিয়ে সাজানো সংখ্যা = 7!।
এখন এই দুইটি বিশেষ বস্তুকে তাদের নিজেদের মধ্যে 2! = 2 উপায়ে সাজানো যায়।
∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = 7! × 2 = 10080
∴ দুইটি বস্তু একত্রে থাকবে না এরূপভাবে সাজানো সংখ্যা = 40320 – 10080 = 30240 **(Ans.)**

✦ Type-06 (কিছু সংখ্যক বস্তু বা বর্ণ স্থান স্থির থাকবে):

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic, Type 06, Type 07, Type 08 এবং Type 09 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

প্রশ্নের মধ্যে কতগুলো বর্ণ বা বস্তু স্থির থাকবে অথবা অপরিবর্তিত থাকবে অথবা স্থান পরিবর্তন করবে না অথবা বাদ থাকবে উল্লেখ থাকলে তাদেরকে একেবারেই বিরক্ত না করে তাদের নিজ নিজ অবস্থানে স্থির রেখে অবশিষ্টগুলো নিয়ে বিন্যাস নির্ণয় করতে হয়।

01. কোন স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে **Director** শব্দটির বর্ণগুলিকে কতভাবে সাজানো যায়?

Sol" Director শব্দটিতে তিনটি স্বরবর্ণ I, E, O কে নিজ নিজ স্থানে রেখে বাকী 5 টি বর্ণকে সাজানো যায় $= \frac{5!}{2!}$
= 60 ভাবে। **Ans.** [2! দিয়ে ভাগ করা হয়েছে, কারণ 2 টি R আছে]

02. "Permutation" শব্দটির বর্ণগুলোর মধ্যে স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে বর্ণগুলোকে কত রকমে পুনরায় সাজানো যাবে?

Sol" "PERMUTATION" শব্দটিতে মোট বর্ণ 11টি, ব্যঞ্জনবর্ণ 6টি যাতে t আছে দুইটি এবং স্বরবর্ণ 5টি।

∴ স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে বিন্যাস $= \frac{6!}{2!} = 360$ উপায়ে।

∴ পূর্ণবিন্যাস সংখ্যা $= 360 - 1 = 359$ **Ans.**

✦ Type-07 (আপেক্ষিক অবস্থান অপরিবর্তিত রেখে বিন্যাস):

Technique: স্বরবর্ণ ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান অপরিবর্তিত রেখে বিন্যাস করতে হলে স্বরবর্ণগুলোকে স্বরবর্ণের স্থানে এবং ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে ব্যঞ্জনবর্ণের স্থানে সাজিয়ে দুটির সাজানোর সংখ্যা গুণ করতে হয়।

01. স্বরবর্ণ এবং ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে **Director** শব্দটির অক্ষর গুলিকে কতভাবে সাজানো যায়?

Sol" Director শব্দটিতে স্বরবর্ণ = 3 টি এবং ব্যঞ্জনবর্ণ = 5 টি (তার মধ্যে 2 টি R)।

স্বরবর্ণ 3 টিকে নিজ স্থানে সাজানো যায় = 3! ভাবে।

আবার, ব্যঞ্জনবর্ণ 5 টিকে নিজ স্থানে সাজানো যায় $= \frac{5!}{2!}$ ভাবে।

∴ সর্বমোট বিন্যাস সংখ্যা $= 3! \times \frac{5!}{2!} = 360.$ **Ans.**

02. স্বরবর্ণ এবং ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে **ASHRAFUL** শব্দটির অক্ষর গুলিকে কতভাবে সাজানো যায়?

Sol" ASHRAFUL শব্দটিতে স্বরবর্ণ = 3 টি (তার মধ্যে 2 টি A) এবং ব্যঞ্জনবর্ণ = 5 টি।

স্বরবর্ণ 3 টিকে নিজ স্থানে সাজানো যায় $= \frac{3!}{2!}$ ভাবে।

আবার, ব্যঞ্জনবর্ণ 5 টিকে নিজ স্থানে সাজানো যায় = 5! ভাবে।

∴ সর্বমোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{3!}{2!} \times 5! = 360.$ **Ans.**

✦ Type-08 (কিছু সংখ্যক বস্তু বা বর্ণ বিশেষ অবস্থানে রেখে বিন্যাস):

Technique: কতগুলি বর্ণ বা বস্তু বিশেষ স্থানে অবস্থিত এরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাস (কখনও কখনও প্রশ্নে বলা হয় যে কিছু বর্ণ জোড় বা বিজোড় অবস্থানে থাকবে) সংখ্যা বের করতে হলে যেসব বর্ণ বিশেষ স্থানে বসবে তাদেরকে প্রথমে বিশেষ স্থানে বিন্যাস করে পরে অবশিষ্ট বর্ণগুলো বাকী স্থানে বিন্যাস করে দু'টির বিন্যাস সংখ্যা গুণ করতে হয়।

01. ব্যঞ্জনবর্ণগুলো কেবল বিজোড় স্থানে রেখে **Equation** শব্দটির বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায়?

Sol" Equation শব্দটিতে মোট বর্ণ = 8 টি, ব্যঞ্জন বর্ণ = 3 টি, স্বরবর্ণ = 5 টি।

4 টি অবস্থান বিজোড় (প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম, সপ্তম)।

①	2	③	4	⑤	6	⑦	8

সুতরাং, 3 টি ব্যঞ্জনবর্ণকে 4 টি বিজোড় স্থানে সাজানোর উপায় $= {}^4P_3$

এবং বাকী 5 টি স্থানে 5 টি স্বরবর্ণ সাজানো যায় = 5! ভাবে।

∴ মোট বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_3 \times 5! = 2880$ **Ans.**

02. স্বরবর্ণগুলি কেবলমাত্র বিজোড় স্থানে বসিয়ে 'ARTICLE' শব্দটির বর্ণগুলি কত রকমে সাজানো যায়?

Sol" 'ARTICLE' শব্দটিতে মোট 7 টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 3 টি স্বরবর্ণ (A, I, E)। 7 টি অবস্থানের 4 টি অবস্থান বিজোড়, প্রতিবারে তাদের 3 টি স্বরবর্ণ দ্বারা পূর্ণ করা যায় ${}^4P_3$ উপায়ে। অবশিষ্ট 1 টি বিজোড় স্থান এবং 3 টি জোড় স্থানে 4 টি ব্যঞ্জনবর্ণকে সাজানো যায় ${}^4P_4$ উপায়ে।

∴ স্বরবর্ণগুলোকে শুধু বিজোড় স্থানে রেখে যতগুলো বিন্যাস গঠন করা যায় তার সংখ্যা

$= {}^4P_3 \times {}^4P_4 = 4.3.2 \times 4.3.2.1 = 24 \times 24 = 576$ **(Ans.)**

03. 'POSTAGE' শব্দটির বর্ণগুলি কত রকমে সাজানো যায় যেন স্বরবর্ণগুলি জোড় স্থান দখল করে? শব্দটি বর্ণগুলি কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্রে থাকবে?

Sol 'POSTAGE' শব্দটিতে মোট 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ আছে।
সাতটি স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান ও 3টি জোড় স্থান।
∴ 3 টি স্বরবর্ণকে 3টি জোড়স্থানে মোট ${}^3P_3 = 3.2.1 = 6$ উপায়ে সাজানো যায়।
অবশিষ্ট 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ 4টি স্থানে মোট ${}^4P_4 = 4.3.2.1 = 24$ উপায়ে সাজানো যায়।
∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 6 \times 24 = 144$ **Ans.**

এবার, 4টি ব্যঞ্জনবর্ণকে একত্রে একটি বর্ণ বিবেচনা করলে শব্দটিতে মোট বর্ণসংখ্যা 4 এবং তাদের বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_4$
আবার, ঐ ব্যঞ্জনবর্ণগুলোর নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_4$
সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_4 \times {}^4P_4$
$= 4.3.2.1 \times 4.3.2.1 = 24 \times 24 = 576$ **Ans.**

04. Zephyr শব্দটির অক্ষর গুলোকে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায়, যেন y ও z সারির প্রথমে বা শেষে না থাকে?

Sol প্রদত্ত শব্দটির বর্ণ সংখ্যা 6 টি।
যেহেতু, y ও z সারির প্রথমে বা শেষে থাকবে না।সেহেতু, এদেরকে ঐ দুই স্থান বাদে অন্য চারটি স্থানে ${}^4P_2$ ভাবে বসানো যায়।
অবশিষ্ট চারটি স্থানে বাকী অক্ষর গুলোকে ${}^4P_4$ ভাবে বসানো যায়।
∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= {}^4P_2 \times {}^4P_4 = 12 \times 24 = 288$ **Ans.**

✦ Type-09 (কোন বস্তু বা বর্ণ সুনির্দিষ্ট অবস্থানে রেখে বিন্যাস):

01. Immediate শব্দটির অক্ষর গুলো কত প্রকারে সাজানো যায়? এদের মধ্যে কতগুলোতে প্রথমে t এবং শেষে a থাকবে?

Sol Immediate শব্দটিতে মোট 9 টি অক্ষর আছে।
যার মধ্যে i দুইটি, m দুইটি, e দুইটি।

t								a

অক্ষরগুলোকে সাজানো যায় $\frac{9!}{2!2!2!}$ **Ans.**

প্রথমে t এবং শেষে a রেখে সাজানো সংখ্যা $= \frac{7!}{2!2!2!} = 630$. **Ans.**

02. প্রতিবার প্রথমে ও শেষে U রেখে CALCULUS শব্দটির অক্ষরগুলিকে কতভাবে সাজানো যাবে?

Sol 'CALCULUS' শব্দটিতে মোট অক্ষর 8 টি, যাতে C, U, L আছে দুইটি করে।
প্রথম ও শেষ অক্ষর U হবে বিধায় প্রথম ও শেষ স্থান দুটিতে U এর বিন্যাস =1; অবশিষ্ট 6টি স্থানে অবশিষ্ট 6টি অক্ষরের বিন্যাস= 6!

কিন্তু ইহাতে 2টি C ও দুইটি L থাকায় বিন্যাস হবে= $\frac{6!}{2!2!} = 180$

∴ নির্ণেয় বিন্যাস $= 1 \times 180 = 180$ **Ans.**

03. 'Geometry' শব্দটির বর্ণগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় যেন প্রথম ও শেষ অক্ষর 'e' থাকে?

Sol 'Geometry' শব্দটিতে মোট 8 টি বর্ণ আছে যার মধ্যে দুইটি 'e' এবং বাকীগুলো ভিন্ন।
∴ প্রথমে ও শেষে 'e' রেখে বাকী 6টি বর্ণকে একত্রে নিয়ে সাজানোর উপায়
$= 6! = 720$ **Ans.**

04. 'MATHEMATICS' শব্দটির বর্ণগুলিকে কত রকমে সাজানো যাবে যেখানে প্রথম ও শেষ স্থানে 'T' থাকবে?

Sol 'MATHEMATICS' শব্দটিতে মোট বর্ণ 11টি, যাতে M, A, T আছে দুইটি করে। প্রথম ও শেষে 'T' হবে বিধায় প্রথম ও শেষে 'T' এর বিন্যাস = 1; অবশিষ্ট 9টি স্থানে 9টি বর্ণের বিন্যাস $= \frac{9!}{2!2!} = 90720$ Ans.

05. **INFORMATION** শব্দটির বর্ণগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যাবে যখন প্রথমে I এবং শেষে I থাকে?

Sol" 'INFORMATION' শব্দটিতে মোট বর্ণ 11টি, যাতে N, I, O আছে দুইটি করে।

প্রথম ও শেষে 'I' হবে বিধায় প্রথম ও শেষে 'I' এর বিন্যাস = 1;

অবশিষ্ট 9টি স্থানে 9টি বর্ণের বিন্যাস $= \frac{9!}{2!2!} = 90720$ Ans.

06. **COURAGE** শব্দটির বর্ণগুলো নিয়ে কতগুলো বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায়, যেন প্রত্যেক বিন্যাসের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকে? [৩৬ তম বিসিএস]

Sol" "COURAGE" শব্দটিতে মোট বর্ণ 7টি, ব্যঞ্জন বর্ণ 3টি, স্বরবর্ণ 4টি।

প্রথম স্থানে স্বরবর্ণকে বসানোর উপায় $= {}^4P_1 = 4$;

শব্দটির অবশিষ্ট বর্ণগুলো নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

∴ প্রত্যেক বিন্যাসের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ নিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times 6! = 4 \times 720 = 2880$ **Ans.**

07. যদি **TIME** শব্দটির অক্ষরগুলোকে পুনর্বিন্যাস করা হয়, তবে কতগুলো বিন্যাস স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হয়?

Sol" TIME শব্দটিতে মোট বর্ণ 4টি। স্বরবর্ণ 2টি, ব্যঞ্জন বর্ণ 2টি।

প্রথম স্থানে স্বরবর্ণকে বসানোর উপায়= ${}^2P_1 = 2$; অবশিষ্ট 3টি স্থানে অবশিষ্ট 3টি বর্ণ বসানোর উপায়= ${}^3P_3 = 6$

∴ স্বরবর্ণকে প্রথমে রেখে বিন্যাস $= 2 \times 6 = 12$

∴ স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হয়ে TIME শব্দটির পুনর্বিন্যাস = 12

[যেহেতু স্বরবর্ণ দ্বারা শুরু হলে TIME শব্দটি পাওয়া যায় না, সেহেতু পুনর্বিন্যাস বলা হলেও 1 বিয়োগ হবে না।] **Ans.**

08. **'SECOND'** শব্দটির বর্ণগুলি থেকে **1** টি স্বরবর্ণ ও **2** টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ এর সংখ্যা নির্ণয় কর, যাতে স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যস্থানে থাকে।

Sol" 'SECOND' শব্দটি 2 টি স্বরবর্ণ এবং 4 টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে গঠিত। নতুন যে শব্দগুলো গঠিত হবে তার মধ্যে 1 টি স্বরবর্ণ এবং 2 টি ব্যঞ্জনবর্ণ থাকতে হবে। যেহেতু স্বরবর্ণটি মধ্যস্থানে থাকতে হবে, সুতরাং 2 টি স্বরবর্ণ হতে তা ${}^2P_1 = 2! = 2$ ভাবে নেওয়া যেতে পারে। আবার, 4 টি ব্যঞ্জনবর্ণ হতে 2 টি ব্যঞ্জনবর্ণ ${}^4P_2 = 4.3 = 12$ ভাবে নেওয়া যেতে পারে।

∴ নির্ণেয় গঠিত শব্দের সংখ্যা $= 2 \times 12 = 24$ **(Ans.)**

নিজে করুন:

09. প্রতিবার প্রথমে ও শেষে M রেখে **MILLENNIUM** শব্দটির অক্ষরগুলিকে কতভাবে সাজানো যাবে? **Ans: 5040**

10. **IDENTITY** শব্দটির অক্ষর গুলো কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে প্রথমে I এবং শেষে T থাকবে? কতগুলিতে I দুইটি এবং T দুইটি একত্রে থাকবে? ? **Ans: 720 & 720**

11. **MATURITY** শব্দটির অক্ষর গুলো কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে প্রথমে M থাকবে? **Ans: 2520**

12. **EQUATION** শব্দটির অক্ষর গুলো কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে প্রথমে E থাকবে? **Ans: 5040**

✦ Type-10 (কিছু সংখ্যক বস্তু বা বর্ণ একই ক্রমে রেখে বিন্যাস):

Technique: কতগুলো বর্ণ বা বস্তু একই ক্রমে রেখে বিন্যাস করতে হলে যে বর্ণ বা বস্তুগুলো একইক্রমে থাকবে তাদেরকে নিজেদের মধ্যে যতভাবে সাজানো যায় সেই সংখ্যা দিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যাকে ভাগ করতে হয়।

01. স্বরবর্ণগুলির ক্রম পরিবর্তন না করে **'DIRECTOR'** শব্দটি কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

Sol" Director শব্দটিতে স্বরবর্ণ =3 টি এবং ব্যঞ্জনবর্ণ =5 টি (তার মধ্যে 2 টি R)।

I, E, O স্বরবর্ণগুলি ক্রম পরিবর্তন করবে না বলে, এদের এক জাতীয় বর্ণ বিবেচনা করে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{8!}{3!2!} = 3360$ **Ans.**

02. **Violent** শব্দের বর্ণগুলিকে কতভাবে পুনর্বিন্যাস করা যায়, যদি স্বরবর্ণগুলি ক্রম পরিবর্তন না করে?

Sol" I, O, E স্বরবর্ণগুলি ক্রম পরিবর্তন করবে না বলে, এদের এক জাতীয় বর্ণ বিবেচনা করে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{7!}{3!} = 840$

∴ পুর্নবিন্যাস সংখ্যা $= (840 - 1) = 839$ **Ans.**

✦ Type-11 (সংখ্যা গঠন সম্পর্কিত সমস্যা):

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basicএবং Type 11 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

01. 1, 3, 5, 7, 9, অংকগুলো থেকে তিনটি ভিন্ন অঙ্ক নিয়ে 200 থেকে বৃহত্তর তিন অঙ্কের যে সকল সংখ্যা গঠন করা যায়, তাদের সংখ্যা কত?

Sol" যেহেতু সংখ্যাগুলো 3 অঙ্ক বিশিষ্ট এবং 200 অপেক্ষা বড় সেহেতু সংখ্যাগুলো 3 বা 3 এর চেয়ে বড় অঙ্ক (3, 5, 7, 9) দ্বারা শুরু হবে, যা করার উপায় = ${}^4P_1 = 4$;

আবার, অবশিষ্ট 2টি স্থান বাকী 4টি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করার উপায় = ${}^4P_2 = 12$

∴ নির্ণেয় বিন্যাস = $4 \times 12 = 48$ **Ans.**

02. 1, 3, 5, 7 ও 8 দ্বারা কতগুলি সংখ্যা বানানো যায় যারা 300 থেকে বড় এবং 700 থেকে ছোট হবে?

Sol" যেহেতু সংখ্যাগুলো 300 থেকে বড় এবং 700 থেকে ছোট হবে সেহেতু সংখ্যাগুলো 3 অঙ্ক বিশিষ্ট এবং (3, 5) দ্বারা শুরু হবে, যা করার উপায় = ${}^2p_1 = 2$; আবার, অবশিষ্ট 2টি স্থান বাকী 4টি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করার উপায়= ${}^4p_2 = 12$

∴ নির্ণেয় বিন্যাস = $2 \times 12 = 24$ **Ans.**

03. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ও 7 থেকে পুনরাবৃত্তি ছাড়া তিন অঙ্কের সংখ্যা গঠন করা হলে কয়টি সংখ্যার মান 100 থেকে 500 এর মধ্যে?

Sol" যেহেতু সংখ্যাগুলো 100 থেকে 500 এর মধ্যে সেহেতু সংখ্যাগুলো 3 অঙ্ক বিশিষ্ট এবং (1, 2, 3, 4) দ্বারা শুরু হবে, যা করার উপায় = ${}^4P_1 = 4$;

আবার, অবশিষ্ট 2টি স্থান বাকী 6টি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করার উপায়= ${}^6P_2 = 30$

∴ নির্ণেয় বিন্যাস = $4 \times 30 = 120$ **Ans.**

04. 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলির একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

Sol" 5000 ও 6000 এর মধ্যবর্তী সংখ্যা 4 অঙ্ক বিশিষ্ট হবে এবং প্রথম অঙ্কটি '5' দ্বারা শুরু হবে। এখানে 6 টি অঙ্ক আছে, তাহলে প্রথম স্থানে 5 বসিয়ে বাকি $(6-1)$ বা 5 টি অঙ্ক দ্বারা অবশিষ্ট 3 টি স্থান পূরণ করা যাবে ${}^5P_3$ বা 60 হবে। **(Ans.)**

05. 3, 5, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি এক বা একাধিক বার ব্যবহার করে 7000 থেকে বড় চার অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

Sol" যেহেতু সংখ্যাগুলো 4 অঙ্ক বিশিষ্ট এবং 7000 অপেক্ষা বড় সেহেতু সংখ্যাগুলো 7 বা 7 এর চেয়ে বড় অঙ্ক (7, 8, 9) দ্বারা শুরু হবে, যা করার উপায়= ${}^3P_1 = 3$; আবার, অবশিষ্ট 3টি স্থান অবশিষ্ট 5টি অঙ্ক দ্বারা পূর্ণ করার উপায় = $5^3 = 125$

∴ নির্ণেয় বিন্যাস = $3 \times 125 = 375$ **Ans.**

06. কোনো সংখ্যায় কোনো অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে **0, 3, 5, 6, 8** অঙ্কগুলি দ্বারা **4000** অপেক্ষা বড় কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

Sol" পুনরাবৃত্তি না করে 0, 3, 5, 6, 8 অঙ্কগুলি দ্বারা 4000 অপেক্ষা বড় সংখ্যাগুলি চার অঙ্কেরও হতে পারে, আবার পাঁচ অঙ্কেরও হতে পারে।

এখন, চার অঙ্কবিশিষ্ট অথচ 4,000 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যাগুলো 5, 6 কিংবা 8 দ্বারা আরম্ভ হবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3P_1 \times {}^4P_3 = 72$

আবার, পাঁচ অঙ্কের দ্বারা গঠিত সংখ্যা $= 5!$। কিন্তু সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবে না। এদের মধ্যে প্রথম স্থানে '0' থাকবে এরূপ সংখ্যা $4!$

$\therefore$ পাঁচ অঙ্কের অর্থপূর্ণ সংখ্যা $= 5! - 4! = 120 - 24 = 96$

$\therefore$ সর্বমোট সংখ্যা হবে $= (72 + 96)$ টি $= 168$ টি। **(Ans.)**

07. প্রত্যেক অংক কেবল একবার নিয়ে একটি সংখ্যায় ব্যবহার করে **0, 1, 2, 3, 4, 5** অংকগুলি দ্বারা ছয় অংক বিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা গঠন করা যায়-

Sol" মোট অংক সংখ্যা, $n = 6$ $\because$ ছয় অংকবিশিষ্ট সংখ্যা নিয়ে বিন্যাস।

প্রদত্ত অংকগুলো দ্বারা ছয় অংকবিশিষ্ট সংখ্যা গঠনের উপায় $= 6! = 720$

আবার যেহেতু অর্থপূর্ণ সংখ্যা, সেহেতু প্রথম অংক শূণ্য হতে পারবে না।

$\therefore$ 0 দ্বারা আরম্ভ হয় এরূপ সংখ্যা গঠনের উপায় $5! = 120$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা গঠনের উপায় $= = 720 - 120 = 600$ **Ans.**

08. **1, 3, 0, 3, 5, 5** অংকগুলো দ্বারা **1,00000** এর চেয়ে বৃহত্তম কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে?

Sol" 6 টি অঙ্কের মধ্যে 2 টি '3' ও 2 টি '5' রয়েছে।

প্রদত্ত অংকগুলো ব্যবহার করে 100000 থেকে বৃহত্তর সংখ্যা গঠন করতে হলে সংখ্যাটি ছয় অংকবিশিষ্ট হতে হবে।

প্রদত্ত অংকগুলো দ্বারা ছয় অংকবিশিষ্ট সংখ্যা গঠনের উপায় $= \frac{6!}{2!2!} = 180$

কিন্তু 0 দ্বারা আরম্ভ হয় এরূপ সংখ্যা গঠনের উপায় $= \frac{5!}{2!2!} = 30$

$\therefore$ 100000 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার সংখ্যা $= 180 - 30 = 150$ **Ans.**

09. **5, 5, 0, 6, 7, 7** অঙ্কগুলো দ্বারা **500000** থেকে বৃহত্তর কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে?

Sol" 6 টি অঙ্কের মধ্যে 2 টি '5' ও 2 টি '7' রয়েছে।

প্রদত্ত অংকগুলো ব্যবহার করে 500000 থেকে বৃহত্তর সংখ্যা গঠন করতে হলে সংখ্যাটি ছয় অংকবিশিষ্ট হতে হবে।

প্রদত্ত অংকগুলো দ্বারা ছয় অংকবিশিষ্ট সংখ্যা গঠনের উপায় $= \frac{6!}{2!2!} = 180$

কিন্তু 0 দ্বারা আরম্ভ হয় এরূপ সংখ্যা গঠনের উপায় $= \frac{5!}{2!2!} = 30$

$\therefore$ 500000 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার সংখ্যা $= 180 - 30 = 150$ **Ans.**

10. **223355888** সংখ্যাটির অংকগুলোকে পুনর্বিন্যস্ত করে কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় যাতে বিজোড় অংকগুলো জোড় স্থান দখল করে?

Sol"

1	②	3	④	5	⑥	7	⑧	9

বিজোড় 4টি অংককে 4টি জোড় স্থানে বসানোর উপায় $= \frac{4!}{2!2!} = 6$

5টি জোড় অংককে বাকি 5টি স্থানে বসানোর উপায় $= \frac{5!}{2!3!} = 10$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা গঠনের উপায় $= 6 \times 10 = 60$ **Ans.**

11. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6, 5, 2, 3, 0 দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

Sol এক্ষেত্রে 3 কে সর্বডানে রেখে অবশিষ্ট 4টি অঙ্ক নিজেদের মধ্যে 3 এর বাম দিকে সাজালে পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা হবে।
অনুরূপ 5 কে সর্বডানে রাখলেও সংখ্যাগুলি বিজোড় হবে।
∴ 3 কে সর্বডানে রেখে মোট বিজোড় সংখ্যা $= {}^4P_4 = 4! = 24$
কিন্তু 0 কে প্রথমে এবং 3 কে সর্বডানে রেখে গঠিত সংখ্যা অর্থপূর্ণ পাঁচ অংক বিশিষ্ট হবে না।
0 কে প্রথমে এবং 3 কে সর্বডানে রেখে গঠিত মোট সংখ্যা $= {}^3P_3 = 3! = 6$
∴ 3 কে সর্বডানে রেখে গঠিত অর্থপূর্ণ পাঁচ অংকবিশিষ্ট মোট বিজোড় সংখ্যা $= 24 - 6 = 18$
অনুরূপ 5 কে সর্বডানে রেখে গঠিত অর্থপূর্ণ পাঁচ অংকবিশিষ্ট মোট বিজোড় সংখ্যা $= 18$
∴ নির্ণেয় মোট সংখ্যা $= 18 + 18 = 36$ **Ans.**

12. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 0, 1, 2, 5, 6 দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর।

Sol 0, 1, 2, 5, 6 প্রদত্ত অঙ্কগুলি ব্যবহার করে পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট বিজোড় সংখ্যা গঠন করতে হলে অবশ্যই সংখ্যাগুলির একক স্থানে অর্থাৎ শেষে 1 অথবা 5 থাকতে হবে। আবার, সংখ্যার প্রথমে 0 থাকলে তা অর্থপূর্ণ সংখ্যা হবে না। 1 শেষে রেখে প্রথম স্থানটি 2, 5 বা 6 দ্বারা 3 উপায়ে পূরণ করা যায়। অবশিষ্ট মাঝের 3 টি স্থান বাকী 3 টি অঙ্ক দ্বারা 3!=6 উপায়ে পূরণ করা যায়।
∴ 1 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠনের উপায় সংখ্যা $= 3 \times 6 = 18$
অনুরূপভাবে, 5 শেষে রেখে অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করার উপায় সংখ্যা $= 18$
∴ নির্ণেয় অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা $= 18 + 18 = 36$ **(Ans.)**

13. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি দ্বারা যতগুলি বিভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যায়, যাদের প্রথমে এবং শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে, তা নির্ণয় কর।

Sol এখানে, 9টি অঙ্ক আছে যার মধ্যে 5 টি বিজোড় এবং 4টি জোড়। এখন প্রথম ও শেষ স্থানে জোড় অঙ্ক স্থির রেখে বাকি 7 টি স্থান 7 টি অঙ্ক দ্বারা পূরণের সংখ্যা $= {}^7P_7 = 5{,}040$
আবার, যেহেতু কোনো সংখ্যায় কোনো অঙ্ক একাধিকবার ব্যবহার করা যাবে না। সুতরাং 4টি জোড় সংখ্যা থেকে প্রতিবার 2টি করে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_2 = 12$
∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 12 \times 5040 = 60480$ **(Ans.)**

14. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির প্রত্যেককে একবারের বেশি না নিয়ে 1000 অপেক্ষা ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

Sol যেহেতু সংখ্যাগুলো 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সেহেতু এগুলো এক অঙ্কের বা দুই অঙ্কের বা তিন অঙ্কের হবে।
আবার, যেহেতু সংখ্যাগুলো 5 দ্বারা বিভাজ্য। সেহেতু প্রত্যেক সংখ্যার শেষ অঙ্ক 5 বা 0 হবে।
এখন, (a) 5 দ্বারা বিভাজ্য এক অঙ্কের সংখ্যা মাত্র একটি, কারণ এরূপ সংখ্যা কেবলমাত্র 5।

(b) শেষ অঙ্কে শূন্যসহ দুই অঙ্কের সংখ্যা ${}^9P_1$ অর্থাৎ 9 টি। আবার, শেষ অঙ্কে 5 সহ দুই অঙ্কের সংখ্যা ${}^9P_1 - 1$ অর্থাৎ 8 টি, কারণ দশকের স্থানে মাত্র একবার শূন্য আসে এবং তখন সংখ্যাটি দুই অঙ্কের থাকে না।
সুতরাং 5 দ্বারা বিভাজ্য দুই অঙ্কের সংখ্যা $9 + 8 = 17$ টি।

(c) শেষ অঙ্কে শূন্য রেখে তিন অঙ্কের সংখ্যা ${}^9P_2$ বা 72 টি এবং শেষ অঙ্কে 5 রেখে তিন অঙ্কের সংখ্যা ${}^9P_2 - {}^8P_1 = 72 - 8 = 64$ টি, কারণ শতকের স্থানে মাত্র ${}^8P_1$ বা 8 বার শূন্য আসে এবং তখন সংখ্যাগুলো আর তিন অঙ্কের থাকে না।
সুতরাং 5 দ্বারা বিভাজ্য তিন অঙ্কের মোট সংখ্যা $72 + 64 = 136$ টি।
∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 1 + 17 + 136 = 154$ টি। **(Ans.)**

নিজে করুন:

15. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6, 5, 2, 3, 0 দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ জোড় সংখ্যা গঠন করা যায়? **Ans: 60**

16. কোনো সংখ্যায় কোনো অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 0, 1, 3, 5, 6 অঙ্কগুলি দ্বারা 3000 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং চার অংকবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়? **Ans: 72**

✦ Type-12 (কতগুলি বর্ণ বা বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে এরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাস):

যে বর্ণগুলো সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে, প্রথমেই তাদেরকে প্রাপ্য স্থানগুলিতে সাজাতে হয়। তারপর অন্য স্থান গুলিতে বাকী বর্ণগুলিকে সাজাতে হয়। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{r}P_{m} \times {}^{n-m}P_{r-m}$; যেখানে, n হচ্ছে মোট জিনিসের সংখ্যা, r হচ্ছে যতগুলো জিনিস নিয়ে বিন্যাস করতে হবে এবং m হচ্ছে বিশেষ বস্তুর সংখ্যা।

01. Chemistry শব্দটি হতে পাঁচটি করে নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়; যদি m, y অবশ্যই অন্তর্ভুক্ত থাকে?

Sol" Chemistry শব্দটিতে মোট বর্ণ = 9 টি। যেহেতু, m এবং y সব বিন্যাসেই অন্তর্ভুক্ত থাকবে,

অতএব, এই দুইটি বর্ণের জন্য পাঁচটি অবস্থানের দুটি অবস্থান নেয়া যায় $= {}^{5}P_{2}$ ভাবে।

আবার, বাকী তিনটি ফাঁকা স্থানে অবশিষ্ট 7 টি বর্ণকে বিন্যস্ত করা যায় $= {}^{7}P_{3}$ ভাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{5}P_{2} \times {}^{7}P_{3} = 4200$ **Ans.**

02. LAKSHMI শব্দটি হতে পাঁচটি করে বর্ণ নিয়ে কতভাবে সাজানো যাবে, যেখানে M অবশ্যই অন্তর্ভুক্ত থাকবে?

Sol" 'Lakshmi' শব্দটিতে মোট বর্ণ 7 টি এবং 'm' 1 টি। সুতরাং, এক্ষেত্রে 7 টি বর্ণ হতে 5 টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস করা হবে, যেখানে 1 টি বিশেষ বর্ণ সবসময় অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{5}P_{1} \times {}^{7-1}P_{5-1} = 1800$ **Ans.**

03. 'Equation' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে চার অক্ষর বিশিষ্ট বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হলো। এদের কতগুলোতে 'q' বর্তমান থাকবে কিন্তু 'n' বর্তমান থাকবে না?

Sol" 'Equation' শব্দটিতে মোট বর্ণ 8টি (সবই ভিন্ন)। শব্দ গঠন 'n' বর্তমান না থাকলে বর্ণ থাকবে 7টি। শব্দ গঠনে 'q' বর্তমান থাকলে, q প্রথমে বসাতে হবে। চার অক্ষর বিশিষ্ট শব্দ গঠনে 'q' প্রথমে ${}^{4}P_{1}$ উপায়ে বসবে।

অবশিষ্ট বর্ণ অবশিষ্ট তিনটি ঘরে ${}^{6}P_{3}$ উপায়ে বসবে।

$\therefore$ মোট শব্দ সংখ্যা $= {}^{4}P_{1} \times {}^{6}P_{3} = 480$ **Ans.**

✦ Type-13 (কতগুলি বর্ণ বা বস্তু কখনও অন্তর্ভুক্ত থাকবে না এরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাস):

এক্ষেত্রে যে বর্ণ বা বস্তু কখনও অন্তর্ভুক্ত থাকবে না তারা মোট সংখ্যার মধ্যে নাই ধরতে হবে। এক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-m}P_{r}$; যেখানে n হচ্ছে মোট জিনিসের সংখ্যা, r হচ্ছে যতগুলো জিনিস নিয়ে বিন্যাস করতে হবে এবং m হচ্ছে বিশেষ বস্তুর সংখ্যা।

01. 26টি বর্ণমালা হতে 5টি বর্ণ দ্বারা গঠিত শব্দের সংখ্যা নির্ণয় কর, যাদের কোনটিতেই R ও T বর্ণ দু'টি থাকবে না।

Sol" নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{24}P_{5}$ **Ans.**

✦ Type-14 (বিন্যাসের সূত্রের ব্যবহার সম্পর্কিত সমস্যা):

01. যদি ${}^{2n}P_{3} = 2 \times {}^{n}P_{4}$ হয়, তাহলে n-এর মান কত?

Sol" ${}^{2n}P_{3} = 2 \times {}^{n}P_{4}$

বা, $2n(2n-1)(2n-2) = 2 \times n(n-1)(n-2)(n-3)$

বা, $2n(2n-1) \times 2(n-1) = 2 \times n(n-1)(n-2)(n-3)$

বা, $2(2n-1) = (n-2)(n-3)$

বা, $n^2 - 9n + 8 = 0$

বা, $(n-1)(n-8) = 0$

বা, $n = 1, 8$ **Ans.**

কিন্তু $n = 1$ গ্রহণযোগ্য নয়, $n > r$ যেহেতু হতে হয়। সুতরাং $n = 8$ **Ans.**

02. যদি ${}^{n}P_4 = 14 \times {}^{n-2}P_3$ হয়, তবে n =?

Sol" ${}^{n}P_4 = 14 \times {}^{n-2}P_3$

বা, $n(n-1)(n-2)(n-3) = 14(n-2)(n-3)(n-4)$

বা, $n(n-1) = 14(n-4)$

বা, $n^2 - 15n + 56 = 0$

বা, $(n-7)(n-8) = 0 \quad \therefore n = 7, 8$ **Ans.**

03. ${}^{2n-1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3:5$ হলে n এর মান কত?

Sol" $\frac{(2n+1)!}{(2n+1-n+1)!} : \frac{(2n-1)!}{(2n-1-n)!} = 3:5$

$\Rightarrow \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)!}{(n+2)!} : \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} = 3:5$

$\Rightarrow \frac{2n(2n+1)}{(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)!} : \frac{1}{(n-1)!} = 3:5$

$\Rightarrow \frac{2(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = 3:5$

$\Rightarrow \frac{4n+2}{n^2+3n+2} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow 20n + 10 = 3n^2 + 9n + 6$

$\Rightarrow 3n^2 - 11n - 4 = 0 \quad \Rightarrow 3n^2 - 12n + n - 4 = 0$

$\Rightarrow 3n(n-4) + (n-4) = 0 \quad \Rightarrow (3n+1)(n-4) = 0$

কিন্তু $3n + 1 \neq 0$; n এর মান কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore n - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 4$

✦ Type-15: Miscellaneous

01. দুইজন B. Sc. ক্লাশের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 14 জন I. Sc. ক্লাশের ও 10 জন B. Sc. ক্লাশের ছাত্রকে কত রকমে একটি লাইনে সাজানো যায়, তা নির্ণয় কর।

Sol" মনে করি, 14 জন I.Sc. ক্লাশের ছাত্রকে এক লাইনে দাঁড়া করানো হলো। এই 14 জনের মাঝখানে $(14 - 1) = 13$ টি শূন্য স্থান আছে এবং দুই প্রান্তে দুইটি স্থান আছে। কাজেই মোট $(13 + 2) = 15$ টি স্থান 10 জন B.Sc. ক্লাশের ছাত্র দ্বারা পূরণ করা যেতে পারে।

$\therefore$ 15 টি স্থান 10 জন দ্বারা পূরণ করা যায় ${}^{15}P_{10}$ উপায়ে।

আবার, 14 জন I. Sc. ক্লাশের ছাত্র নিজেদের মধ্যে 14! উপায়ে সাজাতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানোর সংখ্যা $= 14! \times {}^{15}P_{10}$ **(Ans.)**

02. দুইজন কলা বিভাগের ছাত্রকে একত্রে না বসিয়ে 5 জন বিজ্ঞানের ছাত্র ও 5 জন কলা বিভাগের ছাত্র কত রকমে একটি গোলটেবিলের পাশে আসন নিতে পারে?

Sol" মনে করি, 5 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে গোল টেবিলের চতুর্দিকে নির্দিষ্ট আসনে বসানো হলো। এই 5 জন কলা বিভাগের ছাত্রের মধ্যে 5 টি শূন্য স্থান আছে এবং তা 5 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র দ্বারা 5! উপায়ে পূরণ করা যেতে পারে।

আবার, একজন কলা বিভাগের ছাত্র নির্দিষ্ট করে আমরা অবশিষ্ট 4 জন কলা বিভাগের ছাত্রকে 4! উপায়ে বসাতে পারি।

∴ দু'জন কলা বিভাগের ছাত্রকে একত্রে না বসিয়ে নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 5! \times 4! = 2880$ **(Ans.)**

03. একজন বালকের ভিন্ন ভিন্ন আকারের 11 টি মার্বেল আছে, যার মধ্যে 5 টি কালো ও 6 টি সাদা। কালো রঙের মার্বেল মাঝখানে রেখে সে 3 টি মার্বেল এক সারিতে কত রকমে সাজাতে পারবে?

Sol" বালকটির কাছে মোট মার্বেল আছে 11 টি যার মধ্যে 5 টি কালো এবং 6 টি সাদা।

যেহেতু একটি কালো মার্বেল সবসময় মাঝখানে রাখতে হবে সুতরাং 5টির মধ্যে 1 টি স্থানে তা ${}^5P_1 = 5$ উপায়ে রাখা যাবে।

অবশিষ্ট 2 টি স্থানে বাকি 10 টি মার্বেল ${}^{10}P_2 = 10 \times 9$ উপায়ে সাজানো যাবে।

∴ নির্ণেয় সাজানোর সংখ্যা $= 5 \times 10 \times 9 = 450$ **(Ans.)**

04. গণিতের 5 খানা, পদার্থবিজ্ঞানে 3 খানা ও রসায়ন বিজ্ঞানের 2 খানা পুস্তককে একটি তাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে একই বিষয়ের পুস্তকগুলি একত্রে থাকবে?

Sol" গণিতের বইগুলো প্রথম গ্রুপ, পদার্থের বইগুলো দ্বিতীয় গ্রুপ এবং রসায়নের বইগুলো তৃতীয় গ্রুপ মনে করে গ্রুপটিকে $3! = 6$ ভাবে সাজানো যায়।

গণিতের 5 খানা বইকে তাদের মধ্যে সাজানো সংখ্যা $= 5! = 120$ প্রকারে।

পদার্থের 3 খানা বইকে তাদের মধ্যে সাজানো সংখ্যা $= 3! = 6$ প্রকারে।

রসায়নের 2 খানা বইকে তাদের মধ্যে সাজানো সংখ্যা $= 2! = 2$ প্রকারে।

এখন গণিতের 5টি, পদার্থের 3 টি এবং রসায়নের 2 টি বইকে $120 \times 6 \times 2 = 1440$ প্রকারে সাজানো যেতে পারে যেখানে একই বিষয়ের বইগুলো একত্রে থাকবে।

∴ নির্ণেয় মোট সাজানোর সংখ্যা $= 1440 \times 6 = 8640$ **(Ans.)**

বিন্যাসের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.	Type	Question No.
Type-03	03, 04, 05, 06	Type-09	01, 04, 06, 07, 08
Type-04	01, 03, 04	Type-10	01
Type-05	01, 05	Type-11	06, 07, 08, 11, 12, 13
Type-06	01, 02	Type-14	02
Type-08	01, 03		

সমাবেশ

Some special formula:

(i) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$; এরূপ সমাবেশকে পরিপূরক সমাবেশ (Complementary combination) বলে।

(ii) ${}^nC_x = {}^nC_y$ হলে, $x + y = n$ অথবা, $x = y$. (iii) ${}^nc_r + {}^nc_{r-1} = {}^{n+1}c_r$.

✦ Type-01 (সরাসরি সূত্র প্রয়োগে সমাবেশ):

একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক বস্তু হতে সবকয়টি বা কিছু সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ বা বাছাই করে বললে just formula: ${}^nC_r$ use করলেই হবে। যেখানে, n প্রদত্ত নির্দিষ্ট সংখ্যক বস্তু এবং r হলো যতটি বস্তু নিয়ে সমাবেশ করতে হবে তার সংখ্যা।

01. কোন একজন পরীক্ষার্থীকে 10 টি প্রশ্নের মধ্যে 7টি প্রশ্ন উত্তর দিতে হবে। কত প্রকারে সে প্রশ্নগুলি উত্তর করতে পারবে?

Sol" নির্ণেয় উত্তর করতে পারার সংখ্যা $= {}^{10}C_7 = {}^{10}C_3 = 120$ **Ans.**

✦ Type-02 (কতগুলি বর্ণ বা বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে এরূপ ক্ষেত্রে সমাবেশ):

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত যে সমস্ত সমাবেশে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকবে, তার সংখ্যা $= {}^{n-p}C_{r-p}$ $[p+r \le n]$

01. 16 জন লোকের একটি দল হতে 7 জনকে কত ভাবে নির্বাচন করা যায়, যাতে নির্দিষ্ট 4 জন লোক সর্বদাই থাকবে?

Sol" নির্বাচন করার মোট উপায় $= {}^{16-4}C_{7-4} = 220$ **Ans.**

02. 4 জন মহিলা ও 6 জন পুরুষের মধ্য থেকে 4 সদস্যবিশিষ্ট একটি উপ-কমিটি গঠন করতে হবে যাতে 1 জন নির্দিষ্ট পুরুষ সর্বদাই উপস্থিত থাকেন। কত প্রকারে ঐ কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

Sol" যেহেতু 1 জন নির্দিষ্ট পুরুষ সর্বদাই উপস্থিত থাকবে সেহেতু অবশিষ্ট 5 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলা হতে 3 সদস্যবিশিষ্ট উপ-কমিটি গঠন করা যায় $= {}^{(5+4)}C_3$ উপায়ে $= {}^9C_3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{3\times2\times1\times6!} = 84$ উপায়ে **Ans.**

03. 12 টি পুস্তক থেকে 5 টি কত প্রকারে বাছাই করা যায় যেখানে 2 টি পুস্তক সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে?

Sol" যেহেতু 2 টি বই সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে সেহেতু অবশিষ্ট 10 টি বই হতে 3 টি বই বাছাই করার উপায় $= {}^{10}C_3$

$$= \frac{10\times9\times8}{\lfloor 3} = \frac{10\times9\times8}{6} = 120 \text{ Ans.}$$

04. 14 জন খেলোয়াড়ের মধ্য থেকে নির্দিষ্ট একজন অধিনায়কসহ 11 জনের একটি ক্রিকেট দল কতভাবে বাছাই করা যাবে?

Sol" যেহেতু একজন অধিনায়ক নির্দিষ্ট সেহেতু অবশিষ্ট 13 জন হতে বাকী 10 জন নিতে হবে।

∴ অবশিষ্ট 13 জন হতে অপর 10 জনকে বাছাই করা যাবে ${}^{13}C_{10} = {}^{13}C_3 = \frac{13\times12\times11}{\lfloor 3} = \frac{13\times12\times11}{6} = 286$ ভাবে।

✦ Type-03 (কতগুলি বর্ণ বা বস্তু কখনোই অন্তর্ভুক্ত থাকবে না এরূপ ক্ষেত্রে সমাবেশ):

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত যে সমস্ত সমাবেশে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকবে না, তার সংখ্যা $= {}^{n-p}C_r$ $[p+r \le n]$

01. 16 জন লোকের একটি দল হতে 7 জনকে কত ভাবে নির্বাচন করা যায়, যাতে নির্দিষ্ট 4 জন লোক কখনোই থাকবে না।

Sol" নির্বাচন করার মোট উপায় $= {}^{16-4}C_7 = 792$ **Ans.**

02. 4 জন মহিলা ও 6 জন পুরুষের মধ্য থেকে 4 সদস্যবিশিষ্ট একটি উপ-কমিটি গঠন করতে হবে যাতে 1 জন নির্দিষ্ট পুরুষ সর্বদাই উপস্থিত থাকেন। কত প্রকারে ঐ কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

Sol" যেহেতু 1 জন নির্দিষ্ট পুরুষ সর্বদাই উপস্থিত থাকবে সেহেতু অবশিষ্ট 5 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলা হতে 3 সদস্যবিশিষ্ট উপ-কমিটি গঠন করা যায় $= {}^{(5+4)}C_3$ উপায়ে

$= {}^9C_3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{3\times2\times1\times6!} = 84$ উপায়ে **Ans.**

03. বারটি বইয়ের মধ্যে পাঁচটি বই কত প্রকারে বাছাই করা যায়, যাতে নির্দিষ্ট দুইটি বই সর্বদা বাদ থাকে?

Sol" যেহেতু, নির্দিষ্ট দুইটি বই সর্বদা বাদ থাকে। ∴ নির্ণেয় বাছাই সংখ্যা $= = {}^{10}C_5 = 252$

✦ Type-04 (গ্রুপ সমাবেশ): কমিটি গঠন/ দল গঠন সংক্রান্ত সমস্যা (দুটি গ্রুপ থেকে বাছাইয়ের অপশন নির্দিষ্ট থাকলে)

01. ৫ জন মহিলা ও ৪ জন পুরুষের মধ্য থেকে ২ জন পুরুষ এবং ১ জন মহিলা নিয়ে একটি দল কতভাবে বাছাই করা যেতে পারে? [৪০তম বিসিএস]

Sol" ৫ জন মহিলা থেকে ১ জন মহিলা বাছাই করার উপায় $= {}^5C_1 = 5$

এবং ৪ জন পুরুষ থেকে ২ জন পুরুষ বাছাই করার উপায় $= {}^4C_2 = 6$

∴ নির্ণেয় দল গঠনের উপায় $= 5 \times 6 = 30$ **(Ans.)**

02. 6 জন বালক এবং 5 জন বালিকার একটি দল থেকে কত উপায়ে 3 জন বালক এবং 2 জন বালিকার একটি দল গঠন করা যেতে পারে?

Sol" নির্ণেয় দল গঠন করার উপায় সংখ্যা $= {}^6C_3 \times {}^5C_2 = 200$ **(Ans.)**

03. LOGARITHMS শব্দটির বর্ণগুলি হতে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ কত উপায়ে বাছাই করা যায়?

Sol" 7টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ হতে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ বাছাই করার সংখ্যা $= {}^7C_3 \times {}^3C_2$ **Ans.**

04. একজন ব্যক্তির ১০ জন বন্ধু আছেন যাঁদের মধ্যে ৪ জন অনাত্মীয়। তিনি কত প্রকারে ৭ জন বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারেন যাঁদের মধ্যে ৪ জন আত্মীয় থাকবেন? [৪৪তম বিসিএস]

Sol" মোট বন্ধু = ১০ জন; অনাত্মীয় বন্ধু = ৪ জন ; ∴ আত্মীয় বন্ধু $= (10 - 4) = 6$ জন

৬ জন থেকে ৪ জন আত্মীয় বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করার উপায় $= {}^6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6.5.4!}{4!2!} = \frac{6.5}{2} = 15$

যেহেতু মোট ৭ জনকে নিমন্ত্রণ করতে পারবে, সেহেতু অনাত্মীয় ৪ জন থেকে ৩ জনকে নিমন্ত্রণ করতে হবে।

∴ ৪ জন থেকে ৩ জন অনাত্মীয় বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করার উপায় $= {}^4C_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4.3!}{3!1!} = 4$

∴ নির্ণেয় নিমন্ত্রণের উপায় $= {}^6C_4 \times {}^4C_3 = 15 \times 4 = 60$ **(Ans.)**

05. একজন পরীক্ষার্থীকে 12টি প্রশ্ন থেকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। তাকে প্রথম 5টি থেকে ঠিক 4টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলি বাছাই করতে পারবে?

Sol" প্রথম 5টি থেকে 4টি প্রশ্ন বাছাই করার উপায় $= {}^5C_4$

এখন বাকি $(12-5) = 7$টি প্রশ্ন হতে $(6-4) = 2$টি প্রশ্ন বাছাই করার উপায় $= {}^7C_2$

∴ নির্ণেয় বাছাই করার মোট উপায় $= {}^5C_4 \times {}^7C_2 = 5 \times 21 = 105$ **Ans.**

✦ Type-05 (গ্রুপ সমাবেশ): কমিটি গঠন/ দল গঠন সংক্রান্ত সমস্যা (দুটি গ্রুপ থেকে বাছাইয়ের অপশন নির্দিষ্ট না থাকলে)

দুই বা ততোধিক গ্রুপ বিভক্ত n সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে সমাবেশ করতে বললে নিচের Example এর কৌশল প্রয়োগ করতে হয়।

01. একজন সংকেত প্রদানকারীর 6টি পতাকা আছে যার মধ্যে 1টি সাদা, 2টি সবুজ এবং 3টি লাল। তিনি 5টি পতাকা সারিতে ব্যবহার করে তিনটি বিভিন্ন সংকেত দিতে পারবেন?

নোট: অংকটি বিন্যাসের, তবে সমাবেশের অংকগুলোর পাশাপাশি একই জাতীয় বিন্যাসের অংকটি করে রাখা উচিত।

Sol": পাঁচটি পতাকার সম্ভাব্য নির্বাচন নিম্নরূপ:

	সাদা (১টি)	সবুজ (২টি)	লাল (৩টি)
(a)	1	2	2
(b)	1	1	3
(c)	0	2	3

(a) এর জন্য বিন্যাস সংখ্যা অর্থাৎ সংকেত সংখ্যা $= \frac{5!}{2!\,2!} = 30$

(b) " " " " " " " $= \frac{5!}{3!} = 20$

(c) " " " " " " " $= \frac{5!}{2!\,3!} = 10$

∴ নির্ণেয় মোট সংকেত সংখ্যা $= 30 + 20 + 10 = 60$ **Ans.**

02. 4 জন বোলার ও 2 জন উইকেটরক্ষকসহ মোট 16 জন খেলোয়াড় থেকে 11 জন খেলোয়াড় বাছাই করে একটি ক্রিকেট দল গঠন করতে হবে। অন্তত 3 জন বোলার এবং অন্তত 1 জন উইকেটরক্ষক নিয়ে কত উপায়ে দল গঠন করা যেতে পারে। [৪১তম বিসিএস]

Sol" প্রদত্ত শর্ত সাপেক্ষে বাছাই প্রক্রিয়া নিম্নরূপ:

	বোলার (4)	উইকেটরক্ষক (2)	অন্যান্য (10)
(a)	3	1	7
(b)	3	2	6
(c)	4	1	6
(d)	4	2	5

(a) এর ক্ষেত্রে দলটি গঠনের উপায় $= {}^4C_3 \times {}^2C_1 \times {}^{10}C_7 = 4 \times 2 \times 120 = 960$

(b) " " " " " $= {}^4C_3 \times {}^2C_2 \times {}^{10}C_6 = 4 \times 1 \times 210 = 840$

(c) " " " " " $= {}^4C_4 \times {}^2C_1 \times {}^{10}C_6 = 1 \times 2 \times 210 = 420$

(d) " " " " " $= {}^4C_4 \times {}^2C_2 \times {}^{10}C_5 = 1 \times 1 \times 252 = 252$

∴ নির্ণেয় দলটি গঠনের মোট উপায় $= 960 + 840 + 420 + 252 = 2472$ **(Ans.)**

03. 6 জন ও 8 জন খেলোয়াড়ের দুইটি দল থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট টিম গঠন করতে হবে যাতে 6 জনের দল থেকে কমপক্ষে 4 জন খেলোয়াড় ঐ টিমে থাকবে। ক্রিকেট টিমটি কত উপায়ে গঠন করা যাবে?

Sol" প্রদত্ত শর্ত সাপেক্ষে বাছাই প্রক্রিয়া নিম্নরূপ:

	6 জনের দল	8 জনের দল
(a)	4	7
(b)	5	6
(c)	6	5

(a) এর ক্ষেত্রে টিমটি গঠনের উপায় $= {}^6C_4 \times {}^8C_7 = 120$

(b) " " " " " $= {}^6C_5 \times {}^8C_6 = 168$

(c) " " " " " $= {}^6C_6 \times {}^8C_5 = 56$

∴ নির্ণেয় টিমটি গঠনের মোট উপায় $= 120 + 168 + 56 = 344$ **(Ans.)**

04. 4 জন মহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে অন্তত একজন মহিলা অন্তর্ভুক্ত থাকবে। কত বিভিন্ন প্রকারে এ কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

Sol" কমিটি গঠনের সম্ভাব্য উপায়গুলো নিম্নরূপঃ

উপায়	মহিলা (4)	বাকী (6)
(i)	1	4
(ii)	2	3
(iii)	3	2
(iv)	4	1

∴ কমিটি গঠনের সংখ্যা $= ({}^4C_1 \times {}^6C_4) + ({}^4C_2 \times {}^6C_3) + ({}^4C_3 \times {}^6C_2) + ({}^4C_4 \times {}^6C_1) = 246$ **Ans.**

05. 6 জন ছাত্র এবং 5 জন ছাত্রী থেকে 5 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে অন্তত: একজন ছাত্র ও একজন ছাত্রী অন্তর্ভুক্ত থাকে। কত বিভিন্ন প্রকারে এ কমিটি গঠন করা যেতে পারে?

Sol" নিম্নোক্ত সম্ভাব্য উপায়ে কমিটি গঠন করা যায়-

উপায়	ছাত্র (6)	ছাত্রী (5)
(i)	1	4
(ii)	2	3
(iii)	3	2
(iv)	4	1

∴ কমিটি গঠনের উপায় $= {}^6C_1 \times {}^5C_4 + {}^6C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_3 \times {}^5C_2 + {}^6C_4 \times {}^5C_1 = 455$ **Ans.**

06. 8 জন ব্যক্তি থেকে 5 সদস্যের একটি কমিটি গঠন করতে হবে, যাতে 3 জন বিশেষ ব্যক্তির সর্বাধিক একজন অন্তর্ভুক্ত থাকবে। এরূপ কমিটির সংখ্যা কত?

Sol" কমিটি গঠনের সম্ভাব্য উপায়গুলো নিম্নরূপঃ

উপায়	অবিশেষ ব্যক্তি (5)	বিশেষ ব্যক্তি (3)
(i)	4	1
(ii)	5	0

∴ কমিটি গঠনের উপায় = ${}^5C_4 \times {}^3C_1 + {}^5C_5 \times {}^3C_0 = 15+1=16$ **Ans.**

07. 8 জন ব্যক্তি থেকে 5 সদস্যের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে 3 জন বিশেষ ব্যক্তির অন্ততপক্ষে একজন থাকে। এরূপ কমিটির সংখ্যা-

Sol" কমিটি গঠনের সম্ভাব্য উপায়গুলো নিম্নরূপঃ

উপায়	অবিশেষ ব্যক্তি (5)	বিশেষ ব্যক্তি (3)
(i)	4	1
(ii)	3	2
(iii)	2	3

∴ কমিটি গঠনের উপায়ঃ

${}^5C_4 \times {}^3C_1 + {}^5C_3 \times {}^3C_2 + {}^5C_2 \times {}^3C_3 = 15+30+10 = 55$ **Ans.**

08. 6 জন ছাত্র ও 4 জন ছাত্রীর মধ্য হতে 5 সদস্যবিশিষ্ট কমিটি গঠন করতে হবে যাতে ছাত্রের চেয়ে ছাত্রী সদস্য বেশি হয়। এরূপ কমিটি কতভাবে নির্বাচন করা যাবে?

Sol" নিম্নোক্ত সম্ভাব্য উপায়ে কমিটি গঠন করা যায়:

উপায়	ছাত্র (6)	ছাত্রী (4)
(i)	1	4
(ii)	2	3

∴ কমিটি গঠনের উপায় = $({}^6C_1 \times {}^4C_4) + ({}^6C_2 \times {}^4C_3) = (6 \times 1) + (15 \times 4) = 6 + 60 = 66$ **Ans.**

09. 6 জন গণিত ও 4 জন পদার্থবিজ্ঞানের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে গণিতের ছাত্রদের সংখ্যাগরিষ্ঠতা থাকে। কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যায়?

Sol" 6 জন গণিত ও 4 জন পদার্থবিজ্ঞানের ছাত্র থেকে গণিতের ছাত্র সংখ্যা গরিষ্ঠতা থাকে এরূপ 6 জনের বাছাই প্রক্রিয়া নিম্নরূপ:

6 জন গণিতের ছাত্র	4 জন পদার্থবিজ্ঞানের ছাত্র
6	0
5	1
4	2

নির্ণেয় কমিটি গঠনের উপায় $= {}^6C_6 \times {}^4C_0 + {}^6C_5 \times {}^4C_1 + {}^6C_4 \times {}^4C_2$

$= 1 \times 1 + 6 \times 4 + 15 \times 6 = 1 + 24 + 90 = 115$ **Ans.**

10. 9 ব্যক্তির একটি দল দুটি যানবাহনে ভ্রমণ করে, যার একটিতে সাত জনের বেশি এবং অন্যটিতে চার জনের বেশি ধরে না। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারে?

Sol" দলটির ভ্রমনের সম্ভাব্য উপায়গুলো নিম্নরূপ:

উপায়	১ম যানবাহন	২য় যানবাহন
(i)	7	2
(ii)	6	3
(iii)	5	4

∴ প্রথম যানবাহনে ভ্রমনের উপায় = ${}^9C_7 + {}^9C_6 + {}^9C_5 = 36+84+126 = 246$

দ্বিতীয় যানবাহনের জন্য লোক বাছাই করলেও ফলাফল একই হবে। **Ans.**

11. তানিয়া প্রতি গ্রুপে 5 টি প্রশ্ন আছে এমন দুইটি গ্রুপে বিভক্ত মোট 10 টি প্রশ্ন থেকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর করবে এবং সে কোন গ্রুপ থেকে 4 টির বেশি উত্তর দিতে পারবে না। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে?

Sol" ধরি, গ্রুপ দুইটি A এবং B। প্রতি গ্রুপে 5 টি প্রশ্ন আছে। গ্রুপ দুইটি হতে 6টি প্রশ্ন বাছাইয়ের উপায় নিম্নরূপ :

উপায়	গ্রুপ-A(5)	গ্রুপ-B(5)
(i)	4	2
(ii)	3	3
(iii)	2	4

∴ তানিয়া 'র মোট প্রশ্ন বাছাইয়ের সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^5C_2 + {}^5C_3 \times {}^5C_3 + {}^5C_2 \times {}^5C_4 = 200$ **Ans.**

নিজে করুন:

12. 5 জন বোলার ও 2 জন উইকেটরক্ষকসহ মোট 14 জন খেলোয়াড় থেকে 11 জন খেলোয়াড় বাছাই করে একটি ক্রিকেট দল গঠন করতে হবে। অন্তত 3 জন বোলার এবং অন্তত 1 জন উইকেটরক্ষক নিয়ে কত উপায়ে দল গঠন করা যেতে পারে।

Ans: 342

13. 7 ব্যক্তির একটি দল দুটি যানবাহনে ভ্রমণ করে, যার একটিতে সাত জনের বেশি এবং অন্যটিতে চার জনের বেশি ধরে না। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারে যদি কোনো গাড়ি যাত্রীবিহীন না থাকে? **Ans: 98**

✦ Type-06 : বিন্যাস ও সমাবেশের মিশ্রিত সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic এবং Type 06 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

Note: কোন শব্দে যখন কিছু বর্ণের পুনরাবৃত্তি ঘটে এবং মোট বর্ণ থেকে কম সংখ্যক বর্ণ নিয়ে বিন্যাস বা সমাবেশ করতে বলে তখন নিচের অংকগুলোর নিয়মে সমাধান করতে হবে।

01. 10টি জিনিসের মধ্যে 2 টি একজাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন। ওই জিনিসগুলো থেকে প্রতিবার 5 টি নিয়ে কত ভিন্ন ভিন্ন প্রকারে বাছাই করা যায় নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" 10 টি জিনিসের মধ্যে 2 টি এক জাতীয়। সুতরাং মোট 9 ধরনের জিনিস আছে। জিনিসগুলো থেকে প্রতিবার 5 টি নিয়ে বাছাই করার উপায় 2 টি। যথাঃ

i. 5 টি ভিন্ন জিনিস নিয়ে বাছাই সংখ্যা $= {}^9C_5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5!}{5!\times4\times3\times2\times1} = 126$

ii. 2 টি এক জাতীয় এবং বাকী 8 টি থেকে 3 টি জিনিস নিয়ে বাছাই সংখ্যা

$= {}^2C_2 \times {}^8C_3 = 1 \times \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!} = 56$

∴ মোট বাছাই সংখ্যা $= 126 + 56 = 182$ Ans.

02. THESIS শব্দটির অক্ষরগুলো থেকে প্রতিবারে 4 টি অক্ষর নিয়ে মোট সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয় কর।

Sol" THESIS শব্দটিতে মোট 6 টি বর্ণ আছে এবং এর মধ্যে 2 টি 'S'।

সুতরাং প্রতিবারে 4 টি করে বর্ণ নিয়ে নিম্নবর্ণিতভাবে বাছাই করা যেতে পারে :

(i) 2টি বর্ণ অভিন্ন এবং অপর 2টি ভিন্ন। এক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= 1\times{}^4C_2 = 6$

(ii) 4টি বর্ণই ভিন্ন। এক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^5C_4 = 5$

∴ বর্ণগুলো বাছাইয়ের মোট সংখ্যা $= 5+6 = 11$ **Ans.**

03. 'DEGREE' শব্দটির অক্ষরগুলো থেকে যে কোন 4টি অক্ষর প্রতিবার নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যাবে?

Sol" 'DEGREE' শব্দটিতে মোট 6টি বর্ণ আছে এবং এর মধ্যে 3টি 'E'।
সুতরাং প্রতিবারে 4টি করে বর্ণ নিয়ে নিম্নবর্ণিতভাবে বাছাই করা যেতে পারে:

(i) 3টি বর্ণ অভিন্ন অর্থাৎ 3টি E এবং অপর 1টি ভিন্ন। এক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= 1\times{}^3C_1 = 3$

(ii) 2টি বর্ণ অভিন্ন অর্থাৎ 2টি E এবং অপর 2টি ভিন্ন। এক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= 1\times{}^3C_2 = 3$

(iii) 4টি বর্ণই ভিন্ন। এক্ষেত্রে বাছাই সংখ্যা $= {}^4C_4 = 1$

$\therefore$ বর্ণগুলো বাছাইয়ের মোট সংখ্যা $= 3+3+1=7$ **Ans.**

04. 'AMERICA / ABAHONI / ALGEBRA' শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রতিবারে 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত ভিন্ন ভিন্ন শব্দ সংখ্যা কত হবে?

Sol" 'AMERICA / ABAHONI / ALGEBRA' শব্দটিতে 'A' দুইটি এবং বাকিগুলো ভিন্ন। একটি A বাদ দিয়ে অবশিষ্ট 6 টি বর্ণ থেকে 3 টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা $= {}^6C_3 \times 3! = 20 \times 6 = 120$

2 টি A ও একটি ভিন্ন বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ $= {}^2C_2 \times {}^5C_1 \times \frac{3!}{2!} = 1 \times 5 \times 3 = 15$

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের সংখ্যা $= 120 + 15 = 135$ **(Ans.)**

05. 'PROFESSOR' শব্দটির বর্ণগুলি হতে প্রতিবার চারটি করে বর্ণ নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়?

Sol" 'PROFESSOR' শব্দটিতে O, O, S, S, R, R, P, E, F মোট 6টি ভিন্ন জাতের বর্ণ আছে। 4 টি বর্ণের বিন্যাস নির্ণয় করতে হবে।

তিন জোড়া এক জাতীয় বর্ণ (O, O, R, R, S, S) থেকে 2 জোড়া বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3C_2 \times \frac{4!}{2!.2!} = 3 \times 6 = 18$

তিন জোড়া এক জাতীয় বর্ণ থেকে 1 জোড়া বর্ণ ও 5 টি ভিন্ন বর্ণ থেকে 2 টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^3C_1 \times {}^5C_2 \times \frac{4!}{2!} =$
$3 \times 10 \times 12 = 360$

6 টি ভিন্ন বর্ণ (O, S, R, P, C, F) থেকে 4 টি বর্ণ নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6C_4 \times 4! = 15 \times 24 = 360$

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানোর সংখ্যা $= 18 + 360 + 360 = 738$ **(Ans.)**

06. COMBINATION শব্দটি হতে 4 অক্ষর বিশিষ্ট সম্ভাব্য সমাবেশ নির্ণয় করুন। [৩৮তম বিসিএস]

Sol" COMBINATION শব্দটির মধ্যে 11টি বর্ণের মধ্যে 2টি O, 2 টি I, 2 টি N. অর্থাৎ শব্দটিতে মোট 8 ধরণের বর্ণ আছে। 4টি করে অক্ষর নিয়ে সমাবেশ করার পদ্ধতি তিনটি। যথা:

প্রেক্ষাপট	সমাবেশ
সবগুলো ভিন্ন	${}^8C_4 = 70$
2টি এক জাতীয় এবং 2টি আরেক জাতীয়	${}^3C_2 = 3$
2টি এক জাতীয় এবং 2টি ভিন্ন জাতীয়	${}^3C_1\times{}^7C_2 = 63$

$\therefore$ মোট সমাবেশ $= 70 + 63 + 3 = 136$ **(উত্তর)**

07. Examination শব্দটি হতে 4টি করে অক্ষর নিয়ে তাদের সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর।

Sol" 'EXAMINATION' শব্দে (A, A; I, I; N, N, E; X; M; T; O) 11 টি বর্ণ আছে 2টি A, 2 টি I, 2 টি N অর্থাৎ 8টি ভিন্ন জাতের বর্ণ আছে।

প্রেক্ষাপট	সমাবেশ	বিন্যাস
সবগুলো ভিন্ন	${}^8C_4 = 70$	${}^8C_4\times 4! = 1680$
2টি এক জাতীয় এবং 2টি আরেক জাতীয়	${}^3C_2 = 3$	${}^3C_2\times\frac{4!}{2!2!} = 18$
2টি এক জাতীয় এবং 2টি ভিন্ন জাতীয়	${}^3C_1\times{}^7C_2 = 63$	${}^3C_1\times{}^7C_2\times\frac{4!}{2!} = 756$
	মোট সমাবেশ = 136	মোট বিন্যাস = 2454

নিজে করুন:

08. 'PARALLEL' শব্দটির বর্ণগুলি হতে প্রতিবার চারটি করে বর্ণ নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়? **Ans: 286**

09. 'Cambridge' শব্দটির বর্ণগুলি হতে পাঁচটিকে নিয়ে যদি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায়,তবে তাদের কতগুলিতে সবকয়টি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে? **Ans: 1800**

✦ Type-07 (ত্রিভুজ বা চতুর্ভুজ গঠন সম্পর্কিত সমস্যা):

▶ n সংখ্যক বাহু দ্বারা আবদ্ধ বহুভুজ হতে প্রাপ্ত ত্রিভুজ সংখ্যা $= {}^nC_3$
এবং কর্ণ সংখ্যা $= {}^nC_2 - n$
[Note: বহুভুজে বাহুর সংখ্যা এবং শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা পরস্পর সমান]

▶ কোন সমতলে অবস্থিত n সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে p সংখ্যক বিন্দু সমরেখ হলে প্রাপ্ত
ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^nC_3 - {}^pC_3$
এবং সরলরেখার সংখ্যা $= {}^nC_2 - {}^pC_2 + 1$

▶ n সংখ্যক বিন্দু বা বাহু দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের সংখ্যা $= {}^nC_4$
[Note: চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে যে কোন তিন বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

01. 12টি বাহুবিশিষ্ট একটি সমতল ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখা দ্বারা যতগুলো ত্রিভুজ গঠন করা যায়, তার সংখ্যা নির্ণয় কর। এর কতগুলো কর্ণ আছে?

Sol" ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^{12}C_3 = 220$ **Ans.**
এবং কর্ণের সংখ্যা $= {}^{12}C_2 - 12 = 54$ **Ans.**

02. কোনো সমতলে অবস্থিত 15 টি বিন্দুর মধ্যে 5 টি বিন্দু সমরেখ। এছাড়া কোনো তিনটি বিন্দুও সমরেখ নয়। ঐ 15 টি বিন্দুর সংযোজন করে কতগুলি সরলরেখা এবং কতগুলি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে?

Sol" মোট সরলরেখার সংখ্যা $= {}^{15}C_2 = 105$।
কিন্তু 5 টি বিন্দু সমরেখ হওয়ায় তাদের দ্বারা উৎপন্ন ${}^5C_2 = 10$ টি রেখার স্থলে মাত্র একটি রেখা উৎপন্ন হবে।
অতএব, নির্ণেয় রেখা সংখ্যা $= 105 - 10 + 1 = 96$ **(Ans.)**
আবার, ত্রিভুজের মোট সংখ্যা $= {}^{15}C_3 - {}^5C_3 = 455 - 10 = 445$ **(Ans.)**

03. দেখাও যে, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 সে.মি. দীর্ঘ সাতটি সরলরেখাংশ থেকে চারটি করে নিয়ে 32টি চতুর্ভুজ তৈরি করা যাবে।

Sol" প্রতিটি চতুর্ভুজের জন্য 4টি সরলরেখাংশ প্রয়োজন।
সাতটি সরলরেখাংশ হতে প্রত্যেকবার 4টি নিয়ে বাছাই সংখ্যা $= {}^7C_4 = 35$
কিন্তু (1, 2, 3, 6); (1, 2, 3, 7); (1, 2, 4, 7) কম্বিনেশন দ্বারা চতুর্ভুজ তৈরি করা যায় না। কারণ ঐসব ক্ষেত্রে তিনটি বাহুর যোগফল চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তম নয়।
সুতরাং নির্ণেয় চতুর্ভুজের সংখ্যা $= 35 - 3 = 32$ (দেখানো হলো)

✦ Type-08 (সমাবেশের সূত্রের ব্যবহার সম্পর্কিত সমস্যা):

01. ${}^nC_2 = \frac{3}{5}\,{}^nC_4$ হলে n এর মান কত?

Sol" ${}^nC_2 = \frac{3}{5}\cdot{}^nC_4$ বা, $\frac{n(n-1)}{2!} = \frac{3}{5}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{24}$
বা, $(n-2)(n-3) = 20$ বা, $n^2 - 5n - 14 = 0$ বা, $n^2 - 7n + 2n - 14 = 0$ বা, $n = 7, -2$ **Ans.**

02. ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ হয় তবে ${}^{22}C_n$ এর মান কত?

Sol" ${}^nC_{12} = {}^nC_8 \Rightarrow n = 12 + 8 = 20$
$\therefore\ {}^{22}C_n = {}^{22}C_{20} = {}^{22}C_2 = \frac{22\times 21}{\lfloor 2} = 11\times 21 = 231$

03. প্রমাণ কর: ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

Sol" ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} = \frac{n!}{r.(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,.\,(n-r+1).(n-r)!}$

$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \cdot \frac{n+1}{r(n-r+1)}$

$= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!\,r!} = \frac{(n+1)!}{r!\,\{(n+1)-r\}!} = {}^{n+1}C_r.$

✦ Type-09 : Miscellaneous

01. একটি ফুটবল টুর্নামেন্টে 6টি দল অংশগ্রহণ করেছে। একক লীগ পদ্ধতিতে খেলা হলে মোট কতটি খেলা পরিচালনা করতে হবে?

Sol" দুটি দল মিলে একটি খেলা অনুষ্ঠিত হবে।

∴ মোট খেলার সংখ্যা $= {}^6C_2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.4!}{2.1\times4!} = 15$

02. এক ব্যক্তির 6 জন বন্ধু আছে। সে কত প্রকারে এক বা একাধিক বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারে?

Sol" 6 জন বন্ধুর মধ্যে ব্যক্তি 1 জনকে বা 2 জনকে বা 3 জনকে বা 4 জনকে বা 5 জনকে বা 6 জনকে একসঙ্গে নিমন্ত্রণ করতে পারেন।

1 জন বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে চাইলে তিনি ${}^6C_1$ উপায়ে করতে পারেন।

2 " " " " " ${}^6C_2$ " " "

3 " " " " " ${}^6C_3$ " " "

4 " " " " " ${}^6C_4$ " " "

5 " " " " " ${}^6C_5$ " " "

6 " " " " " ${}^6C_6$ " " "

∴ নিমন্ত্রণের মোট উপায় $= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$ **(Ans.)**

03. 8 জন লোক প্রত্যেকে প্রত্যেকের সাথে করমর্দন করলে করমর্দনের সংখ্যা হবে?

Sol" করমর্দনের জন্য 2 জন লোকের প্রয়োজন। করমর্দনের সংখ্যা $= {}^8C_2 = 28$ **Ans.**

04. একটি সভায় উপস্থিত প্রত্যেকে প্রত্যেকের সাথে করমর্দন করায় মোট করমর্দনের সংখ্যা 45 হলে ঐ সভায় কতজন লোক উপস্থিত ছিল?

Sol" মনে করি, সভায় উপস্থিত লোক সংখ্যা n জন। করমর্দনের জন্য 2 জন লোকের প্রয়োজন।

∴ করমর্দনের সংখ্যা $= {}^nC_2$

প্রশ্নমতে, ${}^nC_2 = 45 \Rightarrow \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 45 \Rightarrow \frac{n\,(n-1)\,(n-2)!}{2\,(n-2)!} = 45$

$\Rightarrow n(n-1) = 90 \quad \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n-10)\,(n+9) = 0$

$\therefore n = 10, -9$

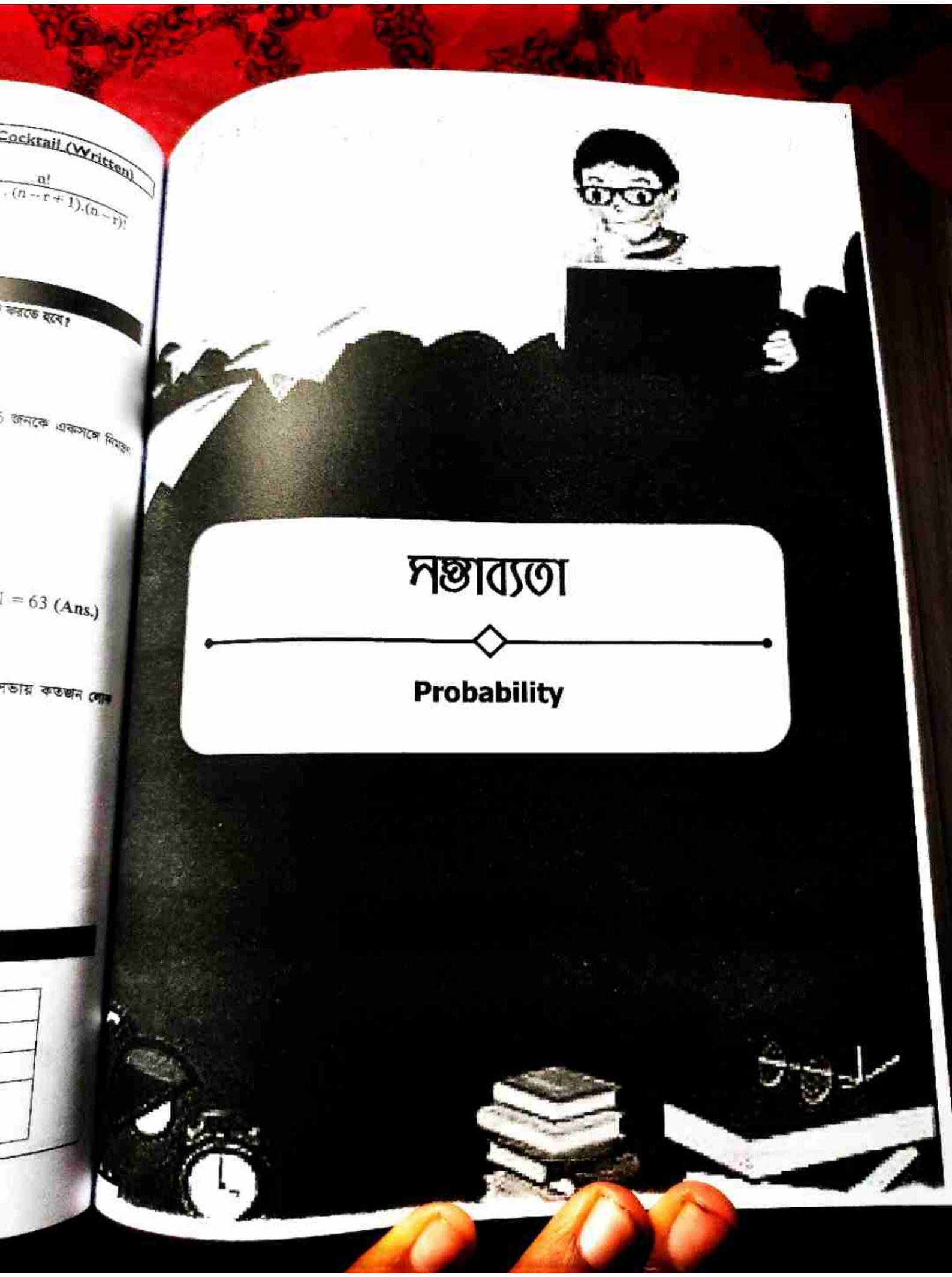
যেহেতু $n = -9$ গ্রহণযোগ্য নয়, সুতরাং $n = 10$ (Ans.)

∴ সভায় 10 জন লোক উপস্থিত ছিল। **(Ans.)**

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.	Type	Question No.
Type-03	02	Type-07	02, 03
Type-04	01, 04, 05	Type-08	03
Type-05	01, 02, 04, 05, 10, 11	Type-09	02, 04
Type-06	Full (VVI)		


Cocktail (Written)
$\frac{n!}{\cdot (n-r+1).(n-r)!}$
করতে হবে?
জনকে একসঙ্গে মিমহং
$= 63$ (Ans.)
সভায় কতজন লোক
সম্ভাব্যতা
Probability

স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events): কোনো দৈব পরীক্ষণে দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপ হয় যে, একটি ঘটনা ঘটা বা না ঘটা কোনো অবস্থাতেই অন্য কোনো ঘটনার ওপর নির্ভর করে না বা প্রভাবিত হয় না তবে উক্ত ঘটনা দুইটিকে বা ঘটনাগুলোকে স্বাধীন ঘটনা বলা হয়। দুইটি স্বাধীন ঘটনার একত্রে ঘটার সম্ভাবনা এদের পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান।

অর্থাৎ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, যেখানে A ও B পরস্পর স্বাধীন ঘটনা।

উদাহরণ: পুনঃস্থাপন করে এক প্যাকেট তাস হতে দুইটি তাস টানা হলে, প্রথম বারে টানা তাসটি লাল ও দ্বিতীয় বারে টানা তাসটি কাল হবার ঘটনা দুইটি পরস্পর স্বাধীন।

নির্ভরশীল বা অধীন ঘটনা (Dependent Events): যদি দুইটি ঘটনা এরূপ হয় যে তাদের কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য ঘটনাটি ঘটার ওপর নির্ভর করে তবে দ্বিতীয় ঘটনাটিকে অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা বলে। এক্ষেত্রে প্রথমে যে ঘটনাটি ঘটে তা স্বাধীন ঘটনা।

অর্থাৎ $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, এখানে, A = স্বাধীন ঘটনা, B = অধীন ঘটনা।

উদাহরণ: এক প্যাকেট তাস থেকে পরপর দুইটি তাস নেওয়া হলে দ্বিতীয় তাসটি নেওয়ার আগে প্রথম তাসটি প্যাকেটে ফেরত দেওয়া বা না দেওয়ার ওপর দ্বিতীয় তাসটির সম্ভাবনা নির্ভর করে। এখানে দ্বিতীয় তাস নেওয়ার ঘটনা অধীন ঘটনা।

শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability): যদি কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য কোনো ঘটনার ইতিপূর্বে ঘটার বা না ঘটার ওপর নির্ভর করে তবে ঐ ঘটনার সম্ভাবনাকে শর্তাধীন সম্ভাবনা বলে।

উদাহরণ: একটি পাত্রে তিনটি লাল ও দুইটি কালো বল আছে। একটি বল উঠিয়ে পুনঃস্থাপন না করে আরেকটি বল উঠালে দ্বিতীয় উত্তোলিত বলটি কালো হবার ঘটনা প্রথম উত্তোলিত বলের উপর নির্ভরশীল। এক্ষেত্রে প্রথম বলটি লাল হয়েছে এ শর্তে দ্বিতীয় বলটি কালো হবার সম্ভাবনা শর্তাধীন সম্ভাবনা।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী:

01. যে কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $= \dfrac{\text{সমসম্ভাব্য অনুকূল ঘটনার সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনার সংখ্যা}}$

02. A ও B দুটি ঘটনা হলে- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

☑ A এবং B বর্জনশীল ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

☑ A এবং B অবর্জনশীল ঘটনা হলে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

☑ A এবং B স্বাধীন ঘটনা হলে, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ এবং $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

☑ A ঘটনা ঘটেছে যে শর্তে B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা, $P\left(\dfrac{B}{A}\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

☑ B ঘটনা ঘটেছে যে শর্তে A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা, $P\left(\dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Important Problems with Solution

TYPE 01: বর্জনশীল, অবর্জনশীল, স্বাধীন ও শর্তাধীনে সম্ভাব্যতার সূত্র সম্পর্কিত সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic এবং Type 01 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

01. $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{3}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A\cap B)$ এবং $P(A\cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol" A ও B স্বাধীন ঘটনা হলে আমরা পাই, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

আবার আমরা জানি ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হলে অবর্জনশীল হবে।

সুতরাং $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ **Ans.**

02. যদি $P(A\cup B)=0.6, P(A)=0.3$ হয় তবে, $P(B)$ এর মান কত হলে A ও B অবিচ্ছিন্ন ও স্বাধীন হবে?

Sol" দেওয়া আছে, $P(A\cup B)=0.6$ এবং $P(A)=0.3$

এখানে, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

বা, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$ [A ও B স্বাধীন]

বা, $0.60=0.3+P(B)-0.3\,P(B)$

বা, $P(B)=\frac{0.6-0.3}{0.7}=\frac{0.3}{0.7}=\frac{3}{7}$

03. যদি $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{4}$ এবং $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$ হয় তবে, (a) $P(A/B)$; (b) $P(A/\bar{B})$; (c) $P(\bar{A}/\bar{B})$ নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{4}$ এবং $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

এখন, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{6+9-4}{12}=\frac{11}{12}$

শর্তাধীন সম্ভাবনা হতে পাই,

(a) $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$

(b) $P(A|\bar{B})=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{1}{6}\times\frac{4}{1}=\frac{2}{3}$ $\left[\because P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\right.$

$\left.\text{এবং } P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\right]$

(c) $P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{B})}$ [দি মর্গ্যানের সূত্র]

$=\frac{1-P(A\cup B)}{P(\bar{B})}=\frac{1-\frac{11}{12}}{\frac{1}{4}}\left[\because P(\bar{B})=\frac{1}{4}\right]=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{12}\times\frac{4}{1}=\frac{1}{3}$

04. $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{2}{3}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(B/A)$ নির্ণয় কর।

Sol" A ও B দুটি স্বাধীন ঘটনা হলে- $P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{3},\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

শর্তাধীন সম্ভাবনার ক্ষেত্রে, $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}\times\frac{3}{1}=\frac{2}{3}$

15. যদি $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{5}$ এবং $P(A|B)=\frac{3}{8}$ হয়, তবে $P(B|A)$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol দেওয়া আছে, $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{5}$ এবং $P(A|B)=\frac{3}{8}$

আমরা জানি, $P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore P(A \cap B)=P(A \mid B) \times P(B)=\frac{3}{8} \times \frac{1}{5}=\frac{3}{40}$

$\therefore P(B \mid A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{40} \times \frac{2}{1}=\frac{3}{20}$ **Ans.**

TYPE 02 সূত্রাবলীর প্রয়োগ ও শর্তাধীন সম্ভাব্যতার সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic এবং Type 02 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

01. একজন প্রকৌশলীর প্লামবিং কাজের চুক্তি পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{২}{৩}$ এবং ইলেকট্রিক কাজের চুক্তি না পাওয়ার সম্ভাব্যতা $\frac{৫}{৯}$। যদি কমপক্ষে একটি কাজের চুক্তি পাবার সম্ভাব্যতা $\frac{৪}{৫}$ হয় তাহলে উভয় কাজের চুক্তি পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় করুন।

[৪৪তম বিসিএস, ৪০তম বিসিএস]

Sol ধরি, প্লামবিং কাজের চুক্তি পাওয়ার সম্ভাব্যতা = $P(A)$

ইলেকট্রিক কাজের চুক্তি পাবার সম্ভাব্যতা = $P(B)$

কমপক্ষে একটি কাজের চুক্তি পাবার সম্ভাব্যতা = $P(A \cup B)$

এবং উভয় কাজের চুক্তি পাবার সম্ভাব্যতা = $P(A \cap B)$

প্রশ্নানুসারে, $P(A)=\frac{২}{৩}$

$P(B)=১-\frac{৫}{৯}=\frac{৪}{৯}$

$P(A \cup B)=\frac{৪}{৫}$

$P(A \cap B)=?$

আমরা জানি, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

বা, $P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)$

$=\frac{২}{৩}+\frac{৪}{৯}-\frac{৪}{৫}=\frac{৩০+২০-৩৬}{৪৫}=\frac{১৪}{৪৫}$

উত্তর: $\frac{১৪}{৪৫}$

02. একজন ছাত্রের গণিতে পাশ করার সম্ভাবনা $\frac{2}{3}$, পরিসংখ্যানে পাশ করার সম্ভাবনা $\frac{4}{9}$, এবং যে কোন এক বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা $\frac{4}{5}$ হয় তবে উভয় বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা কত?

Sol" মনে করি, গণিতে পাশ করার সম্ভাবনা, $P(A)=\frac{2}{3}$, পরিসংখ্যানে পাশ করার সম্ভাবনা $P(B)=\frac{4}{9}$,

এবং যে কোন এক বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা $P(A\cap B)=\frac{4}{5}$ হলে,

$\therefore$ উভয় বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{5}=\frac{14}{45}$ Ans.

03. একজন ছাত্রের বাংলায় পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{2}{3}$, বাংলা ও গণিত দুইটি বিষয়ে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{14}{45}$ এবং দুইটির যে কোন একটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{4}{5}$ হলে, তার গণিত পাসের সম্ভাব্যতা কত?

Sol" মনে করি, বাংলা, গণিত, বাংলা ও গণিত, বাংলা অথবা গণিত-এ পাসের সম্ভাব্যতা যথাক্রমে-
$P(B), P(M), P(B\cap M), P(B\cup M)$

$\therefore \quad P(B)=\frac{2}{3}, P(B\cap M)=\frac{14}{45}, P(B\cup M)=\frac{4}{5}, P(M)=?$

আমরা জানি, $P(B\cup M)=P(B)+P(M)-P(B\cap M)$

বা, $P(M)=P(B\cup M)-P(B)+P(B\cap M)$

$$=\frac{4}{5}-\frac{2}{3}+\frac{14}{45}=\frac{36-30+14}{45}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$ **Ans.**

04. আলমের বাংলা পরীক্ষায় ফেল করার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{5}$, বাংলা ও ইংরেজি দুইটিতেই পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{3}{4}$ এবং দুইটির যে কোন একটিতে পাসের সম্ভাব্যতা $\frac{7}{8}$ হলে তার কেবল ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা কত?

Sol" মনে করি, বাংলায় পাসের ঘটনা = A এবং ইংরেজিতে পাসের ঘটনা = B

তাহলে, $P(A)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ [পূরক সূত্রানুযায়ী]

P (বাংলা বা ইংরেজি) $=P(A\cup B)=\frac{7}{8}$

P (বাংলা এবং ইংরেজি) $=P(A\cap B)=\frac{3}{4}$

এখন সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

বা, $\frac{7}{8}=\frac{4}{5}+P(B)-\frac{3}{4}$

বা, $P(B)=\frac{7}{8}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=\frac{35+30-32}{40}$

$\therefore \quad P(B)=\frac{33}{40}$ অর্থাৎ ইংরেজিতে পাসের সম্ভাব্যতা $=\frac{33}{40}$

$\therefore$ কেবলমাত্র ইংরেজিতে পাসের সম্ভাবনা = (ইংরেজিতে পাসের সম্ভাবনা) − (বাংলা ও ইংরেজি দুইটিতে পাসের সম্ভাবনা)

$$=P(B)-P(B\cap A)=\frac{33}{40}-\frac{3}{4}=\frac{3}{40}$$ **Ans.**

500 জন লোকের উপর জরিপ করে দেখা গেল যে, তাদের মধ্যে 50 জন অবজারভার পড়ে না এবং 25 জন ইত্তেফাক পড়ে না। আবার, 10 জন দু'টি পত্রিকার কোনটিই পড়ে না। একজন লোক নির্বিচারে নেওয়া হলো। লোকটি ইত্তেফাক পড়ে কিন্তু অবজারভার পড়ে না তার সম্ভাবনা কত? [৩৬তম বিসিএস]

Sol ধরি, O = অবজারভার না পড়ার ঘটনা

I = ইত্তেফাক না পড়ার ঘটনা

$\therefore$ O^c = অবজারভার পড়ার ঘটনা

এবং I^c = ইত্তেফাক পড়ার ঘটনা

এখানে, $P(O) = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$; $P(I) = \frac{25}{500} = \frac{1}{20}$

এবং $P(O \cap I) = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(O \cap I^c) = P(O) - P(O \cap I) = \frac{1}{10} - \frac{1}{50} = \frac{5-1}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$ **Ans.**

বিকল্প সমাধান:

Sol মোট লোকের সংখ্যা = 500

অবজারভার পড়ে না = 50

ইত্তেফাক পড়ে না = 25

কোনটিই পড়ে না = 10 জন।

সুতরাং অবজারভার পড়ে না কিন্তু ইত্তেফাক পড়ে এমন সংখ্যা = (50 – 10) = 40

$\therefore$ P (ইত্তেফাক পড়ে কিন্তু অবজারভার পড়ে না) = $\frac{40}{500} = \frac{2}{25}$ **Ans.**

16. একটি কলেজের একাদশ শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 30 জন ফুটবল খেলে, 40 জন ক্রিকেট খেলে এবং 20 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। যদি ছেলেটি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা কত?

Sol একজন ছাত্র দৈবভাবে নির্বাচন করা হলে,

ফুটবল খেলে এরূপ ছাত্রের সম্ভাবনা, $P(F) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

ক্রিকেট খেলে এরূপ ছাত্রের সম্ভাবনা, $P(C) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

ফুটবল ও ক্রিকেট উভয়ই খেলে এরূপ সম্ভাবনা, $P(F \cap C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ ছাত্রটি যদি ক্রিকেট খেলে তবে তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা, $P(F \mid C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

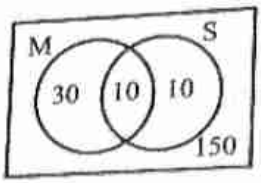
17. গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 250 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন পরিসংখ্যানে এবং 45 জন গণিতে ফেল করে। উভয় বিষয়ে 15 জন ফেল করেছে। তাদের মধ্য থেকে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। পরীক্ষার্থীর পরিসংখ্যানে পাশ ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol ধরি, A = গণিতে ফেল করার ঘটনা এবং B = পরিসংখ্যানে ফেল করার ঘটনা

এখানে, $P(A) = \frac{45}{250} = \frac{9}{50}$; $P(B) = \frac{25}{250} = \frac{1}{10}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{15}{250} = \frac{3}{50}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{50} - \frac{3}{50} = \frac{9-3}{50} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$ **Ans.**

08. 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 40 জন গণিতে, 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 10 জন উভয় বিষয়ে ফেল করে। একজন পরীক্ষার্থী দৈবভাবে নেওয়া হলো। তার পক্ষে (ক) গণিতে ফেল এবং পরিসংখ্যানে পাশ; (খ) কেবল এক বিষয়ে পাশ। (গ) বড়জোড় এক বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা কত? [৩৮তম বিসিএস]



Sol" মোট পরীক্ষার্থী = 200 জন

শুধু গণিতে ফেল = 40 – 10 = 30

শুধু পরিসংখ্যানে ফেল = 20 – 10 = 10

মোট ফেল = 30 + 10 + 10 = 50

উভয় বিষয়ে মোট পাশ = 200 – 50 = 150

গণিতে পাশ = 200 – 40 = 160

শুধু গণিতে পাশ = 160 – 150 = 10

পরিসংখ্যানে পাশ = 200 – 20 = 180

শুধু পরিসংখ্যানে পাশ = 180 – 150 = 30

(ক) গণিতে ফেল এবং পরিসংখ্যানে পাশ করার সম্ভাবনা $= \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$

(খ) কেবল এক বিষয়ে পাশ করার সম্ভাবনা $= \frac{30+10}{200} = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$

(গ) বড়জোড় এক বিষয়ে পাশ অর্থাৎ মোট ফেল করার সম্ভাবনা $= \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$

উত্তর: $\left(\frac{3}{20}, \frac{1}{5} \text{ এবং } \frac{1}{4}\right)$

09. দুইজন ছাত্রের একটি অঙ্কের সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$। তারা একত্রে অঙ্কটি করার চেষ্টা করলে অঙ্কটির সমাধান করার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Sol" দেয়া আছে, ছাত্র দুইটির অংকটি সমাধান করার সম্ভাব্যতা যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$

ধরি, ১ম ও ২য় ছাত্রের অংকটি সমাধান করার ঘটনা যথাক্রমে A ও B

সুতরাং $P(A) = \frac{1}{3}$ এবং $P(B) = \frac{1}{4}$

যেহেতু ঘটনা দুটি স্বাধীন সুতরাং $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

সুতরাং তাদের একত্রে অংকটি সমাধান করার সম্ভাব্যতা

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ Ans.}$$

10. কোন সমীক্ষায় দেখা গেল 100 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে বাংলায় 40 জন, ইংরেজিতে 35 জন এবং গণিতে 20জন পাশ করেছে। বাংলা ও ইংরেজিতে 17 জন, ইংরেজি ও গণিতে 7 জন, গণিত ও বাংলায় 6 জন পাশ করেছে এবং তিন বিষয়ে পাশ করেছে 5 জন। দৈবচয়নে একজন ছাত্রকে বাছাই করলে তার তিন বিষয়ে ফেল করার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Sol" ধরি, সকল পরীক্ষার্থীর সেট U, বাংলা, ইংরেজি এবং গণিতে পাশ করা পরীক্ষার্থীদের সেট যথাক্রমে B, E এবং M

এখানে, $n(U) = 100$

$n(B) = 40, n(E) = 35, n(M) = 20$

$n(B \cap E) = 17, n(E \cap M) = 7, n(M \cap B) = 6$

$n(B \cap E \cap M) = 5$

এখন, যে কোনো একটি বা একাধিক বিষয়ে পাশ পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা $n(B \cup E \cup M)$ হলে,

আমরা জানি, $n(B \cup E \cup M) = n(B) + n(E) + n(M) - n(B \cap E) - n(E \cap M) - n(M \cap B) + n(B \cap E \cap M)$

$= 40 + 35 + 20 - 17 - 7 - 6 + 5 = 100 - 30 = 70$

∴ তিনটি বিষয়ে ফেল করা পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা $= 100 - 70 = 30$

∴ তিনটি বিষয়ে ফেল করার সম্ভাবনা $= \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ **(Ans.)**

11. একজন ছাত্র একটি পরীক্ষায় A, B, C এবং D চারটি বিষয়ে অংশগ্রহণ করেন। সে তার পরীক্ষায় পাস করার সম্ভাব্যতা নির্ধারণ করে A বিষয়ে $\frac{4}{5}$, B বিষয়ে $\frac{3}{4}$, C বিষয়ে $\frac{5}{6}$, এবং D বিষয়ে $\frac{2}{3}$। যোগ্যতা প্রদর্শনে তাকে অবশ্যই A বিষয়ে এবং কমপক্ষে অন্য দুটি বিষয়ে পাস করতে হবে। তার যোগ্যতার সম্ভাবনা বের করুন। [৩৫তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $P(A)=\frac{4}{5}$ $\therefore P(A')=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$P(B)=\frac{3}{4}$ $\therefore P(B')=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$P(C)=\frac{5}{6}$ $\therefore P(C')=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

$P(D)=\frac{2}{3}$ $\therefore P(D')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

যেহেতু ছাত্রকে যোগ্যতা প্রদর্শনে অবশ্যই A বিষয়ে এবং কমপক্ষে অন্য দুটি বিষয়ে পাস করতে হবে।
স্বাধীন ঘটনার জন্য আমরা জানি, $P(AB) = P(A).P(B)$

$\therefore$ A, B ও C তে পাশ কিন্তু D তে ফেল করার সম্ভাব্যতা $= P(ABCD')$

$= P(A)\times P(B)\times P(C)\times P(D')=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore$ A, B ও D তে পাশ কিন্তু C তে ফেল করার সম্ভাব্যতা $= P(ABDC')$

$= P(A)\times P(B)\times P(D)\times P(C')=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{15}$

$\therefore$ A, C ও D তে পাশ কিন্তু B তে ফেল করার সম্ভাব্যতা $= P(ACDB')$

$= P(A)\times P(C)\times P(D)\times P(B')=\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{9}$

এবং A, B, C ও D তে পাশ করার সম্ভাব্যতা $= P(ABCD)$

$= P(A)\times P(B)\times P(C)\times P(D)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{61}{90}$ Ans.

TYPE 03 সংখ্যা বিষয়ক সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic, Type 03, Type 04, Type 05 এবং Type 06 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

01. 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যা হতে যে কোনো একটিকে ইচ্ছামত নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" 10 থেকে 30 পর্যন্ত মোট সংখ্যা $= (30-10)+1 = 21$ টি

$\therefore$ $n(S) = 21$

সংখ্যাগুলির মধ্যে মৌলিক অথবা, 5 এর গুণিতক সংখ্যার সেট যথাক্রমে A ও B হলে,

$A = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ এবং $B = \{10, 15, 20, 25, 30\}$

$\therefore$ $n(A) = 6$ এবং $n(B) = 5$

এখানে, $A \cap B = \varnothing$

সুতরাং ঘটনাদ্বয় পরস্পর বর্জনশীল। দৈবভাবে একটি সংখ্যা নিলে সেটি মৌলিক অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার ঘটনা $= A \cup B$

এখন, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{21}+\frac{5}{21}=\frac{11}{21}$ Ans.

02. 1 থেকে 20 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি হতে একটি সংখ্যা দৈব উপায়ে নেয়া হলে সংখ্যাটি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Sol" মনে করি, 3 এবং 5 এর গুণিতক সংখ্যার ঘটনা যথাক্রমে A ও B.

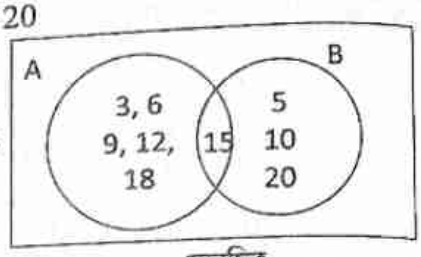
$\therefore$ $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{20}$

$B = \{5, 10, 15, 20\}$

$\Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{20}$

এবং $(A \cap B) = \{15\}$

$\Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$



ভেনচিত্র

$\therefore$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$ **(Ans.)**

03. দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা দৈবভাবে নির্বাচন করলে তা 3 এর গুণিতক এবং 5 এর গুণিতক না হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাগুলি 10 থেকে 99 পর্যন্ত।

এখানে, $n(S) = (99 - 10) + 1 = 90$

ধরি, A = দুই অঙ্কবিশিষ্ট 3 এর গুণিতক সংখ্যার সেট এবং B = দুই বিশিষ্ট 5 এর গুণিতক সংখ্যার সেট

$\therefore$ $n(A) = 30$ কারণ $90 \div 3 = 30$

আবার, 3 ও 5 এর ল.সা.গু = 15 এবং $90 \div 15 = 6$

কাজেই 3 ও 5 এর গুণিতক সংখ্যা $n(A \cap B) = 6$

এখন, $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{30}{90} - \frac{6}{90} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{5-1}{15} = \frac{4}{15}$ Ans.

04. পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 2, 4, 7, 9, 3, 8 সংখ্যাগুলি ব্যবহার করে দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা বানানো হবে। সংখ্যাটির জোড় হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" 2, 4, 7, 9, 3, 8 অঙ্কগুলি ব্যবহার করে 2 অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা বানানো যায় ${}^6P_2 = 6 \times 5 = 30$ টি।

একের স্থানে 2, 4, 8 এর যে কোনোটি বসানো যায় ${}^3P_1$ উপায়ে এবং দশকের স্থানে বাকিগুলি ${}^5P_1$ উপায়ে বসানো যায়।

$\therefore$ জোড় সংখ্যা ${}^3P_1 \times {}^5P_1 = 3 \times 5 = 15$ টি

$\therefore$ জোড় সংখ্যা হবার সম্ভাবনা $= \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

TYPE 04 ছক্কা সম্পর্কিত সমস্যা

01. একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা উঠার সম্ভাবনা কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উচ্চতর গণিত), অধ্যায়-১৪ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো: 1, 2, 3, 4, 5, 6।

ছক্কাটি নিরপেক্ষ হলে ফলাফলগুলো সম্ভাব্য হবে অর্থাৎ যে কোনো ফলাফল আসার সম্ভাবনা সমান।

এখানে, জোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা হলো: 2, 3, 4, 6।

এদের যেকোনো একটি সংখ্যা আসলেই তা জোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

সুতরাং অনুকূল ফলাফল = 4

$\therefore$ P(জোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা) $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

02. দুইটি নিরপেক্ষ ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় কর। (a) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের ব্যবধান 4 বা তার বেশি। (b) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 7 অথবা 6। (c) প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল বড়জোড় 3।

Sol দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্র:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

প্রথম ছক্কার মুখের বিন্দু	দ্বিতীয় ছক্কার মুখের বিন্দু 1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(S) = (6 \times 6) = 36$ টি

(a) ধরি, A প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের ব্যবধান 4 বা তার বেশি হবার ঘটনা।

A ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: $\{(1, 5), (1, 6), (2, 6), (5, 1), (6, 1), (6, 2)\}$

$\therefore$ A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, $n(A) = 6$

অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **Ans.**

(b) ধরি, B প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 7 অথবা 6 হবার ঘটনা।

$\therefore$ B ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: $\{(1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (6, 1)\}$

$\therefore$ B ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(B) = 11$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{11}{36}$ **Ans.**

(c) ধরি, C প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল বড়জোড় 3 হবার ঘটনা।

$\therefore$ C ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$\therefore$ C ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, $n(C) = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ **Ans.**

03. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে তাদের নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি কর এবং দুইটি ছক্কায়ই ছয় উঠার সম্ভাব্যতা কত তা নির্ণয় কর।

Sol দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্র: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

প্রথম ছক্কার মুখের বিন্দু	দ্বিতীয় ছক্কার মুখের বিন্দু 1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

মোট নমুনাবিন্দু = 36 টি

দুইটি ছক্কায়ই ছয় পাবার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা = 1 টি

∴ দুইটি ছক্কায়ই ছয় উঠার সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{36}$ Ans.

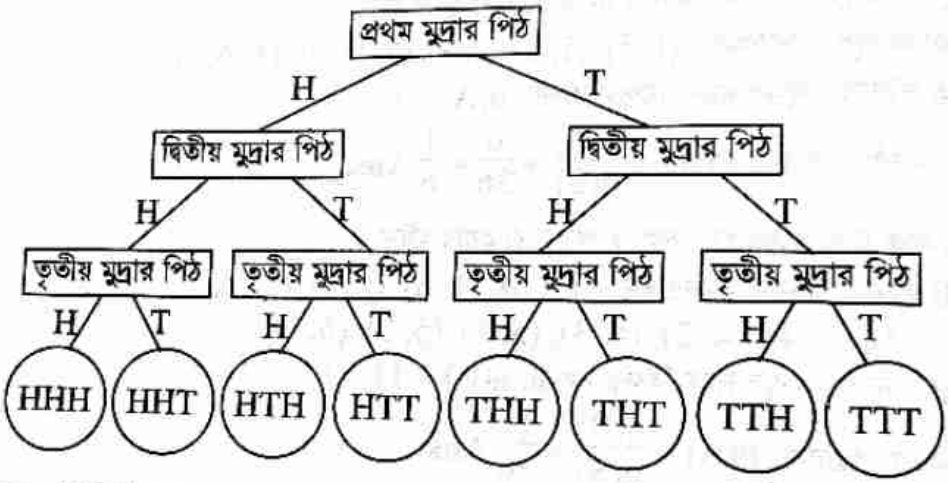
TYPE 05 মুদ্রা সম্পর্কিত সমস্যা

01. মনে করি, তিনটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো। তিনটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একসাথে একবার নিক্ষেপ করা হলে, probability tree তৈরি করে নমুনাক্ষেত্রটি দেখাও এবং নিচের ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

(ক) কেবল একটা টেল, (খ) তিনটাই হেড, (গ) কমপক্ষে একটা টেল পাওয়ার সম্ভাবনা বের করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উচ্চতর গণিত), অধ্যায়-১৪ (উদাহরণের অঙ্ক নং-৩)]

Sol" প্রথমে মুদ্রা তিনটিকে তিন ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি এবং প্রতি ধাপে 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। এ ফলাফলকে probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যায়:



তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে: {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

এখানে, মোট নমুনা বিন্দু 8 টি এবং এদের যেকোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}$।

(ক) একটি টেল পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো {THH, HHT, HTH} = 3 টি।

$\therefore P(1T) = \frac{3}{8}$ (কেননা প্রতিটি নমুনা বিন্দুর ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}$)

(খ) তিনটিই হেড (H) পাওয়ার অনুকূল ঘটনা {HHH} = 1 টি।

$\therefore P(HHH) = \frac{1}{8}$

(গ) কমপক্ষে 1 টি টেল (T) পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো HHH ছাড়া বাকি সবগুলো অর্থাৎ {HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} = 7 টি।

$\therefore P$ [কমপক্ষে 1T] $= \frac{7}{8}$

02. একটি সুষম মুদ্রা পরপর তিনবার টস করা হলো। প্রতি টসেই প্রথমে হেড পাবার শর্তে 2 বা ততোধিক বার হেড পাবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। কোন শর্ত আরোপ না করা হলে 2 বা ততোধিক হেড পাবার সম্ভাবনা কত?

Sol একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপ-

একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ		একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ			
		HH	HT	TH	TT
	H	HHH	HHT	HTH	HTT
	T	THH	THT	TTH	TTT

তাহলে, প্রথমে হেড পাবার নমুনাক্ষেত্র = {HHH, HHT, HTH, HTT}

∴ প্রথমে হেড পাবার নমুনাবিন্দু = 4

প্রথমে হেড পাবার শর্তে দুই বা ততোধিক হেড পাবার নমুনাক্ষেত্র = {HHH, HHT, HTH}

∴ প্রথমে হেড পাবার শর্তে দুই বা ততোধিক হেড পাবার নমুনাবিন্দু = 3

∴ প্রথমে হেড পাবার শর্তে দুই বা ততোধিক হেড পাবার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$ **Ans.**

আবার, শর্তব্যতীত তিনটি টসের সম্ভাব্য ফলাফলের নমুনাক্ষেত্র

= {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

তাহলে, নমুনাক্ষেত্রের নমুনাবিন্দু সংখ্যা = 8 এবং ঘটন সেটের উপাদান সংখ্যা = 4

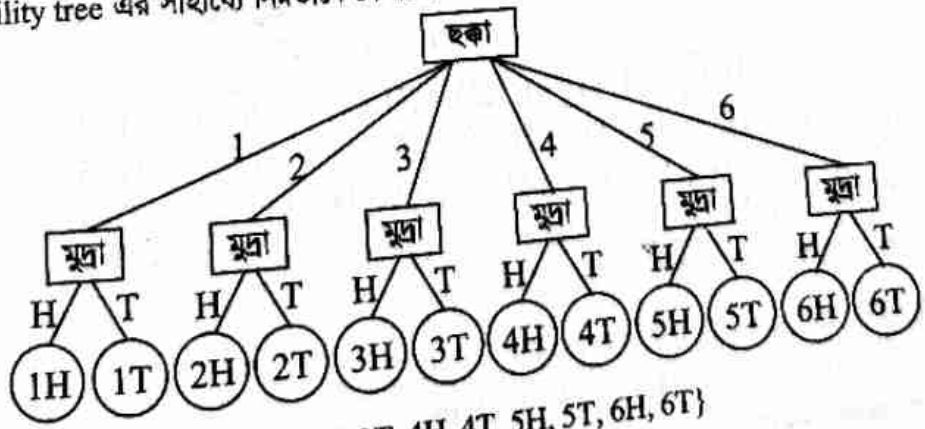
তাহলে, দুই বা ততোধিক হেড পাবার সম্ভাবনা $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

TYPE 06 মুদ্রা ও ছক্কার যৌথ নিক্ষেপ সম্পর্কিত সমস্যা

01. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো। Probability Tree তৈরি করে নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। ছক্কায় 5 এবং মুদ্রায় H আসার সম্ভাবনা বের করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উচ্চতর গণিত), অধ্যায়-১৪ (উদাহরণের অংক নং-০৮)]

Sol একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে 6 টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। তাই পরীক্ষায় মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যাবে:



তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে: {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}

এখানে, মোট নমুনা বিন্দু 12 টি।

∴ ছক্কায় 5 এবং মুদ্রায় H আসার সম্ভাবনা $P(5H) = \frac{1}{12}$।

02. একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিম্নলিখিত ঘটনাগুলির সম্ভাবনা নির্ণয় কর:
(a) মুদ্রায় হেড ও ছক্কার জোড় সংখ্যা। **(b)** মুদ্রায় টেল ও ছক্কার 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা।

Sol" একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি নিম্নরূপে দেখানো যেতে পারে:

		একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র					
		1	2	3	4	5	6
একটি মুদ্রার নমুনাক্ষেত্র	H	H1	H2	H3	H4	H5	H6
	T	T1	T2	T3	T4	T5	T6

∴ নমুনাক্ষেত্র S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
নমুনাক্ষেত্রে মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(S) = 12

(a) ধরি, A মুদ্রায় হেড ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা,
A ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: {H2, H4, H6}
∴ A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(A) = 3
অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ **Ans.**

(b) ধরি, B মুদ্রায় টেল ও ছক্কায় 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাবার ঘটনা,
B ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: {T3, T6}
∴ B ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(B) = 2
অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ **Ans.**

03. দুইটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ। প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্র হতে সম্ভাবনা বের কর।
(a) দুইটি মাথা ও জোড় সংখ্যা। **(b)** মুদ্রায় একই পিঠ ও ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা।
(c) যে কোনো পিঠ ও জোড় সংখ্যা। **(d)** মুদ্রায় বিপরীত পিঠ ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা।
(e) ছক্কায় 4 উঠার সম্ভাব্যতা

Sol" একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র নিচে দেওয়া হলো:

		একটি ছক্কার নমুনাক্ষেত্র					
		1	2	3	4	5	6
দুইটি মুদ্রার নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দু	HH	(HH1)	(HH2)	(HH3)	(HH4)	(HH5)	(HH6)
	HT	(HT1)	(HT2)	(HT3)	(HT4)	(HT5)	(HT6)
	TH	(TH1)	(TH2)	(TH3)	(TH4)	(TH5)	(TH6)
	TT	(TT1)	(TT2)	(TT3)	(TT4)	(TT5)	(TT6)

অতএব, নমুনাক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা, n(S) = 24

(a) ধরি, A দুইটি মাথা ও জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা
A ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: {HH2, HH4, HH6}
A ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(A) = 3
অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ **Ans.**

(b) ধরি, E মুদ্রায় একই পিঠ ও ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা
E ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: {HH1, HH3, HH5, TT1, TT3, TT5}
∴ E ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(E) = 6
অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ **Ans.**

(c) ধরি, I যে কোন পিঠ ও জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা
I ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: {HH2, HH4, HH6, HT2, HT4, HT6, TH2, TH4, TH6, TT2, TT4, TT6}
∴ I ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(I) = 12
অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(I) = \frac{n(I)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

(d) ধরি, K মুদ্রায় বিপরীত পিঠ ও ছক্কায় জোড় সংখ্যা পাবার ঘটনা
K ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: {HT2, HT4, HT6, TH2, TH4, TH6}
∴ K ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(K) = 6
অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ **Ans.**

(e) ধরি, M ছক্কায় 4 পাবার ঘটনা
M ঘটনার অনুকূল নমুনাক্ষেত্র: {HH4, HT4, TH4, TT4}
∴ M ঘটনার অনুকূল নমুনাবিন্দুর সংখ্যা, n(M) = 4
অতএব, নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ **Ans.**

TYPE 07 বল বা মার্বেল সম্পর্কিত সমস্যা (একটি পাত্র বা বক্সের ক্ষেত্রে)

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Basic, Type 07, Type 08 এবং Type 09 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

01. একটি ঝুঁড়িতে 8 টি লাল, 10 টি সাদা ও 7 টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হলো।
(ক) সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল নির্ণয় কর।
(খ) মার্বেলটি (১) লাল হওয়ার সম্ভাবনা এবং (২) সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(গ) যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উচ্চতর গণিত), অধ্যায়-১৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol (ক) এখানে, লাল মার্বেল 8 টি
সাদা মার্বেল 10 টি
ও কালো মার্বেল 7 টি
∴ মোট মার্বেল = (8 + 10 + 7) টি = 25 টি
সুতরাং সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল 25 **(Ans.)**

(খ) (১) মোট মার্বেল 25 টি
লাল মার্বেল 8 টি

∴ মার্বেলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{8}{25}$ (Ans.)

(২) মোট মার্বেল 25 টি
সাদা মার্বেল 10 টি

∴ সাদা নয় এরূপ মার্বেল সংখ্যা $= (25 - 10)$ টি $= 15$ টি

∴ মার্বেলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ (Ans.)

(গ) প্রতিস্থাপন না করে মার্বেল একাধিকবার তুলে নিলে, প্রতিবারে মার্বেল সংখ্যা অর্থাৎ মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা আগের চেয়ে এক কমে যাবে।

তাহলে, প্রথমবারের জন্য, মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10}{25}$

দ্বিতীয়বারে সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{9}{24}$

তৃতীয়বারে সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{8}{23}$

এবং চতুর্থবারে সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7}{22}$

∴ প্রতিস্থাপন না করে পরপর চারটি মার্বেল তোলা হলে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{8}{23} \times \frac{7}{22}$

$= \frac{21}{1265}$ (Ans.)

02. একটি বাক্সে 5টি লাল, 7টি নীল ও 3টি সবুজ বল আছে। উহা হতে পরপর 3টি বল দৈবভাবে নেয়া হলো বল তিনটি উত্তোলনের ক্রমানুসারে লাল, নীল ও সবুজ হবার সম্ভাবনা কত হবে?

(a) যদি বলগুলি পুনঃস্থাপন করা হয়।

(b) যদি বলগুলি পুনঃস্থাপন না করা হয়।

Sol" বাক্সে ৫টি লাল, ৭টি নীল ও ৩টি সবুজ বল আছে। মোট বল ১৫টি। বলের পর্যায়ক্রমিক ঘটনাগুলি স্বাধীন হবে।

(a) পুনঃস্থাপন করে নেওয়া হলে বল তিনটি উত্তোলনের ক্রমানুসারে লাল, নীল ও সবুজ হবার সম্ভাবনা = P(১ম টি লাল, ২য় টি নীল, ৩য় টি সবুজ)

$= P(\text{১ম টি লাল}) \times P(\text{২য় টি নীল}) \times P(\text{৩য় টি সবুজ})$

$= \frac{{}^5C_1}{{}^{15}C_1} \times \frac{{}^7C_1}{{}^{15}C_1} \times \frac{{}^3C_1}{{}^{15}C_1} = \frac{5}{15} \times \frac{7}{15} \times \frac{3}{15} = \frac{7}{225}$ **Ans.**

(b) পুনঃস্থাপন না করে নেওয়া হলে বল তিনটি উত্তোলনের ক্রমানুসারে লাল, নীল ও সবুজ হবার সম্ভাবনা = P(১ম টি লাল, ২য় টি নীল, ৩য় টি সবুজ)

$= P(\text{১ম টি লাল}) \times P(\text{২য় টি নীল}) \times P(\text{৩য় টি সবুজ})$

$= \frac{{}^5C_1}{{}^{15}C_1} \times \frac{{}^7C_1}{{}^{14}C_1} \times \frac{{}^3C_1}{{}^{13}C_1} = \frac{5}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{3}{13} = \frac{1}{26}$ **Ans.**

03. একটি বাক্সে 6টি সাদা বল এবং 7টি লাল বল আছে। দৈবভাবে একটি বল তুলে নেওয়া হলো। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol" ধরি, সাদা বলের সেট, W এবং লাল বলের সেট, R

$\therefore$ $n(W) = 6$ এবং $n(R) = 7$

$\therefore$ $n(W) + n(R) = 6 + 7 = 13$

বলটির লাল হবার সম্ভাবনা $P(R) = \frac{7}{13}$

" সাদা " " $P(W) = \frac{6}{13}$

এখন, বলটির লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা $P(R \cup W) = P(R) + P(W) = \frac{7}{13} + \frac{6}{13} = 1$ [$\because$ বর্জনশীল ঘটনা]

Ans: 1

04. একটি বাক্সে 7টি লাল, 9টি কালো এবং 6টি সাদা বল আছে। এলোমেলোভাবে একটি বল তুলে নেয়া হলো। বলটি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol" বাক্সটিতে মোট বল = 7টি লাল + 9টি কালো + 6টি সাদা = 22টি বল।

বাক্স হতে দৈবভাবে একটি বল তোলা হলে বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{\text{লাল বল সংখ্যা}}{\text{মোট বল সংখ্যা}} = \frac{7}{22}$

বাক্স হতে দৈবভাবে একটি বল তোলা হলে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{\text{সাদা বল সংখ্যা}}{\text{মোট বল সংখ্যা}} = \frac{6}{22}$

$\therefore$ বাক্স হতে দৈবভাবে একটি বল তোলা হলে বলটি লাল অথবা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা

= বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা + বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7}{22} + \frac{6}{22} = \frac{13}{22}$ **Ans.**

05. একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6টি সাদা, 7টি লাল এবং 9টি কালো বল আছে। এলোমেলোভাবে 3টি বল তুলে নেয়া হলো। বলগুলি লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol" সাদা বল = 6 টি; লাল বল = 7 টি; কালো বল = 9 টি

মোট বল = 6 + 7 + 9 = 22 টি

22 টি বল থেকে 3 টি বল তোলা যায় = ${}^{22}C_3$ উপায়ে

7 টি লাল বল থেকে 3 টি বল তোলা যায় = ${}^{7}C_3$ উপায়ে

6 টি সাদা বল থেকে 3 টি বল তোলা যায় = ${}^{6}C_3$ উপায়ে

বলগুলো লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{{}^{7}C_3}{{}^{22}C_3} + \frac{{}^{6}C_3}{{}^{22}C_3} = \frac{1}{44} + \frac{1}{77} = \frac{7+4}{308} = \frac{11}{308} = \frac{1}{28}$ **Ans.**

06. একটি বাক্সে 15টি সাদা ও 10টি কালো রঙের মার্বেল আছে। ঐ বাক্সটি থেকে দৈবভাবে দুইটি মার্বেল পরপর উঠিয়ে নিলে প্রতিবারে দুইটি ভিন্ন রঙের মার্বেল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Sol" মোট মার্বেল = 25 টি। পর পর দুইটি মার্বেল তুললে, প্রথমটি সাদা ও দ্বিতীয়টি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{15}{25} \times \frac{10}{24} =$

$\frac{1}{4}$

প্রথমটি কালো ও দ্বিতীয়টি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ এক্ষেত্রে সম্ভাবনা $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

07. একটি বাক্সে 12টি লাল ও 16টি কালো বল আছে। পরপর দুইটি বল তুলে নেয়া হলে উভয় বল একই রঙের হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" বাক্সে লাল বল 12 টি এবং কালো বল 16 টি

মোট বল = (12 + 16) = 28 টি

উভয় বল একই রঙের হবার সম্ভাবনা $= \frac{^{12}C_1}{^{28}C_1} \times \frac{^{11}C_1}{^{27}C_1} + \frac{^{16}C_1}{^{28}C_1} \times \frac{^{15}C_1}{^{27}C_1} = \frac{12}{28} \times \frac{11}{27} + \frac{16}{28} \times \frac{15}{27} = \frac{31}{63}$ **Ans.**

08. একটি ব্যাগে 3টি কালো এবং 4টি সাদা বল আছে। দৈবভাবে 2টি বল তুলে নেয়া হলো। কিন্তু প্রথমটি উঠানোর পর ব্যাগের মধ্যে রাখা হলো না। দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

Sol" মোট বল = (3 + 4) টি = 7 টি

প্রথম বলটি উঠানোর পর তা ব্যাগের মধ্যে রাখা হলো না। এখন, প্রথম বল কালো এবং দ্বিতীয় বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা

$$\frac{^3C_1}{^7C_1} \times \frac{^4C_1}{^6C_1} = \frac{3 \times 4}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$$

আবার, প্রথম বলটি সাদা এবং দ্বিতীয় বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{^4C_1}{^7C_1} \times \frac{^3C_1}{^6C_1} = \frac{4 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$ **Ans.**

09. একটি ব্যাগে 5টি সাদা, 7টি লাল এবং 8টি কালো বল আছে। বিনিময় না করে একটি করে পর পর 4টি বল তুলে নেওয়া হলে সবগুলি বলের সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

Sol" ব্যাগে সাদা বল = 5 টি; লাল বল = 7 টি এবং কালো বল = 8 টি

$\therefore$ মোট বল = 20 টি

20 টি বল থেকে 4 টি বল মোট $^{20}C_4$ উপায়ে নির্বাচন করা যায়

$\therefore$ মোট ফলাফলের সংখ্যা = 4845

$\therefore$ প্রতিটি বল সাদা পাওয়ার সম্ভাবনা = P (4 টি বল সাদা)

$$= \frac{^5C_4}{^{20}C_4} = \frac{5}{4845} = \frac{1}{969}$$ **Ans.**

10. একটি ঝুড়িতে 5টি কালো এবং 4টি সাদা বল আছে। একটি বালক নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল উঠালো। 3টি বলই কালো হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Sol" ঝুড়িতে মোট বল 5 + 4 = 9 টি

প্রতিবার 3টি করে বল উঠালো $^9C_3 = \frac{9 \times 7 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 84$ বার উঠানো যায়, যার মধ্যে 3টি কালো বল উঠে $^5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ বার

ধরি, 3টি বল কালো হবার ঘটনা B

$\therefore$ 3টি বলই কালো হবার সম্ভাব্যতা $P(B) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$ **Ans.**

11. একটি ব্যাগে 7টি লাল এবং 5টি সাদা বল আছে। নিরপেক্ষভাবে 4টি বল তোলা হলো। তাদের মধ্যে 2টি লাল এবং 2টি সাদা বল হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

Sol" ব্যাগে মোট বল আছে = (7 + 5) = 12 টি

12 টি বল থেকে 4 টি বল $^{12}C_4$ প্রকারে নেওয়া যায়।

সুতরাং দুইটি লাল ও দুইটি সাদা হবার সম্ভাবনা = P (দুইটি লাল বল ও দুইটি সাদা বল)

$$= \frac{^7C_2 \times ^5C_2}{^{12}C_4} = \frac{21 \times 10}{495} = \frac{14}{33}$$ **Ans.**

TYPE 08 বল বা মার্বেল সম্পর্কিত সমস্যা (দুটি ভিন্ন পাত্র বা বক্সের ক্ষেত্রে)

01. একটি পাত্রে 2টি সাদা এবং 3টি কালো বল ও অপর পাত্রে 3টি সাদা এবং 4টি কালো বল আছে। পাত্র দুইটি হতে একটি করে বল উঠানো হলে (a) বলগুলি একই রঙের, (b) ভিন্ন রঙের হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" ১ম পাত্রে মোট বল = 2 টি সাদা + 3 টি কালো = 5 টি বল

২য় পাত্রে মোট বল = 3 টি সাদা + 4 টি কালো = 7 টি বল

১ম পাত্র হতে একটি বল তোলা হলে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{5}$ এবং বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{5}$

২য় পাত্র হতে একটি বল তোলা হলে বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{7}$ এবং বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{4}{7}$

(a) পাত্র দুটি হতে একটি করে বল উঠানো হলে বলগুলি একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা
= (১ম পাত্রের বল সাদা এবং ২য় পাত্রের বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা)
+ (১ম পাত্রের বল কালো এবং ২য় পাত্রের বল কালো হওয়ার সম্ভাবনা)

$$= \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}\right) = \frac{6}{35} + \frac{12}{35} = \frac{18}{35} \text{ Ans.}$$

(b) পাত্র দুটি হতে একটি করে বল তোলা হলে বলগুলি ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাবনা
= (১ম পাত্রের বলটি সাদা এবং ২য় পাত্রের বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা)
+ (১ম পাত্রের বলটি কালো এবং ২য় পাত্রের বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা)

$$= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{3}{7}\right) = \frac{8}{35} + \frac{9}{35} = \frac{17}{35} \text{ Ans.}$$

02. একটি পাত্রে 5 টি লাল এবং 4 টি সাদা বল এবং অপর একটি পাত্রে 3 টি লাল ও 6 টি সাদা বল আছে। প্রত্যেক পাত্র হতে একটি করে বল তোলা হলে দুটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Sol" একটি পাত্রে 5টি লাল ও 4টি সাদা এবং অপর একটি পাত্রে 3টি লাল ও 6টি সাদা বল আছে। একটি করে বল তোলা হলে দুইটি বলের মধ্যে কমপক্ষে একটি বল লাল হওয়ার সম্ভাবনা: (প্রথমটি লাল ও দ্বিতীয়টি সাদার সম্ভাবনা) + (প্রথমটি সাদা ও দ্বিতীয়টি লালের সম্ভাবনা) + (দুইটিই লালের সম্ভাবনা)

$$= \frac{{}^5C_1}{{}^9C_1} \times \frac{{}^6C_1}{{}^9C_1} + \frac{{}^4C_1}{{}^9C_1} \times \frac{{}^3C_1}{{}^9C_1} + \frac{{}^5C_1}{{}^9C_1} \times \frac{{}^3C_1}{{}^9C_1}$$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{9} \qquad = \frac{5}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{10}{27} + \frac{4}{27} + \frac{5}{27} = \frac{19}{27} \text{ Ans.}$$

বিকল্প সমাধান:

১ম পাত্রে মোট বল = 5টি লাল + 4টি সাদা = 9 টি বল

২য় পাত্রে মোট বল = 3টি লাল + 6টি সাদা = 9 টি বল

দৈবভাবে প্রত্যেক পাত্র হতে একটি করে বল তুললে দুইটি বলই সাদা হওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{27}$$

দুইটি বলের কমপক্ষে একটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ Ans.

03. দুইটি থলির একটিতে 5 টি লাল এবং 3 টি কালো বল আছে। অপর থলিতে 4 টি লাল এবং 5 টি কালো বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি থলি নির্বাচন করা হলো এবং তা থেকে দুইটি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কালো হবার সম্ভাব্যতা কত?

Sol^n প্রথম থলিটি নির্বাচিত হবার ঘটনা A এবং ২য় থলিটি B.

বল দুইটির একটি লাল এবং একটি কালো হবার ঘটনা C.

সুতরাং $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

$\because$ ১ম থলি থেকে 1টি লাল ও 1টি কালো বল $({}^5C_1 \times {}^3C_1)$ উপায়ে এবং ২য় থলি থেকে 1টি লাল ও 1টি কালো বল $({}^4C_1 \times {}^5C_1)$ উপায়ে তোলা যায়।

$\therefore P(C) = P\{(A \cap C) \cup (B \cap C)\}$

$= P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A)\,P(C|A) + P(B)\,P(C|B)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^5C_1 \times {}^3C_1}{{}^8C_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^4C_1 \times {}^5C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \times 3}{28} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \times 5}{36}$

$= \frac{15}{56} + \frac{5}{18} = \frac{135 + 140}{504} = \frac{275}{504}$ **Ans.**

04. দুইটি একই রকম বাক্সের প্রথমটিতে 4 টি সাদা ও 3 টি লাল এবং দ্বিতীয়টিতে 3 টি সাদা ও 7 টি লাল বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হলো। ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল টানা হলে, বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। যদি বলটি সাদা হয় তাহলে প্রথম বাক্স থেকে নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

Sol^n প্রথম বাক্সটি নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{2}$

তাহলে, প্রথম বাক্সটি সমসম্ভব উপায়ে নির্বাচিত হওয়ার পর ঐ বাক্স থেকে নিরপেক্ষভাবে একটি সাদা বল নির্বাচিত হবার সম্ভাবনা

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{4+3} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় বাক্সটি সমসম্ভব উপায়ে নির্বাচিত হওয়ার পর ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি সাদা বল নির্বাচিত হবার সম্ভাবনা =

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{3+7} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$

সুতরাং একটি সাদা বল নির্বাচিত হবার সম্ভাব্যতা $= \frac{2}{7} + \frac{3}{20} = \frac{61}{140}$

আবার, বলটি যদি সাদা হয়, তাহলে তা প্রথম বাক্স হতে হবার সম্ভাবনা $= \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7} + \frac{3}{20}} = \frac{2}{7} \times \frac{140}{61} = \frac{40}{61}$

Ans: $\frac{61}{140}, \frac{40}{61}$

TYPE 09 তাস সম্পর্কিত সমস্যা

মোট তাস (৫২)

চিরতন (১৩)	ইস্কাপন (১৩)	হরতন (১৩)	রুইতন (১৩)
কালো রঙের	কালো	লাল	লাল

হরতন/রুইতন/চিরতন/ইস্কাপন এর প্রতি 13টি তাসের মধ্যে

(i) টেক্কা (১টি)

(ii) রাজা (১টি)- ছবিযুক্ত

(iii) রাণী (১টি)- ছবিযুক্ত

(iv) গোলাম (1টি)- ছবিযুক্ত

(v) 2 থেকে 10 পর্যন্ত সংখ্যাযুক্ত তাস (9টি)

01. এক প্যাকেট তাস হতে 3 টি তাস দৈবভাবে নেয়া হলো। তাস 3 টি, (a) টেক্কা হবার (b) টেক্কা না হবার (c) 2টি টেক্কা হবার (d) 2টি ইস্কাপন হবার (e) কমপক্ষে একটি রাজা হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Sol" এক প্যাকেট তাসে মোট 52 টি কার্ড থাকে। যার মধ্যে 4 টি টেক্কা, 13 টি ইস্কাপন, 4 টি রাজা তাস থাকে।

∴ 52 টি তাস থেকে 3 টি তাস ${}^{52}C_3$ উপায়ে নেওয়া যায়।

(a) 4 টি টেক্কা থেকে 3 টি টেক্কা তাস ${}^{4}C_3$ উপায়ে নেওয়া যায়।

∴ তাস ৩ টি টেক্কা হবার সম্ভাবনা $\frac{{}^{4}C_3}{{}^{52}C_3} = \frac{4}{22100} = \frac{1}{5525}$ **Ans.**

(b) 4 টি টেক্কা বাদ দিলে বাকি তাস থাকে $= (52 - 4) = 48$ টি

সুতরাং 48 টি তাস থেকে 3 টি তাস নেওয়া যায় ${}^{48}C_3$ উপায়ে।

∴ তাস 3 টি টেক্কা না হবার সম্ভাবনা $= \frac{{}^{48}C_3}{{}^{52}C_3} = \frac{17296}{22100} = \frac{4324}{5525}$ **Ans.**

(c) 3 টি তাসের মধ্যে 2 টি টেক্কা হবার সম্ভাবনা $= P$ (2 টি টেক্কা ও অন্যটি যে কোনো তাস) $= \frac{{}^{4}C_2 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_3} = \frac{6 \times 48}{22100} = \frac{288}{22100} = \frac{72}{5525}$ **Ans.**

(d) 3 টি তাসের মধ্যে 2 টি ইস্কাপন হবার সম্ভাবনা $= P$ (2 টি ইস্কাপন ও অন্য যে কোনো 1 টি তাস) $= \frac{{}^{13}C_2 \times {}^{39}C_1}{{}^{52}C_3}$

[ইস্কাপন বাদে বাকি তাস $= 52 - 13 = 39$ টি]

$= \frac{3042}{22100} = \frac{117}{850}$ **Ans.**

(e) 3 টি তাসের মধ্যে কমপক্ষে একটি রাজা হবার সম্ভাবনা $= P$ (একটি রাজা ও 2 টি অন্য তাস) অথবা P(2 টি রাজা ও 1 টি অন্য তাস) অথবা P(3 টি রাজা তাস)

$= \frac{{}^{4}C_1 \times {}^{48}C_2}{{}^{52}C_3} + \frac{{}^{4}C_2 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_3} + \frac{{}^{4}C_3}{{}^{52}C_3}$

$= \frac{4512}{22100} + \frac{288}{22100} + \frac{4}{22100} = \frac{4804}{22100} = \frac{1201}{5525}$ **Ans.**

02. 52 খানা তাসের মধ্য হতে 1 টি তাস দৈবভাবে উঠানো হলো। তাসটির লাল টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? তাসটি লাল বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" আমরা জানি, একটি তাসের প্যাকেটে 52 খানা তাসের মধ্যে লাল তাস থাকে 26 টি ও কালো তাস 26 টি এবং মোট 4 টি টেক্কা যার ভেতর লাল টেক্কা 2 টি ও কালো টেক্কা 2 টি।

মনে করি, তাসটি লাল টেক্কা হবার সম্ভাবনা $= P(A)$

এবং লাল বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা $= P(B)$

তাহলে, $P(A) = \frac{{}^{2}C_1}{{}^{52}C_1} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

আবার, তাসটি লাল বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা,

$P(B) = P$ (তাসটি লাল) $+ P$(তাসটি টেক্কা) $- P$(লাল টেক্কা)

$= \frac{{}^{26}C_1}{{}^{52}C_1} + \frac{{}^{4}C_1}{{}^{52}C_1} - \frac{1}{26} = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{13} - \frac{1}{26} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$

Ans: $\frac{1}{26}$ ও $\frac{7}{13}$

03. একটি তাসের প্যাকেট থেকে একটি তাস দৈবচয়িতভাবে উঠানো হলো। তাসটি হরতন বা রাজা হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" মনে করি, তাসটি হরতন হবার ঘটনা R এবং রাজা হওয়ার হবার ঘটনা W। একটি প্যাকেটে মোট 52টি তাসের মধ্যে 13 টি হরতন তাস ও 4 টি রাজা তাস আছে।

$\therefore P(R)=\frac{13}{52}$ এবং $P(W)=\frac{4}{52}$

এবং $P(R\cap W)=\frac{1}{52}$ [যেহেতু W ও R ঘটনাদ্বয় অবর্জনশীল]

$\therefore P(R\cup W)=P(R)+P(W)-P(R\cap W)=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$ Ans.

TYPE 10 Miscellaneous

01. একজন প্রার্থী কোনো একটি শিল্প প্রতিষ্ঠানে তিনটি পদে আবেদন করে। প্রথম পদে প্রার্থীর সংখ্যা 3, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদে প্রার্থীর সংখ্যা যথাক্রমে 4 এবং 2। ঐ প্রার্থীর কমপক্ষে একটি পদে চাকুরি পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol" মনে করি, প্রার্থীটির ১ম পদে চাকুরী পাওয়ার ঘটনা = A

প্রার্থীটির ১ম পদে চাকুরী না পাওয়ার ঘটনা = $\bar{A}$

প্রার্থীটির ২য় পদে চাকুরী পাওয়ার ঘটনা = B

প্রার্থীটির ২য় পদে চাকুরী না পাওয়ার ঘটনা = $\bar{B}$

প্রার্থীটির ৩য় পদে চাকুরী পাওয়ার ঘটনা = C

প্রার্থীটির ৩য় পদে চাকুরী না পাওয়ার ঘটনা = $\bar{C}$

সুতরাং, $P(A)=\frac{1}{3}, P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(B)=\frac{1}{4}, P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$P(C)=\frac{1}{2}, P(\bar{C})=1-P(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

প্রার্থীটির কমপক্ষে একটি পদে চাকুরী পাওয়ার সম্ভাবনা

$P(A\cup B\cup C)=1-P$ (প্রার্থীটির কোনো পদে চাকুরী না পাওয়া)

$=1-P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ Ans.

02. একই পোস্টে দুটি শূন্য পদে একজন পুরুষ ও একজন মহিলা চাকুরী প্রার্থী। পুরুষ ও মহিলার চাকুরী পাওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{7}$ এবং $\frac{1}{5}$। উভয়ের চাকুরী না পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol" মনে করি, পুরুষের চাকুরী পাওয়ার ঘটনা = A এবং মহিলার চাকুরী পাবার ঘটনা = B

$\therefore \quad P(A)=\frac{1}{7}, P(B)=\frac{1}{5}$

A ও B যে কোনো প্রার্থীর চাকুরী পাওয়ার সম্ভাবনা, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$

[যেহেতু A ও B স্বাধীন ঘটনা সুতরাং $P(A\cap B)=P(A).P(B)$]

$=\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{35}=\frac{5+7-1}{35}=\frac{11}{35}$

$\therefore$ উভয়ের চাকুরী না পাওয়ার সম্ভাবনা $=1-\frac{11}{35}=\frac{24}{35}$ (Ans.)

03. মিলন ও শোভন একত্রে একটি দ্রব্যের উৎপাদন করে। মিলন ও শোভনের অংশে ত্রুটির সম্ভাবনা যথাক্রমে 15% ও 30% উভয়ের সমন্বয়ে কোনো দ্রব্য ত্রুটিপূর্ণ না হবার সম্ভাবনা কত?

Sol" ধরি, M = মিলনের অংশ ত্রুটিপূর্ণ না হওয়ার ঘটনা।
S = শোভনের অংশ ত্রুটিপূর্ণ না হওয়ার ঘটনা।

$\therefore P(M) = 1 - \frac{15}{100} = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$ এবং $P(S) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P(M \cap S) = P(M).P(S) = \frac{17}{20} \cdot \frac{7}{10} = \frac{119}{200}$ **Ans.**

04. কোন একটি কারখানায় মেশিন A এবং B তে উৎপাদিত পণ্যের পরিমাণ 55% এবং 45%। A মেশিনে উৎপাদিত পণ্যের 5% খারাপ এবং B মেশিনে উৎপাদিত পণ্যের 6% খারাপ। একটি খারাপ পণ্য নেয়া হলে তা A মেশিনের হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol" ধরি, মোট উৎপাদিত পণ্য 100টি। তাহলে A মেশিনে উৎপন্ন হয় 55টি এবং B মেশিনে উৎপন্ন হয় 45টি।

সুতরাং, A মেশিনে উৎপাদিত খারাপ পণ্য = 55 এর 5% = 55 এর $\frac{5}{100} = \frac{11}{4}$

B মেশিনে উৎপাদিত খারাপ পণ্য = 45 এর 6% = 45 এর $\frac{6}{100} = \frac{27}{10}$

মোট খারাপ পণ্য = $\frac{11}{4} + \frac{27}{10} = \frac{55 + 54}{20} = \frac{109}{20}$

এক্ষেত্রে খারাপ পণ্য হওয়া সাপেক্ষে A মেশিনে উৎপন্ন হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে বলেছে।

সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাবনা = $\frac{\text{A মেশিনে উৎপন্ন খারাপ পণ্য}}{\text{মোট খারাপ পণ্য}} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{109}{20}} = \frac{11}{4} \times \frac{20}{109} = \frac{55}{109}$ **(Ans.)**

05. কোনো একটি ফ্যাক্টরিতে নিয়োগকৃত লোকদের কাজের ধরন অনুযায়ী নিম্নভাবে শ্রেণিকৃত করা যায়:

শ্রেণিকরণ	সংখ্যা
ব্যবস্থাপনায়	157
পরিদর্শক হিসেবে	52
উৎপাদন কাজে	1473
অফিসিয়াল কাজে	215

একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে লোকটি-

(ক) ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত?

(খ) ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত?

(গ) উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় এর সম্ভাবনা কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উচ্চতর গণিত), অধ্যায়-১৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]*

Sol" এখানে, মোট নিয়োগকৃত লোকসংখ্যা = (157 + 52 + 1473 + 215) জন = 1897 জন

(ক) ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত লোকসংখ্যা = 157 জন

$\therefore$ নির্বাচিত লোকটির ব্যবস্তাপনায় নিয়োজিত হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{157}{1897}$ **(Ans)**

(খ) ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত লোকসংখ্যা = (157 + 1473) জন = 1630 জন

$\therefore$ নির্বাচিত লোকটির ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{1630}{1897}$ **(Ans.)**

(গ) উৎপাদন কাজে নিয়োজিত লোকসংখ্যা = 1473 জন

$\therefore$ উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় এমন লোকসংখ্যা = (1897 – 1473) = 424 জন

$\therefore$ নির্বাচিত লোকটি উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় তার সম্ভাবনা = $\frac{424}{1897}$ **(Ans)**

06. একজন লোকের ঢাকা হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং খুলনা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$। লোকটির খুলনায় বাসে এবং রাজশাহী ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা কত? Probability tree ব্যবহার করে দেখান। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উচ্চতর গণিত), অধ্যায়-১৪ (উদাহরণের আলোকে)]*

Sol" সম্ভাবনার মাধ্যমে probability tree হবে-

সুতরাং লোকটির খুলনায় বাসে এবং রাজশাহীতে ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা-

P [খুলনা বাস, রাজশাহী ট্রেনেনয়] $= \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ **(Ans.)**

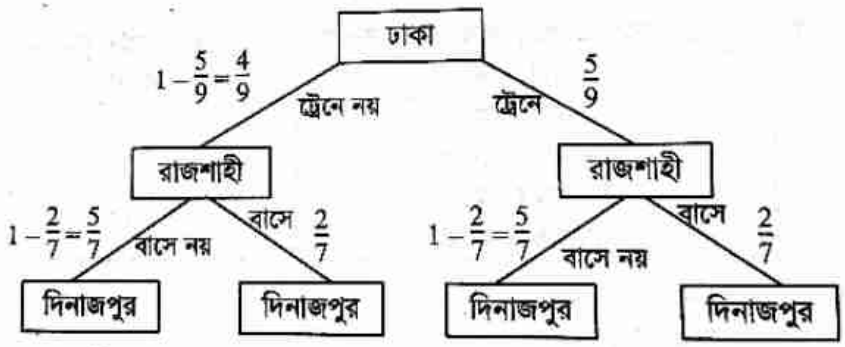
07. কোনো একজন লোকের ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{9}$ এবং রাজশাহী হতে দিনাজপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$। Probability tree ব্যবহার করে-

(ক) লোকটি ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে নয় এবং রাজশাহী হতে দিনাজপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা কত বের কর।

(খ) লোকটি রাজশাহী ট্রেনে কিন্তু দিনাজপুর বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উচ্চতর গণিত), অধ্যায়-১৪ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-৭)]

Sol" লোকটির বিভিন্ন উপায়ে ঢাকা হতে রাজশাহী এবং রাজশাহী হতে দিনাজপুর যাওয়ার probability tree নিম্নে দেখানো হলো:



(ক) লোকটির ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে নয় এবং রাজশাহী হতে দিনাজপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা

$= P$ (রাজশাহী ট্রেনে নয়, দিনাজপুর বাসে) $= \frac{4}{9} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{63}$ **(Ans.)**

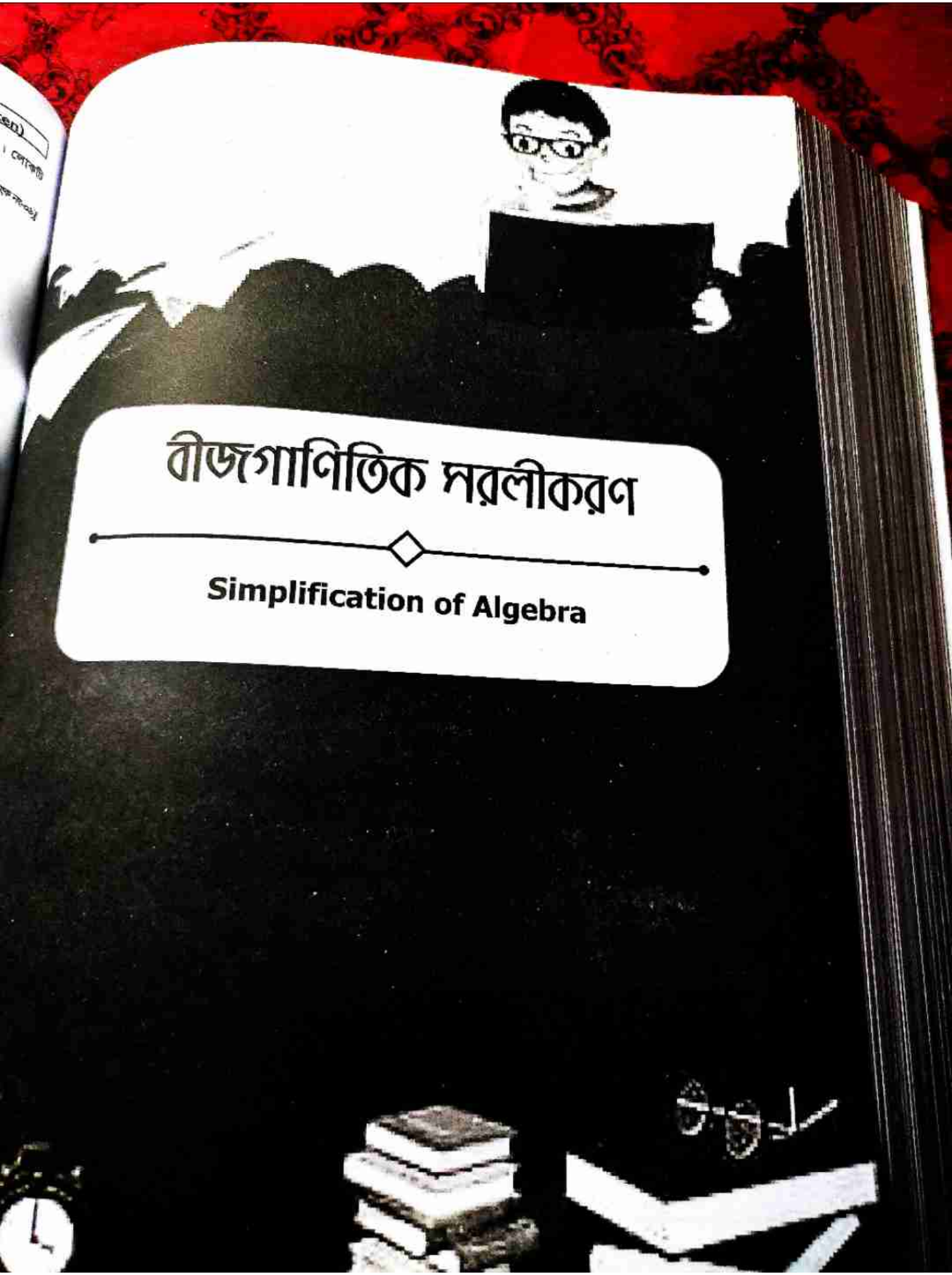
(খ) লোকটির রাজশাহী ট্রেনে কিন্তু দিনাজপুর বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা

$= P$ (রাজশাহী ট্রেনে, দিনাজপুর বাসে নয়) $= \frac{5}{9} \times \frac{5}{7} = \frac{25}{63}$ **(Ans.)**

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.	Type	Question No.
Type-01	03, 05	Type-06	03
Type-02	01, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 11	Type-07	02, 03, 06, 11
Type-03	01	Type-08	01, 02, 03, 04
Type-04	02	Type-10	01, 04
Type-05	02		



বীজগাণিতিক সরলীকরণ

Simplification of Algebra

বীজগাণিতিক সরলীকরণ
Simplification of Algebra

এক নজরে এই অধ্যায় থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ

01. সরল করুন: $\frac{1}{a-b}-\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{a+b}-\frac{2}{2a-b}$ [৩০তম বিসিএস]

02. সরল করুন: $\left\{\frac{b+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{(a-b)b}{1+ab}}-\frac{a-\frac{a-b}{1-ab}}{1-\frac{a(a-b)}{1-ab}}\right\}\div\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$ [২৯তম বিসিএস]

03. সরল করুন: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x^2+1}$ [২৪তম বিসিএস]

04. সরল করুন: $\frac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$ [১৫তম বিসিএস]

05. সরল করুন : $\{(x+y)^{-1}-(x-y)^{-1}\}\div 2y(x^2-y^2)^{-1}$ [১৩তম বিসিএস]

06. $\frac{x^2-y^2}{xy}-\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)$ কে $\frac{x-y-1}{x}$ দ্বারা ভাগ করুন। [১১তম বিসিএস]

07. সরল করুন : $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

এই অধ্যায়ের Analysis

বীজগাণিতিক সরলীকরণ অধ্যায়টি বর্তমানে তেমন গুরুত্বপূর্ণ নয়। ৩০ তম বিসিএসের পর এখান থেকে কোন প্রশ্ন আসে নি। তাই যারা কম পড়তে চান কিংবা যাদের গণিত কঠিন লাগে তারা এ অধ্যায়টি বাদ দিতে পারেন।

সরলীকরণ Concept আলাদাভাবে না পড়লেও অন্যান্য অধ্যায় (যেমন- বীজগাণিতিক রাশি, সূচক ও লগারিদম ইত্যাদি) করতে গিয়ে আপনার অনেক সরলীকরণ করা হয়ে যাবে। এ বইয়েও ঐ সমস্ত অধ্যায়ে সরলীকরণ অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। তবে বিশেষত এ অধ্যায়ের সরলীকরণগুলো একটু ভিন্ন ধরনের কিন্তু তেমন কঠিন নয়। যাদের গণিতের ব্যাসিক ভাল তারা এগুলো এমনিতেই পারবে। যারা দুর্বল তারা এর পিছনে সময় না দিয়ে অন্যান্য গুরুত্বপূর্ণ অধ্যায়ে বেশি সময় দিলে তুলনামূলক লাভবান হবেন। কম গুরুত্বপূর্ণ বিষয় আমি অধ্যায়টি সংক্ষিপ্ত আকারে উপস্থাপন করেছি।

Important Problem & Solutions:

01. সরল করুন: $\frac{1}{a-b}-\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{a+b}-\frac{2}{2a-b}$ [৩০তম বিসিএস]

Sol^n $\frac{1}{a-b}-\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{a+b}-\frac{2}{2a-b}$

$=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}\right)-2\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2a-b}\right)$

$$= \frac{a+b+a-b}{(a-b)(a+b)} - 2\left\{\frac{2a-b+2a+b}{(2a+b)(2a-b)}\right\}$$

$$= \frac{2a}{(a-b)(a+b)} - \left\{\frac{8a}{(2a+b)(2a-b)}\right\}$$

$$= 2a\left\{\frac{1}{(a-b)(a+b)} - \frac{4a}{(2a+b)(2a-b)}\right\}$$

$$= 2a\left\{\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{4a}{4a^2-b^2}\right\}$$

$$= 2a\left\{\frac{4a^2-b^2-4a^2+4b^2}{(a^2-b^2)(4a^2-b^2)}\right\}$$

$$= 2a \times \frac{3b^2}{(a^2-b^2)(4a^2-b^2)}$$

$$= \frac{6ab^2}{(a^2-b^2)(4a^2-b^2)} \text{ (Ans)}$$

2. সরল করুন: $\left\{\dfrac{b+\dfrac{a-b}{1+ab}}{1-\dfrac{(a-b)b}{1+ab}} - \dfrac{a-\dfrac{a-b}{1-ab}}{1-\dfrac{a(a-b)}{1-ab}}\right\} \div \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$ [২৯তম বিসিএস]

Sol^n $\left\{\dfrac{b+\dfrac{a-b}{1+ab}}{1-\dfrac{(a-b)b}{1+ab}} - \dfrac{a-\dfrac{a-b}{1-ab}}{1-\dfrac{a(a-b)}{1-ab}}\right\} \div \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)$

$$= \frac{b+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{(a-b)b}{1+ab}} - \frac{a-\frac{a-b}{1-ab}}{1-\frac{a(a-b)}{1-ab}} \div \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

$$= \frac{\frac{b(1+ab)+(a-b)}{1+ab}}{\frac{1+ab-(a-b)b}{1+ab}} - \frac{\frac{a(1-ab)-(a-b)}{1-ab}}{\frac{1-ab-a(a-b)}{1-ab}} \div \frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$= \frac{\frac{b+ab^2+a-b}{1+ab}}{\frac{1+ab-ab+b^2}{1+ab}} - \frac{\frac{a-a^2b-a+b}{1-ab}}{\frac{1-ab-a^2+ab}{1-ab}} \div \frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$= \frac{a(b^2+1)}{(1+ab)} \times \frac{(1+ab)}{(1+b^2)} - \frac{-b(a^2-1)}{(1-ab)} \times \frac{(1-ab)}{-(a^2-1)} \div \frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$= (a-b) \div \frac{a^2-b^2}{ab} = (a-b) \times \frac{ab}{a^2-b^2} = \frac{ab}{a+b} \text{ (Ans.)}$$

03. সরল করুন: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x^2+1}$ [২৪তম বিসিএস]

Sol" $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x^2+1}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}\right)-\frac{1}{x^2+1}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}$

$=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}$

$=\frac{x^2+1-x^2+1}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$=\frac{2}{x^4-1}$ **Ans.**

04. সরল করুন: $\frac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$ [১৫তম বিসিএস]

Sol" $\frac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$=\frac{\left(\frac{a^2}{x-a}+a\right)+\left(\frac{b^2}{x-b}+b\right)+\left(\frac{c^2}{x-c}+c\right)}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$=\frac{\frac{a^2+ax-a^2}{x-a}+\frac{b^2+bx-b^2}{x-b}+\frac{c^2+cx-c^2}{x-c}}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$=\frac{\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x-b}+\frac{cx}{x-c}}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$=\frac{x\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}\right)}{\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}\right)}=x$ **(Ans:)**

সরল করুন : $\{(x+y)^{-1}-(x-y)^{-1}\} \div 2y(x^2-y^2)^{-1}$ [১৩তম বিসিএস]

Sol" $\{(x+y)^{-1}-(x-y)^{-1}\} \div 2y(x^2-y^2)^{-1}$

$$=\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right) \div 2y \frac{1}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x-y-x-y}{(x+y)(x-y)} \div \frac{2y}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{-2y}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{2y} = -1 \text{ (Ans:)}$$

$\frac{x^2-y^2}{xy}-\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)$ কে $\frac{x-y-1}{x}$ দ্বারা ভাগ করুন। [১১তম বিসিএস]

Sol" $\left[\frac{x^2-y^2}{xy}-\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)\right] \div \frac{x-y-1}{x}$

$$=\left[\frac{x^2-y^2}{xy}-\frac{1}{x+y}-\frac{x^3-y^3}{xy(x+y)}\right] \div \frac{x-y-1}{x}$$

$$=\frac{(x+y)(x^2-y^2)-xy-x^3+y^3}{xy(x+y)} \div \frac{x-y-1}{x}$$

$$=\frac{x^3-xy^2+x^2y-y^3-xy-x^3+y^3}{xy(x+y)} \div \frac{x-y-1}{x}$$

$$=\frac{xy(x-y-1)}{xy(x+y)} \times \frac{x}{x-y-1} = \frac{x}{x+y} \text{ Ans.}$$

সরল করুন : $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$ [১০তম বিসিএস]

Sol" $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

$$=\frac{a^2+b^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{a^2b^2-\frac{1}{a^2b^2}}+\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)}{ab+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$$

$$=\frac{\frac{a^4b^2+a^2b^4-b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{a^4b^4-1}{a^2b^2}}+\frac{\left(\frac{a^2-1}{a}\right)\left(\frac{b^2-1}{b}\right)}{ab+\frac{1}{ab}}$$

$$=\frac{\frac{a^2(a^2b^2-1)+b^2(a^2b^2-1)}{a^2b^2}}{\frac{(a^2b^2+1)(a^2b^2-1)}{a^2b^2}}+\frac{\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}}{\frac{a^2b^2+1}{ab}}$$

$$= \frac{(a^2b^2-1)(a^2+b^2)}{a^2b^2} \times \frac{a^2b^2}{(a^2b^2+1)(a^2b^2-1)} + \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab} \times \frac{ab}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1} + \frac{a^2b^2-b^2-a^2+1}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{a^2+b^2+a^2b^2-b^2-a^2+1}{a^2b^2+1} = \frac{a^2b^2+1}{a^2b^2+1} = 1 \quad \text{Ans.}$$

08. সরল কর: $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-২ (উদাহরণের অংক নং-

Sol" $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$

$$= -\frac{a}{(a-b)(c-a)} - \frac{b}{(b-c)(a-b)} - \frac{c}{(c-a)(b-c)}$$

$$= \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{ab-ac+bc-ab+ca-bc}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

09. সরল করুন: $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-২ (উদাহরণের অংক নং-

Sol" প্রথম ভগ্নাংশ $= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $= \frac{(a+b-c)(b-a+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $= \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(a+b+c)(b+c-a)} = \frac{c+a-b}{a+b+c}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{b+c-a}{a+b+c} + \frac{c+a-b}{a+b+c}$

$$= \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

10. $\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)} + \frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)} + \frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০

Sol" প্রদত্ত রাশি $= \frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)} + \frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)} + \frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

$$= \frac{(a+b)^2-ab}{-(b-c)(c-a)} + \frac{(b+c)^2-bc}{-(c-a)(a-b)} + \frac{(c+a)^2-ca}{-(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{(a-b)\{(a+b)^2-ab\} + (b-c)\{(b+c)^2-bc\} + (c-a)\{(c+a)^2-ca\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2) + (b-c)(b^2+bc+c^2) + (c-a)(c^2+ca+a^2)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \text{ Ans.}$$

11. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-২ (উদাহরণের কাজের অংক-৯)]

Sol" প্রদত্ত রাশি $=\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{b+c}{-(a-b)(c-a)}+\frac{c+a}{-(b-c)(a-b)}+\frac{a+b}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{b+c}{-(a-b)(c-a)}+\frac{c+a}{-(b-c)(a-b)}+\frac{a+b}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0$ **Ans.**

12. $\frac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-২ (উদাহরণের কাজের অংক-৭)]

Sol" প্রদত্ত রাশি $=\frac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{a^3-1}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^3-1}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^3-1}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{(a^3-1)(b-c)+(b^3-1)(c-a)+(c^3-1)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{\{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\}-(b-c+c-a+a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)-0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=a+b+c$ **Ans.**

13. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০(ক))]

Sol" প্রদত্ত রাশি $=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{a^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

কিন্তু $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=a^2b-b^2a-a^2c+b^2c+c^2a-c^2b$

$=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)$

$=(a-b)\{ab-c(a+b)+c^2\}$

$=(a-b)\{ab-ca-bc+c^2\}$

$=(a-b)\{ab-bc-ca+c^2\}$

$=(a-b)\{b(a-c)-c(a-c)\}$

$=(a-b)(a-c)(b-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=1$ **Ans.**

14. $\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8}{(1+x^8)}+\dfrac{16}{(x^{16}-1)}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২(

Sol" প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8}{(1+x^8)}+\dfrac{16}{(x^{16}-1)}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8}{(1+x^8)}+\dfrac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\left\{\dfrac{8(x^8-1)+16}{(x^8+1)(x^8-1)}\right\}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8}{(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\left\{\dfrac{4(x^4-1)+8}{(x^4+1)(x^4-1)}\right\}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$

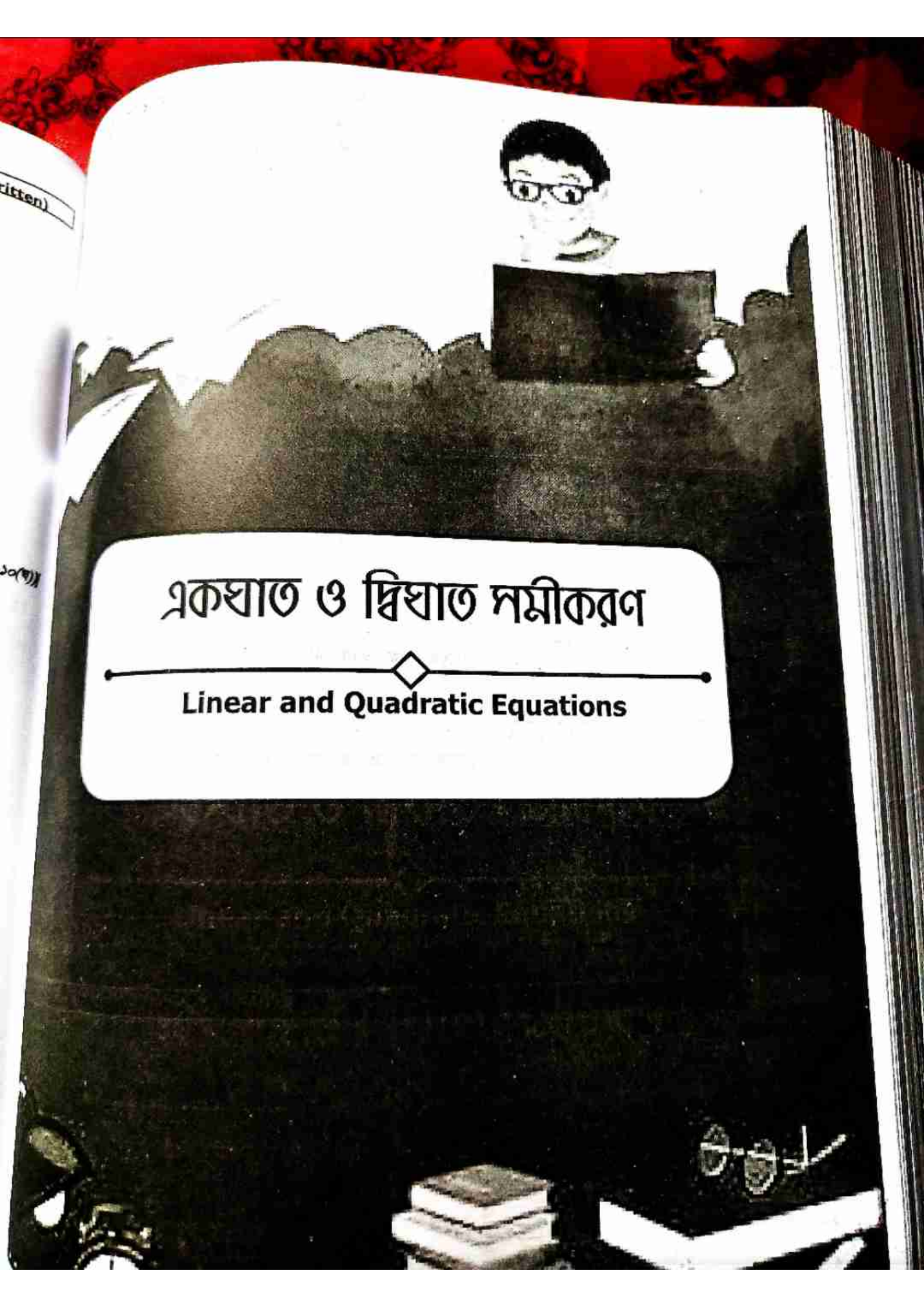
$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\left\{\dfrac{2(x^2-1)+4}{(x^2+1)(x^2-1)}\right\}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$=\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(x^2-1)}=\dfrac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$ **Ans.**



একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ

Linear and Quadratic Equations

TYPE 01 এক চলক বিশিষ্ট ভগ্নাংশ আকারের (একঘাত ও দ্বিঘাত) সমীকরণের সমাধান

01. সমাধান করুন: $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১)] [৩৮তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$\Rightarrow \frac{x-(a+b+x)}{x(a+b+x)}=\frac{b+a}{ab}$

$\Rightarrow \frac{x-a-b-x}{x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}$

$\Rightarrow \frac{-a-b}{ax+bx+x^2}=\frac{a+b}{ab}$

$\Rightarrow \frac{-(a+b)}{ax+bx+x^2}=\frac{a+b}{ab}$

$\Rightarrow \frac{-1}{ax+bx+x^2}=\frac{1}{ab}$ $\left[\frac{1}{(a+b)}\text{ দ্বারা উভয়কে গুণ করে}\right]$

$\Rightarrow ax+bx+x^2=-ab$

$\Rightarrow x^2+ax+bx+ab=0$

$\Rightarrow x(x+a)+b(x+a)=0$

$\Rightarrow (x+a)(x+b)=0$

$\Rightarrow x+a=0$ | অথবা, $x+b=0$

$\Rightarrow x=-a$ | $\Rightarrow x=-b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=(-a,-b)$

02. সমাধান করুন: $\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x-2}=\frac{9}{x-3}$ [২৮তম বিসিএস]

Sol" $\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x-2}=\frac{9}{x-3} \Rightarrow \frac{5}{x-1}+\frac{4}{x-2}=\frac{5}{x-3}+\frac{4}{x-3}$

$\Rightarrow \frac{5}{x-1}-\frac{5}{x-3}=\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x-2}$

$\Rightarrow \frac{5(x-3)-5(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{4(x-2)-4(x-3)}{(x-3)(x-2)}$

$\Rightarrow \frac{5x-15-5x+5}{(x-1)(x-3)}=\frac{4x-8-4x+12}{(x-3)(x-2)}$

$\Rightarrow \frac{-10}{(x-1)(x-3)}=\frac{4}{(x-3)(x-2)}$

$\Rightarrow -10(x-2)=4(x-1)$ [উভয় পক্ষকে $(x-3)$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow -10x+20=4x-4$

$\Rightarrow -10x-4x=-4-20$

$\Rightarrow -14x=-24$

$\Rightarrow x=\frac{24}{14}=\frac{12}{7}$

Ans: $\frac{12}{7}$

03. সমাধান করুন: $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$ [২৭তম বিসিএস]

Sol" $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-3}$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-2}$

$\Rightarrow \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{2x-4-2x+6}{(x-3)(x-2)}$

$\Rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-3)(x-2)}$

$\Rightarrow -2(x-2)=2(x-1)$ [উভয় পক্ষকে $(x-3)$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow -2x+4=2x-2$

$\Rightarrow 4x=6$

$\Rightarrow x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ $\therefore$ $x=1\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

04. সমাধান করুন: $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}$ [২৫তম বিসিএস]

Sol" $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3} \Rightarrow \frac{3(x-6)+5(x-2)}{(x-2)(x-6)}=\frac{8}{x+3}$

$\Rightarrow \frac{3x+5x-18-10}{x^2-8x+12}=\frac{8}{x+3}$

$\Rightarrow (x+3)(8x-28)=8(x^2-8x+12)$

$\Rightarrow 8x^2+24x-28x-84=8x^2-64x+96$

$\Rightarrow 8x^2-4x-84=8x^2-64x+96$

$\Rightarrow 60x=96+84$

$\Rightarrow x=\frac{180}{60}=3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=3$

05. সমাধান করুন: $\frac{2x-9}{7}+\frac{x-5}{6}=\frac{x-3}{3}+\frac{6x+1}{21}$ [২২তম বিসিএস]

Sol" $\frac{2x-9}{7}+\frac{x-5}{6}=\frac{x-3}{3}+\frac{6x+1}{21}$

$\Rightarrow \frac{2x-9}{7}-\frac{6x+1}{21}=\frac{x-3}{3}-\frac{x-5}{6}$

$\Rightarrow \frac{3(2x-9)-(6x+1)}{21}=\frac{2(x-3)-(x-5)}{6}$

$\Rightarrow \frac{6x-27-6x-1}{21}=\frac{2x-6-x+5}{6}$

$\Rightarrow \frac{-28}{21}=\frac{x-1}{6} \Rightarrow \frac{-4}{3}=\frac{x-1}{6} \Rightarrow 3x-3=-24$

$\Rightarrow 3x=-24+3 \Rightarrow x=\frac{-21}{3}=-7$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=-7$

06. সমাধান করুন: $\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{3x-1}=\frac{8}{4x+1}$ [২১তম বিসিএস]

Sol" $\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{3x-1}=\frac{8}{4x+1}$

$\Rightarrow \frac{2(3x-1)+3(2x-1)}{(2x-1)(3x-1)}=\frac{8}{4x+1}$

$\Rightarrow \frac{6x-2+6x-3}{6x^2-2x-3x+1}=\frac{8}{4x+1}$

$\Rightarrow \frac{6x-2+6x-3}{6x^2-5x+1}=\frac{8}{4x+1}$

$\Rightarrow \frac{12x-5}{6x^2-5x+1}=\frac{8}{4x+1}$

$\Rightarrow 48x^2+12x-20x-5=48x^2-40x+8$

$\Rightarrow -8x+40x=8+5$

$\Rightarrow 32x=13$

$\therefore x=\frac{13}{32}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=\frac{13}{32}$

07. সমাধান করুন: $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$ [১৭তম বিসিএস]

Sol" $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$

$\Rightarrow \left(\frac{x-a}{b+c}-1\right)+\left(\frac{x-b}{c+a}-1\right)+\left(\frac{x-c}{a+b}-1\right)=0$

$\Rightarrow \frac{x-a-b-c}{b+c}+\frac{x-b-c-a}{c+a}+\frac{x-c-a-b}{a+b}=0$

$\Rightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=0$

সুতরাং, $x-a-b-c=0$ কিন্তু $\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\neq 0$

$\therefore x=a+b+c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=a+b+c$ **(Ans.)**

08. সমাধান করুন: $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$ [১৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$

বা, $\left(\frac{x-a}{b}-1\right)+\left(\frac{x-b}{a}-1\right)+\left(\frac{x-3a-3b}{a+b}+2\right)=0$

বা, $\frac{x-a-b}{b}+\frac{x-b-a}{a}+\frac{x-3a-3b+2a+2b}{a+b}=0$

বা, $\frac{x-a-b}{b}+\frac{x-a-b}{a}+\frac{x-a-b}{a+b}=0$

বা, $(x-a-b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right)=0$

বা, $x-a-b=0\left[x \text{ বর্জিত রাশি বলে } \frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\neq 0\right]$

বা, $x=a+b$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x=a+b$.

09. সমাধান করুন : $\frac{5}{(2x-1)^2}-\frac{13}{2x-1}=18$ [১৩তম বিসিএস]

Sol" $\frac{5}{(2x-1)^2}-\frac{13}{2x-1}=18$

$\Rightarrow \frac{5-13(2x-1)}{(2x-1)^2}=18$

$\Rightarrow \frac{5-26x+13}{4x^2-4x+1}=18$

$\Rightarrow \frac{18-26x}{4x^2-4x+1}=18$

$\Rightarrow 72x^2-72x+18=18-26x$

$\Rightarrow 72x^2-72x+26x=0$

$\Rightarrow 72x^2-46x=0$

$\Rightarrow x(72x-46)=0$

$\therefore x=0$ অথবা, $72x-46=0 \Rightarrow 72x=46$

$\therefore x=\frac{46}{72}=\frac{23}{36}$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=0$ অথবা, $x=\frac{23}{36}$

উত্তর : $x=0, \frac{23}{36}$

10. সমাধান করুন : $\frac{8x+37}{18}+\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{4x^2-36}{9x-27}$ [১১তম বিসিএস]

Sol" $\frac{8x+37}{18}+\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{4(x^2-9)}{9(x-3)}$

বা, $\frac{8x+37}{18}+\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{4(x+3)(x-3)}{9(x-3)}$

বা, $\frac{8x+37}{18}+\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{4(x+3)}{9}$

বা, $\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{4x+12}{9}-\frac{8x+37}{18}$

বা, $\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{8x+24-8x-37}{18}$

বা, $\frac{29-7x}{5x-12}=\frac{-13}{18}$

বা, $18(29-7x)=-13(5x-12)$

বা, $522-126x=-65x+156$

বা, $-126x+65x=156-522$

বা, $-61x=-366$

বা, $x=\frac{-366}{-61}=6$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=6$

11. সমাধান করুন : $\frac{10}{2x-5}+\frac{1}{x+5}=\frac{18}{3x-5}$ [১০তম বিসিএস]

Sol" $\frac{10}{2x-5}+\frac{1}{x+5}=\frac{18}{3x-5}$

বা, $\frac{10}{2x-5}+\frac{1}{x+5}=\frac{15}{3x-5}+\frac{3}{3x-5}$

বা, $\frac{10}{2x-5}-\frac{15}{3x-5}=\frac{3}{3x-5}-\frac{1}{x+5}$

বা, $\frac{30x-50-30x+75}{(2x-5)(3x-5)}=\frac{3x+15-3x+5}{(3x-5)(x+5)}$

বা, $\frac{25}{(2x-5)(3x-5)}=\frac{20}{(3x-5)(x+5)}$

বা, $\frac{25}{2x-5}=\frac{20}{x+5}$ [উভয় পক্ষকে $(3x-5)$দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{5}{2x-5}=\frac{4}{x+5}$ [উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $8x-20=5x+25$ বা, $8x-5x=25+20$

বা, $3x=45$ বা, $x=\frac{45}{3}=15$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=15$

12. $\frac{ay}{b}-\frac{by}{a}=a^2-b^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০)]

Sol" $\frac{ay}{b}-\frac{by}{a}=a^2-b^2$

বা, $\frac{a^2y-b^2y}{ab}=a^2-b^2$

বা, $\frac{y(a^2-b^2)}{ab}=a^2-b^2$

বা, $\frac{y}{ab}=1$ [উভয়পক্ষকে (a^2-b^2) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $y=ab$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $y=ab$.

3. $(z+1)(z-2)=(z-4)(z+2)$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০২)]*

Sol" $(z+1)(z-2)=(z-4)(z+2)$ বা, $z^2-2z+z-2=z^2+2z-4z-8$

বা, $z^2-z-2=z^2-2z-8$

বা, $z^2-z-z^2+2z=2-8$

বা, $z=-6$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $z=-6$.

4. $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{25}{5x+4}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]*

Sol" $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{10}{5x+4}+\frac{15}{5x+4}$

বা, $\frac{4}{2x+1}-\frac{10}{5x+4}=\frac{15}{5x+4}-\frac{9}{3x+2}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{20x+16-20x-10}{(2x+1)(5x+4)}=\frac{45x+30-45x-36}{(5x+4)(3x+2)}$

বা, $\frac{6}{(2x+1)(5x+4)}=\frac{-6}{(5x+4)(3x+2)}$

বা, $\frac{1}{2x+1}=\frac{-1}{3x+2}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{5x+4}{6}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $3x+2=-2x-1$ বা, $3x+2x=-1-2$

বা, $5x=-3$ বা, $x=-\frac{3}{5}$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x=-\frac{3}{5}$

5. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]*

Sol" $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

বা, $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{x+4-x-3}{(x+3)(x+4)}$

বা, $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x^2+7x+12}$

বা, $x^2+7x+12=x^2+3x+2$

বা, $x^2+7x-x^2-3x=2-12$

বা, $4x=-10$

বা, $x=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x=-\frac{5}{2}$

16. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a}{x-a-b}+\frac{b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x-a-b}=\frac{b}{x-a-b}-\frac{b}{x-b}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $a\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-a-b}\right)=b\left(\frac{1}{x-a-b}-\frac{1}{x-b}\right)$

বা, $\frac{a(x-a-b-x+a)}{(x-a)(x-a-b)}=\frac{b(x-b-x+a+b)}{(x-a-b)(x-b)}$

বা, $\frac{-ab}{(x-a)(x-a-b)}=\frac{ab}{(x-a-b)(x-b)}$

বা, $\frac{-1}{x-a}=\frac{1}{x-b}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{(x-a-b)}{ab}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $x-a=-x+b$ বা, $x+x=a+b$

বা, $2x=a+b$ বা, $x=\frac{a+b}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{a+b}{2}$

17. $\frac{x-a}{a^2-b^2}=\frac{x-b}{b^2-a^2}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" $\frac{x-a}{a^2-b^2}=\frac{x-b}{b^2-a^2}$

বা, $\frac{x-a}{a^2-b^2}-\frac{x-b}{b^2-a^2}=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{x-a}{a^2-b^2}+\frac{x-b}{a^2-b^2}=0$

বা, $\frac{x-a+x-b}{a^2-b^2}=0$

বা, $2x-a-b=0$

বা, $2x=a+b$

বা, $x=\frac{a+b}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{a+b}{2}$

18. $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol^n $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$ বা, $(3+\sqrt{3})z=5-2+3\sqrt{3}$

বা, $(3+\sqrt{3})z=3+3\sqrt{3}$ বা, $z(3+\sqrt{3})=\sqrt{3}(\sqrt{3}+3)$

বা, $z=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+3)}{(3+\sqrt{3})}$

বা, $z=\sqrt{3}$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $z=\sqrt{3}$

19. $\dfrac{3}{2z+1}+\dfrac{4}{5z-1}=2$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol^n $\dfrac{3}{2z+1}+\dfrac{4}{5z-1}=2 \Rightarrow \dfrac{15z-3+8z+4}{(2z+1)(5z-1)}=2$

$\Rightarrow 23z+1=2(2z+1)(5z-1)$

$\Rightarrow 23z+1=2(10z^2+3z-1)$

$\Rightarrow 23z+1=20z^2+6z-2$

$\Rightarrow 20z^2+6z-2-23z-1=0$

$\Rightarrow 20z^2-17z-3=0$

$\Rightarrow 20z^2-20z+3z-3=0$

$\Rightarrow 20z(z-1)+3(z-1)=0$

$\Rightarrow (z-1)(20z+3)=0$

হয়, $z-1=0$ | অথবা, $20z+3=0$

$\therefore z=1$ | $\Rightarrow 20z=-3$

$\therefore z=-\dfrac{3}{20}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x=1,-\dfrac{3}{20}$

20. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol^n $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1$

$\Rightarrow \dfrac{6(x-2)}{x-6}=1-\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+2-x+2}{x+2}=\dfrac{4}{x+2}$

$\Rightarrow \dfrac{6(x-2)}{x-6}=\dfrac{4}{x+2}$

$\Rightarrow \dfrac{3(x-2)}{x-6}=\dfrac{2}{x+2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 3(x-2)(x+2)=2(x-6)$ [আড়গুণ করে]

$\Rightarrow 3(x^2-4)=2x-12$

$\Rightarrow 3x^2-12=2x-12$

$\Rightarrow 3x^2-2x=12-12$

$\Rightarrow x(3x-2)=0$

হয়, $x=0$ | অথবা, $3x-2=0$

∴ নির্ণেয় সমধান, $x=0,\dfrac{2}{3}$ | $\therefore x=\dfrac{2}{3}$

21. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-১)]*

Sol" $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{b}{x}\right)+\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{b}\right)=0$ [পক্ষান্তর করে]

$\Rightarrow \frac{x^2-ab}{ax}+\frac{ab-x^2}{bx}=0$

$\Rightarrow \frac{x^2-ab}{ax}-\frac{x^2-ab}{bx}=0$

$\Rightarrow \frac{(x^2-ab)}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0$

এখানে, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\neq 0$ [x বর্জিত বলে]

$\therefore \frac{x^2-ab}{x}=0 \quad \Rightarrow x^2-ab=0 \quad \Rightarrow x^2=ab$

$\therefore x=\pm\sqrt{ab}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=\pm\sqrt{ab}$

22. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ [৪১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-১)]

Sol" $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \frac{x-a}{x-b}-1+\frac{x-b}{x-a}-1=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2$ [উভয়পক্ষে (-2) বিয়োগ করে]

$\Rightarrow \frac{x-a-x+b}{x-b}+\frac{x-b-x+a}{x-a}=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}$

$\Rightarrow \frac{-a+b}{x-b}+\frac{a-b}{x-a}=\frac{(a-b)^2}{ab} \Rightarrow \frac{-(a-b)}{x-b}+\frac{a-b}{x-a}=\frac{(a-b)^2}{ab}$

$\Rightarrow \frac{-1}{x-b}+\frac{1}{x-a}=\frac{a-b}{ab}$ [উভয়পক্ষকে $(a-b)$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \frac{-x+a+x-b}{(x-b)(x-a)}=\frac{a-b}{ab}$

$\Rightarrow \frac{a-b}{(x-b)(x-a)}=\frac{a-b}{ab}$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2-ax-bx+ab}=\frac{1}{ab}$ [উভয়পক্ষকে $(a-b)$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow x^2-ax-bx+ab=ab$

$\Rightarrow x^2-ax-bx=0$

$\Rightarrow x(x-a-b)=0$

$\therefore x=0$ | অথবা, $x-a-b=0$

$\Rightarrow x=a+b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=0, a+b$

সমাধান কর : $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 - 5\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + 6 = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (উদাহরণের অংক নং-১১)]

Sol" $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 - 5\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + 6 = 0$ ..... (i)

ধরি, $\frac{x+a}{x-a} = y$

∴ (i) হতে পাই, $y^2 - 5y + 6 = 0$

বা, $y^2 - 2y - 3y + 6 = 0$

বা, $y(y-2) - 3(y-2) = 0$

বা, $(y-2)(y-3) = 0$

∴ $y - 2 = 0$ হলে, $y = 2$

অথবা $y - 3 = 0$ হলে, $y = 3$

এখন, $y = 2$ হলে, $\frac{x+a}{x-a} = \frac{2}{1}$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x + a = 2(x - a)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x + a = 2x - 2a$

বা, $2x - x = a + 2a$

বা, $x = 3a$

আবার, $y = 3$ হলে, $\frac{x+a}{x-a} = \frac{3}{1}$

বা, $x + a = 3(x - a)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x + a = 3x - 3a$

বা, $3x - x = a + 3a$

বা, $x = 2a$

∴ সমাধান $x = 2a$ অথবা, $x = 3a$

TYPE 02 এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান সেট নির্ণয়

1. $2x + \sqrt{2} = 3x - 4 - 3\sqrt{2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" $2x + \sqrt{2} = 3x - 4 - 3\sqrt{2}$

বা, $2x - 3x = -4 - 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-x = -4 - 4\sqrt{2} = -(4 + 4\sqrt{2})$

বা, $x = 4 + 4\sqrt{2}$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x = 4(1 + \sqrt{2})$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{4(1 + \sqrt{2})\}$.

02. $\frac{z-2}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" $\frac{z-2}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$ বা, $\frac{z-1-1}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

বা, $1-\frac{1}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

বা, $1=2$ যা অসম্ভব।

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের কোনো সমাধান নেই।

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\varnothing$.

03. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১)]*

Sol" $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{1}{x}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$ বা, $\frac{1}{x}=\frac{2x+2-x+1}{(x-1)(x+1)}$

বা, $\frac{1}{x}=\frac{x+3}{x^2-1}$ বা, $x^2+3x=x^2-1$

বা, $x^2+3x-x^2=-1$

বা, $3x=-1$ ∴ $x=\frac{-1}{3}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

04. $\frac{m}{m-x}+\frac{n}{n-x}=\frac{m+n}{m+n-x}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১)]*

Sol" $\frac{m}{m-x}+\frac{n}{n-x}=\frac{m+n}{m+n-x}$

বা, $\frac{m}{m-x}+\frac{n}{n-x}=\frac{m}{m+n-x}+\frac{n}{m+n-x}$

বা, $\frac{m}{m-x}-\frac{m}{m+n-x}=\frac{n}{m+n-x}-\frac{n}{n-x}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $m\left[\frac{1}{m-x}-\frac{1}{m+n-x}\right]=n\left[\frac{1}{m+n-x}-\frac{1}{n-x}\right]$

বা, $\frac{m(m+n-x-m+x)}{(m-x)(m+n-x)}=\frac{n(n-x-m-n+x)}{(m+n-x)(n-x)}$

বা, $\frac{mn}{(m-x)(m+n-x)}=\frac{-mn}{(m+n-x)(n-x)}$

বা, $\frac{1}{m-x}=\frac{-1}{n-x}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{m+n-x}{mn}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $-m+x=n-x$ বা, $x+x=m+n$ বা, $2x=m+n$

বা, $x=\frac{m+n}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\left\{\frac{m+n}{2}\right\}$.

$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]*

Sol^{n} $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}$ বা, $\frac{x+5+x+2}{(x+2)(x+5)}=\frac{x+4+x+3}{(x+3)(x+4)}$

বা, $\frac{2x+7}{x^2+7x+10}=\frac{2x+7}{x^2+7x+12}$

দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান। এদের লব সমান কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে একমাত্র লবের মান শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

সুতরাং $2x+7=0$ বা, $2x=-7$ বা, $x=-\frac{7}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

06. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (উদাহরণের অংক নং-০৪)]*

Sol^{n} $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$

বা, $\frac{x-4+x-3}{(x-3)(x-4)}=\frac{x-5+x-2}{(x-2)(x-5)}$

বা, $\frac{2x-7}{x^2-7x+12}=\frac{2x-7}{x^2-7x+10}$

দুই পক্ষের ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান। এদের লব সমান কিন্তু হর অসমান। এক্ষেত্রে একমাত্র লবের মান শূন্য হলেই দুই পক্ষ সমান হবে।

সুতরাং $2x-7=0$ বা, $2x=7$ বা, $x=\frac{7}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{7}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

07. $\frac{2t-6}{9}+\frac{15-2t}{12-5t}=\frac{4t-15}{18}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]*

Sol^{n} $\frac{2t-6}{9}+\frac{15-2t}{12-5t}=\frac{4t-15}{18}$ বা, $\frac{4t-15}{18}-\frac{2t-6}{9}=\frac{15-2t}{12-5t}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{4t-15-4t+12}{18}=\frac{15-2t}{12-5t}$

বা, $\frac{-3}{18}=\frac{15-2t}{12-5t}$ বা, $\frac{-1}{6}=\frac{15-2t}{12-5t}$

বা, $-12+5t=90-12t$ [আড়গুণন করে]

বা, $5t+12t=90+12$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $17t=102$ বা, $t=\frac{102}{17}$ ∴ $t=6$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\{6\}$.

08. সমাধান কর ও সমাধান সেট লেখ : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (উদাহরণের অংক নং-০৭)]*

Sol" $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-1}=\frac{2x-1}{5}$

বা, $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-1}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{6x+1-6x+3}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-1}$

বা, $15(2x-4)=4(7x-1)$ [আড়গুণন করে]

বা, $30x-60=28x-4$

বা, $30x-28x=60-4$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x=56$

বা, $x=28$

∴ সমাধান $x=28$ এবং সমাধান সেট $S=\{28\}$

09. $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]*

Sol" $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$

$\Rightarrow \frac{x+1+6}{x+1}+\frac{2x+1+5}{2x+1}=5$

$\Rightarrow \frac{x+1}{x+1}+\frac{6}{x+1}+\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{5}{2x+1}=5$

$\Rightarrow 1+\frac{6}{x+1}+1+\frac{5}{2x+1}=5$

$\Rightarrow \frac{6}{x+1}+\frac{5}{2x+1}=5-2$

$\Rightarrow \frac{12x+6+5x+5}{(x+1)(2x+1)}=3$

$\Rightarrow 17x+11=3(2x^2+x+2x+1)$

$\Rightarrow 17x+11=6x^2+3x+6x+3$

$\Rightarrow 6x^2+9x+3-17x-11=0$

$\Rightarrow 6x^2-8x-8=0$

$\Rightarrow 3x^2-4x-4=0$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 3x^2-6x+2x-4=0$

$\Rightarrow 3x(x-2)+2(x-2)=0$

$\Rightarrow (x-2)(3x+2)=0$

হয়, $x-2=0$

∴ $x=2$

অথবা, $3x+2=0$

$\Rightarrow 3x=-2$

∴ $x=-\frac{2}{3}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$

TYPE 03 এক চলক বিশিষ্ট বর্গমূল আকারের সমীকরণের সমাধান

01. $\sqrt{\frac{x}{x+16}}+\sqrt{\frac{x+16}{x}}=\frac{25}{12}$ [৩২তম বিসিএস]

Sol" $\sqrt{\frac{x}{x+16}}+\sqrt{\frac{x+16}{x}}=\frac{25}{12}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+16}}+\frac{\sqrt{x+16}}{\sqrt{x}}=\frac{25}{12}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{25}{12}$ $[\sqrt{x}=a, \sqrt{x+16}=b]$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{25}{12}$

$\Rightarrow 12a^2+12b^2=25ab$

$\Rightarrow 12a^2-25ab+12b^2=0$

$\Rightarrow 12a^2-16ab-9ab+12b^2=0$

$\Rightarrow 4a(3a-4b)-3b(3a-4b)=0$

$\Rightarrow (3a-4b)(4a-3b)=0$

$\Rightarrow 3a-4b=0$

$\therefore 3\sqrt{x}-4\sqrt{x+16}=0$

$\Rightarrow 3\sqrt{x}=4\sqrt{x+16}$

$\Rightarrow 9x=16(x+16)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 9x-16x=256$

$\Rightarrow -7x=256$

$\therefore x=-\frac{256}{7}$ Ans.

অথবা, $4a-3b=0$

$\Rightarrow 4\sqrt{x}-3\sqrt{x+16}=0$

$\Rightarrow 4\sqrt{x}=3\sqrt{x+16}$

$\Rightarrow 16x=9(x+16)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 7x=144$

$\therefore x=\frac{144}{7}$ Ans.

02. $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০২)]

Sol" $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{11x-6}\right)^2=\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 11x-6=4x+5+x-1-2\sqrt{4x+5}.\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow 11x-6-5x-4=-2\sqrt{(4x+5)(x-1)}$

$\Rightarrow 6x-10=-2\sqrt{4x^2+x-5}$

$\Rightarrow 2(3x-5)=-2\sqrt{4x^2+x-5}$

$\Rightarrow 3x-5=-\sqrt{4x^2+x-5}$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow (3x-5)^2=\left(-\sqrt{4x^2+x-5}\right)^2$ [পুনরায় উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 9x^2-30x+25=4x^2+x-5$

$\Rightarrow 9x^2-30x+25-4x^2-x+5=0$

$\Rightarrow 5x^2-31x+30=0$

$\Rightarrow 5x^2-6x-25x+30=0$

$\Rightarrow x(5x-6)-5(5x-6)=0$

$\Rightarrow (5x-6)(x-5)=0$

হয়, $5x-6=0$

$\therefore x=\frac{6}{5}$

অথবা, $x-5=0$

$\Rightarrow x=5$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{6}{5}$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণের,

বামপক্ষ $= \sqrt{11 \times \frac{6}{5} - 6} = \sqrt{\frac{66-30}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

ডানপক্ষ $= \sqrt{4 \cdot \frac{6}{5} + 5} - \sqrt{\frac{6}{5} - 1} = \sqrt{\frac{24+25}{5}} - \sqrt{\frac{6-5}{5}}$

$= \sqrt{\frac{49}{5}} - \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore$ $x = \frac{6}{5}$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

আবার, $x = 5$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{11.5 - 6} = \sqrt{55 - 6} = \sqrt{49} = 7$

ডানপক্ষ $= \sqrt{4.5 + 5} - \sqrt{5 - 1} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$

$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{6}{5}$

03. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$

$\Rightarrow$ $\sqrt{y+9} - \sqrt{y+6} = 1$ [$x^2 - 6x = y$ ধরে]

$\Rightarrow$ $\sqrt{y+9} = 1 + \sqrt{y+6}$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{y+9})^2 = (1 + \sqrt{y+6})^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow$ $y + 9 = 1 + 2.1.\sqrt{y+6} + y + 6$

$\Rightarrow$ $y + 9 - 1 - y - 6 = 2\sqrt{y+6}$

$\Rightarrow$ $2 = 2\sqrt{y+6}$

$\Rightarrow$ $2\sqrt{y+6} = 2$

$\Rightarrow$ $\sqrt{y+6} = 1$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow$ $(\sqrt{y+6})^2 = (1)^2$ [পুনরায় উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow$ $y + 6 = 1$

$\Rightarrow$ $y + 6 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $y + 5 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ [y এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow$ $x^2 - 5x - x + 5 = 0$

$\Rightarrow$ $x(x-5) - 1(x-5) = 0$

$\Rightarrow$ $(x-1)(x-5) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$ অথবা, $x - 5 = 0$

$\therefore$ $x = 1$ $\therefore$ $x = 5$

দ্রুত পরীক্ষা:

আবার, $x = 5$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{5^2 - 6.5 + 9} - \sqrt{5^2 - 6.5 + 6} = \sqrt{25 - 30 + 9} - \sqrt{25 - 30 + 6}$

$= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $x = 5$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ।

আবার, $x = 1$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{1^2 - 6.1 + 9} - \sqrt{1^2 - 6.1 + 6}$

$= \sqrt{1 - 6 + 9} - \sqrt{1 - 6 + 6} = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $x = 1$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 5, 1$

04. $6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\frac{x-1}{2x}} = 13$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" $6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\frac{x-1}{2x}} = 13$

$\frac{2x}{x-1} = a^2$ ধরা হলে প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$6\sqrt{a^2} + 5\sqrt{\frac{1}{a^2}} = 13 \quad [\because \frac{2x}{x-1} = a^2 \Rightarrow \frac{x-1}{2x} = \frac{1}{a^2}]$

$\Rightarrow \quad 6a + \frac{5}{a} = 13$

$\Rightarrow \quad 6a^2 + 5 = 13a$

$\Rightarrow \quad 6a^2 - 13a + 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 6a^2 - 10a - 3a + 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 2a(3a - 5) - 1(3a - 5) = 0$

$\Rightarrow \quad (3a - 5)(2a - 1) = 0$

হয়, $3a - 5 = 0$ অথবা, $2a - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 3a = 5$ $\Rightarrow \quad 2a = 1$

$\therefore \quad a = \frac{5}{3}$ $\therefore \quad a = \frac{1}{2}$

$a = \frac{5}{3}$ হলে আমরা পাই, $\frac{2x}{x-1} = \frac{25}{9}$

$\Rightarrow \quad 25x - 25 = 18x \quad \Rightarrow 25x - 18x = 25 \quad \Rightarrow 7x = 25$

$\therefore \quad x = \frac{25}{7}$

আবার, $a = \frac{1}{2}$ হলে আমরা পাই, $\frac{2x}{x-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow 8x = x - 1 \Rightarrow 7x = -1$

$\therefore \quad x = -\frac{1}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{25}{7}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}} + 5\sqrt{\frac{\frac{25}{7}-1}{2.\frac{25}{7}}}$

$= 6\sqrt{\frac{50}{18}} + 5\sqrt{\frac{18}{50}} = 6\sqrt{\frac{25}{9}} + 5\sqrt{\frac{9}{25}}$

$= \frac{6.5}{3} + \frac{5.3}{5} = 10 + 3 = 13 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $x = \frac{25}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ।

$x = -\frac{1}{7}$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}} + 5\sqrt{\frac{-\frac{1}{7}-1}{2\left(-\frac{1}{7}\right)}}$

$= \sqrt{\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{-8}{7}}} + 5\sqrt{\frac{\frac{-8}{7}}{\frac{-2}{7}}}$

$= 6\sqrt{\frac{1}{4}} + 5\sqrt{4} = 6.\frac{1}{2} + 5.2 = 3 + 10 = 13 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $x = -\frac{1}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$

05. $\sqrt{\frac{x-1}{3x+2}} + 2\sqrt{\frac{3x+2}{x-1}} = 3$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক

Sol" $\sqrt{\frac{x-1}{3x+2}} + 2\sqrt{\frac{3x+2}{x-1}} = 3$

$\frac{x-1}{3x+2} = a^2$ ধরা হলে প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$\sqrt{a^2} + 2\sqrt{\frac{1}{a^2}} = 3 \left[\because \frac{x-1}{3x+2} = a^2 \text{ হলে } \frac{3x+2}{x-1} = \frac{1}{a^2}\right]$

$\Rightarrow a + \frac{2}{a} = 3$

$\Rightarrow a^2 + 2 = 3a$

$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 2a - a + 2 = 0$

$\Rightarrow a(a-2) - 1(a-2) = 0$

$\Rightarrow (a-1)(a-2) = 0$

হয়, $a-1=0$ অথবা, $a-2=0$

$\therefore \quad a=1$ $\therefore \quad a=2$

$a=2$ হলে আমরা পাই,

$$\frac{x-1}{3x+2}=4$$

$$\Rightarrow x-1=12x+8 \quad \Rightarrow 11x=-9$$

$$\therefore \quad x=-\frac{9}{11}$$

আবার, $a=1$ হলে আমরা পাই, $\frac{x-1}{3x+2}=1^2$

$$\Rightarrow \quad 3x+2=x-1 \quad \Rightarrow 3x-x=-1-2 \quad \therefore \quad x=-\frac{3}{2}$$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x=-\frac{9}{11}$

বামপক্ষ $$=\sqrt{\frac{-\frac{9}{11}-1}{3\left(-\frac{9}{11}\right)+2}}+2\sqrt{\frac{3\left(-\frac{9}{11}\right)+2}{-\frac{9}{11}-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{-9-11}{11}}{\frac{-27+22}{11}}}+2\sqrt{\frac{\frac{-27+22}{11}}{\frac{-9-11}{11}}}$$

$$=\sqrt{\frac{-20}{11}\times\frac{11}{-5}}+2\sqrt{\frac{-5}{11}\times\frac{11}{-20}}$$

$$=\sqrt{4}+2\sqrt{\frac{1}{4}}=2+2.\frac{1}{2}=2+1=3=\text{ডানপক্ষ}$$

আবার, $x=-\frac{3}{2}$ হলে,

বামপক্ষ $$=\sqrt{\frac{-\frac{3}{2}-1}{3\left(\frac{-3}{2}\right)+2}}+2\sqrt{\frac{3\left(\frac{-3}{2}\right)+2}{-\frac{3}{2}-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{-3-2}{2}}{\frac{-9+4}{2}}}+2\sqrt{\frac{\frac{-9+4}{2}}{\frac{-3-2}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{-5}{2}\times\frac{2}{-5}}+2\sqrt{\frac{-5}{2}\times\frac{2}{-5}}$$

$$=\sqrt{1}+2\sqrt{1}=3=\text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=-\frac{9}{11},-\frac{3}{2}$

TYPE 04 এক চলক বিশিষ্ট সূচক আকারের সমীকরণের সমাধান

01. সমাধান কর : $2^{3x-5}.a^{x-2}=2^{x-3}.2a^{1-x}$ $(a>0)$ এবং $\neq \frac{1}{2}$)

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (উদাহরণের অংক নং-১৩)]

Sol" $2^{3x-5}.a^{x-2}=2^{x-3}.2a^{1-x}$ বা, $\frac{a^{x-2}}{a^{1-x}}=\frac{2^{x-3}.2^1}{2^{3x-5}}$ বা, $a^{x-2-1+x}=2^{x-3+1-3x+5}$

বা, $a^{2x-3}=2^{-2x+3}$ বা, $a^{2x-3}=2^{-(2x-3)}$

বা, $a^{2x-3}=\frac{1}{2^{2x-3}}$ বা, $a^{2x-3}.2^{2x-3}=1$

বা, $(2a)^{2x-3}=1=(2a)^0$

বা, $2x-3=0$ বা, $2x=3$ বা, $x=\frac{3}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{3}{2}$

02. সমাধান কর : $a^{-x}(a^x+b^{-x})=\frac{a^2b^2+1}{a^2b^2}$ $(a>0, b>0, ab\neq 1)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (উদাহরণের অংক নং-১৪)]

Sol" $a^{-x}(a^x+b^{-x})=1+\frac{1}{a^2b^2}$ বা, $a^{-x}.a^x+a^{-x}.b^{-x}=1+\frac{1}{a^2b^2}$ বা, $1+(ab)^{-x}=1+(ab)^{-2}$

বা, $(ab)^{-x}=(ab)^{-2}$ বা, $-x=-2$ বা, $x=2$

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x=2$

03. সমাধান কর : $3^{x+5}=3^{x+3}+\frac{8}{3}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (উদাহরণের অংক নং-১৫)]

Sol" $3^{x+5}=3^{x+3}+\frac{8}{3}$ বা, $3^x.3^5=3^x.3^3+\frac{8}{3}$

বা, $3^x.3^6-3^x.3^4=8$ [পক্ষান্তর করে এবং উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3^x.3^4(3^2-1)=8$

বা, $3^{x+4}.8=8$

বা, $3^{x+4}=1=3^0$

বা, $x+4=0$ বা, $x=-4$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=-4$

04. সমাধান কর : $3^{2x-2}-5.3^{x-2}-66=0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (উদাহরণের অংক নং-১৭)]

Sol" $3^{2x-2}-5.3^{x-2}-66=0$

বা, $3^{2x}.3^{-2}-5.3^x.3^{-2}-66=0$

বা, $\frac{3^{2x}}{9}-\frac{5}{9}.3^x-66=0$

বা, $3^{2x}-5.3^x-594=0$ [উভয় পক্ষকে 9 দ্বারা গুণ করে]

বা, $a^2-5a-594=0$ [$3^x=a$ ধরে]

বা, $a^2-27a+22a-594=0$

বা, $(a-27)(a+22)=0$

এখন $a\neq -22$ কেননা $a=3^x>0$ সুতরাং $a+22\neq 0$

অতএব $a-27=0$

বা, $3^x=27=3^3$ বা, $x=3$

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x=3$

05. সমাধান কর : $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$ $(a > 0, a \neq 1)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (উদাহরণের অংক নং-১৮)]

Sol" $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - a(a^2 + 1)a^x . a^{-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - (a^2 + 1)a^x + a^2 = 0$

বা, $p^2 - (a^2 + 1)p + a^2 = 0$ [$a^x = p$ ধরে]

বা, $p^2 - a^2p - p + a^2 = 0$

বা, $p(p - a^2) - 1(p - a^2) = 0$

বা, $(p - 1)(p - a^2) = 0$

বা, $p = 1$ অথবা, $p = a^2$

বা, $a^x = 1 = a^0$ অথবা, $a^x = a^2$

বা, $x = 0$ অথবা, $x = 2$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 0, 2$

06. $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x+7}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol" $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x+7}$

বা, $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{4^3}\right)^{2x+7}$

বা, $\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^{4x+7} = \left(4^{\frac{3}{11}}\right)^{2x+7}$ [$\because \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$]

বা, $4^{\frac{1}{5}(4x+7)} = 4^{\frac{3}{11}(2x+7)}$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]

বা, $\frac{1}{5}(4x + 7) = \frac{3}{11}(2x + 7)$

বা, $11(4x + 7) = 5 \times 3(2x + 7)$

বা, $44x + 77 = 30x + 105$ বা, $44x - 30x = 105 - 77$

বা, $14x = 28$ বা, $x = \frac{28}{14}$ ∴ $x = 2$

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x = 2$ (Ans.)

07. $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

বা, $3.9^x - 4.3.3^{x-1} + 1 = 0$

বা, $3.(3^2)^x - 4.3^{x-1+1} + 1 = 0$ [$\because a^m.a^n = a^{m+n}$]

বা, $3(3^x)^2 - 4.3^x + 1 = 0$ [$\because (a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m$]

বা, $3a^2 - 4a + 1 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $3a^2 - 3a - a + 1 = 0$

বা, $3a(a - 1) - 1(a - 1) = 0$

বা, $(3a - 1)(a - 1) = 0$

হয়, $3a-1=0$ অথবা, $a-1=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ $\therefore a=1$

$a=\frac{1}{3}$ হলে, $3^x=\frac{1}{3}$ [মান বসিয়ে] বা, $3^x=3^{-1}$ $\therefore x=-1$

আবার, $a=1$ হলে, $3^x=1$ [মান বসিয়ে] বা, $3^x=3^0$ [$\because a^0=1$] $\therefore x=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=0,-1$ (Ans.)

08. $4^{1+x}+4^{1-x}=10$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]*

Sol" $4^{1+x}+4^{1-x}=10$ বা, $4.4^x+\frac{4}{4^x}=10$ [$\because a^{m+n}=a^m a^n$ এবং $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$]

বা, $4.4^x.4^x+4=10.4^x$ [উভয়পক্ষকে 4^x দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(4^x)^2-10.4^x+4=0$

বা, $4a^2-10a+4=0$ [$4^x=a$ ধরে]

বা, $4a^2-8a-2a+4=0$

বা, $4a(a-2)-2(a-2)=0$

বা, $(a-2)(4a-2)=0$

হয়, $a-2=0$ অথবা, $4a-2=0$

$\therefore a=2$ বা, $4a=2$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

এখন, $a=2$ হলে, $4^x=2$ [মান বসিয়ে]

বা, $(4)^x=4^{\frac{1}{2}}$ [$\because \sqrt{4}=4^{\frac{1}{2}}=2$] $\therefore x=\frac{1}{2}$

আবার, $a=\frac{1}{2}$ হলে, $4^x=\frac{1}{2}$ [মান বসিয়ে]

বা, $4^x=4^{-\frac{1}{2}}$ বা, $4^x=4^{-\frac{1}{2}}$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ (Ans.)

09. $2^{2x}-3.2^{x+2}=-32$

Sol" $2^{2x}-3.2^{x+2}=-32$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]*

বা, $(2^x)^2-3.2^2.2^x=-32$ [$\because a^{mn}=(a^m)^n$ এবং $a^{m+n}=a^m.a^n$]

বা, $(2^x)^2-12.2^x+32=0$

বা, $a^2-12a+32=0$ [$2^x=a$ ধরে]

বা, $a^2-8a-4a+32=0$

বা, $a(a-8)-4(a-8)=0$

বা, $(a-4)(a-8)=0$

হয় $a-4=0$ অথবা, $a-8=0$

$\therefore a=4$ $\therefore a=8$

এখন,

$a=4$ হলে, $2^x=4$

বা, $2^x=2^2$

$\therefore x=2$

আবার, $a=8$ হলে, $2^x=8$ [মান বসিয়ে]

বা, $2^x=2^3$

$\therefore x=3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=2,3$ (Ans.)

TYPE 05 দ্বিঘাত সাধারণ সমীকরণের সমাধান ও তার প্রয়োগ

01. (ক) $ax^2+bx+c=0, (a\neq 0)$ সমীকরণটি সমাধান করে x-এর মান নির্ণয় করুন। [৩৬তম বিসিএস]

Sol" $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-c$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2+2\,.\,x\,.\,\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (Ans.)

(খ) প্রাণ্ড সূত্র প্রয়োগে নিচের সমীকরণটি সমাধান করুন:

$$x(x+1)+\frac{12}{x(x+1)}=8$$ [৩৬তম বিসিএস]

Sol" ধরি, $x(x+1)=a$

$$\therefore a+\frac{12}{a}=8 \Rightarrow \frac{a^2+12}{a}=8 \Rightarrow a^2+12=8a \Rightarrow a^2-8a+12=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4.1.12}}{2.1}$$

$$\Rightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{64-4.1.12}}{2.1}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2.1}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2.1}=\frac{8\pm4}{2}$$

$\therefore a=6$ বা 2

এখন, $a=6$ হলে,
$\therefore x(x+1)=6$
$\Rightarrow x^2+x-6=0$
$\Rightarrow (x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=-3$ বা 2

আবার, $a=2$ হলে,
$\therefore x(x+1)=2$
$\Rightarrow x^2+x-2=0$
$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ বা 1

Ans: $x=(-3, 2), (-2, 1)$Note:

02. $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ সমীকরণটির সমাধান করুন এবং ইহার মাধ্যমে $x^2+7x-13=0$ সমীকরণটির সমাধান করুন। [৩৫তম বিসিএস]

Sol" ১ম অংশ: উপরের ১ নং প্রশ্নের (ক) দ্রষ্টব্য

প্রদত্ত সমীকরণ থেকে, $a=1\ ;\ b=7\ ;\ c=-13$

২য় অংশ:

$$\therefore x=\frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4.1.(-13)}}{2.1}=\frac{-7\pm\sqrt{49+52}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{101}}{2}$$

Ans: $x=\frac{-7\pm\sqrt{101}}{2}$

TYPE 06 সূত্র প্রয়োগের মাধ্যমে দ্বিঘাত আকারের সমীকরণের সমাধান

01. $2x^2 + 9x + 9 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" $2x^2 + 9x + 9 = 0$ কে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2$, $b = 9$ এবং $c = 9$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.2.9}}{2.2}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-9 \pm 3}{4}$$

$$= \frac{-9+3}{4}, \frac{-9-3}{4}$$

$$= \frac{-6}{4}, \frac{-12}{4} = -\frac{3}{2}, -3$$

অর্থাৎ, $x_1 = -\frac{3}{2}$ এবং $x_2 = -3$ **(Ans.)**

02. $3 - 4x - 2x^2 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" $3 - 4x - 2x^2 = 0$

$\Rightarrow -2x^2 - 4x + 3 = 0$

সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = -2$, $b = -4$ এবং $c = 3$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(-2).3}}{2.(-2)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{-4} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{-4}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{-4} = \frac{2(2 \pm \sqrt{10})}{-4}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{10}}{-2} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

অর্থাৎ, $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ এবং $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ **(Ans.)**

03. $4x - 1 - x^2 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]*

Sol" $4x - 1 - x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -1$, $b = 4$ এবং $c = -1$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-1).(-1)}}{2.(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2}$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{3})}{-2} = -(-2 \pm \sqrt{3}) = 2 \pm \sqrt{3}$$

অর্থাৎ, $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ এবং $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ **(Ans.)**

04. $2x^2 - 5x - 1 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]*

Sol" $2x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$, $b = -5$ এবং $c = -1$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$

অর্থাৎ, $x_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}$ এবং $x_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{4}$ **(Ans.)**

05. $3x^2 + 7x + 1 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]*

Sol" $3x^2 + 7x + 1 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 3$, $b = 7$ এবং $c = 1$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.3.1}}{2.3}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 12}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

অর্থাৎ, $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{37}}{6}$ এবং $x_2 = \frac{-7 - \sqrt{37}}{6}$ **(Ans.)**

06. $2 - 3x^2 + 9x = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]*

Sol" $2 - 3x^2 + 9x = 0 \Rightarrow -3x^2 + 9x + 2 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -3$, $b = 9$ এবং $c = 2$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.(-3).2}}{2.(-3)}$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 24}}{-6} = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{-6} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{6}$$

অর্থাৎ, $x_1 = \frac{9 + \sqrt{105}}{6}$ এবং $x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{6}$ **(Ans.)**

07. $x^2 - 8x + 16 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol" $x^2 - 8x + 16 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ,
$ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1, b = -8$ এবং $c = 16$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.16}}{2.1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

অর্থাৎ, $x_1 = x_2 = 4$ **(Ans.)**

08. $2x^2 + 7x - 1 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]*

Sol" $2x^2 + 7x - 1 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ,
$ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2, b = 7$ এবং $c = -1$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 8}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}$

অর্থাৎ, $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{57}}{4}$ এবং $x_2 = \frac{-7 - \sqrt{57}}{4}$ **(Ans.)**

09. $7x - 2 - 3x^2 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]*

Sol" $7x - 2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 7x - 2 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -3, b = 7$ এবং $c = -2$

অতএব, সমীকরণটির মূলদ্বয়, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.(-3).(-2)}}{2.(-3)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-6} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-6}$$

$$= \frac{-7 \pm 5}{-6} = \frac{-7 + 5}{-6}, \frac{-7 - 5}{-6}$$

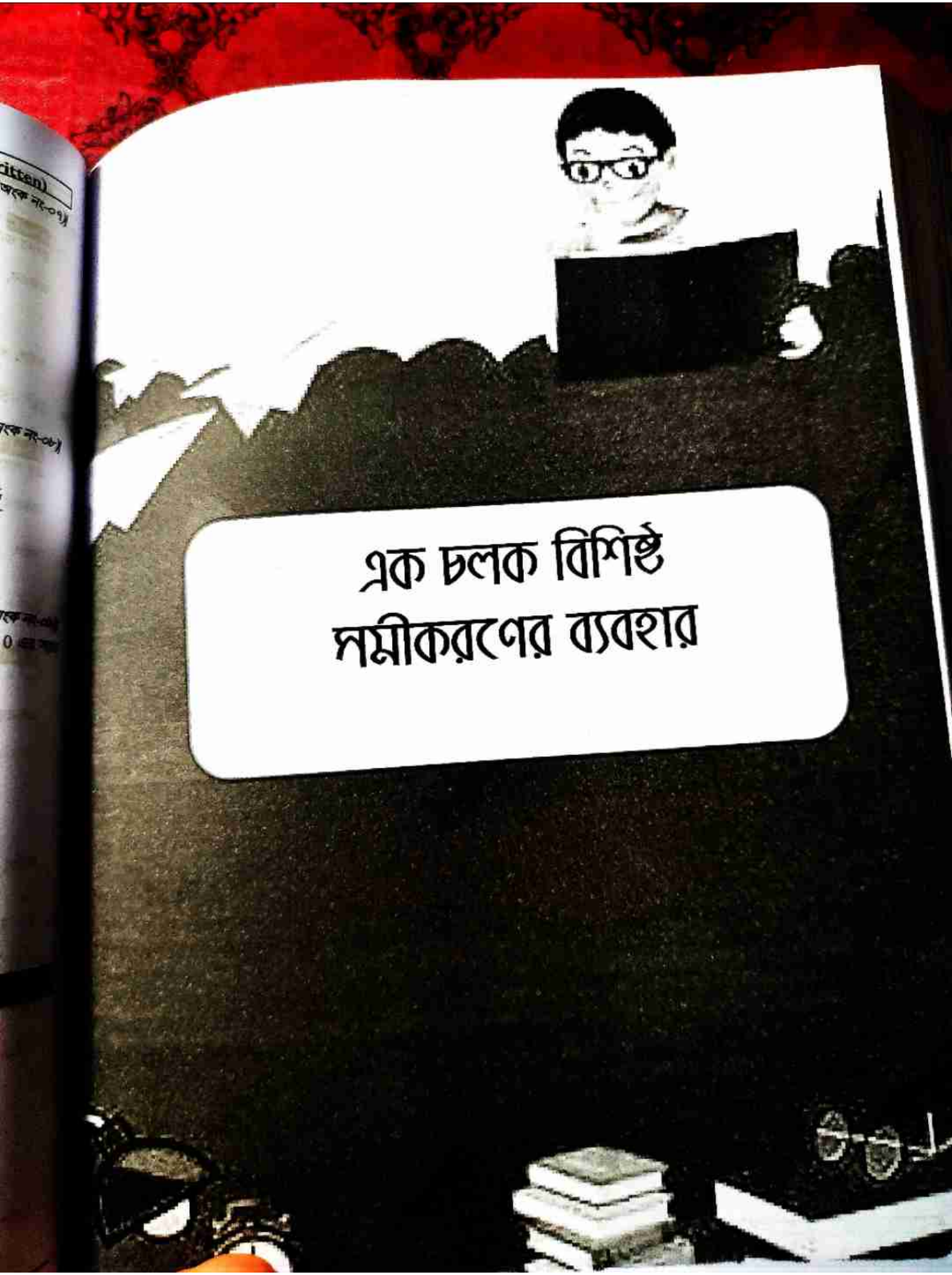
$$= \frac{-2}{-6}, \frac{-12}{-6} = \frac{1}{3}, 2$$

অর্থাৎ, $x_1 = \frac{1}{3}$ এবং $x_2 = 2$ **(Ans.)**

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 02, 07, 08, 14, 15, 16, 21, 22, 23
Type-02	04, 06, 08
Type-03	01, 04
Type-04	01, 04, 06, 07, 08
Type-05	Full (VVI)
Type-06	07, 08


এক চলক বিশিষ্ট
সমীকরণের ব্যবহার

TYPE 01 বিগত বিসিএসে আসা এক চলক বিশিষ্ট একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার সংক্রান্ত সমস্যা

01. দুই অংকবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অংকদ্বয়ের সমষ্টি 9; অংকদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন। [৩১তম, ২৩তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (সা.গণিত) ৫.১ অধ্যায়ের ১৭ নং প্রশ্ন হবহু]

Sol" ধরি, একক স্থানীয় অংক = x

∴ দশক স্থানীয় অংক = (9 − x)

∴ সংখ্যাটি = 10 (9 − x) + x = 90 − 10x + x = 90 − 9x

অংক দুইটি স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি দাঁড়ায় = 10(x) + (9 − x)

প্রশ্নমতে, 10x + 9 − x = 90 − 9x − 45

⇒ 9x + 9x = 45 − 9

⇒ 18x = 36

∴ x = 2

∴ সংখ্যাটি = 90 − 9 × 2 = 72

Ans: 72

বিকল্প(দুই চলকের মাধ্যমে):

ধরি, একক স্থানীয় অংক = x

দশক স্থানীয় অংক = y

∴ সংখ্যাটি = 10y + x

১ম শর্তমতে, x + y = 9 ..... (i)

২য় শর্তমতে, 10x + y = (10y + x) − 45

⇒ 10x + y − x − 10y = − 45

⇒ 9x − 9y = − 45

⇒ 9 (x − y) = − 45

∴ x − y = − 5 ..... (ii)

(i) + (ii)

$$\begin{array}{r} x + y = 9 \\ x - y = -5 \\ \hline 2x = 4 \end{array}$$

∴ x = 2

(i) নং সমীকরণে x = 2 বসাই,

x + y = 9 ⇒ 2 + y = 9 ∴ y = 7

∴ সংখ্যাটি = 10 × 7 + 2 = 72 **(উত্তর)**

02. দুই অংকবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশক স্থানীয় অংকটি একক স্থানীয় অংক হতে 5 বড়। সংখ্যাটি থেকে অংকদ্বয়ের সমষ্টির 6 গুণ বিয়োগ করলে অংকদ্বয়ের স্থান বিনিময় হয়। সংখ্যাটি কত? [২৩তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, এককের অংক = x

∴ দশকের অংক = x + 5

∴ সংখ্যাটি = 10 (x + 5) + x

প্রশ্নমতে, 10(x + 5) + x − 5(x + 5 + x) = 10x + (x + 5)

⇒ 10x + 50 + x − 10x − 25 = 11x + 5

⇒ 25 + x = 11x + 5

⇒ 11x − x = 25 − 5

⇒ 10x = 20

∴ x = 2

∴ সংখ্যাটি = 10(2 + 5) + 2 = 70 + 2 = 72

Ans: 72

03. কোন সংখ্যার সঙ্গে 7 যোগ করে, যোগফলকে 5 দিয়ে গুণ করে, গুণফলকে 9 দিয়ে ভাগ করে, ভাগফল থেকে 3 বিয়োগ করতে বিয়োগফল 12 হয়। সংখ্যাটি কত? [১৭তম বিসিএস]

Sol মনে করি, সংখ্যাটি x

প্রশ্নমতে, $\frac{(x+7)\times 5}{9} - 3 = 12$

$\Rightarrow \frac{5x+35-27}{9} = 12 \quad \Rightarrow \quad 5x+8 = 9\times 12$

$\Rightarrow \quad 5x = 108-8 \quad \Rightarrow \quad 5x = 100$

$\therefore \quad x = 20$

উত্তর: 20

04. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার মান ৫৪ বেশি হয় যদি অঙ্ক দুইটি বিপরীতভাবে লেখা হয়। অঙ্ক দুইটির যোগফল ১২ হইলে সংখ্যাটি কত? [১৩তম বিসিএস]

Sol মনে করি, দশক স্থানীয় অংক x

একক স্থানীয় অংক = ১২ − x

∴ সংখ্যাটি = ১০x + (১২ − x) = ৯x + ১২

অংক দুটি বিপরীতভাবে লেখা হলে সংখ্যাটি = ১০ (১২ − x) + x = ১২০ − ৯x

প্রশ্নমতে, ৯x + ১২ + ৫৪ = ১২০ − ৯x

বা, ৯x + ৯x = ১২০ − ৬৬

বা, ১৮x = ৫৪

বা, x = ৩

∴ দশক স্থানীয় সংখ্যা ৩, একক স্থানীয় সংখ্যা (১২ − ৩) = ৯

∴ সংখ্যাটি = ৯x + ১২ = (৯ × ৩ + ১২) = ২৭ + ১২ = ৩৯

উত্তর : ৩৯

<u>বিকল্প(দুই চলকের মাধ্যমে):</u>

মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং একক " " = y

∴ সংখ্যাটি " " = ১০x + y

১ম শর্তমতে, x + y = ১২

∴ y = ১২ − x ... ... (i) নং

২য় শর্তমতে, ১০y + x = ১০x + y + ৫৪

$\Rightarrow$ ১০y + x − ১০x − y = ৫৪ $\Rightarrow$ ৯y − ৯x = ৫৪

$\Rightarrow$ ৯(y − x) = ৫৪ $\Rightarrow$ y − x = ৬

$\Rightarrow$ ১২ − x − x = ৬ ((i) নং থেকে) $\Rightarrow$ ১২ − ২x = ৬

$\Rightarrow$ −২x = ৬ − ১২ $\Rightarrow x = \frac{-৬}{-২}$

∴ x = ৩

(i) নং-এ x −এর মান বসিয়ে পাই, y = ১২ − x = ১২ − ৩ = ৯

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি = ১০x + y = ১০ × ৩ + ৯ = ৩০ + ৯ = ৩৯

উত্তর : ৩৯

05. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর ও লবের অন্তর 4, হর ও লব উভয় হতে 7 বিয়োগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায় তার সাথে $\frac{1}{4}$ যোগ করলে যোগফল দাঁড়ায় 0.45। ভগ্নাংশটি কত? [১৮তম বিসিএস]

Sol" ধরি, ভগ্নাংশটির লব = x

∴ হর = x + 4

∴ ভগ্নাংশটি = $\frac{x}{x+4}$

শর্তমতে, $\frac{x-7}{x+4-7}+\frac{1}{4}=0.45$ ⇒ $\frac{x-7}{x-3}=\frac{45}{100}-\frac{1}{4}$

⇒ $\frac{x-7}{x-3}=\frac{9}{20}-\frac{1}{4}$ ⇒ $\frac{x-7}{x-3}=\frac{9-5}{20}$

⇒ $\frac{x-7}{x-3}=\frac{4}{20}$ ⇒ $\frac{x-7}{x-3}=\frac{1}{5}$

⇒ $5x-35=x-3$ ⇒ $5x-x=35-3$

⇒ $4x=32$ ⇒ $x=8$

∴ ভগ্নাংশটি $\frac{x}{x+4}=\frac{8}{8+4}=\frac{8}{12}$ **(Ans.)**

06. বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5,700 টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো। শর্ত থাকল যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল? [৩৬তম বিসিএস]

Sol" ধরি, বাসে যাত্রী যাওয়ার কথা ছিল = x জন

∴ মাথাপিছু ভাড়া = $\frac{5700}{x}$ টাকা

আবার,

5 জন যাত্রী না আসায় যাত্রী সংখ্যা = x − 5

∴ মাথাপিছু ভাড়া = $\frac{5700}{x-5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{5700}{x-5}-\frac{5700}{x}=3$

⇒ $\frac{5700x-5700x+28500}{(x-5)x}=3$

⇒ $3x^2-15x-28500=0$

⇒ $x^2-5x-9500=0$

⇒ $x^2-100x+95x-9500=0$

⇒ $x(x-100)+95(x-100)=0$

⇒ $(x-100)(x+95)=0$

⇒ $x-100=0$

∴ $x=100$

∴ যাত্রী গিয়েছি = 100 − 5 = 95 জন **(উত্তর)**

07. ফনভোজনে যাওয়ার জন্য ২৪০০ টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো এবং প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে ঠিক করল। ১০ জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া ৮ টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কত জন যাত্রী গিয়েছিল এবং প্রত্যেককে কত করে ভাড়া দিতে হলো? [২৫তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, যাত্রী সংখ্যা x জন

$\therefore$ মাথাপিছু ভাড়া $= \frac{২৪০০}{x}$ টাকা

১০ জন যাত্রী না আসায় যাত্রী সংখ্যা $(x - ১০)$ জন

$\therefore$ মাথাপিছু ভাড়া $= \frac{২৪০০}{x - ১০}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{২৪০০}{x - ১০} - \frac{২৪০০}{x} = ৮ \quad \Rightarrow \quad ২৪০০\left(\frac{১}{x - ১০} - \frac{১}{x}\right) = ৮ \quad \Rightarrow \quad \frac{১}{x - ১০} - \frac{১}{x} = \frac{৮}{২৪০০}$

$\Rightarrow \quad \frac{x - x + ১০}{x(x - ১০)} = \frac{১}{৩০০}$

$\Rightarrow \quad x^২ - ১০x = ৩০০০$

$\Rightarrow \quad x^২ - ৬০x + ৫০x - ৩০০০ = ০$

$\Rightarrow \quad x(x - ৬০) + ৫০(x - ৬০) = ০$

$\Rightarrow \quad (x - ৬০)(x + ৫০) = ০$

হয়, $x - ৬০ = ০$ | অথবা, $x + ৫০ = ০$

$\Rightarrow \quad x = ৬০$ | $\Rightarrow \quad x = -৫০$

এটা গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ বাসে যাত্রী গিয়েছিল $= ৬০ - ১০ = ৫০$ জন

প্রত্যেকে ভাড়া দিয়েছিল $= \frac{২৪০০}{৬০ - ১০} = \frac{২৪০০}{৫০} = ৪৮$ টাকা

উত্তর: ৫০ জন এবং ৪৮ টাকা।

08. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি ৫০ বছর। যখন পুত্রের বয়স পিতার বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন তাদের বয়সের সমষ্টি হবে ১০২ বছর। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় করুন। [৩১তম বিসিএস]

Sol" ধরি,

পুত্রের বর্তমান বয়স = x বছর

পিতার বর্তমান বয়স = $(৫০ - x)$ বছর

পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের পার্থক্য $= (৫০ - x - x)$ বছর

$= ৫০ - ২x$ "

অর্থাৎ $(৫০ - ২x)$ বছর পর পুত্রের বয়স হবে পিতার বর্তমান বয়স $= (৫০ - x)$ বছর

$\therefore$ $(৫০ - ২x)$ " " পিতার " " " " $= (৫০ - x + ৫০ - ২x)$ "

$= (১০০ - ৩x)$ বছর

প্রশ্নমতে, $৫০ - x + ১০০ - ৩x = ১০২$

$\Rightarrow \quad ১৫০ - ৪x = ১০২$

$\Rightarrow \quad -৪x = ১০২ - ১৫০$

$\Rightarrow \quad -৪x = -৪৮$

$\Rightarrow \quad ৪x = ৪৮ \quad \Rightarrow x = \frac{৪৮}{৪} \quad \Rightarrow x = ১২$

$\therefore$ পুত্রের বয়স = ১২ বছর এবং পিতার বয়স $= ৫০ - ১২ = ৩৮$ বছর। **(উত্তর)**

09. ১২০টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও দশ পয়সার মুদ্রা একত্রে ২৭ টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কত? [৩০তম বিসিএস]

Sol: ধরি, পঁচিশ পয়সার মুদ্রা x টি

$\therefore$ দশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= (১২০ - x)$ টি

$\therefore$ পঁচিশ পয়সার মুদ্রার মান $= \frac{x}{৪}$ টাকা

$\therefore$ দশ " " " $= \frac{১২০ - x}{১০}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{৪} + \frac{১২০ - x}{১০} = ২৭ \Rightarrow \frac{৫x + ২৪০ - ২x}{২০} = ২৭$

$\Rightarrow ৩x + ২৪০ = ৫৪০$

$\Rightarrow ৩x = ৫৪০ - ২৪০$

$\Rightarrow ৩x = ৩০০$

$\Rightarrow x = ১০০$

$\therefore$ পঁচিশ পয়সার মুদ্রা $= ১০০$ টি

$\therefore$ দশ পয়সার মুদ্রা $(১২০ - x)$ টি $= (১২০ - ১০০) = ২০$ টি **(উত্তর)**

উত্তর: পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ১০০ টি ও দশ পয়সার মুদ্রা ২০ টি

বিকল্প:

ধরি, ২৫ পয়সার মুদ্রা x টি

$\therefore$ ১০ " " $(১২০ - x)$ টি

প্রশ্নমতে, $২৫ \times x + (১২০ - x) \times ১০ = ২৭ \times ১০০$

$\Rightarrow ২৫x + ১২০০ - ১০x = ২৭০০$

$\Rightarrow ১৫x = ২৭০০ - ১২০০$

$\Rightarrow x = \frac{১৫০০}{১৫}$

$\therefore x = ১০০$

$\therefore$ পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ১০০ টি এবং দশ পয়সার মুদ্রা $(১২০ - ১০০) = ২০$ টি।

10. **একটি অডিটোরিয়ামে সারিতে সজ্জিত মোট ৬১৬ টি আসন আছে। প্রতি সারিতে আসন সংখ্যা মোট সারির চেয়ে ৬ বেশি হলে, প্রতি সারিতে আসন সংখ্যা নির্ণয় করুন।** [২৭তম বিসিএস]

Sol: ধরি, মোট সারি সংখ্যা $= x$

$\therefore$ প্রতি সারিতে আসন সংখ্যা $= (x + ৬)$

প্রশ্নমতে, $(৬ + x) \times x = ৬১৬$

$\Rightarrow x^২ + ৬x - ৬১৬ = ০$

$\Rightarrow x^২ + ২৮x - ২২x - ৬১৬ = ০$

$\Rightarrow x(x + ২৮) - ২২(x + ২৮) = ০$

$\Rightarrow (x + ২৮)(x - ২২) = ০$

$\therefore x = ২২, x = -২৮$

কিন্তু সারি সংখ্যার ক্ষেত্রে ঋণাত্মক গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ মোট সারি সংখ্যা $= ২২$

প্রতি সারিতে আসন সংখ্যা $= (২২ + ৬)$ জন $= ২৮$ জন

$\therefore$ **উত্তর: ২৮**

11. কোন শ্রেণিতে যত জন ছাত্র ছিল তাদের প্রত্যেকে তত পাঁচ পয়সা করে চাঁদা দেওয়ায় মোট 125.00 টাকা হলো। ঐ শ্রেণিতে মোট কত জন ছাত্র ছিল? [২৪তম বিসিএস]

Sol" মনে করি,
ছাত্র সংখ্যা = x জন
প্রত্যেক ছাত্র চাঁদা দেয় = (5 × x) টাকা
∴ মোট চাঁদার পরিমাণ = $(5x \times x) = 5x^2$ পয়সা
প্রশ্নমতে, $5x^2 = 125 \times 100 = 12500$
$\Rightarrow x^2 = 2500$
$\Rightarrow x = \sqrt{2500} \Rightarrow x = 50$
∴ ছাত্রসংখ্যা 50 জন। **(উত্তর)**

12. A, B ও C কে কিছু টাকা এমনভাবে ভাগ করে দেওয়া হলো যে, A সমস্ত টাকার $\frac{1}{4}$ অংশ, B অবশিষ্টের $\frac{1}{6}$ অংশ এবং C 120 টাকা পেল। মোট কত টাকা, A, B ও C-এর মধ্যে ভাগ করে দেওয়া হলো? [২৪তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, মোট টাকা = x টাকা
A পায় $\frac{x}{4}$ অংশ
অবশিষ্ট $\left(x - \frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4}$ অংশ
B পায় $\frac{3x}{4}$ এর $\frac{1}{6} = \frac{x}{8}$ অংশ
C পায় $x - \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{8}\right) = \left(x - \frac{2x + x}{8}\right) = \frac{8x - 3x}{8} = \frac{5x}{8}$
প্রশ্নমতে, $\frac{5x}{8} = 120$
$\therefore x = \frac{120 \times 8}{5} = 192$ টাকা
উত্তর: 192 টাকা।

13. এক ব্যক্তি গাড়িযোগে ঘণ্টায় 60 কিলোমিটার বেগে কিছুদূর অতিক্রম করে ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করে 5 ঘণ্টায় 240 কি.মি. পথ গমন করেন। 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছিলেন? [২৪তম বিসিএস]

Sol" ধরি,
60 কি.মি./ ঘণ্টায় x দূরত্ব গিয়েছিল
60 কি.মি. বেগে x দূরত্ব যেতে সময় লাগে $\frac{x}{60}$ ঘণ্টা
40 কি.মি. বেগে (240 – x) দূরত্ব যেতে সময় লাগে $\frac{240 - x}{40}$ ঘণ্টা
∴ শর্তানুসারে, $\frac{x}{60} + \frac{240 - x}{40} = 5$
$\Rightarrow \frac{2x + 720 - 3x}{120} = 5$
$\Rightarrow 720 - x = 120 \times 5$
$\Rightarrow x = 720 - 600 = 120$ কি.মি.
উত্তর: 120 কি.মি.

14. যদি A এর বয়স B এর অর্ধেক এবং B এর বয়স C এর অর্ধেক এবং তাদের বয়সের সমষ্টি 114 বছর হয়, তবে প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় করুন। [২২তম বিসিএস]

Sol" A এর বয়স x বছর

∴ B " " 2x "

∴ C " " 4x "

প্রশ্নমতে, $x + 2x + 4x = 114 \Rightarrow 7x = 114$

$\Rightarrow x = \frac{114}{7}$ বছর $= 16\frac{2}{7}$ বছর

∴ A এর বয়স $= 16\frac{2}{7}$ বছর

B " " $\frac{114 \times 2}{7}$ " $= 32\frac{4}{7}$ "

C " " $\frac{114 \times 4}{7}$ " $= 65\frac{1}{7}$ "

উত্তর: $16\frac{2}{7}, 32\frac{4}{7}, 65\frac{1}{7}$ বছর।

15. ক ও খ একই মুহূর্তে ঢাকা ও বগুড়া হতে যাত্রা শুরু করে একে অপরের দিকে যথাক্রমে 20 কি.মি. ও 30 কি.মি. বেগে অগ্রসর হয়। খ, ক অপেক্ষা 36 কি.মি. বেশি অতিক্রম করার পর তারা মিলিত হলো। ঢাকা ও বগুড়ার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন। [১৫তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, ক x কি.মি. দূরত্ব অতিক্রম করার পর খ এর সহিত মিলিত হলো।

তাহলে খ $(x + 36)$ কি.মি. অতিক্রম করে।

এবং মোট দূরত্ব $= x + x + 36$

ক 20 কি.মি. বেগে x কি.মি. যায় $\frac{x}{20}$ ঘণ্টায়

খ 30 কি.মি. বেগে $(x + 36)$ কি.মি. যায় $\frac{x + 36}{30}$ ঘণ্টায়

শর্তানুসারে, $\frac{x}{20} = \frac{x + 36}{30} \Rightarrow 30x = 20x + 720 \Rightarrow 10x = 720$

∴ $x = 72$

∴ মোট দূরত্ব $= x + x + 36 = 72 + 72 + 36 = 180$ কি.মি.

উত্তর: 180 কিলোমিটার।

16. একটি অভিনয় থিয়েটারে মোট ৩০০ জন দর্শক উপস্থিত ছিলেন। তাদের মধ্যে কয়েকজন ৬০ টাকার টিকিট কিনেন এবং অবশিষ্ট জন ৫০ টাকার টিকিট কিনেন। মোট প্রাপ্তি ১৫,৮০০ টাকা হইলে কতগুলো কমদামী টিকিট বিক্রি হয়েছিল? [১৩তম বিসিএস]

Sol" ধরি, ৫০ টাকার টিকিট কেনে x জন

∴ ৬০ " " " $(৩০০ - x)$ জন

প্রশ্নমতে, $৫০ \times x + (৩০০ - x) \times ৬০ = ১৫৮০০$

বা, $৫০x + ১৮০০০ - ৬০x = ১৫৮০০$

বা, $-১০x = -২২০০$ বা, $x = ২২০$

∴ কমদামি টিকেট বিক্রয় হয়েছিল = ২২০টি

উত্তর : ২২০টি।

17. চাকুরীর সাক্ষাৎকারের জন্য এক ব্যক্তিকে নির্ধারিত ক্ষণে কলেজ গেটে উপস্থিত হতে হবে। সে গুলিস্তান হতে ঘন্টায় ১০ কি.মি. বেগে সাইকেল চালিয়ে ২০ মিনিট বিলম্বে পৌছল। সে যদি ১৫ কি.মি. বেগে যেত তবে নির্ধারিত ক্ষণের ১০ মিনিট আগেই পৌছত। গুলিস্তান থেকে কলেজ গেটের দূরত্ব কত? [১১তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, গুলিস্তান থেকে কলেজ গেটের দূরত্ব x কি.মি.

১০ কি.মি. বেগে x কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{x}{১০}$ ঘন্টা

১৫ কি.মি. বেগে x কি.মি. যেতে লাগে $\frac{x}{১৫}$ ঘন্টা

দুই বেগের জন্য গুলিস্তান থেকে কলেজ গেটে পৌছাতে সময়ের ব্যবধান

(২০ + ১০) মিনিট = ৩০ মিনিট = $\frac{১}{২}$ ঘন্টা

প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{১০} - \frac{x}{১৫} = \frac{১}{২}$

বা, $\frac{৩x - ২x}{৩০} = \frac{১}{২}$

বা, $x = ১৫$

উত্তর : দূরত্ব ১৫ কি.মি.।

18. পাশাপাশি লাইনে একই দিকে ঘন্টায় ৬০ কি.মি. ও ৯০ কি.মি. বেগে ধাবমান যথাক্রমে ৬০ মিটার ও ৮৫ মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেন কত সময়ে একে অপরকে অতিক্রম করবে? [১০তম বিসিএস]

Sol" ধরি t ঘন্টায় একে অপরকে অতিক্রম করবে।

১ম ট্রেনটি t সময়ে যায় = ৬০ × t = ৬০t কি.মি.

২য় ট্রেনটি t সময়ে যায় = ৯০ × t = ৯০t কি.মি.

২য় ট্রেনটি ১ম ট্রেনকে অতিক্রম করতে হলে এটি নিজের দৈর্ঘ্য সমান পথ বেশি যেতে হবে।

শর্তানুসারে,

$৯০t - ৬০t = \frac{৮৫}{১০০০}$ [∴ বৃহত্তর ট্রেনের দৈর্ঘ্য = ৮৫ মিটার]

বা, $৩০t = \frac{৮৫}{১০০০}$

$\therefore t = \frac{৮৫}{১০০০ \times ৩০} = \frac{১৭}{৬০০০}$ ঘন্টা $= \frac{১৭ \times ৬০ \times ৬০}{৬০০০} = \frac{৫১}{৫} = ১০.২$ সেকেন্ড

উত্তর : ১০.২ সেকেন্ড।

19. এক ব্যক্তি ঘন্টায় ৪ কি.মি. বেগে হেঁটে গুলিস্তান হতে গুলশান গেল। কিছুক্ষণ পর সেখান হতে ঘন্টায় ৫ কি.মি. বেগে হেঁটে গুলিস্তানে ফিরে আসল। ফেরার পথে তার অর্ধঘন্টা সময় কম লাগল। গুলিস্তান হতে গুলশানের দূরত্ব কত? [১০তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, গুলিস্তান থেকে গুলশানের দূরত্ব x কি.মি.

৪ কি.মি. বেগে x কি.মি. যেতে লাগে $\frac{x}{৪}$ ঘন্টা

৫ " " x " ফিরতে " $\frac{x}{৫}$ ঘন্টা

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{৪} - \frac{x}{৫} = \frac{১}{২}$ বা, $\frac{৫x - ৪x}{২০} = \frac{১}{২}$ বা, $\frac{x}{২০} = \frac{১}{২}$ বা, $x = ১০$ কি.মি.

উত্তর : গুলিস্তান হতে গুলশানের দূরত্ব = ১০ কি.মি.

TYPE 02 নবম- দশম শ্রেণীর বোর্ড বইয়ের এক চলক বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণের ব্যবহার সংক্রান্ত গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা

01. একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\frac{2}{5}$ গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 98 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]*

Sol" মনে করি, একটি সংখ্যা x

$\therefore$ অপর সংখ্যাটি $= \frac{2}{5} . x = \frac{2x}{5}$

প্রশ্নমতে, $x + \frac{2x}{5} = 98$ বা, $\frac{5x + 2x}{5} = 98$ বা, $7x = 490$ বা, $x = \frac{490}{7}$

$\therefore x = 70$

$\therefore$ অপর সংখ্যাটি $= \frac{2x}{5} = \frac{2 \times 70}{5} = \frac{140}{5} = 28$

নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 28 এবং 70।

02. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1; লব থেকে 2 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তা $\frac{1}{6}$ এর সমান। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]*

Sol" মনে করি, প্রকৃত ভগ্নাংশটির হর $= x$

$\therefore$ " " লব $= x - 1$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{x-1}{x}$

প্রশ্নমতে, $\frac{x-1-2}{x+2} = \frac{1}{6}$ বা, $\frac{x-3}{x+2} = \frac{1}{6}$ বা, $6x - 18 = x + 2$ [আড় গুণ করে]

বা, $6x - x = 2 + 18$ বা, $5x = 20$ বা, $x = \frac{20}{5}$ $\therefore x = 4$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{3}{4}$

03. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম হয়। সংখ্যাটি কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol" মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি $= x$

$\therefore$ দশক " " $= 9 - x$

সুতরাং সংখ্যাটি $= (9 - x) \times 10 + x \times 1 = 90 - 10x + x = 90 - 9x$

প্রশ্নমতে, $x \times 10 + (9 - x) \times 1 + 45 = 90 - 9x$ বা, $10x + 9 - x + 45 = 90 - 9x$

বা, $9x + 54 = 90 - 9x$ বা, $9x + 9x = 90 - 54$

বা, $18x = 36$ বা, $x = \frac{36}{18}$ $\therefore x = 2$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 90 - 9x = 90 - 9.2 = 90 - 18 = 72$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 72$.

৬৪. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি = x

∴ দশক " " = 2x

∴ সংখ্যাটি = $(2x \times 10) + (x \times 1) = 20x + x = 21x$

একক ও দশক স্থানীয় অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি = $(x + 2x) = 3x$

∴ $\frac{\text{সংখ্যাটি}}{\text{অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি}} = \frac{21x}{3x} = 7$

অর্থাৎ সংখ্যাটি = 7 × অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি

সুতরাং সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাত গুণ। (দেখানো হলো)

৬৫. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4। সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল 110। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্ক = x

দশক স্থানীয় অঙ্ক = x + 4

[যখন দশক স্থানীয় অঙ্ক > একক স্থানীয় অঙ্ক]

অথবা, একক স্থানীয় অঙ্ক = x + 4

তাহলে দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

[যখন একক স্থানীয় অঙ্ক > দশক স্থানীয় অঙ্ক]

যখন একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থাণীয় অঙ্ক x + 4 তখন সংখ্যাটি

$= 10(x + 4) + x = 10x + 40 + x = 11x + 40$

সংখ্যাটি স্থান বিনিময় করলে হয় $= 10x + (x + 4) = 11x + 4$

শর্তানুসারে, $11x + 4 + 11x + 40 = 110$

বা, $22x + 44 = 110$

বা, $22x = 110 - 44 = 66$

বা, $x = \frac{66}{22} = 3$

∴ সংখ্যাটি $= 11x + 40 = 11 \times 3 + 40 = 33 + 40 = 73$

আবার, যখন একক স্থানীয় অঙ্ক x + 4 এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক x তখন সংখ্যাটি

$= 10x + (x + 4)$

$= 11x + 4$

সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে দাঁড়ায় $= 10(x + 4) + x$

$= 10x + 40 + x$

$= 11x + 40$

শর্তানুযায়ী, $11x + 40 + 11x + 4 = 110$

বা, $22x + 44 = 110$

বা, $22x = 110 - 44$

বা, $22x = 66$

বা, $x = \frac{66}{22} = 3$

∴ সংখ্যাটি $= 11 \times 3 + 4 = 33 + 4 = 37$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি 73 অথবা 37.

06. একজন ক্ষুদ্র ব্যবসায়ী 5600 টাকা বিনিয়োগ করে এক বছর পর কিছু টাকার উপর 5% এবং অবশিষ্ট টাকার উপর 4% লাভ করলেন। মোট 256 টাকা লাভ করলে, তিনি কত টাকার উপর 5% লাভ করলেন? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]*

Sol মনে করি, ঐ ব্যক্তি 5% হারে x টাকা বিনিয়োগ করেছেন।
তাহলে 4% হারে বিনিয়োগ করেন $(5600 - x)$ টাকা।

5% হারে x টাকায় 1 বছরের লাভ $= \frac{5x}{100}$ টাকা

এবং 4% হারে $(5600 - x)$ টাকায় 1 বছরের লাভ $= \frac{4(5600 - x)}{100}$

প্রশ্নমতে, $\frac{5x}{100} + \frac{4(5600 - x)}{100} = 256$ বা, $\frac{5x}{100} + \frac{22400 - 4x}{100} = 256$

বা, $\frac{5x + 22400 - 4x}{100} = 256$ বা, $\frac{x + 22400}{100} = 256$

বা, $x + 22400 = 25600$ বা, $x = 25600 - 22400 = 3200$

∴ ঐ ব্যক্তি 5% হারে 3200 টাকা বিনিয়োগ করেন।

07. কবির সাহেব তাঁর 56000 টাকার কিছু টাকা বার্ষিক 12% মুনাফায় ও বাকি টাকা বার্ষিক 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করলেন। এক বছর পর তিনি মোট 6400 টাকা মুনাফা পেলেন। তিনি 12% মুনাফায় কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (উদাহরণের অংক নং-০৭)]*

Sol মনে করি, কবির সাহেব 12% মুনাফায় x টাকা বিনিয়োগ করেছেন।
∴ তিনি 10% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছেন $(56000 - x)$ টাকা

এখন, x টাকার 1 বছরের মুনাফা $x \times \frac{12}{100}$ টাকা বা $\frac{12x}{100}$ টাকা

আবার, $(56000 - x)$ টাকার 1 বছরের মুনাফা $(56000 - x) \times \frac{10}{100}$ টাকা বা $\frac{10(56000 - x)}{100}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{12x}{100} + \frac{10(56000 - x)}{100} = 6400$

বা, $12x + 560000 - 10x = 640000$

বা, $2x = 640000 - 560000$ বা, $2x = 80000$ বা, $x = 40000$

∴ কবির সাহেব 12% মুনাফায় 40000 টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

08. একটি বালিকা বিদ্যালয়ের একটি শ্রেণিকক্ষে প্রতিবেঞ্চে 6 জন করে ছাত্রী বসালে 2টি বেঞ্চ খালি থাকে। কিন্তু প্রতি বেঞ্চে 5 জন করে ছাত্রী বসালে 6 জন ছাত্রীকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা কয়টি? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]*

Sol মনে করি, শ্রেণিতে বেঞ্চের সংখ্যা x টি
প্রতি বেঞ্চে 6 জন করে ছাত্রী বসালে 2 টি বেঞ্চ খালি থাকে।
∴ শ্রেণির ছাত্রী সংখ্যা $= 6(x - 2)$
আবার, প্রতি বেঞ্চে 5 জন করে ছাত্রী বসালে 6 জন দাঁড়িয়ে থাকতে হয়।
∴ শ্রেণির ছাত্রী সংখ্যা $5x + 6$
প্রশ্নমতে, $6(x - 2) = 5x + 6$
বা, $6x - 12 = 5x + 6$
বা, $6x - 5x = 6 + 12$
∴ $x = 18$
অতএব, ঐ শ্রেণিতে 18 টি বেঞ্চ আছে।

09. একটি শ্রেণির প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে ছাত্র বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে। আবার, প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে ছাত্র বসালে 6 জন ছাত্রকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (উদাহরণের অংক নং-০৬)]*

Sol" মনে করি, শ্রেণিটির ছাত্রসংখ্যা x

যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 4 জন করে বসালে 3টি বেঞ্চ খালি থাকে, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x}{4} + 3$

আবার, যেহেতু প্রতিবেঞ্চে 3 জন করে বসালে 6 জনকে দাঁড়িয়ে থাকতে হয়, সেহেতু ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা $= \frac{x-6}{3}$

যেহেতু শ্রেণির বেঞ্চির সংখ্যা একই থাকবে,

সুতরাং $\frac{x}{4} + 3 = \frac{x-6}{3}$ বা, $\frac{x+12}{4} = \frac{x-6}{3}$ বা, $4x - 24 = 3x + 36$ বা, $4x - 3x = 36 + 24$ বা, $x = 60$

∴ ঐ শ্রেণির ছাত্র সংখ্যা 60

10. **একটি লঞ্চে যাত্রী সংখ্যা 47; মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়ার দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু 30 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত?** *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]*

Sol" মনে করি, কেবিনের যাত্রী সংখ্যা x জন

সুতরাং ডেকের যাত্রী সংখ্যা $= (47 - x)$ জন

মাথাপিছু ডেকের ভাড়া $= 30$ টাকা

∴ মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া $= (30 \times 2) = 60$ টাকা

প্রশ্নমতে, $(x \times 60) + (47 - x) \times 30 = 1680$

বা, $60x + 1410 - 30x = 1680$

বা, $30x = 1680 - 1410 = 270$

বা, $x = \frac{270}{30} = 9$

∴ নির্ণেয় কেবিনের যাত্রী সংখ্যা 9 জন।

11. **120 টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?** *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]*

Sol" মনে করি, পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $= x$ টি

∴ পঞ্চাশ " " " $= (120 - x)$ টি

প্রশ্নমতে, $\left(\frac{x}{100} \times 25\right) + \left(\frac{120 - x}{100} \times 50\right) = 35$

বা, $\frac{25x}{100} + \frac{6000 - 50x}{100} = 35$

বা, $\frac{25x + 6000 - 50x}{100} = 35$

বা, $25x + 6000 - 50x = 3500$ [আড়গুণ করে]

বা, $-25x = 3500 - 6000$

বা, $-25x = -2500$

বা, $25x = 2500$

বা, $x = \frac{2500}{25} = 100$

∴ পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 100 টি

∴ পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $(120 - 100) = 20$ টি

∴ পঁচিশ পয়সার মুদ্রা 100 টি এবং পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা 20টি।

12. একটি গাড়ি ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কিছু পথ এবং ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করলো। গাড়িটি মোট 5 ঘণ্টায় 240 কি.মি. পথ অতিক্রম করলে, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" মনে করি, গাড়িটি 60 কি.মি. বেগে x কি.মি. গিয়েছে

∴ " 40 " " $(240 - x)$ কি.মি. গিয়েছে

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{60} + \frac{240 - x}{40} = 5$ বা, $\frac{2x + 720 - 3x}{120} = 5$ বা, $-x + 720 = 600$ বা, $-x = 600 - 720$

বা, $-x = -120$ ∴ $x = 120$

∴ গাড়িটি 60 কি.মি. বেগে 120 কি.মি. গিয়েছে।

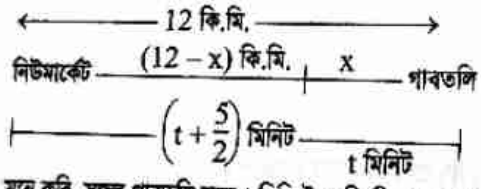
13. ঢাকার নিউমার্কেট থেকে গাবতলির দূরত্ব 12 কি.মি.। সজল নিউমার্কেট থেকে রিক্সায় ঘণ্টায় 6 কি.মি. বেগে এবং কাজল একই স্থান থেকে পায়ে হেঁটে 4 কি.মি. বেগে গাবতলির দিকে রওনা হলো। সজল গাবতলি পৌঁছে সেখানে 30 মিনিট বিশ্রাম নিয়ে আবার নিউমার্কেটের দিকে একই বেগে রওনা হলো। তারা নিউমার্কেট থেকে কতদূরে মিলিত হবে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" সজল 6 কি.মি. যায় 1 ঘণ্টায়

∴ " 1 " " $\frac{1}{6}$ "

∴ " 12 " " $\frac{1 \times 12}{6} = 2$ ঘণ্টায়

৩০ মিনিট বিশ্রাম নেওয়ায় সজলের মোট সময় = (2 ঘণ্টায় + 30 মিনিট) $= 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ঘণ্টা



মনে করি, সজল গাবতলি হতে t মিনিটে x কি.মি. দূরত্ব অতিক্রম করার পর কাজলের সাথে মিলিত হবে।

∴ মিলিত স্থানের দূরত্ব = $(12 - x)$ কি.মি.

কাজলের মোট সময় = $\left(t + \frac{5}{2}\right)$ ঘণ্টা

আমরা জানি, বেগ = $\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$

∴ সজলের ক্ষেত্রে, $\frac{x}{t} = 6$ বা, $x = 6t$ ..... (i)

কাজলের ক্ষেত্রে, $\frac{12 - x}{t + \frac{5}{2}} = 4$ বা, $\frac{2(12 - x)}{2t + 5} = 4$ বা, $\frac{12 - x}{2t + 5} = 2$

বা, $12 - x = 4t + 10$ বা, $12 - 6t = 4t + 10$ [(i) হতে]

বা, $-6t - 4t = 10 - 12$ বা, $-10t = -2$ ∴ $t = \frac{1}{5}$

(i) নং এ t এর মান বসিয়ে পাই, $x = 6 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

∴ মিলিত স্থানের দূরত্ব = $\left(12 - \frac{6}{5}\right) = \frac{60 - 6}{5} = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$ কি.মি.

∴ তারা নিউমার্কেট থেকে $10\frac{4}{5}$ কি.মি. দূরে মিলিত হবে।

14. মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। 5 বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত.? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]*

Sol" মনে করি, দুই কন্যার বর্তমান বয়সের সমষ্টি x বছর

∴ মাতার বর্তমান বয়স = 4x বছর

∴ 5 বছর পরে দুই কন্যার বয়সের সমষ্টি হবে $(x + 2 \times 5) = (x + 10)$ বছর

শর্তানুসারে, $(4x + 5) = 2(x + 10)$ বা, $4x + 5 = 2x + 20$ বা, $4x - 2x = 20 - 5$ বা, $2x = 15$ বা, $x = \frac{15}{2}$

∴ মাতার বর্তমান বয়স $= 4x = 4 \times \frac{15}{2} = 30$ বছর।

∴ মাতার বর্তমান বয়স 30 বছর।

15. নাবিলের বয়স যখন শুভর বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন শুভর যে বয়স ছিল নাবিলের বর্তমান বয়স তার দ্বিগুণ। শুভর বয়স যখন নাবিলের বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন তাদের দুই জনের বয়সের যোগফল 63 হলে প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩২)]*

Sol" মনে করি,

নাবিল ও শুভর বয়সের ব্যবধান x বছর; শুভর বর্তমান বয়স a বছর

∴ নাবিলের বর্তমান বয়স = (a + x) বছর

১ম শর্তমতে, $a + x = 2(a - x) \Rightarrow a + x = 2a - 2x \Rightarrow 2a - a = x + 2x$

∴ $a = 3x$

২য় শর্তমতে, $a + x + a + x + x = 63$

$\Rightarrow 2a + 3x = 63 \Rightarrow 2.3x + 3x = 63$ [∵ $a = 3x$]

$\Rightarrow 6x + 3x = 63 \Rightarrow 9x = 63 \Rightarrow x = \frac{63}{9} = 7$

∴ $a = 3 \times 7 = 21$

∴ শুভর বর্তমান বয়স 21

নাবিলের বর্তমান বয়স = (21 + 7) বছর = 28 বছর

∴ নাবিলের বর্তমান বয়স 28 বছর এবং শুভর বর্তমান বয়স 21 বছর।

TYPE 03 নবম- দশম শ্রেণীর বোর্ড বইয়ের এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার সংক্রান্ত গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা

01. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর, লব অপেক্ষা 4 বেশি। ভগ্নাংশটি বর্গ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তার হর, লব অপেক্ষা 40 বেশি হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (উদাহরণের অংক নং-১২)]*

Sol" ধরি, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর x + 4

সুতরাং ভগ্নাংশটি $\frac{x}{x+4}$

ভগ্নাংশটির বর্গ $= \left(\frac{x}{x+4}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+8x+16}$

এখানে, লব $= x^2$ এবং হর $= x^2 + 8x + 16$

প্রশ্নমতে, $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 40$ বা, $8x + 16 = 40$ বা, $8x = 24$

বা, $x = 3$

∴ $x + 4 = 3 + 4 = 7$

∴ $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{7}$

∴ ভগ্নাংশটি $\frac{3}{7}$

02. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 15 এবং এদের গুণফল 56; সংখ্যাটি কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol' মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি = x
দশক " " = (15 − x)

∴ সংখ্যাটি = (15 − x) × 10 + x × 1
= 150 − 10x + x = 150 − 9x

প্রশ্নমতে, x(15 − x) = 56
⇒ 15x − x^2 = 56
⇒ x^2 − 15x + 56 = 0
⇒ x^2 − 8x − 7x + 56 = 0
⇒ x(x − 8) − 7(x − 8) = 0
⇒ (x − 8) (x − 7) = 0
হয়, x − 8 = 0 | অথবা, x − 7 = 0
∴ x = 8 | ∴ x = 7
∴ সংখ্যাটি = 150 − 9x = 150 − 9 × 8 = 150 − 72 = 78
অথবা, সংখ্যাটি = 150 − 9x = 150 − 9 × 7 = 150 − 63 = 87
∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি 78 বা 87.

03. 50 মিটার দৈর্ঘ্য এবং 40 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার বাগানের ভিতরের চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার হলে, রাস্তাটি কত মিটার চওড়া?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (উদাহরণের অংক নং-০৫)]

Sol' মনে করি, রাস্তাটি x মিটার চওড়া।
রাস্তা বাদে বাগানটির দৈর্ঘ্য (50 − 2x) মিটার এবং প্রস্থ (40 − 2x) মিটার
∴ রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল = (50 − 2x) (40 − 2x) বর্গমিটার
প্রশ্নমতে, (50 − 2x) × (40 − 2x) = 1200
বা, 2000 − 80x − 100x + $4x^2$ = 1200
বা, $4x^2$ − 180x + 800 = 0
বা, x^2 − 45x + 200 = 0 [4 দিয়ে ভাগ করে]
বা, x^2 − 5x − 40x + 200 = 0
বা, x(x − 5) − 40(x − 5) = 0
বা, (x − 5) (x − 40) = 0
∴ x − 5 = 0 অথবা, x − 40 = 0
x − 5 = 0 হলে, x = 5
x − 40 = 0 হলে, x = 40
কিন্তু রাস্তাটি বাগানটির প্রস্থ 40 মিটার থেকে কম চওড়া হবে।
∴ x ≠ 40; ∴ x = 5
∴ রাস্তাটি 5 মিটার চওড়া।

04. একটি আয়তাকার ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। মেঝের দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে ও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol দেওয়া আছে, আয়তাকার ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার।
মনে করি, মেঝের দৈর্ঘ্য = x মিটার

$\therefore$ " প্রস্থ $= \frac{192}{x}$ মিটার

মেঝের দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য হয় = $(x - 4)$ মিটার

মেঝের প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে প্রস্থ হয় = $\left(\frac{192}{x} + 4\right)$ মিটার

প্রশ্নমতে, $(x - 4)\left(\frac{192}{x} + 4\right) = 192$

$\Rightarrow \frac{(x - 4)(192 + 4x)}{x} = 192$

$\Rightarrow 192x + 4x^2 - 768 - 16x = 192x$

$\Rightarrow 4x^2 - 16x - 768 = 0$

$\Rightarrow 4(x^2 - 4x - 192) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 192 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$

$\Rightarrow x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$

$\Rightarrow (x - 16)(x + 12) = 0$

হয়, $x - 16 = 0$ | অথবা, $x + 12 = 0$

$\therefore x = 16$ | $\therefore x = -12$ যা গ্রহণযোগ্য নয় কারণ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং প্রস্থ $= \frac{192}{16}$ মিটার = 12 মিটার

অতএব, মেঝের দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার।

05. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি. ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 3 সে.মি.। ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৫)]

Sol মনে করি, ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = x সে.মি.
এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = $(x + 3)$ সে.মি.
পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, $x^2 + (x + 3)^2 = (15)^2$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0$

$\Rightarrow 2(x^2 + 3x - 108) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 108 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 12x - 9x - 108 = 0$

$\Rightarrow x(x + 12) - 9(x + 12) = 0$

$\Rightarrow (x + 12)(x - 9) = 0$

হয়, $x + 12 = 0$ | অথবা, $x - 9 = 0$

$\therefore x = -12$ | $\therefore x = 9$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 সে.মি.
এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = $(9 + 3)$ সে.মি. = 12 সে.মি.।
$\therefore$ ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি. ও 12 সে.মি.।

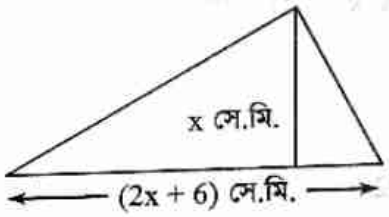
06. একটি ত্রিভুজের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 সে.মি. বেশি। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]*

Sol" মনে করি, ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের উচ্চতা x মিটার

∴ ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের ভূমি = (2x + 6) মিটার

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times (2x + 6) \times x$ বর্গমিটার

[∵ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা]



প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times (2x + 6)x = 810$

$\Rightarrow (x + 3)\, x = 810$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 810 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 30x - 27x - 810 = 0$

$\Rightarrow x(x + 30) - 27(x + 30) = 0$

$\Rightarrow (x + 30)(x - 27) = 0$

হয়, $x + 30 = 0$ | অথবা, $x - 27 = 0$

∴ $x = -30$ | ∴ $x = 27$

যেহেতু উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারে না,

∴ ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির উচ্চতা 27 সে.মি.।

07. শাহিক 240 টাকায় কতগুলো কলম কিনল। সে যদি ঐ টাকায় একটি কলম বেশি পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম গড়ে 1 টাকা কম পড়তো। সে কতগুলো কলম কিনল? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (উদাহরণের অংক নং-১৪)]*

Sol" মনে করি, শাহিক 240 টাকায় মোট xটি কলম কিনেছিল। এতে প্রতিটি কলমের দাম পড়ে $\frac{240}{x}$ টাকা।

সে যদি 240 টাকায় (x + 1)টি কলম পেতো তবে প্রতিটি কলমের দাম পড়তো $\frac{240}{x+1}$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1$ বা, $\frac{240}{x+1} = \frac{240 - x}{x}$

বা, $240x = (x + 1)(240 - x)$ [আড়গুণন করে]

বা, $240x = 240x + 240 - x^2 - x$

বা, $x^2 + x - 240 = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x^2 + 16x - 15x - 240 = 0$

বা, $x(x + 16) - 15(x + 16) = 0$

বা, $(x + 16)(x - 15) = 0$

∴ $x + 16 = 0$, অথবা, $x - 15 = 0$

$x + 16 = 0$ হলে, $x = -16$

$x - 15 = 0$ হলে, $x = 15$

কিন্তু কলমের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ $x \neq -16$; ∴ $x = 15$

∴ শাহিক 15টি কলম কিনেছিল।

08. একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তার সহপাঠীর সংখ্যার সমান টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট 420 টাকা চাঁদা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে চাঁদা দিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৭)]

Solⁿ মনে করি, ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা = x জন

প্রত্যেকে চাঁদা দেয় = (x – 1) টাকা

∴ মোট চাঁদা = x (x – 1) টাকা

প্রশ্নমতে, $x(x-1) = 420$

$\Rightarrow x^2 - x = 420$

$\Rightarrow x^2 - x - 420 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 21x + 20x - 420 = 0$

$\Rightarrow x(x-21) + 20(x-21) = 0$

$\Rightarrow (x+20)(x-21) = 0$

হয়, $x + 20 = 0$ অথবা, $x - 21 = 0$

∴ $x = -20$ ∴ $x = 21$

কিন্তু $x \neq -20$, কেননা ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 21 জন।

প্রত্যেকে চাঁদা দেয় (21 – 1) টাকা = 20 টাকা

∴ ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 21 জন এবং প্রত্যেকে 20 টাকা করে চাঁদা দিল।

09. একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে, প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৮)]

Solⁿ মনে করি, ঐ শ্রেণিতে ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা x জন।

1 জনে চাঁদা দেয় (x + 30) পয়সা

∴ x " " " $x \times (x+30)$ পয়সা $= x^2 + 30x$ পয়সা

আমরা জানি, 1 টাকা = 100 পয়সা

∴ 70 " $= (100 \times 70)$ পয়সা = 7000 পয়সা

প্রশ্নমতে, $x^2 + 30x = 7000$

$\Rightarrow x^2 + 30x - 7000 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 100x - 70x - 7000 = 0$

$\Rightarrow x(x+100) - 70(x+100) = 0$

$\Rightarrow (x+100)(x-70) = 0$

হয়, $x + 100 = 0$ অথবা, $x - 70 = 0$

∴ $x = -100$ ∴ $x = 70$

[গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

∴ ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 70 জন।

10. একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির একটি পরীক্ষায় x জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত মোট নম্বর 1950। একই পরীক্ষায় অন্য একজন নতুন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বর 34 যোগ করায় প্রাপ্ত নম্বরের গড় 1 কমে গেল।

ক) পৃথকভাবে x জন ছাত্রের এবং নতুন ছাত্রসহ সকলের প্রাপ্ত নম্বরের গড় x এর মাধ্যমে লেখ।

খ) প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করে দেখাও যে, $x^2 + 35x - 1950 = 0$

গ) x এর মান বের করে উভয় ক্ষেত্রে নম্বরের গড় কত তা নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৫.২ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

Sol" x জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় $\frac{1950}{x}$

নতুন ছাত্রের নম্বরসহ $(x + 1)$ জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের গড় $= \frac{1950 + 34}{x + 1} = \frac{1984}{x + 1}$

খ) প্রশ্নমতে, $\frac{1950}{x} = \frac{1984}{x + 1} + 1$

বা, $\frac{1950}{x} - \frac{1984}{x + 1} = 1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{1950x + 1950 - 1984x}{x(x + 1)} = 1$

বা, $x^2 + x = 1950 - 34x$

$\therefore x^2 + 35x - 1950 = 0$ [দেখানো হলো]

গ) $x^2 + 35x - 1950 = 0$

বা, $x^2 + 65x - 30x - 1950 = 0$

বা, $x(x + 65) - 30(x + 65) = 0$

বা, $(x + 65)(x - 30) = 0$

$\therefore x + 65 = 0$ অথবা, $x = -65$

$x + 65 = 0$ হলে, $x = -65$

আবার, $x - 30 = 0$ হলে, $x = 30$

যেহেতু ছাত্রের সংখ্যা x ঋণাত্মক হতে পারে না,

সুতরাং, $x \neq -65$

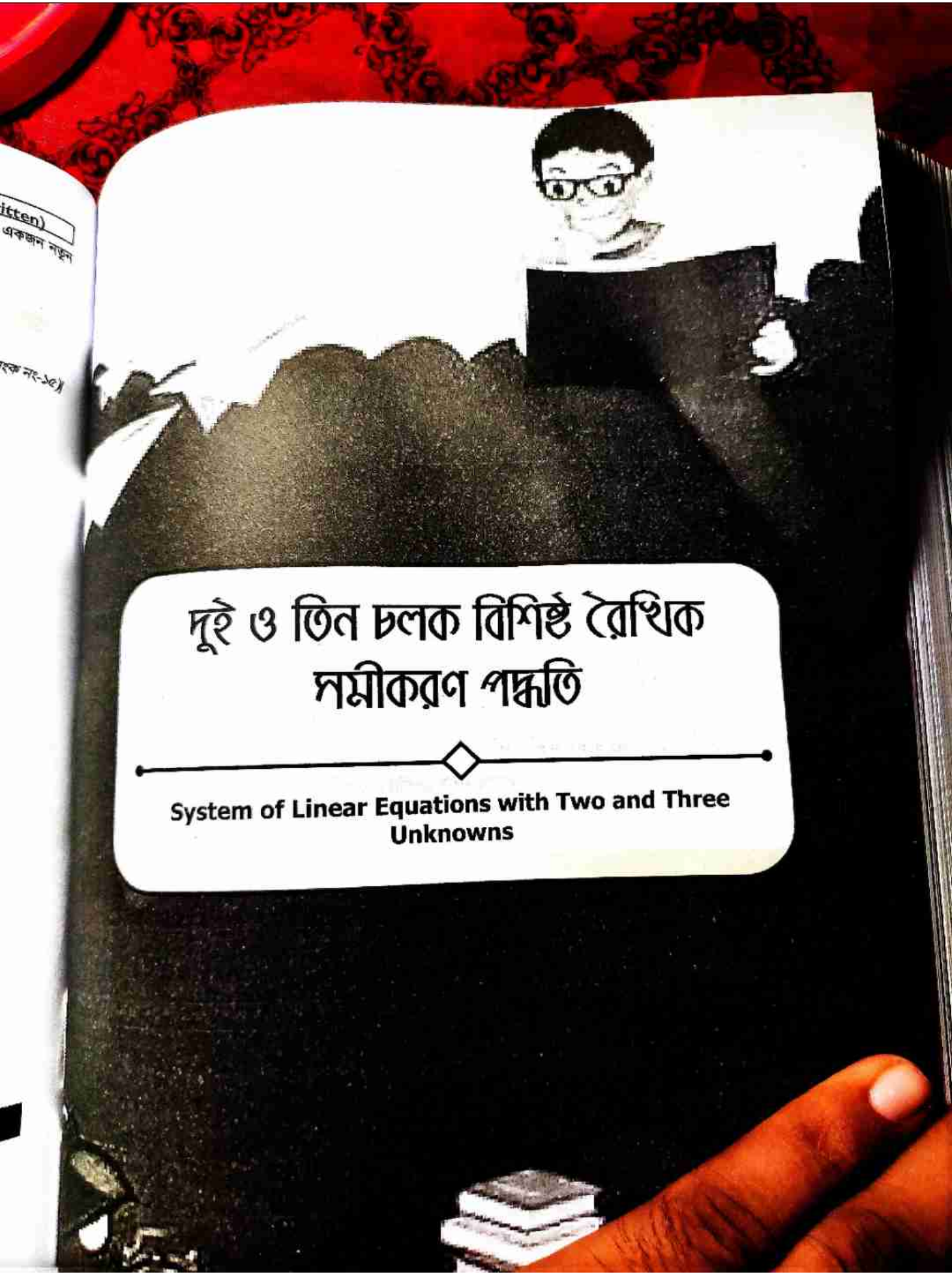
$\therefore x = 30$

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে গড় $= \frac{1950}{30} = 65$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গড় $= \frac{1984}{31} = 64$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 02, 05, 06, 09, 18
Type-02	02, 03, 05, 07, 08, 13, 15
Type-03	03, 04, 05, 07, 08



দুই ও তিন চলক বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ পদ্ধতি

System of Linear Equations with Two and Three Unknowns

Important Problem & Solutions

TYPE 01 প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান

01. সমাধান করুন: $x^2 + y^2 = \frac{13}{6}(xy + 12)$; $2x - 3y = 12$ [৩৪তম বিসিএস]

Sol" $x^2 + y^2 = \frac{13}{6}(xy + 12)$ ..... (i)

$2x - 3y = 12$ ..... (ii)

(ii) নং হতে পাই, $2x - 3y = 12 \Rightarrow 2x = 12 + 3y$

$\Rightarrow x = \frac{12 + 3y}{2}$ ..... (iii)

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $\left(\frac{12 + 3y}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{6}\left\{\left(\frac{12 + 3y}{2}\right)y + 12\right\}$

$\Rightarrow \frac{144 + 72y + 9y^2}{4} + y^2 = \frac{156y + 39y^2}{12} + 26$

$\Rightarrow 144 + 72y + 9y^2 + 4y^2 = \frac{156y + 39y^2 + 312}{3}$

$\Rightarrow 432 + 216y + 39y^2 = 156y + 39y^2 + 312$

$\Rightarrow 60y = -120$

$\Rightarrow y = -2$

y এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x = \frac{12 + 3y}{2} = \frac{12 + 3(-2)}{2}$

$= \frac{6}{2} = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 3$ ও $y = -2$

02. সমাধান করুন: $2x + \frac{3}{y} = 1$; $5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$ [২৯তম বিসিএস]

Sol" $2x + \frac{3}{y} = 1$ ..... (i)

$5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$ ..... (ii)

(i) নং থেকে পাই, $2x + \frac{3}{y} = 1 \Rightarrow \frac{2xy + 3}{y} = 1 \Rightarrow 2xy + 3 = y$

$\Rightarrow 2xy = y - 3 \Rightarrow x = \frac{y - 3}{2y}$ ..... (iii)

x এর মান (ii) নং এ বসাই

$\Rightarrow 5\left(\frac{y - 3}{2y}\right) - \frac{2}{y} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{5y - 15}{2y} - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$

$\Rightarrow \frac{5y - 15 - 4}{2y} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{5y - 19}{2y} = \frac{11}{12}$

$\Rightarrow 60y - 228 = 22y \Rightarrow 38y = 228 \Rightarrow y = \frac{228}{38} \therefore y = 6$

(iii) নং সমীকরণে y এর মান বসাই,

$x = \frac{6 - 3}{2 \times 6} \Rightarrow x = \frac{3}{12} \therefore x = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, 6\right)$

03. সমাধান করুন: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7, \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=21$

Sol" $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$ ..... (i)

এবং $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)=21$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=21 \quad \Rightarrow 7\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=21$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে, $\frac{2}{x}=10 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $\frac{2}{y}=4 \quad \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$

Ans: $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$

04. $2x+y=8; \quad 3x-2y=5$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (উদাহরণের অংক নং-৩)]*

Sol" প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$2x+y=8$ ..... (i)

$3x-2y=5$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) হতে পাই, $y=8-2x$ ..... (iii)

সমীকরণ (ii) এ y এর মান $8-2x$ বসিয়ে পাই,

$3x-2(8-2x)=5$ বা, $3x-16+4x=5$ বা, $7x=5+16$

বা, $7x=21$ বা, $x=3$

x এর মান সমীকরণ (iii) এ বসিয়ে পাই, $y=8-2\times3$ বা, $y=8-6$ বা, $y=2$

$\therefore$ সমাধান $(x, y)=(3, 2)$

05. $7x-3y=31; \quad 9x-5y=41$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" দেওয়া আছে,

$7x-3y=31$ ..... (i)

$9x-5y=41$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $7x=31+3y$

বা, $x=\frac{31+3y}{7}$ ..... (iii)

(ii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই, $9\frac{(31+3y)}{7}-5y=41$

বা, $\frac{279+27y}{7}-5y=41$ বা, $\frac{279+27y-35y}{7}=41$

বা, $279-8y=287$ [আড়গুণন করে] বা, $-8y=287-279$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-8y=8$ বা, $y=\frac{8}{-8}=-1$

y এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x=\frac{31+3(-1)}{7}=\frac{31-3}{7}=\frac{28}{7}=4$

$\therefore x=4$

নির্ণেয় সমাধান, $(x, y)=(4, -1)$

06. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০২)]*

Sol" দেওয়া আছে,

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ ..... (i)

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{x}{2}=\left(1-\frac{y}{3}\right)$ বা, $x=2\left(\frac{3-y}{3}\right)$ ..... (iii)

(ii) নং সমীকরণে $x=\frac{2(3-y)}{3}$ বসিয়ে পাই, $\frac{2(3-y)}{9}+\frac{y}{2}=1$ বা, $\frac{6-2y}{9}+\frac{y}{2}=1$

বা, $\frac{12-4y+9y}{18}=1$ বা, $5y+12=18$ [আড়গুণন করে]

বা, $5y=18-12$ [পক্ষান্তর করে] বা, $5y=6$ $\therefore y=\frac{6}{5}$

(iii) নং সমীকরণে y এর মান বসিয়ে পাই, $x=\frac{2}{3}\left(3-\frac{6}{5}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{15-6}{5}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{9}{5}=\frac{6}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y)=\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$

07. সমাধান করুন: $y(3+x)=x(6+y), 3(3+x)=5(y-1)$. **[৪৪তম বিসিএস]**

Sol" দেওয়া আছে, $y(3+x)=x(6+y)$

$\Rightarrow 3y+xy=6x+xy \Rightarrow 3y=6x \Rightarrow y=2x$ ..... (i)

এবং $3(3+x)=5(y-1) \Rightarrow 9+3x=5y-5 \Rightarrow 9+3x=5.2x-5$ [(i) এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 9+3x=10x-5 \Rightarrow 10x-5=9+3x \Rightarrow 10x-3x=9+5 \Rightarrow 7x=14 \therefore x=2$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $y=2.2=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y)=(2, 4)$

08. $x+y=1, kx+y=2$ এবং $x+ky=3$ হলে, k এর মান নির্ণয় করুন। **[৪৩তম বিসিএস]**

Sol" দেওয়া আছে, $x+y=1$ ..... (i)

$kx+y=2$ ..... (ii)

$x+ky=3$ ..... (iii)

(ii) নং এবং (iii) নং যোগ করে পাই, $kx+y+x+ky=2+3$

$\Rightarrow x+y+k(x+y)=5 \Rightarrow 1+k.1=5$ [(i) নং এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 1+k=5 \Rightarrow k=5-1 \therefore k=4$ **(Ans.)**

TYPE 02 অপনয়ন পদ্ধতিতে দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান

01. সমাধান করুন: $ax+by=a^2+b^2, 2bx-ay=ab$. **[৩১তম বিসিএস]**

Sol" দেওয়া আছে, $ax+by=a^2+b^2$ ..... (i)

এবং $2bx-ay=ab$ ..... (ii)

(i) নং কে a দ্বারা এবং (ii) নং কে b দ্বারা গুণ করে যোগ করি।

$a^2x+aby=a^3+ab^2$

$2b^2x-aby=ab^2$

$x(a^2+2b^2)=a^3+2ab^2 \Rightarrow x=\frac{a(a^2+2b^2)}{(a^2+2b^2)} \Rightarrow x=a$

x-এর মান (i) নং এ বসাই, $a.a+by=a^2+b^2 \Rightarrow a^2+by=a^2+b^2 \Rightarrow y=\frac{b^2}{b} \therefore y=b$

$\therefore$ $(x, y)=(a, b)$ **Ans.**

02. সমাধান করুন : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$; $ax+by=a^2+b^2$

Solⁿ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ ..... (i)

$ax+by=a^2+b^2$ ..... (ii)

(i) নং এর উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে এবং (ii) নং এর উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে।

$x+\frac{ay}{b}=2a$ ..... (iii)

$x+\frac{by}{a}=a+\frac{b^2}{a}$ ..... (iv)

(iii) নং – (iv) নং করে $\Rightarrow y\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=a-\frac{b^2}{a}$ $\Rightarrow y\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)=\frac{a^2-b^2}{a}$

$\Rightarrow y=\frac{a^2-b^2}{a}\times\frac{ab}{a^2-b^2}$ $\Rightarrow y=b$

y এর মান (i) নং বসিয়ে, $\frac{x}{a}+\frac{b}{b}=2$ $\Rightarrow \frac{x}{a}+1=2$ $\Rightarrow \frac{x}{a}=1$ $\Rightarrow x=a$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x=a, y=b$

Ans. $x=a, y=b$

03. $2x+y=8$; $3x-2y=5$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

দ্রষ্টব্য : প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতির পার্থক্য বুঝাতেই উদাহরণ ২ এর সমীকরণদ্বয়ই উদাহরণ ৩ এ নেয়া হলো।

Solⁿ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$2x+y=8$ ..... (i)

$3x-2y=5$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে, $4x+2y=16$ ..... (iii)

সমীকরণ (ii) ও (iii) যোগ করে পাই, $7x=21$ বা, $x=3$

x এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই, $2\times3+y=8$ বা, $y=8-6$ বা, $y=2$

∴ সমাধান $(x, y)=(3, 2)$

04. $7x-3y=31$; $9x-5y=41$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Solⁿ দেওয়া আছে,

$7x-3y=31$ ..... (i)

$9x-5y=41$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) কে যথাক্রমে 5 ও 3 দ্বারা গুণ করে পাই,

$35x-15y=155$ ..... (iii)

$27x-15y=123$ ..... (iv)

সমীকরণ (iii) থেকে (iv) বিয়োগ করে পাই, $8x=32$

$\therefore x=\frac{32}{8}=4$

(i) নং সমীকরণে $x=4$ বসিয়ে পাই, $7.4-3y=31$

বা, $28-3y=31$ বা, $-3y=31-28$ বা, $-3y=3$

$\therefore y=\frac{3}{-3}=-1$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y)=(4, -1)$

05. $7x - 8y = -9;$ $5x - 4y = -3$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol^n প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$7x - 8y = -9$ ..... (i)

$5x - 4y = -3$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে,

$10x - 8y = -6$ ..... (iii)

সমীকরণ (iii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাই, $3x = 3$

বা, $x = 1$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $7.1 - 8y = -9$

বা, $-8y = -9 - 7$

বা, $-8y = -16$

বা, $y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (1, 2)$

06. $ax + by = c;$ $a^2x + b^2y = c^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol^n দেওয়া আছে,

$ax + by = c$ ..... (i)

$a^2x + b^2y = c^2$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) কে b দ্বারা গুণ করে পাই, $abx + b^2y = bc$ ..... (iii)

সমীকরণ (ii) থেকে (iii) বিয়োগ করে পাই, $a^2x - abx = c^2 - bc$

বা, $x(a^2 - ab) = c^2 - bc$

বা, $x = \frac{c^2 - bc}{a^2 - ab} = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}$

সমীকরণ (i) এ $x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}$ বসিয়ে পাই, $\frac{ac(c-b)}{a(a-b)} + by = c$

বা, $by = c - \frac{c(c-b)}{a-b}$

বা, $by = \frac{ac - bc - c^2 + bc}{(a-b)}$

বা, $by = \frac{ac - c^2}{(a-b)}$

$\therefore y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = \left(\frac{c(c-b)}{a(a-b)}, \frac{c(a-c)}{b(a-b)}\right)$ বা, $\left(\frac{c(b-c)}{a(b-a)}, \frac{c(c-a)}{b(b-a)}\right)$

TYPE 03 বজ্রগুণন/ আড়গুণন পদ্ধতিতে দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (উদাহরণের অংক নং-০৪)]

01. $6x - y = 1;$ $3x + 2y = 13$

Sol^n পক্ষান্তর প্রক্রিয়ায় প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের ডানপক্ষ (0) (শূন্য) করে পাই,

$6x - y - 1 = 0$

$3x + 2y - 13 = 0$

সমীকরণদ্বয়কে যথাক্রমে

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 6, b_1 = -1, c_1 = -1$ এবং $a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = -13$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

বা, $\frac{x}{(-1)\times(-13) - 2\times(-1)} = \frac{y}{(-1)\times 3 - (-13)\times 6} = \frac{1}{6\times 2 - 3\times(-1)}$

বা, $\frac{x}{13+2} = \frac{y}{-3+78} = \frac{1}{12+3}$

বা, $\frac{x}{15} = \frac{y}{75} = \frac{1}{15}$

সুতরাং, $\frac{x}{15} = \frac{1}{15}$ বা, $x = \frac{15}{15} = 1$

আবার, $\frac{y}{75} = \frac{1}{15}$ বা, $y = \frac{75}{15} = 5$

∴ সমাধান $(x, y) = (1, 5)$

02. $3x - 4y = 0$; $2x - 3y = -1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

Sol" প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$3x - 4y = 0$

$2x - 3y = -1$

বা, $3x - 4y + 0 = 0$

$2x - 3y + 1 = 0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{-4\times 1 - (-3)\times 0} = \frac{y}{0\times 2 - 1\times 3} = \frac{1}{3\times(-3) - 2\times(-4)}$$

বা, $\frac{x}{-4+0} = \frac{y}{0-3} = \frac{1}{-9+8}$

বা, $\frac{x}{-4} = \frac{y}{-3} = \frac{1}{-1}$

বা, $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{1}{1}$

সুতরাং, $\frac{x}{4} = \frac{1}{1}$ বা, $x = 4$

আবার, $\frac{y}{3} = \frac{1}{1}$ বা, $y = 3$

∴ সমাধান $(x, y) = (4, 3)$

03. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$; $\frac{5x}{4} - 3y = -3$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

Sol" প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে $ax + by + c = 0$ আকারে সাজিয়ে পাই,

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 8$

বা, $\frac{3x + 2y}{6} = 8$

বা, $3x + 2y - 48 = 0$

∴ সমীকরণদ্বয়

$3x + 2y - 48 = 0$

$5x - 12y + 12 = 0$

আবার, $\frac{5x}{4} - 3y = -3$

বা, $\frac{5x - 12y}{4} = -3$

বা, $5x - 12y + 12 = 0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{2\times12-(-12)\times(-48)}=\frac{y}{(-48)\times5-12\times3}=\frac{1}{3\times(-12)-5\times2}$$

বা, $\frac{x}{24-576}=\frac{y}{-240-36}=\frac{1}{-36-10}$

বা, $\frac{x}{-552}=\frac{y}{-276}=\frac{1}{-46}$

বা, $\frac{x}{552}=\frac{y}{276}=\frac{1}{46}$

সুতরাং, $\frac{x}{552}=\frac{1}{46}$ বা, $x=\frac{552}{46}=12$

আবার, $\frac{y}{276}=\frac{1}{46}$ বা, $y=\frac{276}{46}=6$ ∴ সমাধান: $(x,y)=(12,6)$

04. $ax-by=ab=bx-ay$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (উদাহরণের অংক নং-০৭)]*

Sol" প্রদত্ত সমীকরণত্রয়,

$ax-by=ab$
$bx-ay=ab$ বা, $ax-by-ab=0$
$bx-ay-ab=0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই, $\frac{x}{(-b)\times(-ab)-(-a)(-ab)}=\frac{y}{(-ab)\times b-(-ab)\times a}=\frac{1}{a\times(-a)-b\times(-b)}$

বা, $\frac{x}{ab^2-a^2b}=\frac{y}{-ab^2+a^2b}=\frac{1}{-a^2+b^2}$

বা, $\frac{x}{-ab(a-b)}=\frac{y}{ab(a-b)}=\frac{1}{-(a+b)(a-b)}$

বা, $\frac{x}{ab(a-b)}=\frac{y}{-ab(a-b)}=\frac{1}{(a+b)(a-b)}$

সুতরাং, $\frac{x}{ab(a-b)}=\frac{1}{(a+b)(a-b)}$ বা, $x=\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{ab}{a+b}$

আবার, $\frac{y}{-ab(a-b)}=\frac{1}{(a+b)(a-b)}$ বা, $y=\frac{-ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{-ab}{a+b}$

∴ $(x,y)=\left(\frac{ab}{a+b},\frac{-ab}{a+b}\right)$

05. $2x+3y+5=0;\ 4x+7y+6=0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol" দেওয়া আছে, $2x+3y+5=0$
$4x+7y+6=0$

আড়গুণন সূত্রানুসারে, $\frac{x}{(3\times6)-(5\times7)}=\frac{y}{(5\times4)-(2\times6)}=\frac{1}{(2\times7)-(3\times4)}$

বা, $\frac{x}{18-35}=\frac{y}{20-12}=\frac{1}{14-12}$

বা, $\frac{x}{-17}=\frac{y}{8}=\frac{1}{2}$

∴ $\frac{x}{-17}=\frac{1}{2}$ এবং $\frac{y}{8}=\frac{1}{2}$

বা, $x=-\frac{17}{2}$ এবং $y=\frac{8}{2}=4$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $(x,y)=\left(-\frac{17}{2},4\right)$

06. $3x - 5y + 9 = 0$; $5x - 3y - 1 = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" দেওয়া আছে,

$3x - 5y + 9 = 0$

$5x - 3y - 1 = 0$

আড়গুণন সূত্রানুসারে,

$$\frac{x}{(-5)\times(-1)-(-3)\times(9)} = \frac{y}{9\times5-(-1)\times3} = \frac{1}{3\times(-3)-5\times(-5)}$$

বা, $\frac{x}{5+27} = \frac{y}{45+3} = \frac{1}{-9+25}$

বা, $\frac{x}{32} = \frac{y}{48} = \frac{1}{16}$

$\therefore x = \frac{32}{16} = 2$ এবং $y = \frac{48}{16} = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (2, 3)$.

07. $x + 2y = 7$; $2x - 3y = 0$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol" দেওয়া আছে,

$x + 2y = 7$ বা, $x + 2y - 7 = 0$ ..... (i)

$2x - 3y = 0$ বা, $2x - 3y + 0 = 0$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) এ আড়গুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{2\times0-(-3)(-7)} = \frac{y}{(-7)\times2-0\times1} = \frac{1}{1\times(-3)-2\times2}$$

বা, $\frac{x}{0-21} = \frac{y}{-14-0} = \frac{1}{-3-4}$

বা, $\frac{x}{-21} = \frac{y}{-14} = \frac{1}{-7}$

$\therefore x = \frac{-21}{-7} = 3$ এবং $y = \frac{-14}{-7} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (3, 2)$.

08. $y(3 + x) = x(6 + y)$; $3(3 + x) = 5(y - 1)$

Sol" দেওয়া আছে, *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৪)]*

$y(3 + x) = x(6 + y)$

বা, $3y + xy = 6x + xy$

বা, $6x - 3y + 0 = 0$ ..... (i)

আবার, $3(3 + x) = 5(y - 1)$

বা, $9 + 3x = 5y - 5$

বা, $3x - 5y + 14 = 0$ ..... (ii)

সমীকরণ (i)ও (ii) এ বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-3)\times14-0\times(-5)} = \frac{y}{0\times3-6\times14} = \frac{1}{6\times(-5)-3\times(-3)}$$

বা, $\frac{x}{-42} = \frac{y}{-84} = \frac{1}{-30+9}$

বা, $\frac{x}{-42} = \frac{y}{-84} = \frac{1}{-21}$

$\therefore x = \frac{-42}{-21} = 2$ এবং $y = \frac{-84}{-21} = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (2, 4)$.

09. $(x+2)(y-3) = y(x-1)$; $5x - 11y - 8 = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol দেওয়া আছে,

$(x+2)(y-3) = y(x-1)$

বা, $xy - 3x + 2y - 6 = xy - y$

বা, $xy - 3x + 2y - 6 - xy + y = 0$

বা, $-3x + 3y - 6 = 0$

বা, $x - y + 2 = 0$ [-3 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x - y + 2 = 0$ ..... (i)

এবং $5x - 11y - 8 = 0$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) এ আড়গুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-1)\times(-8) - 2\times(-11)} = \frac{y}{5\times 2 - 1\times(-8)} = \frac{1}{1\times(-11) - 5\times(-1)}$$

বা, $\frac{x}{8+22} = \frac{y}{10+8} = \frac{1}{-11+5}$

বা, $\frac{x}{30} = \frac{y}{18} = \frac{1}{-6}$

$\therefore \frac{x}{30} = \frac{1}{-6}$

বা, $x = \frac{30}{-6} = -5$

এবং $\frac{y}{18} = \frac{1}{-6}$

বা, $y = \frac{18}{-6} = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (-5, -3)$

TYPE 04 দুই চলক বিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণের সমাধান

01. সমাধান কর: $a^{x+2} \cdot a^{2y+1} = a^{10}$, $a^{2x} \cdot a^{y+1} = a^9$ $(a \neq 1)$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (উদাহরণের অংক নং-২৭)]

Sol $a^{x+2} \cdot a^{2y+1} = a^{10}$ ..... (i)

$a^{2x} \cdot a^{y+1} = a^9$ ..... (ii)

(i) থেকে $a^{x+2y+3} = a^{10} \Rightarrow x + 2y + 3 = 10 \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$ ..... (iii)

(ii) থেকে, $a^{2x+y+1} = a^9 \Rightarrow 2x + y + 1 = 9 \Rightarrow 2x + y - 8 = 0$ ..... (iv)

(iii) ও (iv) থেকে আড়গুণন পদ্ধতি অনুসারে, $\frac{x}{-16+7} = \frac{y}{-14+8} = \frac{1}{1-4}$

$\Rightarrow \frac{x}{-9} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{-3}$

$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = 1$

$\Rightarrow x = 3, y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (3, 2)$

02. সমাধান কর: $3^{3y-1} = 9^{x+y}, 4^{x+3y} = 16^{2x+3}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (উদাহরণের অংক নং-৩)]

Sol $3^{3y-1} = 9^{x+y}$ ..... (i)

$\Rightarrow 3^{3y-1} = (3^2)^{x+y}$

$\Rightarrow 3^{3y-1} = 3^{2x+2y}$

$\Rightarrow 3y - 1 = 2x + 2y$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0$ ..... (ii)

এবং $4^{x+3y} = 16^{2x+3}$ ..... (iii)

$\Rightarrow 4^{x+3y} = (4^2)^{2x+3}$

$\Rightarrow 4^{x+3y} = 4^{4x+6}$

$\Rightarrow x + 3y = 4x + 6$

$\Rightarrow 3x - 3y + 6 = 0$

$\Rightarrow x - y + 2 = 0$ ..... (iv)

(ii) ও (iv) থেকে আড়গুণন পদ্ধতি অনুসারে, $\frac{x}{-2+1} = \frac{y}{1-4} = \frac{1}{-2+1}$

$\Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y}{-3} = -1$

$\Rightarrow x = 1, y = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, 3)$

03. সমাধান কর: $x^y = y^x, x = 2y$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (উদাহরণের অংক নং-৪)]

Sol $x^y = y^x$ ..... (i)

$x = 2y$ ..... (ii) এখানে, $x \neq 0, y \neq 0$

(ii) থেকে x এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $(2y)^y = y^{2y} \Rightarrow 2^y \cdot y^y = y^{2y}$

$\Rightarrow \frac{y^{2y}}{y^y} = 2^y \Rightarrow y^y = 2^y \Rightarrow y = 2$

y এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই, $x = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 2)$

04. সমাধান কর: $x^y = y^2, y^{2y} = x^4$, যেখানে $x \neq 1$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (উদাহরণের অংক নং-৫)]

Sol $x^y = y^2$ ..... (i)

$y^{2y} = x^4$ ..... (ii)

(i) থেকে পাই, $(x^y)^y = (y^2)^y$

$\Rightarrow x^{y^2} = y^{2y}$ ..... (iii)

(iii) ও (ii) থেকে পাই, $x^{y^2} = x^4$

$\therefore y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

এখন $y = 2$ হলে (i) থেকে পাই, $x^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

আবার, $y = -2$ হলে (i) থেকে পাই, $x^{-2} = (-2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2), (-2, 2), \left(\frac{1}{2}, -2\right), \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

05. সমাধান কর: $8.2^{xy} = 4^y, 9^x \cdot 3^{xy} = \frac{1}{27}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (উদাহরণের অংক নং-৩১)]

Sol" $8.2^{xy} = 4^y$ ..... (i)

$9^x \cdot 3^{xy} = \frac{1}{27}$ ..... (ii)

(i) থেকে পাই, $2^3 \cdot 2^{xy} = (2^2)^y \Rightarrow 2^{3+xy} = 2^{2y} \Rightarrow 3 + xy = 2y$ ..... (iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^2)^x \cdot 3^{xy} = \frac{1}{3^3} \Rightarrow 3^{2x+xy} = 3^{-3} \Rightarrow 2x + xy = -3$ ..... (iv)

(iii) থেকে (iv) বিয়োগ করে পাই, $3 - 2x = 2y + 3 \Rightarrow -x = y$ ..... (v)

(v) থেকে y এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই, $3 - x^2 = -2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$

$\therefore x = -1$ অথবা $x = 3$

$x = -1$ হলে (v) থেকে পাই, $y = 1$

$x = 3$ হলে (v) থেকে পাই, $y = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (-1, 1), (3, -3)$

06. সমাধান কর: $18y^x - y^{2x} = 81, 3^x = y^2$ [৪৩তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (উদাহরণের অংক নং-৩২)]

Sol" $18y^x - y^{2x} = 81$ ..... (i)

$3^x = y^2$ ..... (ii)

(i) থেকে পাই, $y^{2x} - 18y^x + 81 = 0 \quad \Rightarrow (y^x)^2 - 2.y^x.9 + 9^2 = 0 \quad \Rightarrow (y^x - 9)^2 = 0 \quad \Rightarrow y^x - 9 = 0 \Rightarrow$

$y^x = 3^2$ ..... (iii)

(ii) থেকে পাই, $(3^x)^x = (y^2)^x \Rightarrow 3^{x^2} = y^{2x}$ ..... (iv)

(iii) থেকে পাই, $(y^x)^2 = (3^2)^2 \Rightarrow y^{2x} = 3^4$ ..... (v)

(iv) ও (v) থেকে পাই, $3^{x^2} = 3^4$

$\therefore \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow x = \pm 2$

$x = 2$ হলে (ii) থেকে পাই, $3^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

$x = -2$ হলে (ii) থেকে পাই, $3^{-2} = y^2 \quad \Rightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 3), (2, -3), \left(-2, \frac{1}{3}\right), \left(-2, -\frac{1}{3}\right)$

07. সমাধান কর: $2^x + 3^y = 18 \; ; \quad 2^{2x} + 3^y = 36$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" $2^x + 3^y = 18$ ..... (i)

$2^{2x} + 3^y = 36$ ..... (ii)

এখন, (ii) নং কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{2^{2x} \cdot 3^y}{2^x \cdot 3^y} = \frac{36}{18}$ বা, $2^x = 2$ বা, $2^x = 2^1$

$\therefore x = 1$ [$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

আবার, (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$2^1 \cdot 3^y = 18$ বা, $3^y = 9$ বা, $3^y = 3^2$

$\therefore y = 2$[$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, 2)$

08. সমাধান কর: $a^x \cdot a^{y+1} = a^7;\ a^{2y} \cdot a^{3x+5} = a^{20}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (অনুশীলনীর অংক নং ০৭)]

Sol" $a^x \cdot a^{y+1} = a^7$ ..... (i)

$a^{2y} \cdot a^{3x+5} = a^{20}$ ..... (ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $a^{x+y+1} = a^7$

বা, $x + y + 1 = 7$ [$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

$\therefore x + y - 6 = 0$ ..... (iii)

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $a^{2y+3x+5} = a^{20}$

বা, $2y + 3x + 5 = 20$ [$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

$\therefore 3x + 2y - 15 = 0$ ..... (iv)

এখন, (iii) ও (iv) নং সমীকরণ জোট থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{-15+12} = \frac{y}{-18+15} = \frac{1}{2-3}$$

বা, $\frac{x}{-3} = \frac{y}{-3} = \frac{1}{-1}$

বা, $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = 1$

$\therefore x = 3$ আবার, $y = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (3, 3)$

09. সমাধান কর: $\left.\begin{matrix} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{matrix}\right\}\ y \neq 1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (অনুশীলনীর অংক নং ০৭)]

Sol" $y^x = x^2$ ..... (i)

$x^{2x} = y^4$ ..... (ii)

এখন, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x^{2x} = y^4$

বা, $(x^2)^x = y^4$

বা, $(y^x)^x = y^4$ [(i) নং সমীকরণ থেকে x^2 এর মান বসিয়ে]

বা, $y^{x^2} = y^4$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]

বা, $x^2 = 4$ [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

$\therefore x = \pm 2$

আবার, (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x = 2$, তখন $y^2 = 2^2$

বা, $y^2 = 4$

$\therefore y = \pm 2$

যখন $x = -2$, তখন $y^{-2} = (-2)^2$

বা, $\frac{1}{y^2} = 4$

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore y = \pm \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

10. সমাধান কর: $y^x = 4;\quad y^2 = 2^x$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol^n $y^x = 4$ ..... (i)

$y^2 = 2^x$ ..... (ii)

এখন (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $y^2 = 2^x$

বা, $(y^2)^x = (2^x)^x$ [উভয় পক্ষের ঘাত x – এ উন্নীত করে]

বা, $y^{2x} = 2^{x^2}$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]

বা, $(y^x)^2 = 2^{x^2}$

বা, $(4)^2 = 2^{x^2}$ [(i) থেকে y^x এর মান বসিয়ে]

বা, $(2^2)^2 = 2^{x^2}$

বা, $2^4 = 2^{x^2}$

বা, $x^2 = 4$ [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

$\therefore x = \pm 2$

আবার, (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x = 2$, তখন $y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2$

যখন $x = -2$, তখন $y^{-2} = 4$ বা, $y^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore y = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

11. সমাধান কর: $4^x = 2^7;\ (27)^{xy} = 9^{y+1}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]*

Sol^n $4^x = 2^7$ ..... (i)

$(27)^{xy} = 9^{y+1}$ ..... (ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $(2^2)^x = 2^y$

বা, $2^{2x} = 2^y$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]

$\therefore 2x = y$ ..... (iii) [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $(27)^{xy} = 9^{y+1}$

বা, $(3^3)^{xy} = (3^2)^{y+1}$

বা, $3^{3xy} = 3^{2(y+1)}$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]

বা, $3xy = 2(y + 1)$ [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

বা, $3x.2x = 2(2x + 1)$ [$\because y = 2x$]

বা, $6x^2 = 2(2x + 1)$

বা, $3x^2 = 2x + 1$

বা, $3x^2 - 2x - 1 = 0$

বা, $3x^2 - 3x + x - 1 = 0$

বা, $3x(x - 1) + 1(x - 1) = 0$

বা, $(x - 1)(3x + 1) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$ অথবা, $3x + 1 = 0$

$\therefore x = 1 \qquad \therefore x = -\frac{1}{3}$

(iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x = 1$ তখন $y = 2.1 = 2$

যখন $x = -\frac{1}{3}$ তখন $y = 2.\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, 2), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

12. সমাধান কর: $8y^x - y^{2x} = 16$; $2^x = y^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৬ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Sol" $8y^x - y^{2x} = 16$ ..... (ii)

$2^x = y^2$ ..... (ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $y^{2x} - 8y^x + 16 = 0$

বা, $(y^x)^2 - 2.y^x.4 + 4^2 = 0$

বা, $(y^x - 4)^2 = 0$

$\therefore y^x = 4$ ..... (iii)

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $2^x = y^2$

বা, $(2^x)^x = (y^2)^x$ [উভয় পক্ষের ঘাত x-এ উন্নীত করে]

বা, $2^{x^2} = y^{2x}$ [$\because (a^m)^n = a^{mn}$]

বা, $2^{x^2} = (y^x)^2$ [$\because a^{mn} = (a^m)^n$]

বা, $2^{x^2} = 4^2$ [(iii) নং থেকে y^x এর মান বসিয়ে]

বা, $2^{x^2} = 16$

বা, $2^{x^2} = 2^4$

বা, $x^2 = 4$ [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

$\therefore x = \pm 2$

এখন, (ii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x = 2$ তখন $2^2 = y^2$ বা, $y^2 = 4$ $\therefore y = \pm 2$

যখন $x = -2$ তখন $2^{-2} = y^2$ বা, $y = \frac{1}{4}$ $\therefore y = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x,y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2,\frac{1}{2}\right), \left(-2,-\frac{1}{2}\right)$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 02, 03, 08
Type-02	01, 02, 06
Type-03	01, 04, 09
Type-04	02, 06, 07, 12

11. ক, খ ও গ এর মধ্যে ১১০০ টাকা এমনভাবে ভাগ করে দেওয়া হল যেন খ ও গ একত্রে যত টাকা পেল ক একা উক্ত টাকার $\frac{5}{6}$ অংশ পেল। আবার, ক ও গ একত্রে যত টাকা পেল খ একা উক্ত টাকার $\frac{7}{9}$ অংশ পেল। কে কত টাকা পেল? [১০তম বিসিএস]

[সমাধান দেখুন: Type-05, Question No-11]

এই অধ্যায়ের Analysis

দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণের ব্যবহারের এ অধ্যায়টি খুবই গুরুত্বপূর্ণ। কারণ এ অধ্যায় থেকে প্রশ্ন তো আসেই, পরিমিতির অঙ্ক করতেও এই অধ্যায়ের জ্ঞান কাজে লাগে।

এ অধ্যায় সংক্রান্ত নবম-দশম শ্রেণির বোর্ড বইয়ের অধ্যায়সমূহ:

সাধারণ গণিত	অধ্যায়: ১২.৪
উচ্চতর গণিত	অধ্যায়: ৫.৫

প্রশ্ন বিশ্লেষণে দেখা যায়, এখান থেকে আসা অধিকাংশ প্রশ্নই নবম-দশম শ্রেণির বোর্ড বই থেকে হুবহু কমন আসে কিংবা উ একই রেখে শুধু সংখ্যা পরিবর্তন করে আসে।

বইয়ে কয়েকটি নিয়মের অংক থাকলেও পরীক্ষায় প্রায় সকল অংকই সংখ্যাবাচক ও আয়তক্ষেত্রের টপিক থেকে এসেছে। ৪০ বি বিসিএসেও এখান থেকে একটি প্রশ্ন আসার সম্ভাবনা বেশি। তাই আপনারা অধ্যায়টি গুরুত্ব দিয়ে পড়বেন।

Important Problem & Solutions

TYPE 01 সংখ্যা সম্পর্কিত সমস্যা

01. দুই অংকবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে অংকদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 3 হয়; ঐ সংখ্যাটির সাথে 18 যোগ করা অংকদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন। [৩৪তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (উদাহরণের অংক নং-১)]

Sol" ধরি, একক স্থানীয় অংক = x

দশক স্থানীয় অংক = y

$\therefore$ সংখ্যাটি = $10y + x$

প্রশ্নমতে, $\frac{10y + x}{xy} = 3$ ..... (i)

আবার, $10y + x + 18 = 10x + y$ ..... (ii)

$\Rightarrow 9y - 9x = -18$

$\Rightarrow 9(y - x) = -18 \quad \Rightarrow y - x = -2$

$\Rightarrow x - y = 2 \quad \Rightarrow x = 2 + y$ ..... (iii)

(i) নং থেকে, $\frac{10y + x}{xy} = 3$

$\Rightarrow 10y + x = 3xy$

$\Rightarrow 10y + 2 + y = 3(2 + y)y$ [x এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 11y + 2 = 6y + 3y^2 \quad \Rightarrow 11y + 2 - 6y - 3y^2 = 0$

$\Rightarrow -3y^2 + 5y + 2 = 0 \quad \Rightarrow 3y^2 - 5y - 2 = 0$

$\Rightarrow 3y^2 - 6y + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow 3y(y - 2) + 1(y - 2) = 0$

$\Rightarrow (y - 2)(3y + 1) = 0$

$\therefore y - 2 = 0$ অথবা, $(3y + 1) = 0$

$\Rightarrow y = 2 \quad \Rightarrow 3y = -1$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ [ঋণাত্মক বলে গ্রহণযোগ্য নয়]

(iii) নং এ y এর মান বসিয়ে পাই, $x = 2 + y \Rightarrow x = 2 + 2 \quad \therefore x = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা = $2 \times 10 + 4 = 24$ **(Ans.)**

02. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 5 সংখ্যাটির সাথে 9 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি কত? [২২তম, ২০তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি x এবং দশক স্থানীয় অঙ্কটি y

∴ সংখ্যাটি $10y + x$

প্রশ্নানুসারে, $x + y = 5$ ..... (i)

এবং $10y + x + 9 = 10x + y \Rightarrow 9 = 10x + y - 10y - x \Rightarrow 9 = 9x - 9y$

$\Rightarrow x - y = 1$ ..... (ii)

(i) + (ii) নং যোগ করে,

$$\begin{array}{r} x + y = 5 \\ \underline{x - y = 1} \\ 2x \quad = 6 \end{array}$$

$\therefore x = 3$

x এর মান (ii) নং এ বসাইয়া $x - y = 1 \Rightarrow 3 - y = 1 \Rightarrow y = 2$

∴ সংখ্যাটি $10y + x = 10 \times 2 + 3 = 20 + 3 = 23$

উত্তর: 23

03. দুই অংক বিশিষ্ট কোন সংখ্যার অংক দুটির অন্তর 2; অংক দুটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম। সংখ্যাটি কত? [২১তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, দশক স্থানীয় সংখ্যা = x

একক স্থানীয় সংখ্যা = y

∴ সংখ্যাটি $10x + y$

প্রশ্নমতে, $y - x = 2$

$\therefore y = x + 2$ ..... (i)

এবং $10y + x = 2(10x + y) - 6 \Rightarrow 10y + x = 20x + 2y - 6$

$\Rightarrow -19x = -8y - 6 \Rightarrow -19x = -8(x + 2) - 6$ [y এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow -19x = -8x - 16 - 6 \Rightarrow -19x + 8x = -22 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $y = 2 + 2 = 4$

∴ সংখ্যাটি $= 10x + y = 10 \times 2 + 4 = 24$ **(Ans.)**

04. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অংকদ্বয়ের সমষ্টির সাথে 5 যোগ করলে যোগফল হবে সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ। আর সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, তা মূল সংখ্যাটি থেকে 9 কম হবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (উদাহরণের অংক নং-১২)]

Sol" মনে করি, নির্ণেয় সংখ্যাটির দশক স্থানীয় অঙ্ক x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y। অতএব, সংখ্যাটি $10x + y$।

∴ ১ম শর্তানুসারে, $x + y + 5 = 3x$ ..... (i)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $10y + x = (10x + y) - 9$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $y = 3x - x - 5$ বা, $y = 2x - 5$ ..... (iii)

আবার, সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $10y - y + x - 10x + 9 = 0$

বা, $9y - 9x + 9 = 0$

বা, $y - x + 1 = 0$

বা, $2x - 5 - x + 1 = 0$ [(iii) হতে y এর মান বসিয়ে পাই]

বা, $x - 4 = 0$

বা, $x = 4$

(iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y = 2 \times 4 - 5 = 8 - 5 = 3$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি হবে $10x + y = 10 \times 4 + 3 = 40 + 3 = 43$

05. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]*

Sol" মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x
এবং একক স্থানীয় অঙ্ক = y
∴ সংখ্যাটি = 10x + y
প্রথম শর্তানুসারে, y = 3x + 1 ..... (i)
অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি = 10y + x
দ্বিতীয় শর্তানুসারে, 10y + x = 8(x + y)
সুতরাং সমীকরণ (i) থেকে y এর মান বসিয়ে পাই,
10(3x + 1) + x = 8(x + 3x + 1)
বা, 30x + 10 + x = 8(4x + 1)
বা, 31x + 10 = 32x + 8
বা, 31x – 32x = 8 – 10 বা, –x = –2
∴ x = 2
(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, y = 3x + 1 = 3.2 + 1 = 7
∴ সংখ্যাটি = 10x + y = 10 × 2 + 7 = 27
∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি 27.

06. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। সংখ্যাটির সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]*

Sol" মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্ক = x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক = y
∴ সংখ্যাটি = 10y + x
অঙ্কদ্বয়ের স্থান বিনিময়ে সৃষ্ট সংখ্যা = 10x + y
প্রশ্নমতে, $\frac{10y + x}{xy} = 2$ ..... (i)
এবং (10y + x) + 27 = 10x + y ..... (ii)
(ii) নং হতে পাই, 10y + x + 27 – 10x – y = 0
বা, 9y – 9x + 27 = 0 বা, 9(y – x + 3) = 0
বা, y – x + 3 = 0 [উভয়পক্ষকে 9 দ্বারা ভাগ করে]
∴ y = x – 3 ..... (iii)
(i) নং সমীকরণে y = x – 3 বসিয়ে পাই, $\frac{10(x-3)+x}{x(x-3)} = 2$
বা, 10x – 30 + x = 2(x² – 3x) [আড়গুণন করে]
বা, 11x – 30 = 2x² – 6x বা, 2x² – 6x – 11x + 30 = 0 [পক্ষান্তর করে]
বা, 2x² – 17x + 30 = 0 বা, 2x² – 12x – 5x + 30 = 0
বা, 2x(x – 6) –5(x – 6) = 0
∴ (2x – 5) (x – 6) = 0
হয়, 2x – 5 = 0 অথবা, x – 6 = 0
বা, 2x = 5 ∴ x = 6
∴ $x = \frac{5}{2}$
যেহেতু সংখ্যার স্থানীয় অঙ্ক ভগ্নাংশ হতে পারে না।
∴ x = 6
(iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই, y = x – 3 = 6 – 3 = 3
∴ সংখ্যাটি = 10y + x = 10 × 3 + 6 = 30 + 6 = 36 (Ans.)

07. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4; সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল 110। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৭ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol" মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্ক = x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক = y

∴ সংখ্যাটি = 10y + x

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যা হবে = 10x + y

১ম শর্তমতে, $x - y = 4$ ..... (i)

অথবা, $y - x = 4$ ..... (ii)

২য় শর্তমতে, $10y + x + 10x + y = 110 \Rightarrow 11x + 11y = 110 \Rightarrow x + y = 10$

∴ $x + y = 10$ ..... (iii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2x = 14 \quad \therefore x = 7$

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $7 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 7 = 3$

∴ সংখ্যাটি = $10 \times 3 + 7 = 30 + 7 = 37$

আবার, সমীকরণ (ii) ও (iii) যোগ করে পাই, $2y = 14 \quad \therefore y = 7$

y এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x + 7 = 10 \Rightarrow x = 10 - 7 = 3$

∴ সংখ্যাটি = $10 \times 7 + 3 = 70 + 3 = 73$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি 37 অথবা 73 **(Ans.)**

08. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাথে 7 যোগ করলে যোগফল দশক স্থানীয় অঙ্কটির তিনগুণ হয়। কিন্তু সংখ্যাটি থেকে 18 বাদ দিলে অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

Sol" মনে করি, দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y।

∴ সংখ্যাটি = 10y + x

১ম শর্তানুসারে, $x + y + 7 = 3y \Rightarrow x + y - 3y = -7$

$\Rightarrow x - 2y = -7$ ..... (i)

২য় শর্তানুসারে, $10y + x - 18 = 10x + y$

$\Rightarrow x + 10y - y - 10x = 18$

$\Rightarrow 9y - 9x = 18 \Rightarrow 9(y - x) = 18 \Rightarrow y - x = \frac{18}{9} = 2$

∴ $y - x = 2$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই, $-y = -5 \quad \therefore y = 5$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x - 2 \times 5 = -7 \Rightarrow x - 10 = -7 \quad \therefore x = 3$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি = $10 \times 5 + 3 = 50 + 3 = 53$

09. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি মূল সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ হয়। সংখ্যাটি কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৭ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]*

Sol" মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি = x এবং দশক স্থানীয় অঙ্কটি = y

∴ সংখ্যাটি = 10y + x

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যা = 10x + y

প্রশ্নমতে, $10x + y = 3y$

$\Rightarrow 10x + y - 3y = 0 \Rightarrow 10x - 2y = 0 \Rightarrow 5x - y = 0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow y = 5x$ ..... (i)

আবার, $x + y = 6$ ..... (ii)

(i) নং হতে প্রাপ্ত y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $x + 5x = 6 \Rightarrow 6x = 6 \quad \therefore x = 1$ [উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করে]

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $y = 5.1 = 5$

∴ সংখ্যাটি = $10.5 + 1 = 50 + 1 = 51$ **(Ans.)**

10. দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার একটি অঙ্ক অপরটি অপেক্ষা 1 বেশি। অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে তা পূর্বের সংখ্যার $\frac{5}{6}$ গুণ হয়। সংখ্যাটি কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৭ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]*

Sol যেহেতু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটির মান কমে। সুতরাং একক স্থানীয় অঙ্কটি ছোট হবে।

মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি = x

∴ দশক স্থানীয় অঙ্কটি = x + 1

∴ সংখ্যাটি = 10(x + 1) + x = 10x + 10 + x = 11x + 10

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যা = 10x + (x + 1) = 10x + x + 1 = 11x + 1

প্রশ্নমতে, $11x + 1 = \frac{5}{6}(11x + 10)$

$\Rightarrow 66x + 6 = 55x + 50$

$\Rightarrow 66x - 55x = 50 - 6$

$\Rightarrow 11x = 44 \quad \Rightarrow x = \frac{44}{11} \quad \therefore x = 4$

∴ সংখ্যাটি = 11x + 10 = 11.4 + 10 = 44 + 10 = 54 **(Ans.)**

11. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা তার অঙ্কদ্বয়ের যোগফলের তিনগুণ। সংখ্যাটিকে 3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল অঙ্ক দুইটির যোগফলের বর্গের সমান হয়। সংখ্যাটি কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৭ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]*

Sol মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্ক = x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক = y

∴ সংখ্যাটি = 10y + x

১ম শর্তানুসারে, $10y + x = 3(x + y)$

$\Rightarrow 10y + x = 3x + 3y$

$\Rightarrow 10y - 3y = 3x - x$

$\Rightarrow 7y = 2x$

$\Rightarrow y = \frac{2x}{7}$ ..... (i)

২য় শর্তানুসারে, $3(10y + x) = (x + y)^2$

$\Rightarrow 3\left(10 . \frac{2x}{7} + x\right) = \left(x + \frac{2x}{7}\right)^2$ $\left[\text{(i) থেকে } y = \frac{2x}{7} \text{ বসিয়ে}\right]$

$\Rightarrow 3\left(\frac{20x}{7} + x\right) = \left(\frac{7x + 2x}{7}\right)^2$

$\Rightarrow 3\left(\frac{20x + 7x}{7}\right) = \left(\frac{9x}{7}\right)^2 \Rightarrow \frac{3.27x}{7} = \frac{81x^2}{49}$

$\Rightarrow \frac{81x}{7} = \frac{81x^2}{49}$

$\Rightarrow x = \frac{x^2}{7}$ $\left[\text{উভয় পক্ষকে } \frac{81}{7} \text{ দ্বারা ভাগ করে}\right]$

$\Rightarrow x^2 = 7x$

$\Rightarrow x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x - 7) = 0$

∴ x = 0 অথবা, $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

এখানে, x = 0 গ্রহণযোগ্য নহে। ∴ x = 7

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $y = \frac{2x}{7} = \frac{2.7}{7} = 2$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি = 10y + x = 10.2 + 7 = 20 + 7 = 27 **(Ans.)**

12. দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 250 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 117. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৯ (অনুশীলনীর অংক নং-০২)]

Sol" মনে করি, সংখ্যাদ্বয় x ও y এবং $x > y$
প্রথম শর্তানুসারে, $x^2 + y^2 = 250$ ..... (i)
দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $xy = 117$ ..... (ii)
আমরা জানি, $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2) - 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (250)^2 - (234)^2$ [মান বসিয়ে]
$= (250 + 234).(250 - 234) = 484.16 = 7744$
$\therefore x^2 - y^2 = \pm 88$
কিন্তু, $x > y$ বলে অন্তর ঋণাত্মক গ্রহণযোগ্য নয়।
অতএব, সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর, $x^2 - y^2 = 88$ ..... (iii)
(i) + (iii) করে পাই, $2x^2 = 338$ বা, $x^2 = 169$ বা, $x = \pm 13$
$\therefore x = 13$ [যেহেতু প্রশ্নে ধনাত্মক সংখ্যার কথা বলেছে]
x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $13^2 + y^2 = 250$
বা, $y^2 = 250 - 169$ বা, $y^2 = 81$
$\therefore y = \pm 9$
$\therefore y = 9$ [যেহেতু প্রশ্নে ধনাত্মক সংখ্যার কথা বলেছে]
$\therefore$ সংখ্যাদ্বয় 13 ও 9 (Ans.)

13. দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 181 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 90. সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৯ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" মনে করি, সংখ্যাদ্বয় x ও y এবং $x > y$
প্রথম শর্তানুসারে, $x^2 + y^2 = 181$ ..... (i)
দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $xy = 90$ ..... (ii)
আমরা জানি, $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2) - 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (181)^2 - (180)^2$ [মান বসিয়ে]
$= (181 + 180).(181 - 180) = 361.1$
$\therefore x^2 - y^2 = \pm 19$
কিন্তু, $x > y$ বলে অন্তর ঋণাত্মক গ্রহণযোগ্য নয়। অতএব, সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর = 19 (Ans.)

TYPE 02 ভগ্নাংশ সম্পর্কিত সমস্যা

01. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরের সঙ্গে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি হয় $\frac{7}{9}$; আবার ঐ ভগ্নাংশের লব ও হর থেকে 3 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির হর $\frac{1}{2}$। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন। [২৪তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$

প্রশ্নমতে, $\frac{x+2}{y+2} = \frac{7}{9} \Rightarrow 9x + 18 = 7y + 14 \Rightarrow 9x - 7y = -4$ ..... (i)

এবং $\frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 6 = y - 3 \Rightarrow 2x - y = 3$

$\Rightarrow 14x - 7y = 21$ [7 দ্বারা গুণ করে]..... (ii)

(ii) – (i) হতে পাই,

$$\begin{array}{r} 14x - 7y = 21 \\ 9x - 7y = -4 \\ \hline (-) \quad (+) \quad (+) \\ \hline 5x \qquad = 25 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{25}{5} = 5$

আবার, $2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি হচ্ছে $\frac{5}{7}$ **Ans.**

02. কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে 5 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-১০)]*

Sol" মনে করি, ভগ্নাংশটির লব = x এবং হর = y

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{y}$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ ..... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $5(x+1) = 4(y+1)$

বা, $5x + 5 = 4y + 4$

$\therefore 5x - 4y + 1 = 0$ ..... (iii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $2(x-5) = y - 5$

বা, $2x - 10 = y - 5$

$\therefore 2x - y - 5 = 0$..... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) এ আড়গুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-4)\times(-5) - 1\times(-1)} = \frac{y}{1\times 2 - 5\times(-5)} = \frac{1}{5\times(-1) - 2\times(-4)}$$

বা, $\frac{x}{20+1} = \frac{y}{2+25} = \frac{1}{-5+8}$ বা, $\frac{x}{21} = \frac{y}{27} = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{x}{21} = \frac{1}{3}$ এবং $\frac{y}{27} = \frac{1}{3}$

বা, $x = \frac{21}{3} = 7$ এবং $y = \frac{27}{3} = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$.

03. কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 1 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-১১)]*

Sol" মনে করি, ভগ্নাংশটির লব = x এবং হর = y

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{y}$

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$

বা, $y + 2 = 2x - 2$ [আড়গুণন করে]

$\therefore y = 2x - 4$ ..... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$

বা, $3x - 21 = y - 2$ [আড়গুণন করে]

$\therefore 3x = y + 19$ ..... (ii)

(ii) নং সমীকরণে y এর মান বসিয়ে পাই, $3x = 2x - 4 + 19$ বা, $3x - 2x = 15$ $\therefore x = 15$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $y = 2 \times 15 - 4 = 30 - 4 = 26$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{15}{26}$

TYPE 03 আয়তক্ষেত্র/ বর্গক্ষেত্র বিষয়ক সমস্যা

01. একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য 3 মিটার বাড়ালে এবং প্রস্থ 3 মিটার কমালে ক্ষেত্রফল 12 বর্গমিটার কমে যায়। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার এবং প্রস্থ 3 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল 54 বর্গমিটার বাড়ে। [৩৬তম বিসিএস]

(ক) তথ্যগুলোকে বীজগাণিতিক সমীকরণরূপে প্রকাশ করুন।

Sol" মনে করি,
আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = x মিটার
" প্রস্থ = y মিটার
∴ ক্ষেত্রফল = xy বর্গ মিটার
শর্তানুযায়ী, $(x+3)(y-3) = xy - 12$ ..... (i)
$(x+3)(y+3) = xy + 54$ ..... (ii)

(খ) আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

Sol" (i) নং হতে পাই, $(x+3)(y-3) = xy - 12 \Rightarrow xy + 3y - 3x - 9 = xy - 12$
$\Rightarrow 3(y-x) = -3 \Rightarrow y - x = -1 \Rightarrow x - y = 1$
$\therefore x = y + 1$ ..... (iii)

(ii) নং হতে পাই, $(x+3)(y+3) = xy + 54 \Rightarrow xy + 3x + 3y + 9 = xy + 54 \Rightarrow 3(x+y) = 45$
$\therefore x + y = 15 \Rightarrow y + 1 + y = 15$ [x = y + 1 মান বসিয়ে] $\Rightarrow y = 7$
y এর মান (iii) নং সমীকরণ বসিয়ে পাই, $x = 7 + 1$
$\therefore x = 8$
∴ দৈর্ঘ্য 8 মিটার এবং প্রস্থ 7 মিটার। **(উত্তর)**

02. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা ৩০ সে.মি.। উহার ক্ষেত্রফল ৫০ বর্গ সে.মি. হলে আয়তক্ষেত্রেটির দৈর্ঘ্য কত হবে? [১৩তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x সে.মি. এবং প্রস্থ y সে.মি.
১ম শর্তানুসারে, $2(x+y) = 30$ বা, $x + y = 15$ ..... (i)
২য় শর্তানুসারে, $xy = 50$ ..... (ii)
আমরা জানি, $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ [(i) ও (ii) হতে পাই]
$= (15)^2 - 4 \times 50 = 225 - 200 = 25$
$\therefore x - y = \pm 5$ ..... (iii)
(i) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$\begin{array}{r} x+y=15 \\ x-y=5 \\ \hline 2x=20 \end{array}$$

$\therefore x = 10$
x এর মান (i) নং এ বসাই, $10 + y = 15$ বা, $y = 5$
∴ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি.।

বিকল্প:
দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ৫০ বর্গ সে.মি.
মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x সে.মি.
$\therefore$ " প্রস্থ $= \frac{৫০}{x}$ সে.মি.
$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = ২ (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) $= ২\left(x + \frac{৫০}{x}\right)$ সে.মি.

প্রশ্নমতে, $২\left(x+\frac{৫০}{x}\right)=৩০$

$\Rightarrow x+\frac{৫০}{x}=১৫$

$\Rightarrow \frac{x^2+৫০}{x}=১৫$

$\Rightarrow x^2-১৫x+৫০=০$

$\Rightarrow x^2-৫x-১০x+৫০=০$

$\Rightarrow x(x-৫)-১০x+৫০=০ \quad \Rightarrow x(x-৫)-১০(x-৫)=০$

$\Rightarrow (x-৫)(x-১০)=০$

$\Rightarrow (x-৫)=০$ অথবা, $x-১০=০$

$\therefore x=৫ \quad \therefore x=১০$

$x=৫$ হলে, প্রস্থ $=\frac{৫০}{৫}=১০$ সে.মি.

আবার, $x=১০$ হলে, প্রস্থ $=\frac{৫০}{১০}=৫$ সে.মি.

কিন্তু প্রস্থ দৈর্ঘ্যের চেয়ে বেশি হতে পারে না। তাই $x=৫$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $x=১০$ সে.মি.

উত্তর : ১০ সে.মি.।

03. একটি আয়তাকার বাগানের প্রস্থের দ্বিগুণ, দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি এবং বাগানটির পরিসীমা 100 মিটার। বাগানটির সীমানার বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া রাস্তা আছে। রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রতি বর্গ মিটারে 110 টাকা খরচ হয়।

ক) বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

খ) বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ) রাস্তাটি ইট দিয়ে তৈরি করতে মোট কত খরচ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (উদাহরণের অংক নং-১৪)]

Sol" ক) আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ ১ম শর্তানুসারে, $2y=x+10$ ..... (i)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $2(x+y)=100$ ..... (ii)

খ) সমীকরণ (ii) হতে পাই, $2x+2y=100$

বা, $2x+x+10=100$ [(i) হতে $2y$ এর মান বসিয়ে]

বা, $3x=90$ বা, $x=30$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $2y=30+10$ [x এর মান বসিয়ে]

বা, $2y=40$ বা, $y=20$

$\therefore$ বাগানটির দৈর্ঘ্য 30 মিটার ও প্রস্থ 20 মিটার।

গ) রাস্তাসহ বাগানের দৈর্ঘ্য $=(30+4)$ মি. $=34$ মি.

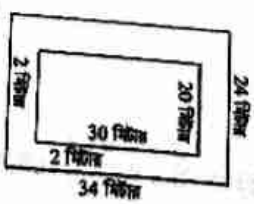
এবং রাস্তাসহ বাগানের প্রস্থ $=(20+4)$ মি. $=24$ মি.

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল – বাগানের ক্ষেত্রফল

$=(34\times24-30\times20)$ বর্গমিটা

$=(816-600)$ বর্গমিটার।

$=216$ বর্গমিটার।



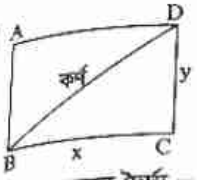
$\therefore$ ইট দিয়ে রাস্তা তৈরি করার খরচ

$=(216\times110)$ টাকা $=23760$ টাকা

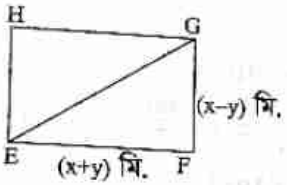
৬. একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 মিটার। ইহার বাহুদ্বয়ের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহুদ্বয় দ্বারা অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 28 বর্গমিটার হলে, প্রথম আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol"



মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার
" প্রস্থ = y মিটার
এবং
প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 10^2$
$\therefore x^2 + y^2 = 100$ ..... (i)
আবার, দ্বিতীয় আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য (x + y) মিটার
প্রস্থ (x – y) মিটার
প্রশ্নমতে, $(x + y)(x - y) = 28$
$\therefore x^2 - y^2 = 28$ ..... (ii)



(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$x^2 + y^2 = 100$
$x^2 - y^2 = 28$
$2x^2 = 128$
$x^2 = 64$
$\therefore x = \pm 8$
$\therefore x = 8$ [দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $8^2 + y^2 = 100$
বা, $y^2 = 100 - 64$ বা, $y^2 = 36$
$\therefore y = \pm 6$
$\therefore y = 6$ [প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না]
∴ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 8 মিটার এবং প্রস্থ 6 মিটার। (Ans.)

৫. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম এবং প্রস্থ 3 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হবে। আবার দৈর্ঘ্য 3 মিটার বেশি ও প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" ধরি, দৈর্ঘ্য = x মি. এবং প্রস্থ = y মি.
∴ ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার
শর্তানুযায়ী, $(x - 5)(y + 3) = xy - 9$ বা, $xy + 3x - 5y - 15 = xy - 9$ বা, $3x - 5y = 6$ ..... (i)
আবার, $(x + 3)(y + 2) = xy + 67$ বা, $xy + 2x + 3y + 6 = xy + 67$ বা, $2x + 3y = 61$ ..... (ii)
(i) কে 3 দ্বারা ও (ii) কে 5 দ্বারা গুণ করে পাই,

$9x - 15y = 18$
$10x + 15y = 305$
যোগ করে, $19x = 323$

বা, $x = \frac{323}{19}$ $\therefore x = 17$ মি.

(ii) থেকে পাই, $3y = 61 - 2x$
বা, $3y = 61 - 2 \times 17$ [x এর মান বসিয়ে] বা, $3y = 61 - 34$
$\therefore y = \frac{27}{3} = 9$ মি. ∴ ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 17 মি. ও প্রস্থ 9 মি.।

06. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার অধিক হলে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। আবার দৈর্ঘ্য 5 মিটার অধিক ও প্রস্থ 2 মিটার কম হলেও ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। আয়তটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮. ৭ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার

∴ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার

দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার অধিক হলে ক্ষেত্রফল = $(x-5)(y+3)$ বর্গমিটার $= (xy + 3x - 5y - 15)$ বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $xy + 3x - 5y - 15 = xy$

$\Rightarrow 3x - 5y = 15$ ..... (i)

আবার, দৈর্ঘ্য 5 মিটার অধিক ও প্রস্থ 2 মিটার কম হলে ক্ষেত্রফল হয় $= (x+5)(y-2)$ বর্গমিটার

$= (xy - 2x + 5y - 10)$ বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $xy - 2x + 5y - 10 = xy$

$\Rightarrow -2x + 5y = 10$ ..... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে,

$$\begin{array}{r} 3x - 5y = 15 \\ -2x + 5y = 10 \\ \hline x = 25 \end{array}$$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $-2.25 + 5y = 10$

$\Rightarrow 5y = 10 + 50 \quad \Rightarrow 5y = 60 \quad \Rightarrow y = \frac{60}{5} \quad \therefore y = 12$

∴ ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 25 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার। **(Ans.)**

07. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ অপেক্ষা যথাক্রমে 4 মিটার এবং 1 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার। প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol" মনে করি, প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার এবং প্রস্থ = y মিটার

∴ দ্বিতীয় আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $(x+4)$ মিটার

এবং প্রস্থ $= (y+1)$ মিটার

আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $xy = 24$ ..... (i)

এবং $(x+4)(y+1) = 50$ ..... (ii)

(i) নং থেকে পাই, $y = \frac{24}{x}$ ..... (iii)

(ii) নং সমীকরণে $y = \frac{24}{x}$ বসিয়ে পাই, $(x+4)\left(\frac{24}{x}+1\right) = 50$ বা, $24 + x + \frac{96}{x} + 4 = 50$

বা, $\frac{24x + x^2 + 96 + 4x}{x} = 50$ বা, $x^2 + 28x + 96 = 50x$ বা, $x^2 + 28x - 50x + 96 = 0$

বা, $x^2 - 22x + 96 = 0$ বা, $x^2 - 16x - 6x + 96 = 0$ বা, $x(x-16) - 6(x-16) = 0$

∴ $(x-6)(x-16) = 0$

হয়, $x - 6 = 0$ অথবা, $x - 16 = 0$

∴ $x = 6$ ∴ $x = 16$

এখন, (iii) নং সমীকরণ $y = \frac{24}{x}$ হতে পাই, $x = 6$ হলে, $y = \frac{24}{6} = 4$

$x = 16$ হলে, $y = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

∴ দৈর্ঘ্য 6 মি এবং প্রস্থ 4 মি. অথবা, দৈর্ঘ্য 16 মি. এবং প্রস্থ $1\frac{1}{2}$ মি. **(Ans.)**

08. একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 23 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]*

Sol" ধরি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার ও প্রস্থ = y মিটার

আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) বর্গ একক = xy বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $xy = 600$ ..... (i)

এবং $2y = x + 23$ ..... (ii)

(ii) নং থেকে পাই, $y = \frac{x+23}{2}$ ..... (iii)

এখন, (i) নং সমীকরণে $y = \frac{x+23}{2}$ বসিয়ে পাই, $x \times \left(\frac{x+23}{2}\right) = 600$ বা, $\frac{x^2+23x}{2} = 600$

বা, $x^2 + 23x = 1200$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 + 23x - 1200 = 0$ বা, $x^2 + 48x - 25x - 1200 = 0$ বা, $x(x+48) - 25(x+48) = 0$

বা, $(x+48)(x-25) = 0$

হয়, $x + 48 = 0$ অথবা, $x - 25 = 0$

$\therefore x = -48$ $\therefore x = 25$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x = 25$

x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই, $y = \frac{25+23}{2} = \frac{48}{2} = 24$

∴ দৈর্ঘ্য 25 মিটার এবং প্রস্থ 24 মিটার। (Ans.)

09. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol" ধরি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার এবং প্রস্থ = y মিটার ∴ $x > y$

আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{x^2+y^2}$ মি.

[আয়তক্ষেত্রের উভয় কর্ণের দৈর্ঘ্য সমান।]

∴ কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি = $2\sqrt{x^2+y^2}$ মি.

পরিসীমা = $2(x+y)$ মি.

ক্ষেত্রফল = xy বর্গ. মি.

প্রশ্নমতে, $xy = 48$ ..... (i)

এবং $2(x+y) = 2\sqrt{x^2+y^2} + 8$ ..... (ii)

এখন, (ii) নং হতে পাই, $2(x+y) = 2\sqrt{x^2+y^2} + 8$

বা, $x + y = \sqrt{x^2+y^2} + 4$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x + y - 4 = \sqrt{x^2+y^2}$

বা, $(x+y-4)^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + y^2 + (-4)^2 + 2xy + 2y(-4) + 2(-4)x = x^2 + y^2$

বা, $x^2 + y^2 + 16 + 2xy - 8y - 8x - x^2 - y^2 = 0$

বা, $16 + 2xy - 8x - 8y = 0$

বা, $16 + 2 \times 48 - 8x - 8y = 0$ [$\because xy = 48$]

বা, $16 + 96 - 8x - 8y = 0$

বা, $112 - 8x - 8y = 0$

বা, $8(x+y) = 112$

বা, $x + y = \frac{112}{8}$ [উভয়পক্ষকে (8) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x + y = 14$

$\therefore x = 14 - y$ ..... (iii)

(i) নং সমীকরণে $x = 14 - y$ বসিয়ে পাই, $(14 - y)y = 48$

বা, $14y - y^2 - 48 = 0$

বা, $-(y^2 - 14y + 48) = 0$

বা, $y^2 - 14y + 48 = 0$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $y^2 - 8y - 6y + 48 = 0$

বা, $y(y - 8) - 6(y - 8) = 0$

$\therefore (y - 8)(y - 6) = 0$

হয়, $y - 8 = 0$ অথবা, $y - 6 = 0$

$\therefore y = 8$ $\therefore y = 6$

(iii) নং সমীকরণে y এর মান বসিয়ে পাই,

$y = 8$ হলে, $x = 14 - 8 = 6$

$y = 6$ হলে, $x = 14 - 6 = 8$

$\because$ x দৈর্ঘ্য এবং y প্রস্থ এবং দৈর্ঘ্য > প্রস্থ।

$\because y = 8$ এবং $x = 6$ গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং, $x = 8, y = 6$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য 8 মিটার ও প্রস্থ 6 মিটার। (Ans.)

10. একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং কর্ণ 20 মিটার। ঐ বাগানের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]*

Sol ধরি, আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য = x মিটার এবং প্রস্থ = y = মিটার

$\therefore$ আয়তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার।

এবং বাগানের পরিসীমা = $2(x + y)$ মিটার।

প্রশ্নমতে, $2(x + y) = 56$

বা, $x + y = \frac{56}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x + y = 28$ ..... (i)

আমরা জানি, আয়তাকার বাগানের, (কর্ণের দৈর্ঘ্য)^2 = (দৈর্ঘ্য)^2 + (প্রস্থ)^2

বা, $(20)^2 = x^2 + y^2$ বা, $400 = x^2 + y^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 400$ ..... (ii)

আবার, আমরা জানি, $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

বা, $(28)^2 = 400 + 2xy$ বা, $784 = 400 + 2xy$ বা, $2xy = 784 - 400$

বা, $2xy = 384$ বা, $xy = \frac{384}{2}$

$\therefore xy = 192$ ..... (iii)

আয়তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = 192 বর্গমিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 192 বর্গমিটার

ধরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ মি.

প্রশ্নমতে, $x^2 = 192$ বা, $(x)^2 = (8\sqrt{3})^2$ $\therefore x = 8\sqrt{3}$

অর্থাৎ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $8\sqrt{3}$ মিটার। (Ans.)

11. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার এবং এর অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]*

Sol' মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার এবং প্রস্থ = y মিটার

$\therefore x > y$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার

অর্ধপরিসীমা $= \frac{2x + 2y}{2}$ মিটার = (x + y) মিটার

আবার, আয়তক্ষেত্রের কর্ণ $= \sqrt{x^2 + y^2}$ মিটার

প্রশ্নমতে, $xy = 300$ ..... (i) এবং $x + y = \sqrt{x^2 + y^2} + 10$ ..... (ii)

(ii) নং থেকে পাই, $x + y - 10 = \sqrt{x^2 + y^2}$

বা, $(x + y - 10)^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + y^2 + 100 + 2xy - 20x - 20y = x^2 + y^2$

বা, $2xy - 20x - 20y = x^2 + y^2 - x^2 - y^2 - 100$

বা, $2 \times 300 - 20x - 20y = -100$ [$\because$ (i) হতে $xy = 300$]

বা, $600 - 20x - 20y = -100$

বা, $-20x - 20y = -100 - 600$

বা, $-20(x + y) = -700$

বা, $x + y = 35$ [উভয়পক্ষকে (–20) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x + y = 35$ ..... (iii)

এখন, আমরা জানি,

$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 35^2 - 4 \times 300 = 1225 - 1200 = 25 = (5)^2$

$\therefore x - y = 5$ ..... (iv) [$\because x > y$, অর্থাৎ $x - y > 0$]

সমীকরণ (iii) নং ও (iv) নং যোগ করে পাই, $x + y + x - y = 35 + 5$

বা, $2x = 40$ বা, $x = \frac{40}{2}$ $\therefore x = 20$

সমীকরণ (iii) নং হতে (iv) নং বিয়োগ করে পাই, $x + y - (x - y) = 35 - 5$

বা, $x + y - x + y = 35 - 5$ বা, $2y = 30$ বা, $y = \frac{30}{2}$ $\therefore y = 15$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 20 মিটার এবং প্রস্থ 15 মিটার। (Ans.)

12. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 মিটার কম। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (উদাহরণের অংক নং-২৫)]*

Sol' মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = y মিটার

প্রশ্নমতে, $2y = x + 10$ ..... (1)

$xy = 600$ .....(2)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y = \frac{10 + x}{2}$

সমীকরণ (2) এ y এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{x(10 + x)}{2} = 600$ বা, $\frac{10x + x^2}{2} = 600$ বা, $x^2 + 10x = 1200$

বা, $x^2 + 10x - 1200 = 0$ বা, $(x + 40)(x - 30) = 0$

সুতরাং, $x = 40 = 0$ বা, $x - 30 = 0$

অর্থাৎ, $x = -40$ বা, $x = 30$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore x = 30$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 30 মিটার।

13. দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 650 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 323 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-৫.৫ (উদাহরণের অংক নং-৩)]*

Sol" মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার এবং অপরটির বাহুর দৈর্ঘ্য y মিটার।

প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 650$ ..... (1)

এবং $xy = 323$.....(2)

$\therefore (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 650 + 2 \times 323 = 650 + 646 = 1296$

অর্থাৎ, $(x+y) = \pm\sqrt{1296} = \pm 36$

এবং, $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 650 + 2 \times 323 = 650 - 646 = 4$

অর্থাৎ $(x-y) = \pm 2$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ধনাত্মক, সেহেতু $x+y$ এর মান ধনাত্মক হতে হবে।

$\therefore (x+y) = 36$ ..... (3)

এবং $(x-y) = \pm 2$ ..... (4)

যোগ করে, $2x = 36 \pm 2$

$\therefore x = \frac{36 \pm 2}{2} = 18 \pm 1 = 19$ বা, 17

সমীকরণ (3) থেকে পাই, $y = 36 - x = 17$ বা, 19।

$\therefore$ একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 19 মিটার এবং অপর বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 17 মিটার।

14. দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 481 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 240 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৯ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Sol" মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার এবং অপর বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য y মিটার

প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 481$ ..... (i)

এবং $xy = 240$ ..... (ii)

জানা আছে, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 481 + 2.240 = 481 + 480 = 961$

$\therefore \quad x + y = \pm 31$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। সুতরাং $x+y$ ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore \quad x + y = 31$ ..... (i)

আবার, $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 481 - 2.240 = 481 - 480 = 1$

$\therefore \quad x - y = \pm 1$ ..... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে,

$$\begin{array}{r} x + y = 31 \\ \underline{x - y = \pm 1} \\ 2x = 31 \pm 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{31 \pm 1}{2} = 16$ অথবা 15

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$16 + y = 31$; যখন, $x = 16$

$\Rightarrow \quad y = 31 - 16 \quad \therefore y = 15$

আবার, $15 + y = 31$; যখন, $x = 15$

$\Rightarrow \quad y = 31 - 15 \quad \therefore y = 16$

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র দুটির বাহুর পরিমাণ 16 মিটার এবং 15 মিটার **(Ans.)**

TYPE 04 পিতা/ পুত্রের বয়স বিষয়ক সমস্যা

01. আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (উদাহরণের অংক নং-১৩)]*

Sol" মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর ও পুত্রের বয়স y বছর।

∴ ১ম শর্তানুসারে, $x - 8 = 8(y - 8)$ ..... (i)

এবং ২য় শর্তানুসারে, $x + 10 = 2(y + 10)$ ..... (ii)

(i) হতে পাই, $x - 8 = 8y - 64$

বা, $x = 8y - 64 + 8$

বা, $x = 8y - 56$ ..... (iii)

(ii) হতে পাই, $x + 10 = 2y + 20$

বা, $8y - 56 + 10 = 2y + 20$ [(iii) হতে x এর মান বসিয়ে]

বা, $8y - 2y = 20 + 56 - 10$

বা, $6y = 66$

বা, $y = 11$

(iii) হতে পাই, $x = 8 \times 11 - 56 = 88 - 56 = 32$

∴ বর্তমানে পিতার বয়স 32 বছর ও পুত্রের বয়স 11 বছর।

02. আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৭ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol" মনে করি, বর্তমানে পিতার বয়স x বছর এবং বর্তমানে পুত্রের বয়স y বছর

তাহলে, 8 বছর পূর্বে, পিতার বয়স ছিল $(x - 8)$ বছর এবং পুত্রের বয়স ছিল $(y - 8)$ বছর

প্রশ্নমতে, $x - 8 = 8(y - 8)$

$\Rightarrow x - 8 = 8y - 64 \quad \Rightarrow x - 8y = -64 + 8 \quad \Rightarrow x - 8y = -56$

$\Rightarrow x = 8y - 56$ ..... (i)

আবার, 10 বছর পরে, পিতার বয়স হবে $(x + 10)$ বছর এবং পুত্রের বয়স হবে $(y + 10)$ বছর

প্রশ্নমতে, $x + 10 = 2(y + 10)$

$\Rightarrow x + 10 = 2y + 20 \quad \Rightarrow x - 2y = 20 - 10 \quad \Rightarrow x - 2y = 10$

$\Rightarrow 8y - 56 - 2y = 10$ [(i) নং হতে প্রাপ্ত x এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 6y = 66$

$\Rightarrow y = 11$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x = 8.11 - 56 = 88 - 56 = 32 \quad \therefore x = 32$

∴ পিতার বর্তমান বয়স 32 বছর, পুত্রের বর্তমান বয়স 11 বছর। **(Ans.)**

03. পিতার বর্তমান বয়স তার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টির পাঁচগুণ। 10 বছর পরে পিতার বয়স ঐ দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। পিতার বর্তমান বয়স কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৭ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]*

Sol" মনে করি, বর্তমানে দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টি = x বছর

∴ বর্তমানে পিতার বয়স = 5x বছর

10 বছর পর পিতার বয়স হবে = $(5x + 10)$ বছর

এবং 10 বছর পর ঐ দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টি হবে = $(x + 10 + 10)$ বছর = $(x + 20)$ বছর

প্রশ্নমতে, $5x + 10 = 2(x + 20)$

$\Rightarrow 5x + 10 = 2x + 40 \quad \Rightarrow 5x - 2x = 40 - 10 \quad \Rightarrow 3x = 30$

$\Rightarrow x = \frac{30}{3} \quad \therefore x = 10$

∴ বর্তমানে পিতার বয়স = 5×10 বছর = 50 বছর **(Ans.)**

04. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি y বছর এবং অন্তর 22 বছর। 12 বছর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। y এর মান কত? পুত্রের বর্তমান বয়স কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮. ৭ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol: মনে করি, পুত্রের বর্তমান বয়স = x বছর

∴ পিতার বর্তমান বয়স = (x + 22) বছর

প্রশ্নানুরে, $y = x + x + 22 \Rightarrow y = 2x + 22$ ..... (i)

আবার, 12 বছর পর পিতার বয়স হবে = (x + 22 + 12) বছর = (x + 34) বছর

12 বছর পর পুত্রের বয়স হবে = (x + 12) বছর

প্রশ্নমতে, $2(x + 12) = x + 34 \Rightarrow 2x + 24 = x + 34 \Rightarrow 2x - x = 34 - 24 \quad \therefore x = 10$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $y = 2.10 + 22 \Rightarrow y = 20 + 22 \quad \therefore y = 42$

∴ y এর মান 42 এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 10 বছর **(Ans.)**

TYPE 05 Miscellaneous

01. একজন শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতি বছর শেষে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ বেতন বৃদ্ধি পায়। তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4780 টাকা এবং 7 বছর পর 5140 টাকা হয়। 12 বছর পর তার মাসিক বেতন কত হবে তাহা বের করুন।

[৩৫তম বিসিএস]

Sol: মনে করি,

শ্রমিকের শুরুকালীন বেতন x টাকা এবং প্রতি বছরের বৃদ্ধি অংশ y টাকা

∴ $x + 4y = 4780$ ..... (i)

$x + 7y = 5140$ ..... (ii)

(i) – (ii) হতে পাই, $-3y = -360 \Rightarrow y = 120$

(i) নং এ y এর মান বসিয়ে পাই, $x + 480 = 4780$

$\Rightarrow x = 4780 - 480$

$\Rightarrow x = 4300$ টাকা

∴ 12 বছর পরে তার বেতন হবে-

$x + 12y = 4300 + 12 \times 120$ টাকা $= 4300 + 1440$ টাকা $= 5740$ টাকা

Ans: 5740 টাকা

বিকল্প:

(7 – 4) বা 3 বছরে বেতন বৃদ্ধি পাবে (5140 – 4780) বা 360 টাকা

∴ 1 " " " " $\frac{360}{3}$ টাকা = 120 টাকা

অতএব, (12 – 7) বা 5 বছরে বেতন বৃদ্ধি পাবে (120 × 5) টাকা = 600 টাকা

তাহলে, 12 বছর শেষে তার মাসিক বেতন হবে (5140 + 600) টাকা = 5740 টাকা

Ans: 5740 টাকা

02. ১০০ টাকায় ৪টি কমলা এবং ১২টি আপেল ক্রয় করা যায় অথবা ১০টি কমলা এবং ৫টি আপেল ক্রয় করা যায়। একটি কমলার মূল্য এবং একটি আপেলের মূল্য নির্ণয় করুন।

[২৭তম বিসিএস]

Sol: মনে করি, একটি কমলার মূল্য = x টাকা

আপেলের মূল্য = y টাকা

১ম শর্তানুসারে, $8x + 12y = 100$ ..... (i)

২য় শর্তানুসারে, $10x + 5y = 100$ ..... (ii)

$[(i) \times 10 - (ii) \times 8] \Rightarrow 100y = 600 \Rightarrow y = 6$ টাকা

(i) হতে পাই, $8x + 12 \times 6 = 100 \Rightarrow 8x + 72 = 100 \quad \therefore x = 7$

উত্তর: আপেলের মূল্য ৬ টাকা, কমলার মূল্য ৭ টাকা।

03. এক রসায়নবিদের নিকট একই এসিডের দুইটি দ্রবণ আছে, যার একটিতে এসিডের পরিমাণ 15% এবং অপরটিতে 25%। 21% এসিডবিশিষ্ট 120 সি.সি. দ্রবণ তৈরি করার জন্য প্রতিটি দ্রবণের কত সি.সি. মিশাতে হবে, নির্ণয় করুন। [২৭তম বিসিএস]

Sol ধরি, ১ম দ্রবণ হতে গৃহীত হয় = x সি.সি.
২য় " " " " = y সি.সি.

$\therefore x + y = 120$ ..... (i)

এখন, ১ম দ্রবণে,
100 সিসির মধ্যে এসিড = 15 সিসি
$\therefore$ 1 " " " $= \frac{15}{100}$ সিসি
$\therefore$ x " " " $= \frac{15 \times x}{100}$ সিসি $= \frac{3x}{20}$ সিসি

আবার, ২য় দ্রবণে,
100 সিসির মধ্যে এসিড = 25 সিসি
$\therefore$ 1 " " " $= \frac{25}{100}$ সিসি
$\therefore$ y " " " $= \frac{25 \times y}{100}$ সিসি $= \frac{y}{4}$ সিসি

নির্ণেয় দ্রবণে, 100 সিসির মধ্যে এসিড = 21 সিসি
$\therefore$ 120 " " " $= \frac{120 \times 21}{100}$ সিসি = 25.2 সিসি

শর্তানুসারে, $\frac{3x}{20} + \frac{y}{4} = 25.2 \Rightarrow \frac{3x + 5y}{20} = 25.2 \Rightarrow 3x + 5y = 504$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণের সাথে 3 গুণ করে (ii) নং সমীকরণ হতে বিয়োগ করলে,
$3x + 5y = 504$ ..... (ii)
$3x + 3y = 360$ ..... (ii)

(বিয়োগ) $2y = 144 \Rightarrow y = \frac{144}{2} = 72$

$\therefore x = (120 - 72) = 48$
$\therefore$ নির্ণেয় ১ম দ্রবণ হতে নিতে হবে 48 সিসি এবং এবং ২য় দ্রবণ হতে নিতে হবে 72 সিসি। (উত্তর)

04. ক, খ ও গ এর মধ্যে ১১০০ টাকা এমনভাবে ভাগ করে দেওয়া হল যেন খ ও গ একত্রে যত টাকা পেল ক একা উক্ত টাকার $\frac{৩}{৭}$ অংশ পেল। আবার, ক ও গ একত্রে যত টাকা পেল খ একা উক্ত টাকার $\frac{২}{৯}$ অংশ পেল। কে কত টাকা পেল? [১০তম বিসিএস]

Sol ধরি, খ ও গ একত্রে x টাকা ও ক গ একত্রে y টাকা পেল।

$\therefore$ ক পায় $= \frac{৩x}{৭}$ টাকা এবং খ পায় $= \frac{২y}{৯}$ টাকা

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\frac{৩x}{৭} + x = ১১০০$ বা, $১০x = ১১০০ \times ৭$ বা, $x = ৭৭০$ টাকা

এবং $\frac{২y}{৯} + y = ১১০০$ বা, $১১y = ৯ \times ১১০০$ বা, $y = ৯০০$ টাকা

$\therefore$ ক একা পায় $= \frac{৩ \times ৭৭০}{৭} = ৩৩০$ টাকা

" খ " $= \frac{২ \times ৯০০}{৯} = ২০০$

" গ " $= ১১০০ - (৩৩০ + ২০০) = ৫৭০$ টাকা

উত্তর : ক পায় ৩৩০ টাকা; খ পায় ২০০ টাকা; গ পায় ৫৭০ টাকা।

05. দুইটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা 17 এবং এদের কর্ণের সংখ্যা 53 হলে প্রত্যেক বহুভুজের বাহুর সংখ্যা কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol ধরি, দুইটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা যথাক্রমে x এবং y

∴ দুইটি বহুভুজের কর্ণের সংখ্যা যথাক্রমে $\frac{1}{2}x(x-3)$ এবং $\frac{1}{2}y(y-3)$

[n সংখ্যক বাহু দ্বারা আবদ্ধ বহুভুজ হতে প্রাপ্ত কর্ণ সংখ্যা $= {}^nC_2 - n$

$$= \frac{n(n-1)}{2!} - n = \frac{(n^2-n)-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}]$$

প্রথম শর্তমতে, $x + y = 17$

বা, $y = 17 - x$ ..... (i)

দ্বিতীয় শর্তমতে, $\frac{1}{2}x(x-3) + \frac{1}{2}y(y-3) = 53$ ..... (ii)

(ii) নং হতে পাই, $x(x-3) + y(y-3) = 106$

বা, $x^2 - 3x + y^2 - 3y = 106$

বা, $x^2 - 3x + (17-x)^2 - 3(17-x) = 106$ [$y = (17-x)$ বসিয়ে]

বা, $x^2 - 3x + (17)^2 - 2.17.x + x^2 - 51 + 3x = 106$

বা, $x^2 - 3x + 289 - 34x + x^2 - 51 + 3x = 106$

বা, $2x^2 - 34x + 238 - 106 = 0$

বা, $2x^2 - 34x + 132 = 0$

বা, $2(x^2 - 17x + 66) = 0$

বা, $x^2 - 17x + 66 = 0$

বা, $x^2 - 11x - 6x + 66 = 0$

বা, $x(x-11) - 6(x-11) = 0$

বা, $(x-11)(x-6) = 0$

হয়, $x - 11 = 0$

বা, $x = 11$

অথবা, $x - 6 = 0$

বা, $x = 6$

(i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$x = 11$ হলে, $y = 17 - 11 = 6$

$x = 6$ হলে, $y = 17 - 6 = 11$

∴ বহুভুজদ্বয়ের বাহুর সংখ্যা 11টি ও 6টি।

06. একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতি বছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতনবৃদ্ধি পান। তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4500 টাকা ও 8 বছর পরে 5000 টাকা হয়। তাঁর চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol" মনে করি, ঐ শ্রমিক x টাকা বেতনে চাকরি শুরু করেন এবং তার বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি y টাকা।

প্রথম শর্তানুসারে, $x + 4y = 4500$ ..... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $x + 8y = 5000$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই, $8y - 4y = 5000 - 4500$

বা, $4y = 500$

বা, $y = \frac{500}{4} = 125$

সমীকরণ (i) এ $y = 125$ বসিয়ে পাই, $x + 4 \times 125 = 4500$

বা, $x + 500 = 4500$

বা, $x = 4500 - 500$

বা, $x = 4000$

∴ ঐ শ্রমিকের চাকরি শুরুর বেতন 4000 টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি 125 টাকা।

07. একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘন্টায় 15 কি.মি. যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘন্টায় 5 কি.মি.। নৌকার বেগ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" মনে করি, ঘন্টায় নৌকার বেগ x কি.মি.

এবং ঘন্টায় স্রোতের বেগ y কি.মি.

তাহলে, ঘন্টায় স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ = $(x + y)$ কি.মি.

ঘন্টায় স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ = $(x - y)$ কি.মি.

প্রথম শর্তানুসারে, $x + y = 15$ ..... (ii)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $x - y = 5$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই, $x + y - x + y = 15 - 5$ বা, $2y = 10$

$\therefore y = \frac{10}{2} = 5$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x + 5 = 15$ বা, $x = 15 - 5$

$\therefore x = 10$

∴ নৌকার বেগ ঘন্টায় 10 কি.মি.

08. 100 ও 200 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেন সমবেগে সামনা সামনি অতিক্রম করতে 5 সেকেন্ড সময় লাগে কিন্তু একই দিকে চললে অতিক্রম করতে 15 সেকেন্ড সময় লাগে। ট্রেন দুইটির বেগ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol" ধরি, ১ম ও ২য় ট্রেনের বেগ যথাক্রমে x ও y (যেখানে $x > y$)

১ম শর্তমতে, $5(x + y) = 100 + 200$ বা, $x + y = \frac{300}{5}$

$\therefore x + y = 60$ ..... (i)

২য় শর্তমতে, $15(x - y) = 100 + 200$ বা, $x - y = \frac{300}{15}$

$\therefore x - y = 20$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii)নং যোগ করে পাই, $x + y + x - y = 60 + 20$

বা, $2x = 80$ বা, $x = \frac{80}{2}$ $\therefore x = 40$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $40 + y = 60$ বা, $y = 60 - 40$ $\therefore y = 20$

অতএব, ট্রেন দুইটির বেগ 40 মি./সে. এবং 20 মি./সে.।

09. শিক্ষক বললেন একটি কাজ একা অথবা ছাত্র-ছাত্রীর জুটি করতে পারবে। ছাত্রদের $\frac{2}{3}$ অংশ এবং ছাত্রীদের $\frac{3}{5}$ অংশ জুটি বেঁধে কাজটি করলো। শ্রেণির কতভাগ ছাত্রছাত্রী একা কাজটি করলো? [৪৩তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১২.৪ (অনুশীলনীর অংক নং-২)]

Sol" ধরি, মোট ছাত্র সংখ্যা x জন এবং মোট ছাত্রী সংখ্যা y জন

∴ জুটি বেঁধে কাজ করলো ছাত্রদের $= \left(x \times \frac{2}{3}\right)$ জন $= \frac{2x}{3}$ জন

জুটি বেঁধে কাজ করলো ছাত্রীদের $= \left(y \times \frac{3}{5}\right)$ জন $= \frac{3y}{5}$ জন

একা কাজ করলো ছাত্রদের $= \left(x - \frac{2x}{3}\right)$ জন $= \frac{3x - 2x}{3}$ জন $= \frac{x}{3}$ জন

একা কাজ করলো ছাত্রীদের $= \left(y - \frac{3y}{5}\right)$ জন $= \frac{5y - 3y}{5}$ জন $= \frac{2y}{5}$ জন

শর্তমতে, $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{5}$ [যেহেতু জুটি বাঁধতে একজন ছেলে ও একজন মেয়ে লাগে, তাই জুটি বাঁধা মোট ছাত্র ও ছাত্রীর সংখ্যা সমান]

বা, $9y = 10x$

$\therefore y = \frac{10x}{9}$

একা কাজটি করলো ছাত্র-ছাত্রীদের $= \frac{\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}}{x + y} = \frac{\frac{x}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{10x}{9}}{x + \frac{10x}{9}}$ অংশ $= \frac{\frac{x}{3} + \frac{4x}{9}}{x + \frac{10x}{9}}$ অংশ

$= \frac{\frac{3x + 4x}{9}}{\frac{9x + 10x}{9}}$ অংশ $= \frac{\frac{7x}{9}}{\frac{19x}{9}}$ অংশ

$= \frac{7x}{9} \times \frac{9}{19x}$ অংশ $= \frac{7}{19}$ অংশ

∴ শ্রেণির $\frac{7}{19}$ ভাগ ছাত্রছাত্রী একা কাজটি করলো।

10. বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5700 টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বলে কতজন যাত্রী গিয়েছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol" মনে করি, আগ্রহী যাত্রী সংখ্যা x এবং জনপ্রতি বাস ভাড়া q টাকা হলে,

	যাত্রী সংখ্যা	জনপ্রতি ভাড়া	মোট ভাড়া
আগ্রহী	x	q	qx
প্রকৃত	x − 5	q + 3	(q + 3)(q − 5)

প্রশ্নমতে, $qx = (q + 3)(x - 5) = 5700$

$qx = (q + 3)(x - 5)$ থেকে পাই,

$qx = qx - 5q + 3x - 15$

$\Rightarrow 5q = 3(x - 5)$

$\Rightarrow q = \frac{3}{5}(x - 5)$

ফলে, $qx = 5700$ থেকে পাই, $\frac{3}{5}(x-5)x = 5700$

$\Rightarrow (x-5)x = 5700 \times \frac{5}{3} = 9500$

$\Rightarrow x^2 - 5x - 9500 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 100x + 95x - 9500 = 0$

$\Rightarrow x(x-100) + 95(x-100) = 0$

$\Rightarrow (x-100)(x+95) = 0$

যেহেতু যাত্রী সংখ্যা x ধনাত্মক, সুতরাং $x + 95 \neq 0$

অতএব, $x - 100 = 0$ অর্থাৎ $x = 100$

$\therefore$ প্রকৃত যাত্রী সংখ্যা $= (x-5) = 100 - 5 = 95$ জন।

$\therefore$ বাসে যাত্রী গিয়েছিল 95 জন।

11. **বার্ষিক ক্রীড়া অনুষ্ঠান করার জন্য কোনো এক সমিতির সদস্যরা 45,000 টাকার বাজেট করলেন এবং সিদ্ধান্ত নিলেন যে, প্রত্যেক সদস্যই সমান চাঁদা দিবেন। কিন্তু 5 জন সদস্য চাঁদা দিতে অসম্মতি জানালেন। এর ফলে প্রত্যেক সদস্যের মাথাপিছু 15 টাকা চাঁদা বৃদ্ধি পেল। ঐ সমিতিতে কতজন সদস্য ছিলেন?**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৩৪)]

Sol মনে করি, সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং জনপ্রতি দেয় চাঁদার পরিমাণ q টাকা। তাহলে, মোট চাঁদা, $A = qx = 45{,}000$ টাকা।

প্রকৃতপক্ষে চাঁদা প্রদানকারী সদস্য সংখ্যা ছিল $(x-5)$ জন এবং জনপ্রতি চাঁদা $(q+15)$ টাকা। তাহলে, মোট চাঁদা হলো $(x-5)(q+15)$

$qx = (x-5)(q+15)$ ..... (i)

$qx = 45000$ ..... (ii)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $qx = (x-5)(q+15)$

বা, $qx = qx - 5q + 15x - 75$

বা, $5q = 15x - 75 = 5(3x - 15)$

$\therefore q = 3x - 15$

সমীকরণ (ii) এ q এর মান বসিয়ে পাই, $(3x-15) \times x = 45000$

বা, $3x^2 - 15x = 45000$

বা, $x^2 - 5x = 15000$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 - 5x - 15000 = 0$

বা, $x^2 - 125x + 120x - 15000 = 0$

বা, $x(x-125) + 120(x-125) = 0$

বা, $(x-125)(x+120) = 0$

সুতরাং, $(x-125) = 0$ অথবা, $(x+120) = 0$

বা, $x = 125$ বা, $x = -120$

যেহেতু সদস্য সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই x এর মান -120 গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং, সমিতির সদস্য সংখ্যা 125

12. ক, খ ও গ এর মধ্যে 260 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশের 2 গুণ, খ এর অংশের 3 গুণ এবং গ এর অংশের 4 গুণ পরস্পর সমান হয়।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol" মনে করি, ক পায় x টাকা, খ পায় y টাকা এবং গ পায় z টাকা

প্রশ্নমতে, $2x = 3y = 4z$

এখন, $3y = 2x \quad \therefore y = \frac{2}{3}x$

এবং $4z = 2x \quad \therefore z = \frac{1}{2}x$

প্রশ্নানুসারে, $x + y + z = 260 \quad \Rightarrow x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 260$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \frac{6x + 4x + 3x}{6} = 260 \quad \Rightarrow 13x = 1560 \quad \therefore x = 120$

এখন, $y = \frac{2}{3} \times 120 = 80 \quad$ এবং $z = \frac{1}{2} \times 120 = 60$

সুতরাং ক পায় 120 টাকা, খ পায় 80 টাকা এবং গ পায় 60 টাকা।

13. আমি x% সরল মুনাফায় 4000 টাকা এবং y% সরল মুনাফায় 5000 টাকা বিনিয়োগ করে বার্ষিক মুনাফা পাই 320 টাকা। কিন্তু যদি x% সরল মুনাফায় 5000 টাকা এবং y% সরল মুনাফায় 4000 টাকা বিনিয়োগ করতাম তবে বার্ষিক মুনাফা হতো 310 টাকা। x ও y এর মান নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই (সা. গণিত-২০০২ সংস্করণ), অধ্যায়-৮.৭ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" x% সরল মুনাফায় 4000 টাকার বার্ষিক মুনাফা $= 4000 \times 1 \times \frac{x}{100}$ টাকা $= 40x$ টাকা [$I = Pnr$]

y% সরল মুনাফায় 5000 টাকার বার্ষিক মুনাফা $= 5000 \times 1 \times \frac{y}{100}$ টাকা $= 50y$ টাকা

আবার, x% সরল মুনাফায় 5000 টাকার বার্ষিক মুনাফা $= 5000 \times 1 \times \frac{x}{100}$ টাকা $= 50x$ টাকা

y% সরল মুনাফায় 4000 টাকার বার্ষিক মুনাফা $= 4000 \times 1 \times \frac{y}{100}$ টাকা $= 40y$ টাকা

প্রশ্নমতে, $40x + 50y = 320 \quad \Rightarrow 4x + 5y = 32$ ..... (i)

এবং $50x + 40y = 310 \quad \Rightarrow 5x + 4y = 31$ ..... (ii) [উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা ভাগ করে]

সমীকরণ (i) নং কে 5 দ্বারা এবং (ii) নং কে 4 দ্বারা গুণ করে (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই- [উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা ভাগ করে]

$20x + 25y - 20x - 16y = 160 - 124 \quad \Rightarrow 9y = 36$

$\therefore \quad y = 4$

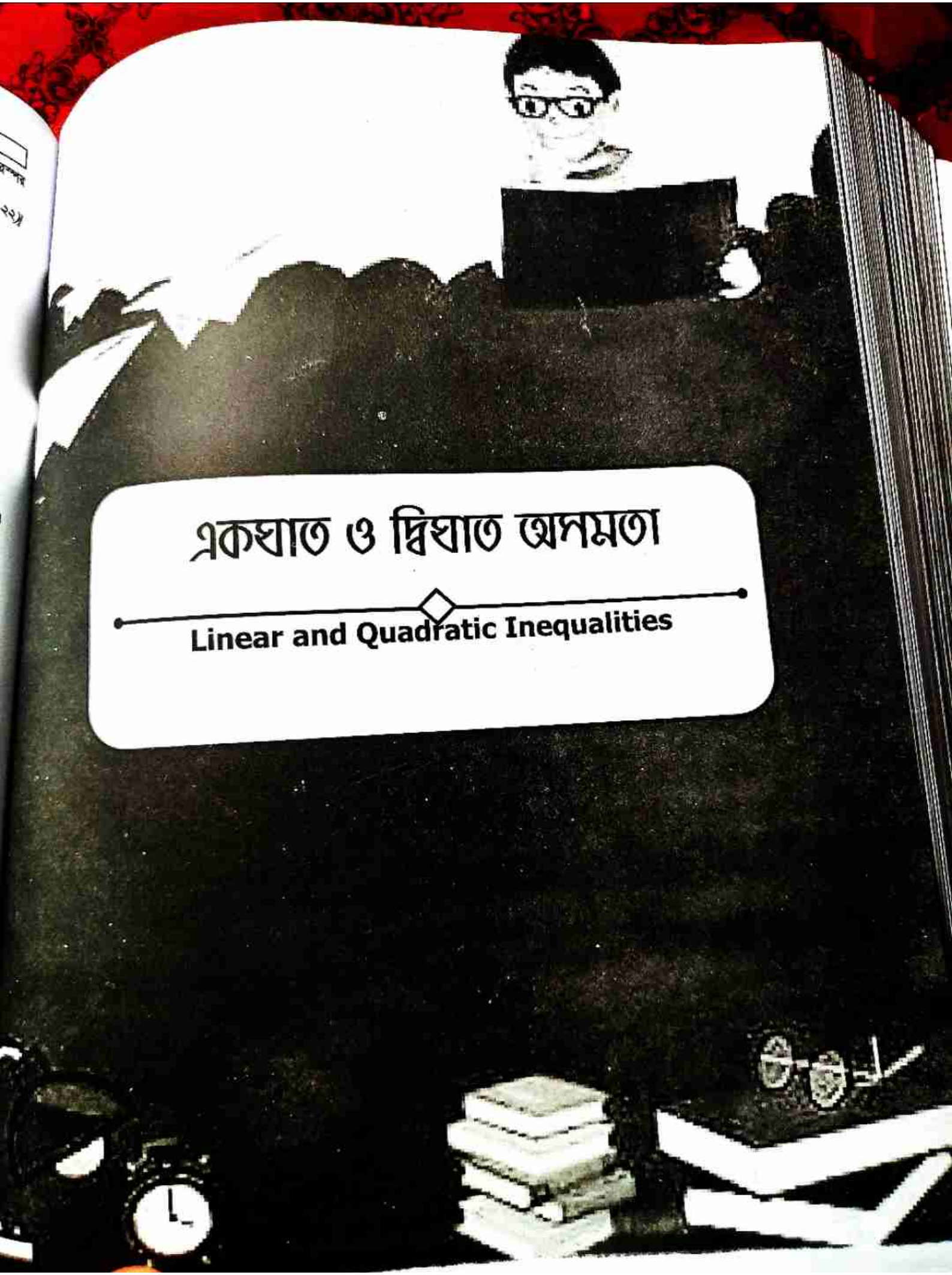
y এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $4x + 5.4 = 32 \quad \Rightarrow 4x = 32 - 20 = 12 \quad \therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় $x = 3$ এবং $y = 4$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 02, 04, 07, 08, 10, 13
Type-02	01, 03
Type-03	01, 04, 06, 08, 10
Type-04	01, 02
Type-05	01, 06, 08, 09, 11



একঘাত ও দ্বিঘাত অসমতা

Linear and Quadratic Inequalities

কোনো গাণিতিক বাক্যে বামপক্ষ ও ডানপক্ষ যদি '=' চিহ্ন দ্বারা সম্পর্কিত হয় তবে তাকে সমীকরণ বলে। যেমনঃ $5x - 8 = 3$

অপরদিকে, কোনো গাণিতিক বাক্যে বামপক্ষ ও ডানপক্ষ যদি "<" বা "≤"বা ">" বা "≥" চিহ্ন দ্বারা সম্পর্কিত হয় তবে তাকে অসমতা বলে। যেমনঃ $3x - 7 < 5$

✱ অসমতার চিহ্ন:

$x < y \Rightarrow$ x, y এর চেয়ে ছোট।

$x \le y \Rightarrow$ x, y এর চেয়ে ছোট বা সমান।

$x > y \Rightarrow$ x, y এর চেয়ে বড়।

$x \ge y \Rightarrow$ x, y এর চেয়ে বড় বা সমান।

✱ অসমতার পরমমানঃ অসমতার এক অংশে পরম মান "| |" চিহ্ন থাকলে পরমমান চিহ্ন সম্বলিত অংশটিকে প্রথমে অঋণাত্মক ধরে এবং পরে ঋণাত্মক ধরে সমাধান করতে হয়।

✱ পরমমান (Absolute Value):

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ যখন } a > 0 \\ -a, \text{ যখন } a < 0 \\ 0, \text{ যখন } a = 0 \end{cases}$$

যেমন, $|5| = 5$

$|-5| = -(-5) = 5$

$|0| = 0$

✱ অসমতার বৈশিষ্ট্য:

i) ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা গুণ/ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন উল্টে যায়

$x > y$ Ex: $7 > 4$

$\therefore -x < -y$ $\therefore -7 < -4$

ii) বিপরীতকরণ (ব্যস্তকরণ) করলে অসমতার চিহ্ন উল্টে যায়

$x > y$ Ex: $4 > 3$

$\therefore \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ $\therefore \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$

iii) $xy < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x < 0$ অথবা $y < 0$ হয়।

iv) $xy > 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি x ও y উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

✱ বাস্তব সংখ্যার আরো কিছু গুরুত্বপূর্ণ স্বীকার্য:

i) যদি $a, b \in \mathbf{R}$ হয়, তবে $a > b$ অথবা $a = b$ অথবা $a < b$ হবে।

ii) যদি $a, b, c \in \mathbf{R}$ এবং $a > b$ ও $b > c$ হয়, তবে $a > c$ হবে।

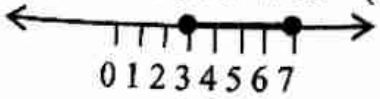
iii) যদি $a, b, c \in \mathbf{R}$ এবং $a > b$ হয়, তবে $a + c > b + c$ হবে।

iv) যদি $a, b, c \in \mathbf{R}$ এবং $a > b$ হয়, তবে- a) $ac > bc$, if $c > 0$

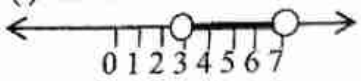
b) $ac < bc$, if $c < 0$ হবে।

✱ ব্যবধি (Interval): গণিতে চার ধরণের ব্যবধি ব্যবহৃত হয়-

(i) বদ্ধ ব্যবধি (Closed Interval): এই ব্যবধিতে প্রান্তীয় বিন্দুগুলো সংশ্লিষ্ট আলোচনার অন্তর্ভূক্ত। বদ্ধ ব্যবধি প্রতীকের সাহায্যে [ ] দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন- $A = \{x \mid 3 \le x \le 7\} = [3, 7]$

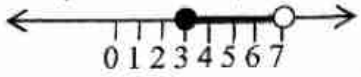


(ii) **খোলা ব্যবধি (Open Interval):** এই ব্যবধিতে প্রান্তীয় বিন্দুগুলো সংশ্লিষ্ট আলোচনার অন্তর্ভুক্ত নয়। খোলা ব্যবধি প্রকাশের সাহায্যে ( ) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন- $A = \{x \mid 3 < x < 7\} = (3, 7)$



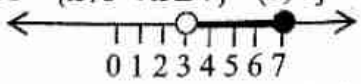
(iii) **বদ্ধ-খোলা ব্যবধি (Half Closed-Half Open Interval):** এই ব্যবধিতে বাম প্রান্তীয় বিন্দুটি সংশ্লিষ্ট আলোচনার অন্তর্ভূক্ত, কিন্তু ডান প্রান্তীয় বিন্দুটি নয়। একে প্রতীকের সাহায্যে [ ) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন- $A = \{x \mid 3 \leq x < 7\} = [3, 7)$



(iv) **খোলা-বদ্ধ ব্যবধি (Half Open-Half-Closed Interval):** এই ব্যবধিতে ডান প্রান্তীয় বিন্দুটি সংশ্লিষ্ট আলোচনার অন্তর্ভূক্ত, কিন্তু বাম প্রান্তীয় বিন্দুটি নয়। একে প্রতীকের সাহায্যে ( ] দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

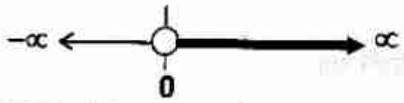
যেমন- $A = \{x \mid 3 < x \leq 7\} = (3, 7]$



Note: Interval sets are always infinite sets. When infinity(∞) is an end point of an interval, then must use the open interval notation like: $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, 7)$, $(-\infty, 7]$, $(3, \infty)$, $[3, \infty)$, etc.

✱ Important Note:

✖ **$M = (0, \infty)$** সেটটিকে ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট বলা হয়। কারণ ব্যবধির এই সেটটির উপাদান শূন্য (0) থেকে বড় এ কোন বাস্তব সংখ্যা। অর্থাৎ, সেটটিতে শূন্য (0) অন্তর্ভুক্ত নয়।



✖ **$M = [0, \infty)$** সেটটিকে অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট বলা হয়। কারণ ব্যবধির এই সেটটির উপাদান শূন্য(0) এবং শূন্য থেকে বড় যে কোন বাস্তব সংখ্যা। অর্থাৎ, সেটটিতে শূন্য(0) অন্তর্ভুক্ত।

Important Problem & Solutions:

TYPE 01 অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ সম্পর্কিত সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Type 01 এবং Type 02 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।
Note: এটা প্রিলিকেন্দ্রিক ভিডিও হলেও আপনার জন্য উপকারী হবে।

Technic : প্রদত্ত অসমতাটির প্রান্তীয় সংখ্যা দু'টি যোগ করার পর দুই দ্বারা ভাগ করে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তা উভয় পক্ষ থেকে বিয়োগ করে সমান সংখ্যা তৈরী করতে পারলেই পরমমান চিহ্ন দিয়ে লিখা যায়।

01. $-7 < x < -1$ কে পরম মানের সাহায্যে অসমতায় প্রকাশ-

Sol: এক্ষেত্রে, $(-7-1) = -8$; $(-8 \div 2) = -4$

$\therefore -7 + 4 < x + 4 < -1 + 4$ বা, $-3 < x + 4 < 3$ বা, $|x + 4| < 3$ Ans.

02. $-5 < x < 11$ কে পরম মানের সাহায্যে অসমতায় প্রকাশ কর।

Sol^n $(-5+11) \div 2 = 3$

উভয় পক্ষে -3 যোগ করি, $-5-3 < x-3 < 11-3 \Rightarrow -8 < x-3 < 8 \Rightarrow |x-3| < 8$ Ans.

03. $-3 < 5-2x < 7$ কে পরম মান চিহ্ন ব্যবহার করে প্রকাশ কর।

Sol^n $-3 < 5-2x < 7$

$\Rightarrow -3-2 < 5-2x-2 < 7-2$ | $(-3+7)/2 = 2$

$\Rightarrow -5 < 3-2x < 5$

$\Rightarrow |3-2x| < 5$ Ans.

TYPE 02 অসমতার সমাধান-০১

01. সমাধান কর ও সমাধান সেটটি সংখ্যারেখায় দেখাও: $4x+4 > 16$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (উদাহরণের অংক নং-০৩)]

Sol^n দেওয়া আছে, $4x+4 > 16 \Rightarrow 4x+4-4 > 16-4$ [উভয়পক্ষ থেকে 4 বিয়োগ করে]

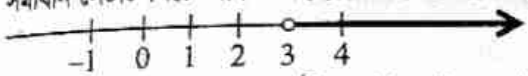
$\Rightarrow 4x > 12 \Rightarrow \frac{4x}{4} > \frac{12}{4}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow x > 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x > 3$

এখানে সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x > 3\}$

সমাধান সেটটি নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



02. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $x-9 > 3x+1$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (উদাহরণের অংক নং-০৪)]

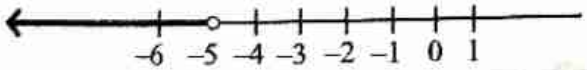
Sol^n দেওয়া আছে, $x-9 > 3x+1 \Rightarrow x-9+9 > 3x+1+9 \Rightarrow x > 3x+10 \Rightarrow x-3x > 3x+10-3x$

$\Rightarrow -2x > 10 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{10}{-2}$ [উভয়পক্ষকে -2 দ্বারা ভাগ করায় অসমতার দিক পাল্টে গেছে]

$\Rightarrow x < -5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x < -5$

সমাধান সেটটি নিচে অঙ্কিত সংখ্যা রেখায় দেখানো হলো।



বিশেষ দ্রষ্টব্য: সমীকরণের সমাধান যেমন একটি সমীকরণ (সমতা) দ্বারা প্রকাশ পায়, তেমনি অসমতার সমাধান একটি অসমতার দ্বারা প্রকাশ পায়। অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার অসীম উপসেট।

03. $3x-2 > 2x-1$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]*

Sol^n দেওয়া আছে, $3x-2 > 2x-1 \Rightarrow 3x-2+2 > 2x-1+2$ [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]

$\Rightarrow 3x > 2x+1$

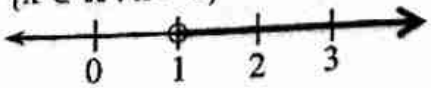
$\Rightarrow 3x-2x > 2x+1-2x$ [উভয়পক্ষে $(-2x)$ যোগ করে]

$\therefore x > 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x > 1$ **(Ans.)**

এখানে, সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট:



04. $z \le \frac{1}{2}z + 3$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]*

Sol" দেওয়া আছে, $z \le \frac{1}{2}z + 3 \Rightarrow z - \frac{1}{2}z \le \frac{1}{2}z + 3 - \frac{1}{2}z$ [উভয়পক্ষে $\left(-\frac{1}{2}z\right)$ যোগ করে]

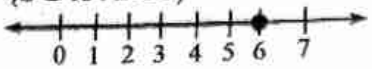
$\Rightarrow \frac{1}{2}z \le 3 \Rightarrow 2.\frac{1}{2}z \le 3.2$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore z \le 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $z \le 6$ **(Ans.)**

এখানে, সমাধান সেট, $S = \{z \in \mathbb{R} : z \le 6\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট:



05. $8 \ge 2 - 2x$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]*

Sol" দেওয়া আছে, $8 \ge 2 - 2x \Rightarrow 8 + 2x \ge 2 - 2x + 2x$ [উভয়পক্ষে $2x$ যোগ করে]

$\Rightarrow 8 + 2x - 8 \ge 2 - 8$ [উভয়পক্ষে (-8) যোগ করে]

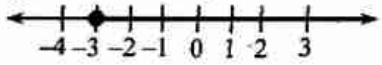
$\Rightarrow 2x \ge -6$

$\therefore x \ge -3$ $\left[\text{উভয়পক্ষকে } \frac{1}{2} \text{ দ্বারা গুণ করে}\right]$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \ge -3$ **(Ans.)**

এখানে, সমাধান সেট, $S = \{x \in \mathbb{R} : x \ge -3\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট:



06. $5(3 - 2t) \le 3(4 - 3t)$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol" দেওয়া আছে, $5(3 - 2t) \le 3(4 - 3t) \Rightarrow 15 - 10t \le 12 - 9t$

$\Rightarrow 15 - 10t + 9t \le 12 - 9t + 9t$ [উভয়পক্ষে $9t$ যোগ করে]

$\Rightarrow 15 - t \le 12 \Rightarrow 15 - t - 15 \le 12 - 15$ [উভয়পক্ষে (-15) যোগ করে]

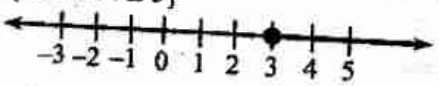
$\Rightarrow -t \le -3 \Rightarrow -t(-1) \ge (-3)(-1)$ [(-1) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore t \ge 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $t \ge 3$ **(Ans.)**

এখানে, সমাধান সেট, $S = \{t \in \mathbb{R} : t \ge 3\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট:



07. সমাধান কর: $a(x + b) < c$, $[a \ne 0]$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (উদাহরণের অংক নং-০৮)]

Sol" a ধনাত্মক হলে, $\frac{a(x+b)}{a} < \frac{c}{a}$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow x + b < \frac{c}{a} \Rightarrow x < \frac{c}{a} - b$

a ঋণাত্মক হলে, একই প্রক্রিয়ায় পাই, $\frac{a(x+b)}{a} > \frac{c}{a}$ [উভয়পক্ষকে $-a$ দ্বারা ভাগ করায় অসমতার দিক পাল্টে গেছে]

$\Rightarrow x + b > \frac{c}{a} \Rightarrow x > \frac{c}{a} - b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: (i) $x < \frac{c}{a} - b$ যদি $a > 0$ হয়, (ii) $x > \frac{c}{a} - b$ যদি $a < 0$ হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: a যদি শূন্য এবং c যদি ধনাত্মক হয়, তবে x যেকোনো মানের জন্য অসমতাটি সত্য হবে। কিন্তু a যদি শূন্য এবং c ঋণাত্মক হয়, তবে অসমতাটির কোনো সমাধান থাকবে না।

04. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}>\frac{47}{60}$ *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ.গণিত), অধ্যায়-৬.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]*

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}>\frac{47}{60} \Rightarrow \frac{20x+15x+12x}{60}>\frac{47}{60} \Rightarrow \frac{47x}{60}>\frac{47}{60}$

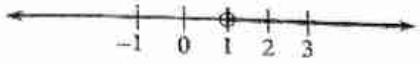
$\Rightarrow 47x>47$ [উভয়পক্ষকে 60 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x>1$ $\left[\text{উভয়পক্ষকে } \frac{1}{47} \text{ দ্বারা গুণ করে}\right]$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x>1$ **(Ans.)**

এখানে, সমাধান সেট, $S=\{x\in\mathbb{R}: x>1\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট:



TYPE 03 অসমতার সমাধান-০২ (পরমমান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ)

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Type 03 এবং Type 03 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: এটা প্রিলিকেন্দ্রিক ভিডিও হলেও আপনার জন্য উপকারী হবে।

Technic : পরমমান চিহ্নের ভিতরের রাশিটি যথাক্রমে অঋণাত্মক ও ঋণাত্মক বিবেচনা করার পর দু'টিকে সমন্বয় করে লিখতে হয় এবং অজ্ঞাত রাশির মান বের করতে হয়।

Pattern-01

01. বাস্তব সংখ্যায় $|3x-2|\le 1$ অসমতাটির সমাধান-

Sol" $|3x-2|\le 1$ বা, $-1\le 3x-2\le 1$ বা, $-1+2\le 3x-2+2\le 1+2$ [উভয়পক্ষকে 2 যোগ করে]

বা, $1\le 3x\le 3$ বা, $\frac{1}{3}\le x\le 1$. Ans.

Alternative form of the answer: $\frac{1}{3}\le x \text{ and } x\le 1$

Note: অসমতায় 'less than (<)' notation থাকলে সমাধান 'এবং (and)' দিয়ে লিখা যায়।

02. $|2-8x|\le 6$ অসমতাটির সমাধান কত?

Sol" $|2-8x|\le 6 \Rightarrow -6\le 2-8x\le 6 \Rightarrow -6-2\le -8x\le 6-2 \Rightarrow -8\le -8x\le 4$

$\Rightarrow 1\ge x\ge -\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $-\frac{1}{2}\le x\le 1$ Ans.

03. $|3x+2|<7$ এর সমাধান কত?

Sol" $|3x+2|<7 \Rightarrow -7<3x+2<7 \Rightarrow -9<3x<5 \Rightarrow -3<x<\frac{5}{3}$

$\therefore$ অসমতাটির সমাধান $=-3<x<\frac{5}{3}$ **Ans.**

Pattern-02

04. বাস্তব সংখ্যায় $|5-2x| \geq 4$ অসমতাটির সমাধান-

Sol" $|5-2x| \geq 4$ বা, $-4 \geq 5-2x \geq 4$ বা, $-9 \geq -2x \geq -1$ বা, $\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$\therefore x \leq \frac{1}{2}$ অথবা $x \geq \frac{9}{2}$ **Ans.**

Note: অসমতায় 'greater than (>)' বা 'greater or equal to (≥)' notation থাকলে সমাধান 'অথবা' দিয়ে লিখতে হয়।

05. x এর বাস্তব মানের জন্য $|4x-3| > 1$ অসমতার সমাধান - [DU 2014-2015]

Sol" $|4x-3| > 1 \Rightarrow -1 > 4x-3 > 1 \Rightarrow 2 > 4x > 4 \Rightarrow 1 > 2x > 2 \Rightarrow \frac{1}{2} > x > 1$

$\therefore x < \frac{1}{2}$ or $x > 1$ অর্থাৎ $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$ Ans.

06. $|2x+3| \geq 9$ অসমতাটির সমাধান কত?

Sol" $|2x+3| \geq 9 \Rightarrow -9 \geq 2x+3 \geq 9 \Rightarrow \frac{-9-3}{2} \geq x \geq \frac{9-3}{2} \Rightarrow -6 \geq x \geq 3$

$\therefore x \leq -6$ Or, $x \geq 3$ Ans.

TYPE 04 ভগ্নাংশ আকারের অসমতার সমাধান

Pattern-01

01. $\frac{3}{|2x-1|} \geq 4$ অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় করুন এবং সমাধান সেটটিকে সংখ্যারেখায় প্রদর্শন করুন। [৩৫তম বিসিএস]

Sol" $\frac{3}{|2x-1|} \geq 4 \Rightarrow \frac{|2x-1|}{3} \leq \frac{1}{4}$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{2x-1}{3} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq 2x-1 \leq \frac{3}{4}$ [3 দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow -\frac{3}{4}+1 \leq 2x-1+1 \leq \frac{3}{4}+1$ [1 দ্বারা যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq 2x \leq \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{7}{8}$ $\left\{\frac{1}{2} \text{ দ্বারা গুণ করে}\right\}$

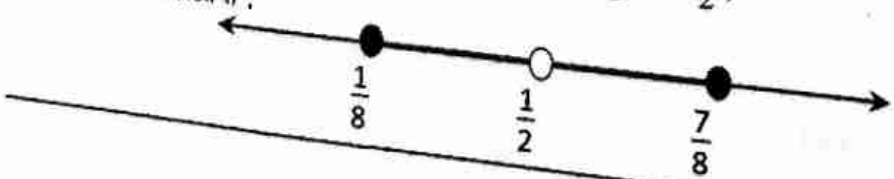
কিন্তু $2x-1=0$ হলে অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

তাই $2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$\therefore$ সমাধান $= \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{7}{8}; x \neq \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in R : \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{7}{8}; x \neq \frac{1}{2}\}$

$\therefore$ সংখ্যারেখা :

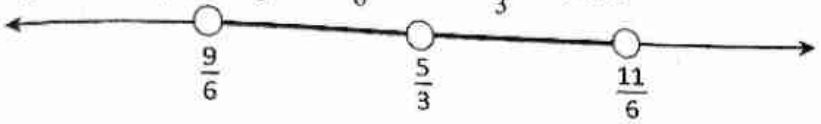


02. $\frac{1}{|3x-5|}>2$ অসমতাটি (Inequality) সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখান। [JNU 2019-2020]

Sol" $\frac{1}{|3x-5|}>2 \Rightarrow |3x-5|<\frac{1}{2}$ but $x\neq\frac{5}{3}$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}<3x-5<\frac{1}{2}$ but $x\neq\frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{9}{2}<3x<\frac{11}{2}$ but $x\neq\frac{5}{3}$ $\Rightarrow \frac{9}{6}<x<\frac{11}{6}$ but $x\neq\frac{5}{3}$ **Ans.**

সংখ্যারেখা:



03. বাস্তব সংখ্যায় $\frac{1}{|2x-3|}>5$ অসমতাটির সমাধান-

Sol" $\frac{1}{|2x-3|}>5 \Rightarrow |2x-3|<\frac{1}{5}$ but $x\neq\frac{3}{2}$ $\Rightarrow -\frac{1}{5}<2x-3<\frac{1}{5}$ but $x\neq\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{14}{5}<2x<\frac{16}{5}$ but $x\neq\frac{3}{2}$ $\Rightarrow \frac{7}{5}<x<\frac{8}{5}$ but $x\neq\frac{3}{2}$

$\therefore$ অসমতাটির সমাধান $=\left(\frac{7}{5},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\frac{8}{5}\right)$ **Ans.**

Pattern-02

04. $\frac{1}{|3-2x|}\leq\frac{1}{5}$ হলে x এর মান কত?

Technic : প্রথমে হরের চলককে লবে নিতে হবে, সে জন্য অসমতার বাস্তবকরণ করতে হবে। এরপর < বা > এর নিয়মানুযায়ী সমাধান করবে। তবে x এর যে মানের জন্য হর শূন্য হবে সেই মানটি প্রাপ্ত মান হতে বাদ দিতে হবে।

Sol" $\frac{1}{|3-2x|}\leq\frac{1}{5} \Rightarrow |3-2x|\geq 5 \Rightarrow |2x-3|\geq 5 \Rightarrow -5\geq 2x-3\geq 5$

$\Rightarrow -1\geq x\geq 4$ [এভাবে লেখা যাবে না] $\Rightarrow 4\leq x\leq -1$

$\therefore -1\geq x$ or $x\geq 4$ বা, $x\leq -1$ or $x\geq 4$

05. $\left|3-\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{2}$ অসমতাটির সমাধান সেট-

Sol" $\left|3-\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}<3-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}-3<3-\frac{1}{x}-3<\frac{1}{2}-3$

$\Rightarrow \frac{-7}{2}<-\frac{1}{x}<\frac{-5}{2}$ $\Rightarrow \frac{7}{2}>\frac{1}{x}>\frac{5}{2}$ $\Rightarrow \frac{2}{7}<x<\frac{2}{5}$ **Ans.**

06. $\left|5-\frac{2}{3x}\right|<1$ অসমতাটির সমাধান সেট-

Sol" $\left|5-\frac{2}{3x}\right|<1$ $\Rightarrow -1<5-\frac{2}{3x}<1$ $\Rightarrow -6<-\frac{2}{3x}<-4$

$\Rightarrow 3>\frac{1}{3x}>2$ $\Rightarrow \frac{1}{3}<3x<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{9}<x<\frac{1}{6}$ **(Ans.)**

TYPE 05 দ্বিঘাত অসমতার সমাধান

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Type 05 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।
Note: এটা প্রিলিকেন্দ্রিক ভিডিও হলেও আপনার জন্য উপকারী হবে।

Technic : প্রথমে $ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষন করে $(x - \text{মান}_1)(x - \text{মান}_2)$ আকারে সাজাবে। এরপর অসমতার সর্ম্পকানুযায়ী মানদ্বয়ের সাথে x এর ব্যবধি নির্ণয় করবে। অসমতা < দিয়ে থাকলে মান এবং (∩) দিয়ে যে সম্পর্কের মাধ্যমে আসবে। অসমতা > দিয়ে থাকলে মান অথবা (∪) দিয়ে অবৈধ সম্পর্কের মাধ্যমে আসবে।

Note - 1: ছোট মানের চেয়ে বড় এবং বড় মানের চেয়ে ছোট এরূপ মানকে বৈধ সর্ম্পক এবং ছোট মানের চেয়ে ছোট কিন্তু বড় মানের চেয়ে বড় এরূপ মানকে অবৈধ সম্পর্ক হিসাবে বিবেচনা করা হচ্ছে।
যেমন- $5 < x < 8$ একটি বৈধ সম্পর্ক, আবার $x > 4$ অথবা $x < -6$ একটি অবৈধ সম্পর্ক।

Note - 2: (i) $a > b$ এবং $(x - a)(x - b) < 0$ হলে $b < x < a$
(ii) $a > b$ এবং $(x - a)(x - b) > 0$ হলে $x < b$ or, $x > a$

Pattern-01

01. সমাধান করুন: $(x + 2)(x - 4) > 0$

Sol" $(x + 2)(x - 4) > 0$ হতে হলে $(x + 2)$ ও $(x - 4)$ এর উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হতে হবে।
এখন, $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ হলে $(x + 2)$ ও $(x - 4)$ উভয়ই ধনাত্মক হবে।
আবার, $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$ হলে $(x + 2)$ ও $(x - 4)$ উভয়ই ঋণাত্মক হবে।
$\therefore (x + 2)(x - 4) > 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x > 4$ অথবা $x < -2$ হয়। $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < -2$ অথবা, $x > 4$

মনে রাখুন: $(x - a)(x - b) > 0$ প্যাটার্নের অসমতায় যদি a ও b এর মধ্যে একটি ছোট ও একটি বড় হয় তবে $x >$ বড় মান অথবা $x <$ ছোট মান এর জন্য অসমতাটি সিদ্ধ হবে। যেমন- উপরের অংকটিকে আপনি নিম্নোক্ত উপায়ে সাজিয়ে নিতে পারেন-
$(x + 2)(x - 4) > 0 \Rightarrow \{x - (-2)\}(x - 4) > 0$
অসমতাটিকে $(x - a)(x - b)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -2$ এবং $b = 4$
সুতরাং দেখা যাচ্ছে b এর মান a এর চেয়ে বড়।
$\therefore x <$ ছোটমান অথবা $x >$ বড় মান $\Rightarrow x < -2$ অথবা $x > 4$; এটাই নির্ণেয় সমাধান
বি.দ্র.: অংকটি পরীক্ষার খাতায় ১ম নিয়মে করবেন। ২য় নিয়ম শুধু বুঝার সুবিধার্থে উল্লেখ করেছি।

02. নিম্নলিখিত অসমতাটি $(x + 2)(2x + 3) > 0$ x-এর মানসমূহের যে ব্যবধানের জন্য বলবৎ থাকে তাহা নির্ণয় করুন। [১৩তম বিসিএস]

Sol" $(x + 2)(2x + 3) > 0$ হতে হলে $(x + 2)$ ও $(2x + 3)$ এর উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হতে হবে।
এখন, $2x + 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{-3}{2}$ হলে $(x + 2)$ ও $(2x + 3)$ উভয়ই ধনাত্মক হবে।
আবার, $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$ হলে $(x + 2)$ ও $(2x + 3)$ এর উভয়ই ঋণাত্মক হবে।
$\therefore (x + 2)(2x + 3) > 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x > \frac{-3}{2}$ অথবা $x < -2$ হয়। $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < -2$ অথবা $x > \frac{-3}{2}$

03. সমাধান করুন: $(x - 1)(x + 3) \geq 0$

Sol" দেওয়া আছে, $(x - 1)(x + 3) \geq 0$
এখন, $(x - 1)(x + 3) = 0$ হতে হলে $x - 1 = 0$ বা, $x + 3 = 0$
অর্থাৎ $x = 1$ অথবা $x = -3$ হতে হবে।
আবার, $(x - 1)(x + 3) > 0$ হলে $(x - 1)$ ও $(x + 3)$ এর উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হতে হবে।
এখন, $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ হলে $(x - 1)$ ও $(x + 3)$ উভয়ই ধনাত্মক হবে।

আবার, $x+3<0 \Rightarrow x<-3$ হলে $(x-1)$ ও $(x+3)$ উভয় ঋণাত্মক হবে।

$\therefore (x-1)(x+3) \geq 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x \geq 1$ অথবা $x \leq -3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \geq 1$ অথবা $x \leq -3$

04. **x-এর কোন কোন মানের জন্য $x^2-7x+12>0$ হবে?** [১০তম বিসিএস]

Sol" $x^2-7x+12>0$

$\Rightarrow x^2-3x-4x+12>0 \Rightarrow x(x-3)-4(x-3)>0 \Rightarrow (x-3)(x-4)>0$

$(x-3)(x-4)>0$ হতে হলে $(x-3)$ ও $(x-4)$ এর উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হতে হবে।

এখন, $x-4>0 \Rightarrow x>4$ হলে $(x-3)$ ও $(x-4)$ উভয়ই ধনাত্মক হবে।

আবার, $x-3<0 \Rightarrow x<3$ হলে $(x-3)$ ও $(x-4)$ উভয়ই ঋণাত্মক হবে।

$\therefore (x-3)(x-4)>0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x<3$ অথবা $x>4$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x<3$ অথবা $x>4$.

05. **$x^2-5x+6>0$ অসমতাটির সমাধান করুন।** [৪৪তম বিসিএস]

Sol" $x^2-5x+6>0$

$\Rightarrow x^2-2x-3x+6>0$

$\Rightarrow x(x-2)-3(x-2)>0$

$\Rightarrow (x-2)(x-3)>0$

$(x-2)(x-3)>0$ হতে হলে $(x-2)$ ও $(x-3)$ এর উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হতে হবে।

এখন, $x-3>0 \Rightarrow x>3$ হলে $(x-2)$ ও $(x-3)$ উভয়ই ধনাত্মক হবে।

আবার, $x-2<0 \Rightarrow x<2$ হলে $(x-2)$ ও $(x-3)$ উভয়ই ঋণাত্মক হবে।

$\therefore (x-2)(x-3)>0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x<2$ অথবা $x>3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x<2$ অথবা $x>3$.

Pattern-02

06. **সমাধান করুন: $(x+3)(x-2)<0$**

Sol" $(x+3)(x-2)<0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x+3)$ ও $(x-2)$ এর একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হয়।

এখন, $x-2>0 \Rightarrow x>2$ হলে উভয়ই ধনাত্মক হবে যা শর্তবিরোধী।

$x+3<0 \Rightarrow x<-3$ হলে উভয়ই ঋণাত্মক হবে যা শর্তবিরোধী।

আবার, $x-2<0 \Rightarrow x<2$ এবং $x+3>0 \Rightarrow x>-3$ হলে $(x-2)$ ঋণাত্মক হবে এবং $(x+3)$ ধনাত্মক হবে, যা শর্ত মেনে চলে।

$\therefore (x+3)(x-2)<0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x<2$ এবং $x>-3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x>-3$ এবং $x<2$ অথবা, $-3<x<2$

মনে রাখুন: $(x-a)(x-b)<0$ প্যাটার্নের অসমতার যদি a ও b এর মাঝে একটি বড় ও একটি ছোট হয় তবে x > ছোট মান এবং x < বড় মান এর জন্য অসমতাটি সিদ্ধ হবে। যেমন- উপরের অংকটিকে আপনি নিম্নোক্ত উপায়ে সাজিয়ে নিবেন-

$(x+3)(x-2)<0 \quad \Rightarrow \{x-(-3)\}(x-2)<0$

অসমতাটিকে $(x-a)(x-b)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=-3$ এবং $b=2$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে b এর মান a এর চেয়ে বড়।

$\therefore$ x > ছোট মান এবং x < বড় মান

$\Rightarrow x>-3$ এবং $x<2$

এটাই নির্ণেয় সমাধান

বিঃদ্রঃ অংকটি পরীক্ষার খাতায় ১ম নিয়মে করবেন। ২য় নিয়ম শুধু বুঝার সুবিধার্থে উল্লেখ করেছি।

07. সমাধান করুন: $x^2 - 5x + 6 < 0$

Sol" $x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 < 0 \Rightarrow x(x-3) - 2(x-3) < 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) < 0$

$(x-3)(x-2) < 0$ হবে যদি $(x-3)$ ও $(x-2)$ এর একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হয়।

এখন, $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ হলে $(x-3)$ ও $(x-2)$ এর উভয়ই ধনাত্মক হবে যা শর্তবিরোধী।

$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$ হলে $(x-3)$ ও $(x-2)$ এর উভয়ই ঋণাত্মক হবে যা শর্তবিরোধী।

আবার, $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$ এবং $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ হলে $(x-3)$ ঋণাত্মক এবং $(x-2)$ ধনাত্মক হবে যা শর্ত মেনে চলে।

$\therefore$ $(x-3)(x-2) < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x < 3$ এবং $x > 2$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x < 3$ এবং $x > 2$ অথবা, $2 < x < 3$

08. a – এর কোন কোন মানের জন্য $a^2 + 1 < 2a + 4$ হবে? [১১তম বিসিএস]

Sol" $a^2 + 1 < 2a + 4 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Rightarrow a^2 - 3a + a - 3 < 0 \Rightarrow a(a-3) + 1(a-3) < 0$

$\Rightarrow (a-3)(a+1) < 0$

$(a-3)(a+1) < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(a-3)$ ও $(a+1)$ এর একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হয়।

এখন, $a - 3 > 0 \Rightarrow a > 3$ হলে উভয়ই ধনাত্মক হবে যা শর্তবিরোধী।

$a + 1 < 0 \Rightarrow a < -1$ হলে উভয়ই ঋণাত্মক হবে যা শর্তবিরোধী।

আবার, $a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$ এবং $a + 1 > 0 \Rightarrow a > -1$ হলে $(a-3)$ ঋণাত্মক হবে এবং $(a+1)$ ধনাত্মক হবে, যা শর্ত মেনে চলে।

$\therefore$ $(a-3)(a+1) < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $a < 3$ এবং $a > -1$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x > -1$ এবং $x < 3$ অথবা, $-1 < x < 3$

TYPE 06 গুরুত্বপূর্ণ প্রমাণ

01. প্রমাণ কর: $|a + b| \le |a| + |b|$.

Sol" $\{|a| + |b|\}^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a| \cdot |b| = |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

$\Rightarrow \{|a| + |b|\}^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \quad [\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |ab| \ge ab]$

$\Rightarrow \{|a| + |b|\}^2 \ge (a+b)^2 \Rightarrow \{|a| + |b|\}^2 \ge |a+b|^2 \quad \therefore \quad |a| + |b| \ge |a+b|$

অর্থাৎ $|a + b| \le |a| + |b|$ প্রমাণিত

02. দেখাও যে, $\sqrt{3}$ অমূলদ সংখ্যা।

Sol" মনে করি, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা; তাহলে $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ (যেখানে p এবং q এর উভয়ে পূর্ণ সংখ্যা, $q \ne 0$ এবং $\frac{p}{q}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা হয়েছে)

বা, $3 = \frac{p^2}{q^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে] বা, $p^2 = 3q^2$ ..... (ii)

এখন 3 দ্বারা $3p^2$ বিভাজ্য বিধায় 3 দ্বারা p^2 বিভাজ্য হবে। সুতরাং p নিজেই 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

ধরি, $p = 3c$ (যেখানে c একটি পূর্ণ সংখ্যা)

বা, $p^2 = 9c^2$, বা, $3q^2 = 9c^2$ [(ii) থেকে] বা, $q^2 = 3c^2$

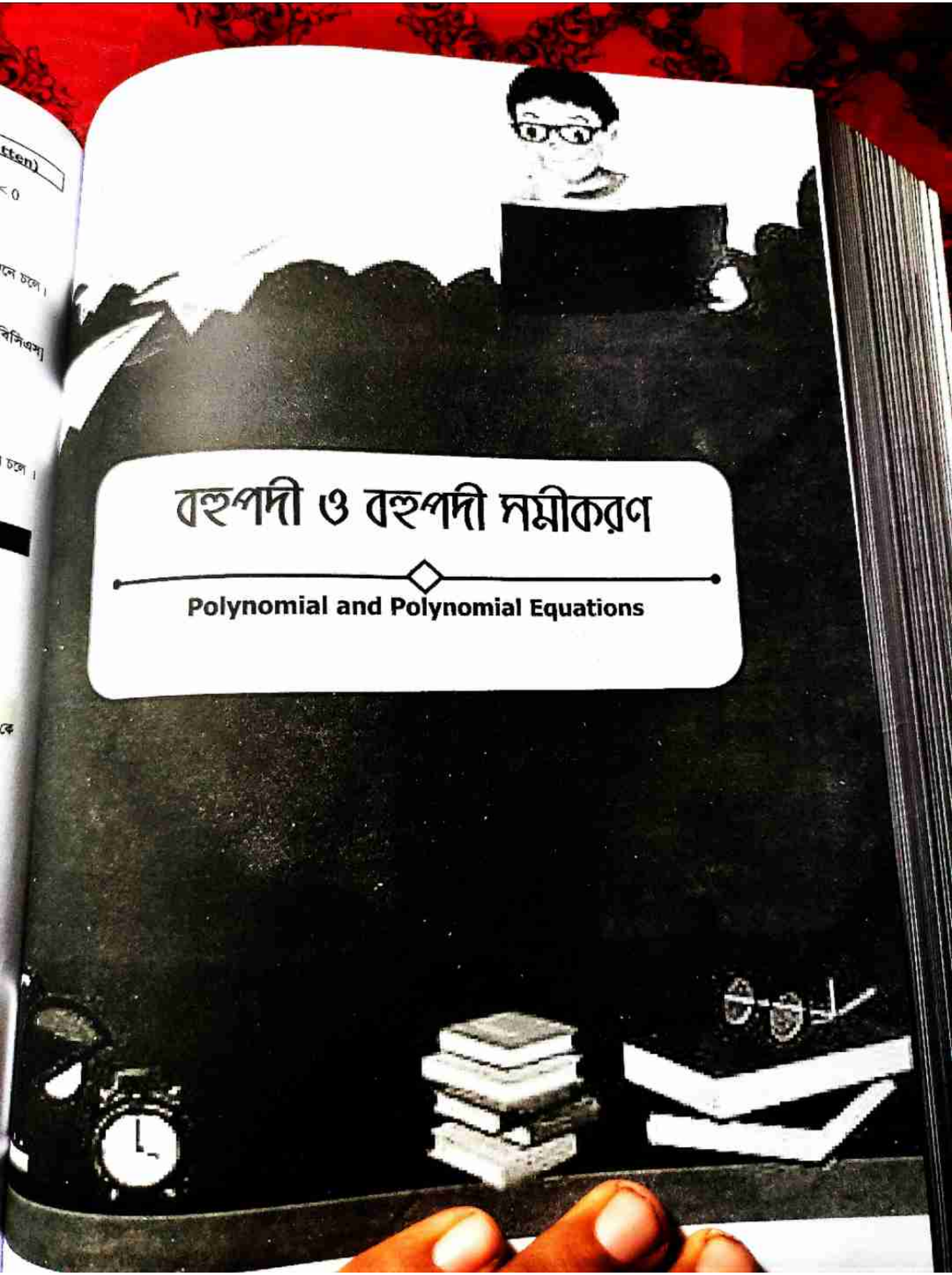
$\therefore$ 3 দ্বারা q^2 বিভাজ্য, অর্থাৎ 3 দ্বারা q বিভাজ্য।

সুতরাং p এবং q এর একটি সাধারণ উৎপাদক হলো 3, যা প্রস্তাবনাবিরোধী। $\therefore \sqrt{3}$ মূলদ সংখ্যা হতে পারে না।

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	×
Type-02	03, 07, 08
Type-03	01, 04
Type-04	01, 02, 04
Type-05	04, 07, 08
Type-06	02



বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

Polynomial and Polynomial Equations

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ
Polynomial and Polynomial Equations

এক নজরে এই অধ্যায় থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ

01. p-এর মানের ব্যবধি বের করুন যার জন্য $x^2 - 2px + p^2 + 5p - 6 = 0$ সমীকরণের কোন বাস্তব মূল নেই। [৪০তম বিসিএস]

[সমাধান দেখুন: Type-01, Question No.-01]

এই অধ্যায়ের Analysis

এই অধ্যায়টি সরাসরি BCS এর সিলেবাসে নেই। দ্বিঘাত বহুপদীর সমীকরণ থেকে সমাধান নির্ণয় নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত বইয়ের অধ্যায় ৫.১ তে আলোচনা করা হয়েছে। সেখানে বহুপদী সমীকরণের নিশ্চায়কের সাপেক্ষে মূলের বৈশিষ্ট্য দেয়া আছে, কিন্তু কোন অংক দেয়া নেই। এ সংক্রান্ত বিস্তারিত আলোচনা একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির ২য় পত্রের চতুর্থ অধ্যায়ে করা হয়েছে।

৪০ তম বিসিএসে এ টপিক থেকে ২.৫ নম্বরের একটি প্রশ্ন এসেছে। তাছাড়া এখন পর্যন্ত আর কোন প্রশ্ন আসে নি। তাই অনার্স ততটা গুরুত্বপূর্ণ নয়। আপনারা চাইলে এটি বাদ দিতে পারেন। কারণ মানবিক ও বাণিজ্য বিভাগের শিক্ষার্থীদের অধ্যায়টি আয়ত্ত কষ্টকর হবে। আমি এ বইয়ে একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির বইয়ের সাহায্যে অধ্যায়টি অতি সংক্ষেপে সাজিয়েছি। আশা করি এর বাইরে আসবে না ইনশাআল্লাহ্।

মৌলিক এবং তথ্যমূলক প্রয়োজনীয় আলোচনা

দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল α ও আরেকটি মূল β হলে,

মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ বর্জিত পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

- $ax^2 + bx + c = 0$ এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং এর মূলদ্বয় হচ্ছে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক D হলে, $D = b^2 - 4ac$.
- নিশ্চায়ক দ্বারা $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি জানা যায়-

(A) $b^2 - 4ac > 0$, অর্থাৎ নিশ্চায়ক ধনাত্মক হলে, মূলদ্বয় বাস্তব এবং অসম হবে।
(B) $b^2 - 4ac = 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব এবং সমান হবে।
(C) $b^2 - 4ac < 0$, অর্থাৎ নিশ্চায়ক ঋণাত্মক হলে, মূলদ্বয় জটিল হবে।
(D) $b^2 - 4ac$ পূর্ণবর্গ সংখ্যা বা রাশি হলে, মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হবে।

Note: $ax^2 + bx + c$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হওয়ার শর্ত: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়কের মান শূন্য হতে হবে। অর্থাৎ $b^2 - 4ac = 0$.

- **মূলের সাহায্যে সমীকরণ নির্ণয়ঃ**

কোন সমীকরণের দুটি মূল দেয়া থাকলে সমীকরণটি হবে,

$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$.

অর্থাৎ, কোন সমীকরণের দুটি মূল α ও β হলে, সমীকরণটি হবে,

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

Important Problem & Solutions

TYPE 01 নিশ্চায়ক/ পৃথায়ক সম্পর্কিত সমস্যা

Item-01

01. p এর মান কত হলে $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে?

Sol" $px^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক,

$D = 3^2 - 4.p.4 = 9 - 16p$

যেহেতু মূলগুলো বাস্তব ও অসমান $\therefore D > 0$

or, $9 - 16p > 0$ $\therefore p < \frac{9}{16}$ **Ans.**

02. $3x^2 - 4ax + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে, 'a' এর মান কত হবে?

Sol" নিশ্চায়ক, $(-4a)^2 - 4.3.5 > 0$ বা, $16a^2 - 60 > 0$ বা, $16a^2 > 60$ বা, $a^2 > \frac{60}{16}$

$\therefore a > \frac{\sqrt{60}}{4}$ অথবা, $a < -\frac{\sqrt{60}}{4}$ হলে, মূলগুলো বাস্তব ও অসমান হবে। **Ans**

Item-02

03. k-এর মান কত হলে, $(k-1)x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব এবং সমান হবে?

Sol" প্রদত্ত সমীকরণের পৃথায়ক $(k+2)^2 - 4(k-1).4$

$= k^2 + 4k + 4 - 16k + 16$

$= k^2 - 12k + 20$

সমীকরণের মূলগুলি বাস্তব ও সমান হবে, যদি $k^2 - 12k + 20 = 0$

অর্থাৎ $(k-10)(k-2) = 0$ $\therefore k = 10, 2$

04. k-এর যে মানের জন্য সমীকরণ $(k+1)x^2 + 4(k-2)x + 2k = 0$ এর মূল দ্বয়ের মান সমান হবে তা-

Sol" $D = \{4(k-2)\}^2 - 4(k+1)\cdot 2k = 0$ [যেহেতু মূলদ্বয় সমান]

বা, $16(k^2 - 4k + 4) - 8k^2 - 8k = 0$

বা, $2k^2 - 8k + 8 - k^2 - k = 0$

বা, $k^2 - 9k + 8 = 0$

বা, $(k-8)(k-1) = 0$

বা, $k = 1$ অথবা, 8. **Ans.**

05. K এর মান কত হলে $x^2 - 6x - 1 + k(2x+1) = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় সমান হবে?

Sol" $x^2 - 6x - 1 + k(2x+1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + (2k-6)x + k - 1 = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক,

$D = (2k-6)^2 - 4.1.(k-1)$

$= 4k^2 - 24k + 36 - 4k + 4$

$= 4k^2 - 28k + 40$

$= 4(k^2 - 7k + 10)$

$= 4(k-5)(k-2)$

যেহেতু মূল দ্বয়ের মান সমান- $\therefore D = 0$

$\Rightarrow 4(k-5)(k-2) = 0$ $\therefore k = 5$ or 2 **Ans.**

Item-03

06. p-এর মানের ব্যবধি বের করুন যার জন্য $x^2 - 2px + p^2 + 5p - 6 = 0$ সমীকরণের কোন বাস্তব মূল নেই। [৪০তম বিসিএস]

Sol^n আমরা জানি, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে কোন বাস্তব মূল না পাওয়ার অর্থাৎ অবাস্তব মূল পাবার শর্ত হলো: নিশ্চায়ক $(b^2 - 4ac)$ শূন্য থেকে ছোট হতে হবে।

$\therefore \quad b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-2p)^2 - 4.1.(p^2 + 5p - 6) < 0$

$\Rightarrow \quad 4p^2 - 4(p^2 + 5p - 6) < 0$

$\Rightarrow \quad 4p^2 - 4p^2 - 20p + 24 < 0$

$\Rightarrow \quad -20p + 24 < 0$

$\Rightarrow \quad -20p < -24$

$\Rightarrow \quad 20p > 24$

$\Rightarrow \quad p > \frac{24}{20}$

$\Rightarrow \quad p > \frac{6}{5}$

$\therefore \quad$ p এর মানের ব্যবধি $= \left(\frac{6}{5}, \infty\right)$ **Ans.**

07. $x^2 - 10x + 34 = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

Sol^n নিশ্চায়ক $= (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34 = 100 - 136 = -36$

এখানে, নিশ্চায়ক ঋণাত্মক। সুতরাং, মূলগুলো জটিল হবে। **Ans.**

08. $x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো জটিল হলে, k এর মান কিরূপ হতে পারে?

Sol^n নিশ্চায়ক, $(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$ [কারণ মূলগুলো জটিল]

বা, $k^2 - 16 < 0$ বা, $k^2 < 16$ বা, $-4 < k < 4$

অর্থাৎ, $k > -4$ এবং $k < 4$ হলে, মূলগুলো জটিল হবে। **Ans.**

09. k-এর মান কত হলে, $(3k - 1)x^2 - (k + 11)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি জটিল হবে?

Sol^n প্রদত্ত সমকরণের পৃথায়ক $= (k + 11)^2 - 4(3k + 1).9 = k^2 - 86k + 85 = (k - 85)(k - 1)$

মূলদ্বয় জটিল হবে, যদি পৃথায়ক < 0 অর্থাৎ, $(k - 85)(k - 1) < 0$

$\therefore 1 < k < 85$

10. k এর মান কত হলে, $kx^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল হবে?

Sol^n মূলদ্বয় জটিল হবে যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়।

এখন প্রদত্ত সমীকরণের জন্য $b^2 - 4ac = 9 - 4.k.4 < 0 \Rightarrow k > \frac{9}{16}$ **Ans.**

Item-04

11. k এর মান কত হলে $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে?

Sol^n $\therefore$ নিশ্চায়ক, $D = \{2(k+3)\}^2 - 4(k+1)(2k+3) = 4k^2 + 24k + 36 - 8k^2 - 20k - 12$

$= -4k^2 + 4k + 24 = -4(k^2 - k - 6) = -4(k-3)(k+2)$

রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে যদি নিশ্চায়কের মান 0 হয়।

$\therefore -4(k-3)(k+2) = 0$

$\therefore k = 3, -2$ **Ans.**

TYPE 02 গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নসমূহ

01. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় যথাক্রমে $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরফলের যোগবোধক মান হবে।

Sol" $x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β.

$\therefore$ মূলদ্বয়ের যোগফল, $\alpha + \beta = 2b$ এবং মূলদ্বয়ের গুণফল, $\alpha\beta = b^2 - a^2$

এখন, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (2b)^2 - 4(b^2 - a^2) = 4b^2 - 4b^2 + 4a^2 = 4a^2$

$\Rightarrow \alpha - \beta = \pm\sqrt{4a^2}$

$\Rightarrow \alpha - \beta = \pm 2a$

$\therefore \alpha - \beta = 2a$ [যোগবোধক মান নিয়ে]

প্রশ্নানুসারে, নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় হবে যথাক্রমে $2b, 2a$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

$\Rightarrow x^2 - (2a + 2b)\,x + 2a.2b = 0$

$\therefore x^2 - 2(a + b)\,x + 4ab = 0$ **Ans.**

02. যদি $x^2 - px + q = 0$ এবং $x^2 - qx + p = 0$ সমীকরণ দুইটির কেবল একটি মূল সাধারণ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $p + q + 1 = 0$.

Sol" মনে করি, সাধারণ মূলটি α

$\therefore \alpha^2 - p\alpha + q = 0$ ..... (i)

এবং $\alpha^2 - q\alpha + p = 0$ ..... (ii)

সুতরাং (i) এবং (ii) থেকে আমরা বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই, $\frac{\alpha^2}{-p^2+q^2} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{-q+p}$

$\therefore \frac{\alpha^2}{-p^2+q^2} = \frac{\alpha}{q-p} \Rightarrow \alpha = \frac{-p^2+q^2}{q-p}$ ..... (iii)

এবং $\frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{-q+p} \Rightarrow \alpha = \frac{q-p}{-q+p} = \frac{q-p}{-(q-p)}$ ... (iv)

$\therefore$ এখন (iii) এবং (iv) থেকে, $\frac{q^2-p^2}{q-p} = \frac{q-p}{-(q-p)}$

$\therefore \frac{q+p}{1} = -1$

[উভয় পক্ষের লব ও হরকে $(q-p)$ দ্বারা ভাগ করে কারণ $q - p \neq 1$]

$\therefore p + q = -1$ অর্থাৎ, $p + q + 1 = 0$

03. $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণ দুইটির একটিমাত্র সাধারণ মূল থাকলে k এর মানগুলি নির্ণয় কর।

Sol" প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$

সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল α থাকলে

$\alpha^2 + k\alpha - 6k = 0$ ..... (i)

এবং $\alpha^2 - 2\alpha - k = 0$ ..... (ii)

সুতরাং (i) এবং (ii) থেকে আমরা বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{\alpha^2}{-k^2-12k} = \frac{\alpha}{-6k+k} = \frac{1}{-2-k}$$

অর্থাৎ $\frac{\alpha^2}{-k^2-12k}=\frac{\alpha}{-6k+k} \Rightarrow \alpha=\frac{-(k^2+12k)}{-5k}=\frac{k^2+12k}{5k}$ ..... (iii)

এবং $\frac{\alpha}{-6k+k}=\frac{1}{-2-k} \Rightarrow \alpha=\frac{-5k}{-(2+k)}=\frac{5k}{2+k}$ ..... (iv)

এখন (iii) এবং (iv) থেকে, $\frac{k^2+12k}{5k}=\frac{5k}{2+k}$ বা, $k(k+12)(2+k)=25k^2$ বা, $k(k+12)(2+k)-25k^2=0$

বা, $k(k^2+14k+24-25k)=0$ বা, $k(k^2-11k+24)=0$ বা, $k(k-3)(k-8)=0$

$\therefore \quad k=0, 3, 8$

04. $ax^2+bx+b=0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত $m:n$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$

Sol" মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় $m\alpha$ এবং $n\alpha$

$\therefore \quad m\alpha+n\alpha=-\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \alpha=-\frac{b}{a(m+n)}$

এবং $m\alpha \cdot n\alpha=\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \alpha^2=\frac{b}{amn} \quad \Rightarrow \frac{b^2}{a^2(m+n)^2}=\frac{b}{amn} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{(m+n)^2}{mn}$

$\Rightarrow \pm\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{m+n}{\sqrt{mn}}$ [উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে]

ঋণাত্মক চিহ্ন নিয়ে $\frac{m+n}{\sqrt{mn}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$ বা, $\frac{m}{\sqrt{mn}}+\frac{n}{\sqrt{mn}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\therefore \sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$

05. $2bx^2+2(a+b)x+3a=2b$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $a=2b$ অথবা $4a=11b$.

Sol" মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণ, $2bx^2+2(a+b)x+3a-2b=0$ এর একটি মূল α। অপর মূলটি 2α

$\therefore \quad \alpha+2\alpha=\frac{-2(a+b)}{2b}=\frac{-(a+b)}{b}$

বা, $\alpha=\frac{-(a+b)}{3b}$ ..... (i)

এবং $\alpha.2\alpha=2\alpha^2=\frac{3a-2b}{2b}$ ..... (ii)

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে, $\frac{2(a+b)^2}{9b^2}=\frac{3a-2b}{2b}$

$\Rightarrow 4(a+b)^2=9b(3a-2b)$

$\Rightarrow 4a^2+4b^2+8ab-27ab+18b^2=0$

$\Rightarrow 4a^2-19ab+22b^2=0$

$\Rightarrow (a-2b)(4a-11b)=0$

$\therefore \quad a=2b$ অথবা $4a=11b$.

06. যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয়ের পার্থক্য একটি ধ্রুব রাশি হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$.

Sol" মনে করি, $x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = b$ এবং $\alpha\beta = c$ ..... (i)

প্রথম শর্তানুসারে, $\alpha - \beta = k$ (যেখানে k একটি ধ্রুব রাশি)

$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = k^2 \quad \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = k^2$

$\Rightarrow b^2 - 4c = k^2$ ..... (ii) [(i) থেকে]

আবার মনে করি, $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয় γ, δ

$\therefore \gamma + \delta = c$ এবং $\gamma\delta = b$ ..... (iii)

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\gamma - \delta = k \quad \Rightarrow (\gamma - \delta)^2 = k^2 \quad \Rightarrow (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta = k^2$

$\Rightarrow c^2 - 4b = k^2$ ..... (iv) [(iii) থেকে]

$\therefore$ (ii) এবং (iv) থেকে, $b^2 - 4c = c^2 - 4b \Rightarrow b^2 - c^2 + 4(b - c) = 0 \Rightarrow (b - c)(b + c + 4) = 0$

$\therefore b + c + 4 = 0$ [$b - c \neq 0$; কারণ $b = c$ হলে, উভয় সমীকরণ একই হবে]

07. যদি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$

Sol" মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β (যেখানে $\alpha > \beta$)

$\therefore \alpha + \beta = -p$ ..... (i)

এবং $\alpha\beta = q$ ..... (ii)

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\alpha - \beta = 1$ বা, $(\alpha - \beta)^2 = 1$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$ বা, $p^2 - 4q = 1$ বা, $p^2 = 1 + 4q$

বা, $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$ [উভয়পক্ষে $4q^2$ যোগ করে]

$\therefore p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$

08. $4x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α ও β হলে, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ এবং $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর।

Sol" যেহেতু $4x^2 - 5x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{-5}{4} = \frac{5}{4}$ এবং $\alpha\beta = \frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি $= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{4} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = \frac{1}{4} + 4 + 2 = \frac{25}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$.

$\Rightarrow x^2 - \frac{25}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \quad \Rightarrow 4x^2 - 25x + 25 = 0$

09. $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, $p^2 - 4q - 1 = 0$.

Sol^n মনে করি, প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - px + q = 0$ এর একটি মূল α (পূর্ণ সংখ্যা)।

তাহলে, অপর মূলটি $\alpha + 1$

$\therefore \quad \alpha + (\alpha + 1) = p$ বা, $2\alpha = p - 1$ বা, $\alpha = \frac{p-1}{2}$ ..... (i)

এবং $\alpha(\alpha + 1) = q$ বা, $\alpha^2 + \alpha = q$ ..... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে আমরা পাই, $\frac{(p-1)^2}{4} + \frac{p-1}{2} = q$

$\Rightarrow p^2 - 2p + 1 + 2p - 2 = 4q$

$\Rightarrow p^2 - 4q - 1 = 0$

10. $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণের একটি মূলের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$.

Sol^n মনে করি, $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূল α।

তাহলে, $ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল 2α হবে।

$\therefore \quad c\alpha^2 + b\alpha + \alpha = 0$ ..... (i)

এবং $a.(2\alpha)^2 + b.2\alpha + c = 0$

বা, $4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$ ..... (ii)

এখন (i) এবং (ii) থেকে

$$\frac{\alpha^2}{bc - 2ab} = \frac{\alpha}{4a^2 - c^2} = \frac{1}{2bc - 4ab}$$

$\therefore \alpha = \frac{bc - 2ab}{4a^2 - c^2}$ এবং $\alpha = \frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}$

সুতরাং $\frac{bc - 2ab}{4a^2 - c^2} = \frac{4a^2 - c^2}{2bc - 4ab}$

বা, $2(bc - 2ab)(bc - 2ab) = (4a^2 - c^2)^2$

বা, $2b^2(c - 2a)^2 = (c - 2a)^2(c + 2a)^2$

বা, $2b^2(c - 2a)^2 - (c - 2a)^2(c + 2a)^2 = 0$

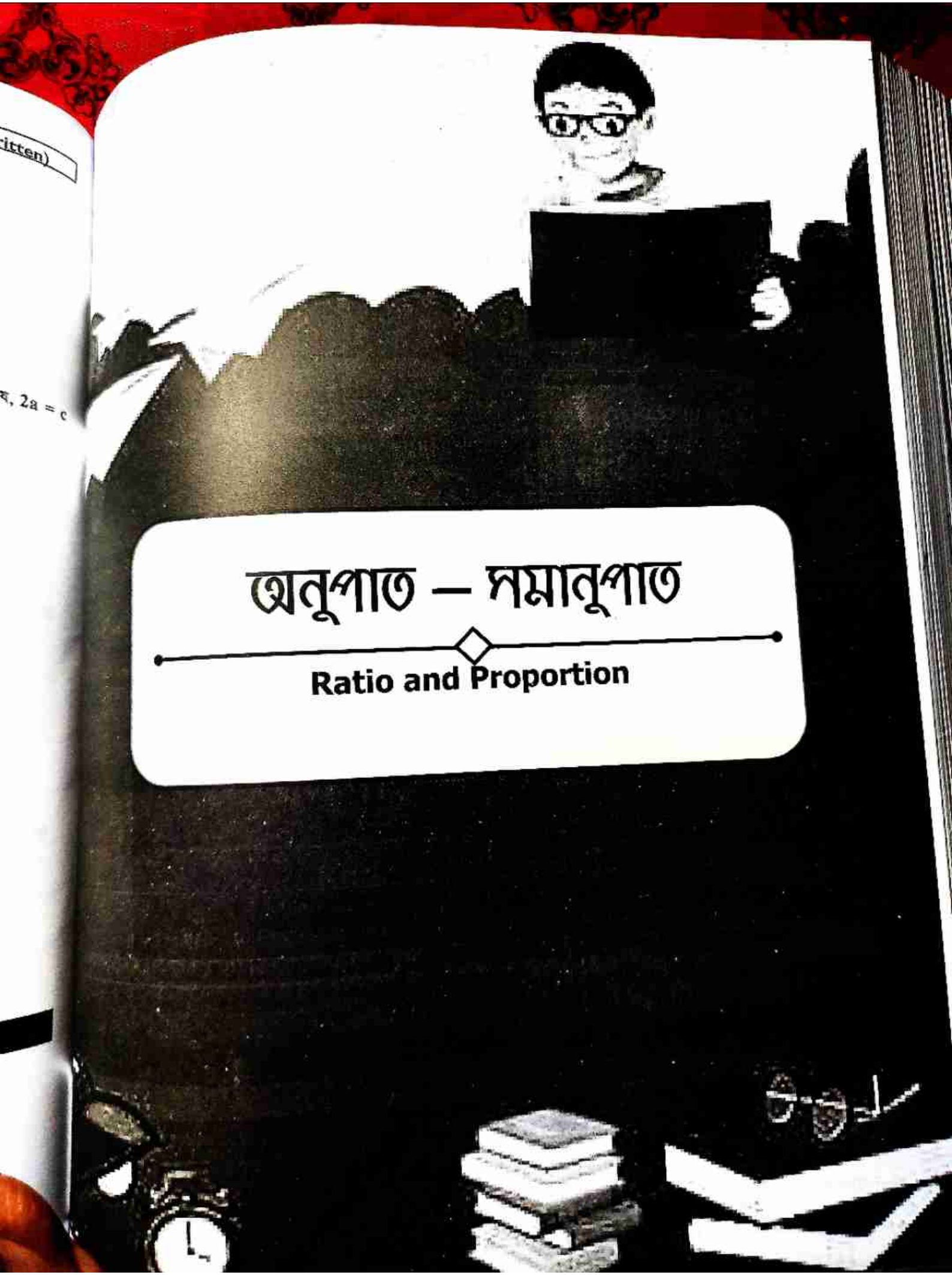
বা, $(c - 2a)^2\{2b^2 - (c + 2a)^2\} = 0$

$\therefore \quad 2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	03, 04, 09
Type-02	02, 04, 06, 07



অনুপাত – সমানুপাত

Ratio and Proportion

পাত বলা হয়। যেমন- ৩:৪ এর ব্যুৎক্রম অনুপাত ৪:৩।

মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত (Mixed or compound ratio): একাধিক সরল অনুপাতের পূর্ব রাশিগুলোর গুণফলকে পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশিগুলোর গুণফলকে উত্তর রাশি ধরে যে অনুপাত হয়, উহাকে মিশ্র অনুপাত বলা হয়। যেমন- ৫ : ৬, ৩ : ৪ ও ২ : ৩ তিনটি সরল অনুপাত। উহাদের পূর্ব রাশিগুলোর গুণফল ৩০ এবং উত্তর রাশিগুলোর গুণফল ৭২। সুতরাং প্রদত্ত অনুপাত তিনটির মিশ্র অনুপাত ৩০ : ৭২।

দ্বিগুণানুপাত (Duplicate ratio): কোন সরল অনুপাতের পূর্ব রাশির বর্গকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির বর্গকে উত্তর রাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতের দ্বিগুণানুপাতিক বলা হয়। যেমন- 3 : 2 এর দ্বিগুণানুপাত $3^2 : 2^2 = 9 : 4$।

ধারাবাহিক অনুপাত (Successive ratio): দুইটি অনুপাত x : y এবং y : z হলে, তাদের সাধারণত x : y : z আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়।

সমানুপাত (Proportion): ৪টি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত এবং তৃতীয় ও চতুর্থটির অনুপাত পরস্পর সমান হলে, ঐ চারটি রাশি একটি সমানুপাত উৎপন্ন করে। যেমন- ৫ টাকা, ১৫ টাকা, ৬ কি.মি. এবং ১৮ কি.মি. রাশি চারটি একটি সমানুপাত তৈরি করে। কেননা, প্রথম দুইটি রাশির অনুপাত $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ এবং দ্বিতীয় দুইটি রাশির অনুপাত $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$। এই সমানুপাতকে 5 : 15 = 6 : 18 লিখে প্রকাশ করা হয়।

ক্রমিক সমানুপাত (Continued proportion): তিনটি প্রদত্ত রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির অনুপাত পরস্পর সমান হলে, সমানুপাতটিকে ক্রমিক সমানুপাত বলে। যেমন- মনে করি, তিনটি রাশি যথাক্রমে ৪ কেজি, ৮ কেজি ও ১৬ কেজি। এ রাশিগুলো দ্বারা দুইটি অনুপাত ৪ : ৮ এবং ৮ : ১৬ গঠন করা যায়। এখানে, ৪ : ৮ = ৮ : ১৬। এরকমের সমানুপাতকে ক্রমিক সমানুপাত বলে।

☑ ক্রমিক সমানুপাতের, প্রথম রাশি × তৃতীয় রাশি = (দ্বিতীয় রাশি)^2।

☑ ক্রমিক সমানুপাতের দ্বিতীয় রাশিটিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির মধ্য সমানুপাতী বা মধ্য রাশি বলা হয়।

Important Problem & Solutions

TYPE 01 সমানুপাত ও ক্রমিক সমানুপাত বিষয়ক সমস্যা

01. তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার যোগফল ১৩ এবং গুণফল ২৭ হইলে সংখ্যা তিনটি কত? [১৩তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, সংখ্যা তিনটি a, b ও c

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ [যেহেতু ক্রমিক সমানুপাতিক]

বা, $b^2 = ac$

আবার, $abc = 27$ বা, $ac = \frac{27}{b}$ বা, $b^2 = \frac{27}{b}$ $[b^2 = ac]$

বা, $b^3 = 27$ বা, $b^3 = 3^3$ বা, $b = 3$

আবার, $a + b + c = 13$

বা, $a + 3 + c = 13$ [b এর মান বসিয়ে]

বা, $a + c = 10$.....(i)

আবার, $abc = 27$ বা, $ac = \frac{27}{b}$ বা, $ac = \frac{27}{3} = 9$ $\therefore ac = 9$

এখন $a - c = \sqrt{(a+c)^2 - 4ac} = \sqrt{(10)^2 - 4\times9} = \sqrt{100 - 36} = 8$.....(ii)

$\therefore$ (i) + (ii) হতে পাই, $2a = 18$ বা, $a = 9$

(i) – (ii) হতে পাই, $2c = 2$ বা, $c = 1$

অতএব, $a = 9$ হলে $c = 1$ অথবা, $a = 1$ হলে $c = 9$

উত্তর : 1, 3, 9 অথবা, 9, 3, 1

02. $\frac{3x+1}{x-1}$ এর দ্বিগুণানুপাত 25 : 1 হলে x এর মান কত? [১৮তম বিসিএস]

Sol" শর্তমতে, $\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{25}{1} \Rightarrow \frac{9x^2+6x+1}{x^2-2x+1} = 25 \Rightarrow 25x^2-50x+25 = 9x^2+6x+1$

$\Rightarrow 16x^2-56x+24=0 \Rightarrow 2x^2-7x+3=0 \Rightarrow 2x^2-6x-x+3=0$

$\Rightarrow 2x(x-3)-1(x-3)=0 \Rightarrow (x-3)(2x-1)=0$

$\therefore x-3=0$ অথবা $2x-1=0$

$\Rightarrow x=3$ অথবা $x=\frac{1}{2}$

$\therefore$ x এর মান 3 বা $\frac{1}{2}$

উত্তর: 3 বা $\frac{1}{2}$

03. যদি a : b = b : c হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০৩)]

Sol" দেওয়া আছে, a : b = b : c

$\therefore b^2 = ac$

এখন, $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{b^2+2bc+c^2} = \frac{a^2+2ab+ac}{ac+2bc+c^2} = \frac{a(a+2b+c)}{c(a+2b+c)} = \frac{a}{c}$

আবার, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ac}{ac+c^2} = \frac{a(a+c)}{c(a+c)} = \frac{a}{c}$

$\therefore \left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

04. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, দেখাও যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} \Rightarrow \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ [একান্তরকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{b^2+2bc+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$

$\Rightarrow \frac{b^2+2bc+c^2-b^2-c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}$ [বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2bc}{b^2+c^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{c}{b^2+c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ [উভয়পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow c(a^2+b^2) = a(b^2+c^2) \Rightarrow ca^2+b^2c = ab^2+ac^2$

$\Rightarrow ca^2+b^2c-ab^2-ac^2=0 \Rightarrow ca^2-ac^2-ab^2+b^2c=0$

$\Rightarrow ac(a-c)-b^2(a-c)=0$

$\Rightarrow (a-c)(ac-b^2)=0$

$\Rightarrow ac-b^2=0$

$\Rightarrow ac=b^2$

$\Rightarrow ac=b.b \quad \therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ [bc দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতি। (দেখানো হলো)

$\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$ হলে প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০৭)]

Sol দেওয়া আছে, $\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$ বা, $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b+c} = a(a+b)$

বা, $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b+c} = a$ [উভয়পক্ষকে $(a+b)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2-ab+b^2 = a^2-ab+ac$ বা, $b^2 = ac$

$\therefore$ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

যদি $a : b = b : c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(ক) $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol দেওয়া আছে, $a : b = b : c$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ $\therefore b^2 = ca$

বামপক্ষ $= \frac{a}{c}$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ca}{ca+c^2} = \frac{a(a+c)}{c(a+c)} = \frac{a}{c}$

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (প্রমাণিত)

(খ) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$

Sol দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ বা, $b^2 = ac$

বামপক্ষ $= a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = \frac{a^2b^2c^2}{a^3}+\frac{a^2b^2c^2}{b^3}+\frac{a^2b^2c^2}{c^3} = \frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$

$= \frac{ac \cdot c^2}{a}+\frac{(ac)^2}{b}+\frac{a^2 \cdot ac}{c}$ [$\because b^2 = ac$]

$= c^3+\frac{(b^2)^2}{b}+a^3 = c^3+\frac{b \cdot b^3}{b}+a^3$

$= c^3+b^3+a^3 = a^3+b^3+c^3 =$ ডানপক্ষ

$\therefore a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$ (প্রমাণিত)

(গ) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$

Sol দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ বা, $b^2 = ac$

বামপক্ষ $= \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+b^2)^3}$ [$ac = b^2$ বসিয়ে]

$= \frac{abc(a+b+c)^3}{b^3(a+b+c)^3} = \frac{abc}{b^2 \cdot b} = \frac{abc}{ac \cdot b} = 1$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$ (প্রমাণিত)

TYPE 02 সমাধানকরণ

01. সমাধান কর : $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$ যেখানে $0<b<2a<2b$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০৭)]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$ বা, $\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\frac{1+ax}{1-ax}$

বা, $\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{(1+ax)^2}{(1-ax)^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{1+bx}{1-bx}=\frac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}$ বা, $\frac{1+bx+1-bx}{1+bx-1+bx}=\frac{1+2ax+a^2x^2+1-2ax+a^2x^2}{1+2ax+a^2x^2-1+2ax-a^2x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2bx}=\frac{2(1+a^2x^2)}{4ax}$ বা, $\frac{1}{bx}=\frac{1+a^2x^2}{2ax}$ বা, $2ax=bx(1+a^2x^2)$ বা, $x\{2a-b(1+a^2x^2)\}=0$

$\therefore x=0$ অথবা, $2a-b(1+a^2x^2)=0$

বা, $b(1+a^2x^2)=2a$

বা, $1+a^2x^2=\frac{2a}{b}$

বা, $a^2x^2=\frac{2a}{b}-1$

বা, $x^2=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2a}{b}-1\right)$

$\therefore x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=0,\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$

02. সমাধান কর:

(ক) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{3}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(ক))]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{3}$ বা, $\frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}}=\frac{1+3}{1-3}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\sqrt{1-x}}=\frac{4}{-2}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=2$ বা, $\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}$ [ব্যাস্তকরণ করে]

বা, $(\sqrt{1-x})^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1-x=\frac{1}{4}$

বা, $-x=\frac{1}{4}-1=\frac{1-4}{4}=\frac{-3}{4}$

$\therefore x=\frac{3}{4}$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{3}{4}$.

(ঘ) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{x}$, $2a>b>0$ এবং $x\neq 0$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(খ))]

Sol^n দেওয়া আছে, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{x}$

সুতরাং $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b+x}{b-x}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b+x}{b-x}$ বা, $\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b+x}{b-x}$ বা, $\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2}=\frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(a+x)(a+x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$ বা, $\frac{a+x}{a-x}=\frac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2}$

বা, $\frac{a+x+a-x}{a+x-a+x}=\frac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a}{2x}=\frac{2(b^2+x^2)}{4bx}$ বা, $\frac{a}{x}=\frac{b^2+x^2}{2bx}$ বা, $a=\frac{b^2+x^2}{2b}$ [উভয়পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^2+b^2=2ab$ বা, $x^2=2ab-b^2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2ab-b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\pm\sqrt{2ab-b^2}$

(ঙ) $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3=\frac{1+x}{1-x}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(গ))]

Sol^n দেওয়া আছে, $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3=\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow 81=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\times\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \Rightarrow 81=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$

$\Rightarrow \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4=9^2 \Rightarrow \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=9$ [বর্গমূল করে]

$\Rightarrow \frac{1+x}{1-x}=\pm 3$ [বর্গমূল করে]

এখন, $\frac{1+x}{1-x}=3$ হলে, $\Rightarrow 1+x=3(1-x) \Rightarrow 1+x=3-3x \Rightarrow 3x+x=3-1 \Rightarrow 4x=2$

$\Rightarrow x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

আবার, $\frac{1+x}{1-x}=-3$ হলে, $\Rightarrow 1+x=-3(1-x) \Rightarrow 1+x=-3+3x \Rightarrow 1+4=3x-x$

$\Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x=\frac{1}{2}, 2$.

TYPE 03 প্রমাণ করণ (Pattern-01)

01. $y=\frac{\sqrt{2p+3q}+\sqrt{2p-3q}}{\sqrt{2p+3q}-\sqrt{2p-3q}}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $3q\left(1+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{4p}{y}$. [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (সা.গণিত) অধ্যায়-১১.১-অনুশীলনীর ১২ নং প্রশ্নের অনুরূপ]

Sol" $y=\frac{\sqrt{2p+3q}+\sqrt{2p-3q}}{\sqrt{2p+3q}-\sqrt{2p-3q}}$

$\Rightarrow \frac{y+1}{y-1}=\frac{\sqrt{2p+3q}+\sqrt{2p-3q}+\sqrt{2p+3q}-\sqrt{2p-3q}}{\sqrt{2p+3q}+\sqrt{2p-3q}-\sqrt{2p+3q}+\sqrt{2p-3q}}$ [যোজন বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{y+1}{y-1}=\left(\frac{2\sqrt{2p+3q}}{2\sqrt{2p-3q}}\right)$

$\Rightarrow \frac{y^2+2y+1}{y^2-2y+1}=\frac{4(2p+3q)}{4(2p-3q)}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{y^2+2y+1}{y^2-2y+1}=\frac{2p+3q}{2p-3q}$

$\Rightarrow \frac{y^2+2y+1+y^2-2y+1}{y^2+2y+1-y^2+2y-1}=\frac{2p+3q+2p-3q}{2p+3q-2p+3q}$ [যোজন বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2y^2+2}{4y}=\frac{4p}{6q} \quad \Rightarrow \frac{2(y^2+1)}{2.2y}=\frac{2p}{3q} \quad \Rightarrow \frac{y^2+1}{2y}=\frac{2p}{3q}$

$\Rightarrow 3q(y^2+1)=4py$

$\Rightarrow \frac{3q(y^2+1)}{y^2}=\frac{4py}{y^2}$ [উভয় পক্ষকে y^2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 3q\left(1+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{4p}{y}$ (প্রমাণিত)

02. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=p$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p^2-\frac{2p}{x}+1=0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০৪)]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=p$

বা, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{p+1}{p-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}}=\frac{p+1}{p-1}$ বা, $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=\frac{p+1}{p-1}$

বা, $\frac{1+x}{1-x}=\frac{(p+1)^2}{(p-1)^2}=\frac{p^2+2p+1}{p^2-2p+1}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{1+x+1-x}{1+x-1+x}=\frac{p^2+2p+1+p^2-2p+1}{p^2+2p+1-p^2+2p-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2x}=\frac{2(p^2+1)}{4p}$

বা, $\frac{1}{x}=\frac{p^2+1}{2p}$

বা, $p^2+1=\frac{2p}{x}$

$\therefore p^2-\frac{2p}{x}+1=0$ [প্রমাণিত]

13. $x=\frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2,\ a\neq b$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" দেওয়া আছে, $x=\frac{4ab}{a+b}$ .....(i)

বা, $\frac{x}{2a}=\frac{4ab}{2a(a+b)}$ [(i) নং এর উভয়পক্ষকে নং এর 2a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2a}=\frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{3b+a}{b-a}$

বা, $\frac{x}{2b}=\frac{4ab}{2b(a+b)}$ [(i) নং এর উভয়পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2b}=\frac{2a}{a+b}$

বা, $\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3a+b}{a-b}$

বামপক্ষ $=\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}=\frac{3b+a}{b-a}-\frac{3a+b}{b-a}$

$=\frac{3b+a-3a-b}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{(b-a)}=2=$ ডানপক্ষ

সুতরাং $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$. (দেখানো হলো)

14. $x=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3-3mx^2+3x-m=0$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" দেওয়া আছে, $x=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}+\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}-\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \left(\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $\frac{x^3+3x^2.1+3.x.1^2+1^3}{x^3-3x^2.1+3.x.1^2-1^3} = \frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1} = \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$

[যোজন-বিয়োজন করা]

বা, $\frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)} = \frac{2m}{2}$

বা, $\frac{x^3+3x}{3x^2+1} = m$

বা, $x^3+3x = 3mx^2+m$

$\therefore x^3-3mx^2+3x-m=0$. (প্রমাণিত)

05. $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে, দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১)]

Sol" দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$

$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2} = \frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2(x^2+1^2)}{4.x.1} = \frac{4a}{6b}$ $\left[\because (a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)\right.$ এবং $\left.(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab\right]$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$

$\Rightarrow 3x^2b+3b = 4xa$ [আড়গুণ করে]

$\therefore 3bx^2-4ax+3b=0$ (দেখানো হলো).

01. যদি $\frac{p}{q}=\frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p+q}{a}=\frac{p-q}{q}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{p}{q}=\frac{a^2}{b^2}$ ..... (i)

এবং $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ ..... (ii)

(i) নং হতে পাই, $\frac{p}{q}=\frac{a^2}{b^2}$ বা, $\frac{p}{q}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$

বা, $\frac{p}{q}=\left(\sqrt{\frac{a+q}{a-q}}\right)^2$ [(ii) নং হতে]

বা, $\frac{p}{q}=\frac{a+q}{a-q}$ বা, $ap-pq=aq+q^2$ বা, $ap-aq=pq+q^2$

বা, $a(p-q)=q(p+q)$ বা, $q(p+q)=a(p-q)$

$\frac{p+q}{a}=\frac{p-q}{q}$ (দেখানো হলো)

TYPE 04 প্রমাণ করণ (Pattern-02)

01. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$.

[৩১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" মনে করি, $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=k$

$\therefore\ x=bk+ck,\ y=ck+ak,\ z=ak+bk$

১ম অংশ $=\frac{a}{y+z-x}=\frac{a}{ck+ak+ak+bk-bk-ck}=\frac{a}{2ak}=\frac{1}{2k}$

২য় অংশ $=\frac{b}{z+x-y}=\frac{b}{ak+bk+bk+ck-ck-ak}=\frac{b}{2bk}=\frac{1}{2k}$

৩য় অংশ $=\frac{c}{x+y-z}=\frac{c}{bk+ck+ck+ak-ak-bk}=\frac{c}{2ck}=\frac{1}{2k}$

$\therefore$ ১ম অংশ = ২য় অংশ = ৩য় অংশ। (প্রমাণিত)

02. $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" ধরি, $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=k$

$\therefore\ \frac{bz-cy}{a}=k,\ \frac{cx-az}{b}=k,\ \frac{ay-bx}{c}=k$

সুতরাং $bz-cy=ak$ ..... (i)

$cx-az=bk$ ..... (ii)

$ay-bx=ck$ ..... (iii)

(i) নং, (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা গুণ করে যোগ করি।

$$abz - acy = a^2k$$
$$bcz - abz = b^2k$$
$$acy - bcx = c^2k$$
$$0 = k(a^2 + b^2 + c^2)$$

$\therefore \quad k = 0$

(i) নং সমীকরণে k এর মান বসিয়ে পাই, $bz - cy = 0 \Rightarrow bz = cy \Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{y}{b}$

(ii) নং সমীকরণে k এর মান বসিয়ে পাই, $cx - az = 0 \Rightarrow cx = az \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$

$\therefore \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (প্রমাণিত)

03. $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a + b + c \neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$

$\Rightarrow \frac{a+b-c-a-b}{a+b} = \frac{b+c-a-b-c}{b+c} = \frac{c+a-b-c-a}{c+a}$ [বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{-c}{a+b} = \frac{-a}{b+c} = \frac{-b}{c+a} \quad \Rightarrow \frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$ [যোজন করে]

$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ [$(a + b + c)$ দ্বারা ভাগ করে, কারণ $(a + b + c) \neq 0$]

$\Rightarrow c = a = b$ অর্থাৎ $a = b = c$ (প্রমাণিত)

04. $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাত $= \frac{1}{a+b+c}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol" দেওয়া আছে, $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z \neq 0$

ধরি, $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc} = k$

$\therefore \frac{x}{xa+yb+zc}$ বা, $x = k(xa + yb + zc)$ ..... (i)

$\frac{y}{ya+zb+xc} = k$ বা, $y = k(ya + zb + xc)$ ..... (ii)

$\therefore \frac{z}{za+xb+yc} \quad \therefore \quad z = k(za + xb + yc)$ ..... (iii)

(i) নং, (ii) নং ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$x + y + z = k(xa + ya + za + xb + yb + zb + xc + yc + zc)$

বা, $x + y + z = k\{a(x + y + z) + b(x + y + z) + c(x + y + z)\}$

বা, $x + y + z = k(x + y + z)(a + b + c)$

বা, $k(x+y+z)(a+b+c) = x+y+z$

বা, $k = \frac{x+y+z}{(x+y+z)(a+b+c)}$ $\therefore k = \frac{1}{a+b+c}$

সুতরাং, প্রতিটি অনুপাত $= = \frac{1}{a+b+c}$ (দেখানো হলো)

৬. যদি $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s$, হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol দেওয়া আছে, $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s$

ধরি, $(a+b+c)p = (b+c-a)q = (c+a-b)r = (a+b-c)s = k$

$\therefore p = \frac{k}{a+b+c}, q = \frac{k}{b+c-a}, r = \frac{k}{c+a-b}, s = \frac{k}{a+b-c}$

$\therefore \frac{1}{p} = \frac{a+b+c}{k}, \frac{1}{q} = \frac{b+c-a}{k}, \frac{1}{r} = \frac{c+a-b}{k}$ এবং $\frac{1}{s} = \frac{a+b-c}{k}$

$\therefore \frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} = \frac{b+c-a}{k}+\frac{c+a-b}{k}+\frac{a+b-c}{k}$

$= \frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{k} = \frac{a+b+c}{k} = \frac{1}{p}$

সুতরাং $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}$ (প্রমাণিত)

৬. যদি $lx = my = nz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+\frac{lm}{n^2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol মনে করি, $lx = my = nz = k$

$\therefore lx = k$, এবং $my = k$, এবং $nz = k$

বা, $x = \frac{k}{l}$ বা, $y = \frac{k}{m}$ বা, $z = \frac{k}{n}$

বামপক্ষ $= \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy} = \frac{\left(\frac{k}{l}\right)^2}{\frac{k}{m}\cdot\frac{k}{n}}+\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2}{\frac{k}{n}\cdot\frac{k}{l}}+\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\frac{k}{l}\cdot\frac{k}{m}} = \frac{\frac{k^2}{l^2}}{\frac{k^2}{mn}}+\frac{\frac{k^2}{m^2}}{\frac{k^2}{nl}}+\frac{\frac{k^2}{n^2}}{\frac{k^2}{lm}}$

$= \frac{k^2}{l^2}\times\frac{mn}{k^2}+\frac{k^2}{m^2}\times\frac{nl}{k^2}+\frac{k^2}{n^2}\times\frac{lm}{k^2} = \frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+\frac{lm}{n^2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+\frac{lm}{n^2}$ (দেখানো হলো)

৭. যদি $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$ এবং x, y, z সকল পরস্পর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা $\frac{1}{2}$ এর সমান হবে।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০৯)]

Sol মনে করি, $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = k$

$\therefore x = k(y+z)$ ..... (1)

$y = k(z+x)$ ..... (2)

$z = k(x+y)$ ..... (3)

সমীকরণ (1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই, $x - y = k(y-x)$ বা, $k(y-x) = -(y-x)$

$\therefore k = -1$

আবার, সমীকরণ (১), (২) ও (3) যোগ করে পাই, $x + y + z = k(y + z + z + x + x + y) = 2k(x + y + z)$

বা, $k = \frac{(x+y+z)}{2(x+y+z)}$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান -1 অথবা, $\frac{1}{2}$।

08. যদি $ax = by = cz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-১০)]

Sol^n মনে করি, $ax = by = cz = k$

$\therefore x = \frac{k}{a}, y = \frac{k}{b}, z = \frac{k}{c}$

এখন, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{k^2}{a^2} \times \frac{bc}{k^2} + \frac{k^2}{b^2} \times \frac{ca}{k^2} + \frac{k^2}{c^2} \times \frac{ab}{k^2} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

TYPE 05 প্রমাণ করণ (Pattern-03)

01. যদি $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $c = a$ অথবা, $a + b + c + d = 0$ [১৮তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০৮)]

Sol^n দেওয়া আছে, $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$

$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{b+c} - 1\right) = \left(\frac{c+d}{d+a} - 1\right)$ [উভয় পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

$\Rightarrow \frac{a+b-b-c}{b+c} = \frac{c+d-d-a}{d+a}$

$\Rightarrow \frac{a-c}{b+c} = \frac{c-a}{d+a}$

$\Rightarrow -\frac{c-a}{b+c} = \frac{c-a}{d+a}$

$\Rightarrow \frac{c-a}{b+c} + \frac{c-a}{d+a} = 0$

$\Rightarrow (c-a)\left\{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a}\right\} = 0$

$\therefore$ হয়, $c - a = 0$

অথবা, $c = a$

আবার, $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} = 0$

$\Rightarrow \frac{d+a+b+c}{(b+c)(d+a)} = 0$

$\Rightarrow a + b + c + d = 0$

$\therefore c = a$ এবং $a + b + c + d = 0$ (প্রমাণিত)

প্র. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$ [নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০৪)]

Sol মনে করি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

$\therefore a=bk$ এবং $c=dk$

এখন, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(bk)^2+b^2}{(bk)^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

এবং $\frac{ac+bd}{ac-bd}=\frac{bk\,.\,dk+bd}{bk\,.\,dk-bd}=\frac{bd(k^2+1)}{bd(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

$\therefore \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$

Type 06 প্রমাণ করণ (Pattern-04)

প্র. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(ক))]

Sol দেওয়া আছে, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক

$\therefore \frac{c}{d}=k$ বা, $c=dk$

$\frac{b}{c}=k$ বা, $b=ck=dk.\,k=dk^2$

$\frac{a}{b}=k$ বা, $a=bk=dk^2.k=dk^3$

বামপক্ষ $=\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\frac{(dk^3)^3+(dk^2)^3}{(dk^2)^3+(dk)^3}=\frac{d^3k^9+d^3k^6}{d^3k^6+d^3k^3}=\frac{d^3k^6\,(k^3+1)}{d^3k^3\,(k^3+1)}=k^3$

ডানপক্ষ $=\frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}=\frac{(dk^2)^3+(dk)^3}{(dk)^3+d^3}=\frac{d^3k^6+d^3k^3}{d^3k^3+d^3}=\frac{d^3k^3\,(k^3+1)}{d^3\,(k^3+1)}=k^3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

প্র. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হলে, $(a^2+b^2+c^2)\,(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮(খ))]

Sol দেওয়া আছে, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক

$\therefore \frac{c}{d}=k$ বা, $c=dk$

$\frac{b}{c}=k$ বা, $b=ck=dk.\,k=dk^2$

$\frac{a}{b}=k$ বা, $a=bk=dk^2.k=dk^3$

বামপক্ষ $= (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$
$= (d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2)(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2) = d^2k^2(k^4 + k^2 + 1) \cdot d^2(k^4 + k^2 + 1)$
$= d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

ডানপক্ষ $= (ab + bc + cd)^2 = (dk^3 \cdot dk^2 + dk^2 \cdot dk + dk \cdot d)^2$
$= \{d^2k(k^4 + k^2 + 1)\}^2 = d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

$\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$. (দেখানো হলো)

TYPE 07 অনুপাতের বাস্তব প্রয়োগ বিষয়ক সমস্যা

01. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। 7 বছর পূর্বে তাদের বয়সের অনুপাত ছিল 5 : 2। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]*

Sol" মনে করি, পিতার বর্তমান বয়স a বছর
এবং পুত্রের বর্তমান বয়স b বছর

তাহলে প্রশ্নমতে, $a + b = 70$ ..... (i)

$$\frac{a-7}{b-7} = \frac{5}{2} \quad \text{..... (ii)}$$

(ii) নং থেকে পাই, $\frac{a-7}{5} = \frac{b-7}{2} = \frac{a+b-14}{7} = \frac{70-14}{7} = \frac{56}{7} = 8$

বা, $a - 7 = 8 \times 5 = 40$ $\therefore a = 40 + 7 = 47$

এবং $b - 7 = 8 \times 2 = 16$ বা, $b = 16 + 7$ $\therefore b = 23$

$\therefore$ 5 বছর পর পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত $\frac{a+5}{b+5} = \frac{47+5}{23+5} = \frac{52}{28} = \frac{13}{7} = 13:7$

$\therefore$ পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত 13 : 7.

02. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত 7 : 2 এবং 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 8 : 3 হবে। তাদের বর্তমান বয়স কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-০২)]*

Sol" মনে করি, পিতার বর্তমান বয়স a বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স b বছর।
প্রশ্নের প্রথম ও দ্বিতীয় শর্তানুসারে যথাক্রমে পাই,

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{2} \text{ ..... (1)}$$

$$\frac{a+5}{b+5} = \frac{8}{3} \text{ ..... (2)}$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $a = \frac{7b}{2}$ ..... (3)

সমীকরণ (2) থেকে পাই, $3(a + 5) = 8(b + 5)$ বা, $3a + 15 = 8b + 40$

বা, $3a - 8b = 40 - 15$

বা, $3 \times \frac{7b}{2} - 8b = 25$ [(3) ব্যবহার করে]

বা, $\frac{21b - 16b}{2} = 25$

বা, $5b = 50$

$\therefore b = 10$

সমীকরণ (3) এ $b = 10$ বসিয়ে পাই, $a = \frac{7 \times 10}{2} = 35$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স 35 বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 10 বছর।

03. 1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol ১ ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম $= \frac{7}{10}$ গ্রাম
আমরা জানি, 1 ঘন সে.মি. পানির ওজন = 1 গ্রাম

$\therefore$ কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা $= \left(\frac{\text{কাঠের ওজন}}{\text{পানির ওজন}} \times 100\right)$ ভাগ $= \left(\frac{\frac{7}{10}}{1} \times 100\right)$ ভাগ

$= \left(\frac{7}{10} \times 100\right) = 70$ ভাগ

$\therefore$ কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের 70%।

04. ক, খ, গ, ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 : 2 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3 : 2 হয়।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol ক : খ = 2 : 3
খ : গ = 1 : 2 = 3 : 6 [3 দ্বারা গুণ করে]
গ : ঘ = 3 : 2 = 6 : 4 [2 দ্বারা গুণ করে]
$\therefore$ ক : খ : গ : ঘ = 2 : 3 : 6 : 4
অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 2 + 3 + 6 + 4 = 15
$\therefore$ ক পায় $= \left(300 \text{ এর } \frac{2}{15}\right)$ টাকা = 40 টাকা
$\therefore$ খ পায় $= \left(300 \text{ এর } \frac{3}{15}\right)$ টাকা = 60 টাকা
$\therefore$ গ পায় $= \left(300 \text{ এর } \frac{6}{15}\right)$ টাকা = 120 টাকা
$\therefore$ ঘ পায় $= \left(300 \text{ এর } \frac{4}{15}\right)$ টাকা = 80 টাকা
$\therefore$ ক 40 টাকা, খ 60 টাকা, গ 120 টাকা এবং ঘ 80 টাকা পায়।

05. তিন জন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ এবং $\frac{5}{6}$ হলে, কে কয়টি মাছ পেল?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol তিনজনের অংশের অনুপাত $= \frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$

$= \frac{2 \times 30}{3} : \frac{4 \times 30}{5} : \frac{5 \times 30}{6}$ [30 দ্বারা গুণ করে]

$= 20 : 24 : 25$

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল $= (20 + 24 + 25) = 69$

$\therefore$ ১ম জেলে পায় $= \left(690 \text{ এর } \frac{20}{69}\right)$ টি = 200 টি

$\therefore$ ২য় জেলে পায় $= \left(690 \text{ এর } \frac{24}{69}\right)$ টি = 240 টি

$\therefore$ ৩য় জেলে পায় $= \left(690 \text{ এর } \frac{25}{69}\right)$ টি = 250 টি

১ম জেলে 200 টি, ২য় জেলে 240 টি এবং ৩য় জেলে 250 টি মাছ পেল।

06. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে.মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 : 7 হলে, প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

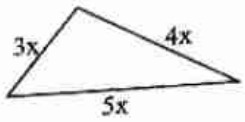
Sol দেওয়া আছে, ত্রিভুজের পরিসীমা = 45 সে.মি.

এবং বাহু তিনটির অনুপাত = 3 : 5 : 7

ধরি, বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3x সে.মি., 5x সে.মি. এবং 7x সে.মি.।

প্রশ্নমতে, $3x + 5x + 7x = 45$

$\Rightarrow 15x = 45 \quad \Rightarrow x = \frac{45}{15} = 3$



তাহলে, ১ম বাহুটির দৈর্ঘ্য = 3x সে.মি. = 3 × 3 সে.মি. = 9 সে.মি.

২য় বাহুটির দৈর্ঘ্য = 5x সে.মি. = 5 × 3 সে.মি. = 15 সে.মি.

৩য় বাহুটির দৈর্ঘ্য = 7x সে.মি. = 7 × 3 সে.মি. = 21 সে.মি.

∴ বাহুগুলোর পরিমাণ 9 সে.মি., 15 সে.মি. এবং 21 সে.মি.

07. একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন অফিস সহকারী এবং 3 জন অফিস সহায়ক আছে। একজন অফিস সহায়ক 1 টাকা পেলে একজন অফিস সহকারী পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 150,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পায়?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol 1 জন অফিস সহায়ক পায় 1 টাকা

∴ 3 " " " " $1 \times 3 = 3$ টাকা

1 জন অফিস সহকারী পায় 2 টাকা

∴ 7 " " " " $2 \times 7 = 14$ টাকা

1 জন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা

∴ 2 " " " $4 \times 2 = 8$ টাকা

∴ অফিস সহায়ক, অফিস সহকারী ও কর্মকর্তাদের মোট টাকার অনুপাত = 3:14:8

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 3 + 14 + 8 = 25

∴ 3 জন অফিস সহায়ক পায় = $\left(150{,}000 \text{ এর } \frac{3}{25}\right) = 18000$ টাকা

প্রত্যেক অফিস সহায়ক পায় $\frac{18000}{3} = 6000$ টাকা

∴ 7 জন অফিস সহকারী পায় = $\left(150{,}000 \text{ এর } \frac{14}{25}\right) = 84000$ টাকা

প্রত্যেক অফিস সহকারী পায় $\frac{84000}{7} = 12000$ টাকা

∴ 2 জন কর্মকর্তা পায় = $\left(150{,}000 \text{ এর } \frac{8}{25}\right) = 48000$ টাকা

প্রত্যেক কর্মকর্তা পায় $\frac{48000}{2} = 24000$ টাকা

∴ কর্মকর্তা পায় 24000 টাকা, অফিস সহকারী পায় 12000 টাকা এবং অফিস সহায়ক পায় 6000 টাকা।

৫. যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol মনে করি, বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য x একক
∴ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গ একক
20% বৃদ্ধিতে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য
$= \left(x + x \text{ এর } \frac{20}{100}\right)$ একক $= \left(x + \frac{20x}{100}\right)$ একক
$= \frac{100x + 20x}{100}$ একক $= \frac{120x}{100}$ একক $= 1.2x$ একক
20% বৃদ্ধিতে পরে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (1.2x)^2 = 1.44x^2$ বর্গ একক
∴ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $(1.44x^2 - x^2) = 0.44x^2$ বর্গ একক
ক্ষেত্রফল x^2 বর্গ একককে বৃদ্ধি পায় $0.44x^2$ বর্গ একক
" 1 " " " " $\frac{0.44x^2}{x^2}$ " "
∴
" 100 " " " " $\frac{0.44x^2 \times 100}{x^2} = 44$ বর্গ একক
∴
∴ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় 44%।

৬. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার
এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = y মিটার
আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = xy বর্গ মিটার
দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি পাওয়ায় মোট দৈর্ঘ্য $= \left(x + x \text{ এর } \frac{10}{100}\right)$ মিটার
$= \left(x + \frac{x}{10}\right)$ মিটার
$= \left(\frac{10x + x}{10}\right)$ মিটার
$= \frac{11x}{10}$ মিটার

আবার,
প্রস্থ 10% হ্রাস এর পর অবশিষ্ট প্রস্থ $= \left(y - y \text{ এর } \frac{10}{100}\right)$ মিটার
$= \left(y - \frac{10y}{100}\right)$ মিটার
$= \left(y - \frac{y}{10}\right)$ মিটার $= \frac{9y}{10}$ মিটার
হ্রাস বা বৃদ্ধি করার পর নতুন সৃষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{11x}{10} \times \frac{9y}{10}\right)$ বর্গমিটার $= \frac{99xy}{100}$ বর্গমিটার
∴ ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় $= xy - \frac{99xy}{100}$ বর্গমিটার $= \frac{100xy - 99xy}{100}$ বর্গমিটার $= \frac{xy}{100}$ বর্গমিটার
ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায় $= \left(\frac{xy}{100} \times \frac{1}{xy} \times 100\right) = 1$
∴ ক্ষেত্রফল 1% হ্রাস পাবে।

10. একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4 : 7। ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 304 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পরে তার ফলন কত হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol" মনে করি, সেচের পরে x কুইন্টাল ধান ফলে

প্রশ্নমতে, $304 : x = 4 : 7$

$\Rightarrow \frac{304}{x} = \frac{4}{7}$

$\Rightarrow 4x = 304 \times 7$

$\Rightarrow x = \frac{304 \times 7}{4} = \frac{2128}{4} = 532$

$\therefore$ সেচ পাওয়ার পরে ফলন হবে 532 কুইন্টাল।

11. ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3 : 2 এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4 : 3 হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol" মনে করি, উৎপন্ন চালের পরিমাণ x

এবং উৎপন্ন সুজির পরিমাণ y

ধান ও চালের ক্ষেত্রে,

প্রশ্নমতে, $1 : x = 3 : 2$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

গম ও সুজির ক্ষেত্রে,

প্রশ্নমতে, $1 : y = 4 : 3$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$

চাল ও সুজির অনুপাত $= x : y = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2 \times 12}{3} : \frac{3 \times 12}{4}$ [12 দ্বারা গুণ করে]

$= 8 : 9$

$\therefore$ চাল সুজির অনুপাত 8 : 9।

12. একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 4 এবং 2 : 5 হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২)]

Sol" মনে করি, দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সাধারণ রাশি x

এবং প্রস্থের অনুপাতের সাধারণ রাশি y

১ম ক্ষেত্রে, দৈর্ঘ্য 3x মিটার ২য় ক্ষেত্রে, দৈর্ঘ্য 4x মিটার

১ম ক্ষেত্রে, প্রস্থ 2y মিটার ২য় ক্ষেত্রে, প্রস্থ 5y মিটার

১ম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 3x . 2y বর্গমিটার = 6xy বর্গমিটার

২য় ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 4x . 5y বর্গমিটার = 20xy বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $6xy = 432 \Rightarrow xy = \frac{432}{6} = 72$

২য় ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (20×72) বর্গমিটার = 1440 বর্গমিটার

$\therefore$ অপর জমির ক্ষেত্রফল 1440 বর্গমিটার।

13. জেমি ও সিমি একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি 2 বছর পর মুনাফা-আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর সিমি মুনাফা-আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]*

Sol মনে করি, জেমির ঋণের পরিমাণ x টাকা
এবং সিমির ঋণের পরিমাণ y টাকা
10% হার সরল মুনাফায়,

x টাকার 2 বছরের মুনাফা $= \left(x \times 2 \times \frac{10}{100}\right) = \frac{x}{5}$ টাকা

$\therefore$ জেমি শোধ করে $\left(x + \frac{x}{5}\right)$ টাকা $= \frac{5x + x}{5} = \frac{6x}{5}$ টাকা

আবার, 10% হার সরল মুনাফায়,

y টাকার 3 বছরের মুনাফা $= \left(y \times 3 \times \frac{10}{100}\right)$ টাকা $= \frac{3y}{10}$ টাকা

$\therefore$ সিমি শোধ করে $\left(y + \frac{3y}{10}\right)$ টাকা $= \left(\frac{10y + 3y}{10}\right)$ টাকা $= \frac{13y}{10}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{6x}{5} = \frac{13y}{10} \quad \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{13}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{13}{12}$

$\therefore$ x : y = 13 : 12
$\therefore$ জেমির ঋণের পরিমাণ : সিমির ঋণের পরিমাণ = 13 : 12

14. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 7 এবং এদের গ. সা. গু 4 হলে, সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]*

Sol দেওয়া আছে, x : y = 5 : 7
মনে করি, x = 5a
$\therefore$ y = 7a
এবং x ও y এর গ.সা. গু. = a
কিন্তু দেওয়া আছে, x ও y এর গ. সা. গু = 4
$\therefore$ a = 4
আবার, 5a ও 7a ল. সা. গু. = 35a = (35 × 4) = 140
$\therefore$ x ও y এর ল. সা. গু = 140
$\therefore$ সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু. 140.

15. ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত 3 : 2 হলে কে কত রান করেছে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]*

Sol সাকিব : মুশফিকুর = 3 : 2 = 9 : 6 [3 দ্বারা গুণ করে]
মুশফিকুর : মাশরাফী = 3 : 2 = 6 : 4 [2 দ্বারা গুণ করে]
$\therefore$ সাকিব : মুশফিকুর : মাশরাফী = 9 : 6 : 4
অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 9 + 6 + 4 = 19

$\therefore$ সাকিব করেছে $= \left(171 \text{ এর } \frac{9}{19}\right) = 81$ রান

$\therefore$ মুশফিকুর করেছে $= \left(171 \text{ এর } \frac{6}{19}\right) = 54$ রান

$\therefore$ মাশরাফী করেছে $= \left(171 \text{ এর } \frac{4}{19}\right) = 36$ রান

$\therefore$ সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফীর রান যথাক্রমে 81, 54 এবং 36।

TYPE 08: সৃজনশীল প্রশ্ন

01. a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতিক এবং $x = \frac{10pq}{p+q}$

ক) দেখাও যে, $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

খ) প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

গ) $\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q}$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $p \neq q$ [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরনের অংক নং-১)]

Sol" ক) যেহেতু a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতিক,

$\therefore a : b = b : c$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ বা, $ac = b^2$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ac}{ac+c^2} = \frac{a(a+c)}{c(a+c)} = \frac{a}{c}$ = বামপক্ষ

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

খ) দেওয়া আছে, a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতিক

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$, যেখানে k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক

$\therefore \frac{c}{d} = k$ বা, $c = dk$

$\frac{b}{c} = k$ বা, $b = ck = dk.\ k = dk^2$

$\frac{a}{b} = k$ বা, $a = bk = dk^2.k = dk^3$

বামপক্ষ$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\ \{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$

$= (d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2)(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2)$

$= d^2k^2(k^4+k^2+1)\ d^2(k^4+k^2+1)$

$= d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$

ডানপক্ষ $= (ab+bc+cd)^2$

$= (dk^3.dk^2 + dk^2.dk + dk.d)^2$

$= (d^2k^5 + d^2k^3 + d^2k)^2$

$= \{d^2k(k^4+k^2+1)\}^2$

$= d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$ = বামপক্ষ

$\therefore (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

গ) দেওয়া আছে, $x = \frac{10pq}{p+q}$

বা, $\frac{x}{5p} = \frac{2q}{p+q}$

বা, $\frac{x+5p}{x-5p} = \frac{2q+p+q}{2q-p-q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+5p}{x-5p} = \frac{p+3q}{q-p}$ ..... (1)

02

আবার, $x = \frac{10pq}{p+q}$ বা, $\frac{x}{5q} = \frac{2p}{p+q}$

বা, $\frac{x+5q}{x-5q} = \frac{2p+p+q}{2p-p-q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+5p}{x-5q} = \frac{3p+q}{p-q}$ ..... (2)

এখন (1) ও (2) নং যোগ করে পাই,

$$\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{p+3q}{q-p} + \frac{3p+q}{p-q} = \frac{p+3q}{q-p} - \frac{3p+q}{q-p}$$

$$= \frac{p+3q-3p-q}{q-p} = \frac{2q-2p}{q-p} = \frac{2(q-p)}{q-p} = 2$$

৪৭. একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 12 হেক্টর এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 500 মিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 4 এবং 2 : 3।

(ক) প্রদত্ত আয়তাকার জমিটির ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

(খ) অপর জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) প্রদত্ত জমিটির প্রস্থ নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১১.২ (উদাহরনের অংক নং-১৫)]*

Sol

(ক) আমরা জানি, 1 হেক্টর = 10,000 বর্গমিটার

∴ 12 হেক্টর = 12 × 10,000 = 1,20,000 বর্গমিটার

(খ) দেওয়া আছে, প্রদত্ত জমির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3:4 এবং 2:3।

মনে করি, প্রদত্ত জমির দৈর্ঘ্য 3x মিটার এবং প্রস্থ 2y মিটার।

সুতরাং, অপর জমির দৈর্ঘ্য 4x মিটার এবং প্রস্থ 3y মিটার।

∴ প্রদত্ত জমির ক্ষেত্রফল = 3x . 2y = 6xy বর্গমিটার।

এবং অপর জমির ক্ষেত্রফল = 4x . 3y = 12xy বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $6xy = 120000 \Rightarrow xy = 20000$

∴ অপর জমির ক্ষেত্রফল = 12xy = 12 × 20000 = 240000 বর্গমিটার।

(গ) মনে করি, প্রদত্ত জমির দৈর্ঘ্য 3x মিটার এবং প্রস্থ 2y মিটার।

সুতরাং, জমিটির একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য $\sqrt{(3x)^2 + (2y)^2}$ মিটার

(খ) থেকে পাই, xy = 20000

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(3x)^2 + (2y)^2} = 500$

$\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 250000$

$\Rightarrow (3x+2y)^2 - 2.3x.2y = 250000 \Rightarrow (3x+2y)^2 - 12xy = 250000$

$\Rightarrow (3x+2y)^2 - 12 \times 20000 = 250000 \Rightarrow (3x+2y)^2 = 250000 + 240000$

$\Rightarrow (3x+2y)^2 = 490000$

$\Rightarrow 3x + 2y = 700$ ..... (i)

আবার, $(3x-2y)^2 = (3x+2y)^2 - 4.3x.2y$

$\Rightarrow (3x-2y)^2 = (3x+2y)^2 - 24xy$

$\Rightarrow (3x-2y)^2 = (700)^2 - 24 \times 20000$

$\Rightarrow (3x-24)^2 = 490000 - 480000$

$\Rightarrow (3x-2y)^2 = 10000$

$\Rightarrow 3x - 2y = 100$ ..... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $4y = 600 \Rightarrow y = 150$

∴ প্রদত্ত জমিটির প্রস্থ 150 মিটার।

03. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5 : 12 : 13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.।
(ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লিখ।
(খ) বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(গ) উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% এবং প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-৩)]

Sol"

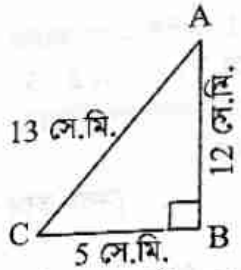
(ক) দেওয়া আছে, বাহুগুলোর অনুপাত 5 : 12 : 13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.

ধরি, বাহুগুলো 5x, 12x ও 13x

প্রশ্নমতে, $5x + 12x + 13x = 30 \quad \Rightarrow 30x = 30 \quad \Rightarrow x = \frac{30}{30} = 1$

অতএব, বাহুগুলো হলো 5, 12 ও 13

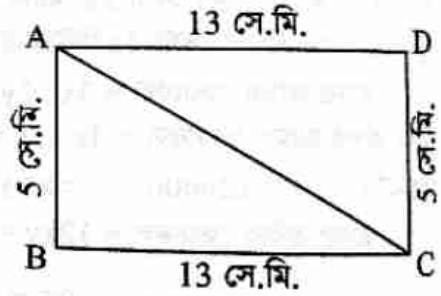
ত্রিভুজ অঙ্কন: চিত্র হতে পাই যে, $(AB)^2 + (BC)^2$
$= (12)^2 + (5)^2$
$= 144 + 25$
$= 169$
$= (13)^2 = (AC)^2$



পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী প্রদত্ত ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ। অর্থাৎ কোন ভেদে ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ।

(খ) বৃহত্তর বাহু বা দৈর্ঘ্য = 13 সে.মি. [(ক) হতে প্রাপ্ত]
ক্ষুদ্রতর বাহু বা প্রস্থ = 5 সে.মি. [(ক) হতে প্রাপ্ত]
চিত্রে, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার, $\angle B = 90^\circ$

$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$
$\Rightarrow \quad AC^2 = (5)^2 + (13)^2$
$\Rightarrow \quad AC^2 = 25 + 169 = 194$
$\Rightarrow \quad AC = \sqrt{194} = 13.928$



অতএব, আয়তক্ষেত্রের কর্ণ, AC = 13.928 সে.মি.
দেওয়া আছে, কর্ণ, AC = বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (AC)^2 = (13.928)^2$ বর্গ সে.মি. = 194 বর্গ সে.মি.

(গ) আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 13 সে.মি.
আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = 5 সে.মি.
$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (13×5) বর্গ সে.মি. = 65 বর্গ সে.মি.

10% বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = (13 +13 এর 10%) সে.মি. $= \left(13 + 13 \times \frac{10}{100}\right)$ সে.মি. = 14.3 সে.মি.

20% বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = (5 + 5 এর 20%) সে.মি.
$= \left(5 + 5 \times \frac{20}{100}\right)$ সে.মি. = 6 সে.মি.

দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বৃদ্ধি করার পর নতুন সৃষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (14.3×6) বর্গ সে.মি. = 85.8 বর্গ সে.মি.

ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি = (85.8 – 65) বর্গ সে.মি. = 20.8 বর্গ সে.মি.

ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পায় $= \frac{20.8}{65} \times 100 = 32$

সুতরাং ক্ষেত্রফল 32% বৃদ্ধি পাবে।

একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত 1 : 4।

(ক) অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায় প্রকাশ কর।

(খ) 5 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো 1 : 9। মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

(গ) মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol:

(ক) ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত = 1 : 4

ধরি, অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা x ও 4x

∴ মোট শিক্ষার্থী = (x + 4x) = 5x

অতএব, অনুপস্থিত শিক্ষার্থী মোট শিক্ষার্থীর শতকরা $\left(\frac{x}{5x} \times 100\right)\% = 20\%$

∴ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 20%।

(খ) 5 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে,

অনুপস্থিত শিক্ষার্থী সংখ্যা = x – 5

উপস্থিত শিক্ষার্থী সংখ্যা = 4x + 5

∴ (x – 5) : (4x + 5) = 1 : 9

$\Rightarrow \frac{x-5}{4x+5} = \frac{1}{9}$ $\Rightarrow 9x - 45 = 4x + 5$ $\Rightarrow 9x - 4x = 5 + 45$

$\Rightarrow 5x = 50$ $\Rightarrow x = \frac{50}{5} = 10$

অতএব, মোট শিক্ষার্থী = 5 × 10 = 50 জন।

নির্ণেয় শিক্ষার্থীর সংখ্যা 50 জন।

(গ) ধরি, ছাত্রীসংখ্যা = S

∴ ছাত্রসংখ্যা = 2S – 10

অতএব, 2S – 10 + S = 50 [(খ) হতে প্রাপ্ত]

$\Rightarrow 3S = 50 + 10$

$\Rightarrow 3S = 60$

$\Rightarrow S = \frac{60}{3}$

∴ S = 20

∴ ছাত্রীসংখ্যা, S = 20 জন

ছাত্রসংখ্যা = 2 × 20 – 10 = 30 জন

অতএব, ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত = 30 : 20 = 3 : 2

∴ নির্ণেয় অনুপাত 3 : 2.

65. আশিক, মিজান, অনিকা ও অহনা মোট 195000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে এবং এক বছর শেষে 26500 টাকা লাভ হয়। উক্ত ব্যবসায় মূলধনে আশিকের অংশ : মিজানের অংশ = 2 : 3, মিজানের অংশ : অনিকার অংশ = 4 : 5 এবং অনিকার অংশ : অহনার অংশ = 5 : 6।

(ক) মূলধনের সরল অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) উক্ত ব্যবসায় প্রত্যেকের মূলধন নির্ণয় কর।

(গ) বছর শেষে লভ্যাংশের 60% উক্ত ব্যবসায় বিনিয়োগ করা হলো। অবশিষ্ট লভ্যাংশ মূলধনের সরল অনুপাতে বিভক্ত হলে অহনা ও আশিকের লভ্যাংশের মধ্যে কে কত টাকা বেশি লাভ পাবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৫)]

Sol"

(ক) আশিকের অংশ : মিজানের অংশ $= 2 : 3 = 2 \times 4 : 3 \times 4 = 8 : 12$
মিজানের অংশ : অনিকার অংশ $= 4 : 5 = 4 \times 3 : 5 \times 3 = 12 : 15$
অনিকার অংশ : অহনার অংশ $= 5 : 6 = 5 \times 3 : 6 \times 3 = 15 : 18$
∴ আশিকের অংশ : মিজানের অংশ : অনিকার অংশ : অহনার অংশ $= 8:12:15:18$
∴ মূলধনের সরল অনুপাত $= 8 : 12 : 15 : 18$

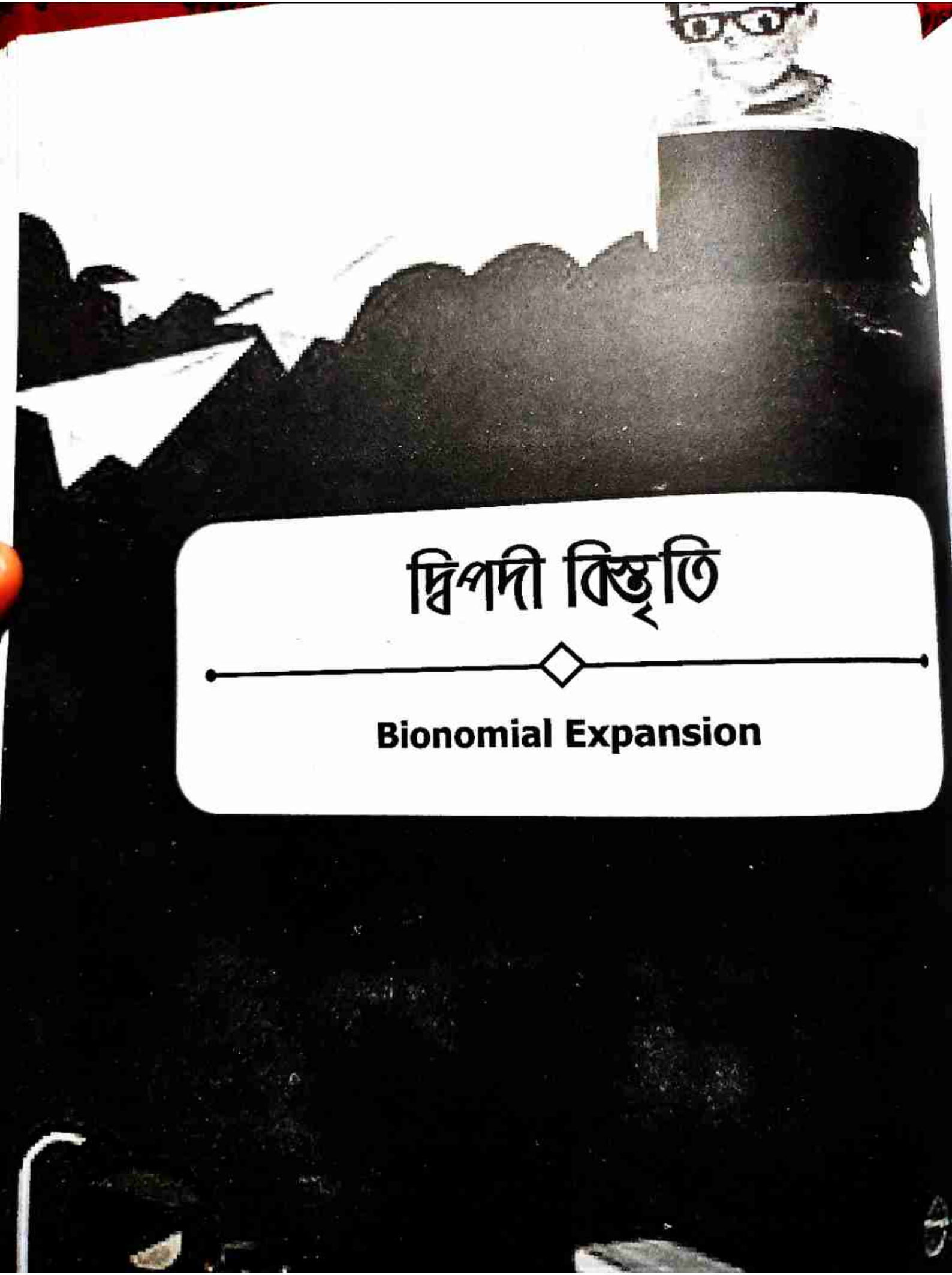
(খ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, মূলধনের অনুপাত $= 8 : 12 : 15 : 18$
অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল $= 8 + 12 + 15 + 18 = 53$
∴ আশিকের মূলধন $= \left(195000 \text{ এর } \frac{8}{53}\right)$ টাকা $= 29433.962$ টাকা
মিজানের মূলধন $= \left(195000 \text{ এর } \frac{12}{53}\right)$ টাকা $= 44150.943$ টাকা
অনিকার মূলধন $= \left(195000 \text{ এর } \frac{15}{53}\right)$ টাকা $= 55188.679$ টাকা
অহনার মূলধন $= \left(195000 \text{ এর } \frac{18}{53}\right)$ টাকা $= 66226.415$ টাকা
সুতরাং আশিকের মূলধন 29433.962 টাকা, মিজানের মূলধন 44150.943 টাকা, অনিকার মূলধন 55188.679 টাকা এবং অহনার মূলধন 66226.415 টাকা।

(গ) উক্ত ব্যবসায়, এক বছর শেষে লাভ হয় 26500 টাকা
লভ্যাংশের 60% উক্ত ব্যবসায় বিনিয়োগ করা হয় এবং অবশিষ্ট লভ্যাংশ $(100 - 60)\%$ অর্থাৎ 40% মূলধন সরল অনুপাতে বিভক্ত হয়।
এখন, 26500 এর 40% $= 26500 \text{ এর } \frac{40}{100} = 10600$ টাকা প্রত্যেকের মধ্যে বিভক্ত হবে।
∴ অহনা পাবে $= \left(10600 \text{ এর } \frac{18}{53}\right)$ টাকা $= 3600$ টাকা
এবং আশিক পাবে $= \left(10600 \text{ এর } \frac{8}{53}\right) = 1600$ টাকা
∴ অহনা লাভ বেশি পাবে $= (3600 - 1600)$ টাকা $= 2000$ টাকা।

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	04, 05
Type-02	01, 02(খ)
Type-03	Full (VVI)
Type-04	01, 02, 03, 05
Type-05	01
Type-06	02
Type-07	03, 07, 09, 11, 12
Type-08	01, 02



দ্বিপদী বিস্তৃতি

Bionomial Expansion

দ্বিপদী বিস্তৃতি
Bionomial Expansion

এক নজরে এই অধ্যায় থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ

01. $\left(K-\frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে K^3 এর সহগ 560 হলে,
(ক) x এর মান নির্ণয় করুন।
(খ) উক্ত রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x^5 এর সহগের 15 গুণ হলে, K এর মান নির্ণয় করুন। [৪৩তম বিসিএস]

[সমাধান দেখুন: Type-03, Question No.- 01]

এই অধ্যায়ের Analysis

এই অধ্যায়টি নবম-দশম শ্রেণীর উচ্চতর গণিত বইয়ে থাকলেও বিসিএসের সিলেবাসে অন্তর্ভুক্ত নয়। তবুও ৪৩তম রিটিনে এখান থেকে এক সেট প্রশ্ন এসেছে। যদিও আবার এখান থেকে প্রশ্ন আসার সম্ভাবনা ক্ষীণ, তবু কিছুটা পড়ে রাখাটাই নিরাপদ। এক্ষেত্রে আপনারা শুধু নবম-দশম শ্রেণীর উচ্চতর গণিত বইয়ের বাছাই করা কিছু অংক করে রাখতে পারেন। গুরুত্বপূর্ণ অংকগুলো অধ্যায়ের শেষে সাজেশনে উল্লেখ আছে।

✗ $(a+x)^n = a^n + {}^nc_1a^{n-1}x + {}^nc_2a^{n-2}x^2 + \text{----} + {}^nc_ra^{n-r}x^r + \text{----} + x^n$; যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$= a^n + \binom{n}{1}.a^{n-1}.x + \binom{n}{2}.a^{n-2}.x^2 + \binom{n}{3}.a^{n-3}.x^3 + \binom{n}{4}.a^{n-4}.x^4 + \text{.....}$$

এটিই হচ্ছে দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ আকার। এখানে পাওয়ার n এর মান 0 থেকে n পর্যন্ত যেকোনো সংখ্যা হতে পারে। আরো লক্ষনীয়, প্রতিটি পদে ও এর ঘাতের যোগফল দ্বিপদীর ঘাতের সমান।

✗ উপর্যুক্ত বিস্তৃতির (r+1) তম পদটিকে সাধারণ পদ বলে এবং $T_{r+1} = {}^nC_r \cdot a^{n-r} \cdot x^r$

✗ $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \text{.....}$; যখন n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়।

Notes: এক্ষেত্রে, অবশ্যই (i) ১ম পদটি 1 এবং (ii) ২য় পদটির মডুলাস অর্থাৎ, $|x| < 1$ হতে হয়।

✗ উপর্যুক্ত বিস্তৃতির (r+1) তম পদটিকে সাধারণ পদ বলে এবং $T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\text{.....}(n-r+1)}{r!}x^r$.

Notes:

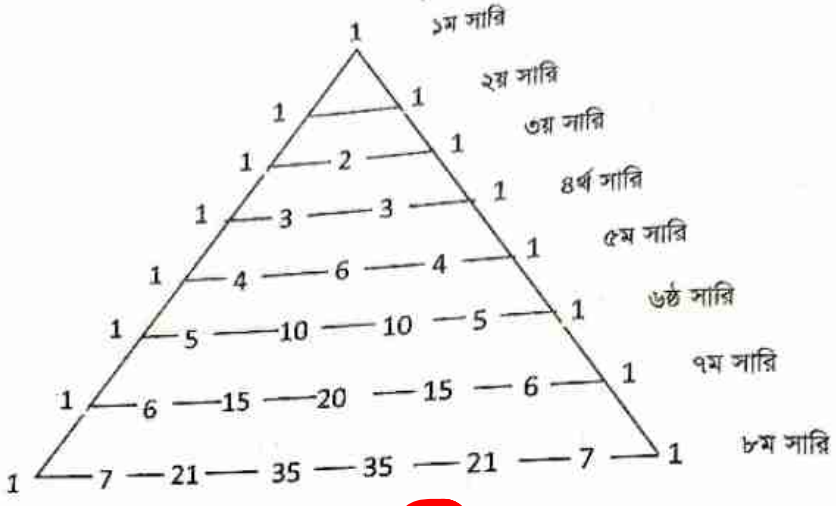
(i) দ্বিপদীর ঘাত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, তার বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা ঘাত সংখ্যার চাইতে একটি বেশী হয়।

(ii) যখন ঘাত যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা না হয়ে বিয়োগবোধক পূর্ণসংখ্যা বা মূলদ ভগ্নাংশ হয়, তখন বিস্তৃতির পদসংখ্যা অসীম হয়।

(iii) $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা বিজোড় অর্থাৎ, n এর মান জোড় হলে, মধ্যপদ 1 টি এবং উক্ত মধ্যপদটি $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম।

(iv) $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা জোড় হলে, অর্থাৎ, n এর মান বিজোড় হলে, মধ্যপদ 2 টি এবং তারা $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম ও $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম পদ।

প্যাসকেলের ত্রিভুজঃ



Some Special Series

CATEGORY-01

01. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$

02. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$

03. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$

04. $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots\ldots$

CATEGORY-02

07. $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$

08. $\log_e(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots)$

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: পদ নির্ণয়

01. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ কে x এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করুন এবং x মুক্ত পদটি নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০৪)

Sol" দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$= x^6 + \binom{6}{1} \cdot x^5 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) + \binom{6}{2} \cdot x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \binom{6}{3} \cdot x^3 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$= x^6 + 6x^3 + \frac{6.5}{1.2} \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{6.5.4}{1.2.3} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^6} + \ldots\ldots$$

$$= x^6 + 6x^3 + 15 + 20\frac{1}{x^3} + \ldots\ldots$$

∴ নির্ণেয় বিস্তৃতি, $x^6 + 6x^3 + 15 + 20\frac{1}{x^3} + \ldots\ldots$ এবং x মুক্ত পদ 15 **(Ans.)**

02. $\left(2x^2-\frac{1}{x^2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০৯)]

Sol" দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(2x^2-\frac{1}{x^2}\right)^8 = (2x^2)^8 + {}^8C_1\,(2x^2)^7\left(-\frac{1}{x^2}\right) + {}^8C_2\,(2x^2)^6\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + {}^8C_3\,(2x^2)^5\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 2^8 . x^{16} - 8 . 2^7 . x^{14} . \frac{1}{x^2} + \frac{8.7}{1.2} . 2^6 . x^{12} . \frac{1}{x^4} - \frac{8 . 7 . 6}{1 . 2 . 3} . 2^5 . x^{10} . \frac{1}{x^6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 256x^{16} - 1024x^{12} + 1792x^8 - 1792x^4 + \ldots\ldots\ldots \textbf{(Ans.)}$$

03. $\left(p-\frac{1}{2^x}\right)^6 = r - 96x + sx^2 + \ldots\ldots\ldots$ হলে, p, r এবং s এর মান নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(p-\frac{1}{2^x}\right)^6 = p^6 + \binom{6}{1}.p^5\left(-\frac{1}{2}x\right) + \binom{6}{2}.p^4.\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= p^6 + 6.p^5 . \left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{6.5}{1.2} . p^4 . \left(\frac{x^2}{4}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

কিন্তু, $\left(p-\frac{1}{2^x}\right)^6 = r - 96x + sx^2 + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore\ p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 + \ldots\ldots\ldots = r - 96x + sx^2 + \ldots\ldots\ldots$ (i)

(i) নং এর উভয় পক্ষ হতে ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই, $p^6 = r$ ..... (ii)

(i) নং এর উভয় পক্ষ হতে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$3p^5 = 96$$
$$\Rightarrow\ p^5 = 32$$
$$\Rightarrow\ p^5 = 2^5$$
$$\therefore\ p = 2$$

(ii) নং এ $p = 2$ বসিয়ে পাই, $r = 2^6 = 64$

(i) নং এর উভয়পক্ষে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$\frac{15}{4}p^4 = s$$
$$\Rightarrow\ \frac{15}{4} \times 2^4 = s\ [\because p = 2]$$
$$\Rightarrow\ \frac{15 \times 16}{4} = s$$
$$\therefore\ s = 60$$
$$\therefore\ p = 2, r = 64 \text{ এবং } s = 60 \textbf{ (Ans.)}$$

04. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতি থেকে মধ্যপদটি নির্ণয় কর।

Sol" এখানে দ্বিপদী রাশির ঘাতের সূচক জোড় সংখ্যা।

সুতরাং এর বিস্তৃতিতে একটি মাত্র মধ্যপদ থাকবে, যা $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ তম, অর্থাৎ $(8+1)$ তম পদ।

$\therefore$ মধ্যপদ, অর্থাৎ $(8+1)$ তম পদ $= {}^{16}C_8 (x)^{16-8}\left(-\frac{1}{x}\right)^8 = {}^{16}C_8\, x^8 \cdot \frac{1}{x^8} = {}^{16}C_8 = 12870$ Ans.

05. $\left(2x+\frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

Sol" মনে করি, $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

$$(r+1)\text{ তম পদ} = {}^{12}C_r \cdot (2x)^{12-r}\left(-\frac{1}{4x^2}\right)^r = (-1)^r \cdot {}^{12}Cr \cdot 2^{12-r} \cdot x^{12-r} \cdot 2^{-2r} \cdot x^{-2r}$$
$$= (-1)^r \cdot {}^{12}Cr \cdot 2^{12-3r} \cdot x^{12-3r}$$

$\because$ $(r+1)$ তম পদ x বর্জিত $\quad\therefore\quad 12-3r=0 \Rightarrow r=4$

সুতরাং $(4+1)$ তম, অর্থাৎ 5 তম পদ x বর্জিত। এবং 5 তম পদের মান $= (-1)^4 \cdot {}^{12}C_4 \cdot 2^0 = {}^{12}C_4 = 495$

TYPE 02: সহগ নির্ণয় সংক্রান্ত

01. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-২)]

Sol" দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^8 = 1+\binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)+\binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots\ldots\ldots$$
$$= 1+8\cdot\frac{x}{2}+\frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{8}+\ldots\ldots\ldots$$
$$= 1+4x+7x^2+7x^3+\ldots\ldots\ldots$$

$\therefore$ $\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতি x^3 এর সহগ 7। **(Ans.)**

02. $\left(2k-\frac{x}{2}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 720 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol" দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(2k-\frac{x}{2}\right)^5 = (2k)^5 + {}^5C_1(2k)^4\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)+{}^5C_2(2k)^3\left(-\frac{x}{2}\right)^2+{}^5C_3(2k)^2\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\ldots\ldots\ldots$$
$$= 32k^5+5.16k^4\left(-\frac{x}{2}\right)+10.8k^3\left(-\frac{x}{2}\right)^2+10.4k^2\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\ldots\ldots\ldots$$

এখানে, বিস্তৃতিটির k^3 এর সহগ $= 10.8\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = 80\cdot\frac{x^2}{4} = 20x^2$

প্রশ্নানুসারে, $20x^2=720 \quad\Rightarrow x^2=\frac{720}{20} \quad\Rightarrow x^2=36$

$\therefore$ $x=\pm 6$ **(Ans.)**

03. $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫(খ))]

Sol দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1 (x^2)^5 . \left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2 (x^2)^4 \left(\frac{k}{x}\right)^2 + {}^6C_3 . (x^2)^3 . \left(\frac{k}{x}\right)^3 + ...$$

$$= x^{12} + {}^6C_1 x^{10} . \frac{k}{x} + {}^6C_2 x^8 . \frac{k^2}{x^2} + {}^6C_3 x^6 . \frac{k^3}{x^3} + ...$$

$$= x^{12} + {}^6C_1 x^9 k + {}^6C_2 x^6 k^2 + {}^6C_3 x^3 k^3 + ...$$

এখানে, বিস্তৃতিটির x^3 এর সহগ, ${}^6C_3 k^3 = \frac{6.5.4}{1.2.3} . k^3 = 20 k^3$

প্রশ্নানুসারে, $20k^3 = 160$

$\Rightarrow k^3 = \frac{160}{20}$

$\Rightarrow k^3 = 8$

$\Rightarrow k^3 = 2^3$

$\therefore k = 2$ (Ans.)

04. $\left(1+\frac{x}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + ...$$

প্রশ্নানুসারে, $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \binom{n}{2} = 2 \binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$

বা, $\frac{n(n-1)}{1.2} = 2 . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . \frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{n-2}{12}$

বা, $2n - 4 = 12$

বা, $2n = 16$

বা, $n = \frac{16}{2}$

$\therefore n = 8$

যেহেতু, $n = 8$

$\therefore$ বিস্তৃতির পদসংখ্যা $= 8 + 1 = 9$

আবার, যেহেতু পদসংখ্যা $= 9$

$\therefore$ ৫ম বিস্তৃতির মধ্যপদ এবং এটি $T_5 = T_{4+1}$ $= \binom{8}{4} . 1^4 \left(\frac{x}{4}\right)^4 = {}^8C_4 \left(\frac{x}{4}\right)^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} . \left(\frac{x}{4}\right)^4$

$$= \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} x^4 = \frac{35}{128} x^4$$

Ans: n = 8, পদসংখ্যা 9 ও মধ্যপদ $\frac{35}{128} x^4$

TYPE 03: সৃজনশীল প্রশ্ন

01. $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7$ বিস্তৃতির x^3 এর সহগ 560

(ক) $k=1$ হলে, চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করুন।

(খ) x এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x^5 এর সহগের 15 গুণ হলে k এর মান নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০৭)

Sol"

(ক) $k=1$ হলে, বীজগাণিতিক রাশিটি $\left(1-\frac{x}{3}\right)^7$

দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\left(1-\frac{x}{3}\right)^7 = {}^7C_0\left(-\frac{x}{3}\right)^0 + {}^7C_1\left(-\frac{x}{3}\right)^1 + {}^7C_2\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - 7\cdot\frac{x}{3} + \frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot\frac{x^2}{9} - \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{x^3}{27} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{7x}{3} + \frac{7x^2}{3} - \frac{35x^3}{27} + \ldots\ldots\ldots$$

(খ) দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\left(k-\frac{x}{3}\right)^7 = k^7 + {}^7C_1k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + {}^7C_5k^2\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \ldots\ldots$$

$$= k^7 - 7k^6\cdot\frac{x}{3} + \frac{7\cdot6}{1\cdot2}k^5\cdot\frac{x^2}{9} - \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}k^4\cdot\frac{x^3}{27} + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}k^3\cdot\frac{x^4}{81} - \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}k^2\cdot\frac{x^5}{243} + \ldots\ldots$$

$$= k^7 - \frac{7x}{3}\cdot k^6 + \frac{7x^2}{3}\cdot k^5 - \frac{35x^3}{27}\cdot k^4 + \frac{35x^4}{81}\cdot k^3 - \frac{7x^5}{81}\cdot k^2 + \ldots\ldots\ldots$$

এখানে, k^3 এর সহগ $\frac{35x^4}{81}$

শর্তমতে, $\frac{35x^4}{81} = 560$

$\Rightarrow 35x^4 = 560\times81$

$\Rightarrow x^4 = \frac{560\times81}{35}$

$\Rightarrow x^4 = 1296 = 6^4$

$\therefore\ x = 6$ **(Ans.)**

(গ) ঠিক উপরের $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতির ফলাফল থেকে পাই,

$$\left(k-\frac{x}{3}\right)^7 = k^7 - \frac{7x}{3}\cdot k^6 + \frac{7x^2}{3}\cdot k^5 - \frac{35x^3}{27}\cdot k^4 + \frac{35x^4}{81}\cdot k^3 - \frac{7x^5}{81}\cdot k^2 + \ldots\ldots$$

এখানে, x^3 এর সহগ $\frac{-35k^4}{27}$ এবং x^5 এর সহগ $\frac{-7k^2}{81}$

শর্তমতে, $\frac{-35k^4}{27} = \frac{-7k^2}{81}\times15 \Rightarrow \frac{k^4}{k^2} = \frac{27\times7\times15}{35\times81} \Rightarrow k^2 = 1$

$\therefore\ k = 1$

৮. $A = (1+x)^7$ এবং $B = (1-x)^8$

(ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

(খ) B এর বিস্তৃতির চার পদ পর্যন্ত নির্ণয় করে উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(0.99)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

(গ) AB এর বিস্তৃতির x^7 এর সহগ নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol

(ক) দেওয়া আছে, $A = (1+x)^7$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

$\therefore (1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$ **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, $B = (1-x)^8$

$$\therefore (1-x)^8 = \{1+(-x)\}^8$$
$$= (1)^8 + 8(1)^7(-x) + 28(1)^6(-x)^2 + 56(1)^5(-x)^3 + \ldots\ldots\ldots$$
$$= 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

এখন, $(0.99)^8 = (1-0.01)^8 = \{1+(-0.01)\}^8$
$= 1 - 8(0.01) + 28(0.01)^2 - 56(0.01)^3$
$= 0.9227$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

(গ) দেওয়া আছে, $A = (1+x)^7$

$B = (1-x)^8$

$$\therefore AB = (1+x)^7(1-x)^8$$
$$= (1-x)(1-x)^7(1+x)^7$$
$$= (1-x)(1-x^2)^7$$
$$= (1-x)\left[1 + \binom{7}{1}(-x^2)^1 + \binom{7}{2}(-x^2)^2 + \binom{7}{3}(-x^2)^3 + \binom{7}{4}(-x^2)^4 + \ldots\ldots\right]$$
$$= (1-x)[1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 - \ldots\ldots\ldots]$$
$$= (1-x)(1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 - \ldots\ldots) + (-x + 7x^3 - 21x^5 + 35x^7 - 35x^9 + \ldots\ldots)$$
$$= 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 - \ldots\ldots\ldots$$

$\therefore AB = (1+x)^7(1-x)^8 = 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 - \ldots\ldots$

$\therefore$ AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35

$\therefore$ x^7 এর সহগ 35 **(Ans.)**

03. $(A + Bx)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

(ক) $A = 1$, $B = 2$ এবং $n = 5$ হলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে রাশিটির বিস্তৃতি নির্ণয় করুন।

(খ) $B = 3$ এবং $n = 7$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির x^4 এর সহগ 22680 হয়। A এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) $A = 2$ এবং $B = 1$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সহগ সমান হয়। n এর মান নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol^n

(ক) প্রদত্ত রাশি $(A + Bx)^n$

$A = 1$, $B = 2$ এবং $n = 5$ হলে, $(A + Bx)^n = (1 + 2x)^5$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$\therefore \quad (1 + 2x)^5 = 1 + 5.2x + 10.(2x)^2 + 10.(2x)^3 + 5.3(2x)^4 + (2x)^5$

$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$ **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, $B = 3$ এবং $n = 7$

$\therefore \quad (A + Bx)^n = (A + 3x)^7$

$= A^7 + {}^7C_1 A^{7-1} (3x)^1 + {}^7C_2 A^{7-2} (3x)^2 + {}^7C_3 A^{7-3} (3x)^3 + {}^7C_4 A^{7-4} (3x)^4 + \ldots\ldots$

$= A^7 + 7A^6 . 3x + 21A^5 . 9x^2 + 35A^4 . 27x^3 + 35A^3 . 81x^4 + \ldots\ldots\ldots$

$= A^7 + 21A^6x + 189A^5x^2 + 945A^4x^3 + 2835A^3x^4 + \ldots\ldots\ldots$

শর্তমতে, $2835A^3 = 22680 \quad \Rightarrow A^3 = 8$

$\therefore \quad A = 2$ **(Ans.)**

(গ) দেওয়া আছে, $A = 2$

$B = 1$

$\therefore \quad (A + Bx)^n = (2 + 1 \times x)^n = (2 + x)^n$

$\therefore$ রাশিটির পঞ্চম পদ $= T_5 = T_{4+1} = {}^nC_4\, 2^{n-4} . x^4$

এবং ষষ্ঠ পদ $= T_5 = T_{5+1} = {}^nC_5\, 2^{n-5}\, x^5$

শর্তমতে, ${}^nC_4\, 2^{n-4} = {}^nC_5\, 2^{n-5}$

$\Rightarrow \quad \frac{n!}{4!(n-4)!} 2^n . 2^{-4} = \frac{n!}{5!(n-5)!} 2^n . 2^{-5}$

$\Rightarrow \quad \frac{2^{-4}}{4!(n-4)(n-5)!} = \frac{2^{-5}}{5.4!(n-5)!}$

$\Rightarrow \quad \frac{2^{-4}}{n-4} = \frac{2^{-5}}{5}$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{2^4} = \frac{n-4}{2^5}$

$\Rightarrow \quad \frac{5}{16} = \frac{n-4}{32}$

$\Rightarrow \quad 10 = n - 4$

$\therefore \quad n = 14$ **(Ans.)**

TYPE 04: দশমিকের ব্যহার সংক্রান্ত

01. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করুন। উহার সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$= 2^6 + \binom{6}{1}.2^5.\left(\frac{x}{4}\right) + \binom{6}{2}.2^4.\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{6}{3}.2^3.\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 64 + 6.32.\frac{x}{4} + \frac{6.5}{1.2}.16.\frac{x^2}{16} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.8.\frac{x^3}{64} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \ldots\ldots\ldots \textbf{(Ans.)}$$

এখানে, $2+\frac{x}{4} = 1.9975$

বা, $\frac{x}{4} = 1.9975 - 2 = -0.0025$

বা, $x = (-0.0025) \times 4$

$\therefore$ $x = -0.01$

এখন, $x = -0.01$ বসিয়ে পাই, $\left\{2+\frac{(-0.01)}{4}\right\}^6 = 64 + 48(-0.01) + 15.(-0.01)^2 + \frac{5}{2}(-0.01)^3 + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ $(1.9975)^6 = 63.5215$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

02. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1.99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" $(1.99)^5 = (2-0.01)^5$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$(2-0.01)^5 = 2^5 + \binom{5}{1}2^4.(-0.01) + \binom{5}{2}2^3(-0.01)^2 + \binom{5}{3}2^2(-0.01)^3 + \binom{5}{4}2(-0.01)^4 + (-0.01)^5$$

$$= 32 + 5.16(-0.01) + \frac{5.4}{1.2}.8.(0.0001) + \frac{5.4.3}{1.2.3}.4(-0.000001) + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2(0.00000001) + (-0.0000000001)$$

$$= 32 - 0.8 + 0.008 - 0.00004 + 0.0000001 - 0.0000000001$$

$$= 31.2079601$$

$$= 31.2080 \text{ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] (Ans.)}$$

TYPE 05: কঠিন ও অগুরুত্বপূর্ণ

01. a_1, a_2, a_3, a_4 যদি $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির চারটি ক্রমিক পদ হয়ে থাকে তাহলে প্রমাণ করুন যে, $\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$. *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]*

Sol ধরি, চারটি ক্রমিক পদ $T_{r+1}, T_{r+2}, T_{r+3}$ এবং T_{r+4} এর সহগ যথাক্রমে a_1, a_2, a_3 এবং a_4

$\therefore$ $a_1 = T_{r+1}$ এর সহগ $= {}^nC_r$

$a_2 = T_{r+2}$ এর সহগ $= {}^nC_{r+1}$

$a_3 = T_{r+3}$ এর সহগ $= {}^nC_{r+2}$

এবং $a_4 = T_{r+4}$ এর সহগ $= {}^nC_{r+3}$

তাহলে, $\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{{}^nC_r}{{}^nC_r+{}^nC_{r+1}}=\frac{{}^nC_r}{{}^{n+1}C_{r+1}}$ $[\because {}^nC_r+{}^nC_{r+1}={}^{n+1}C_{r+1}]$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}\times\frac{\lfloor r+1\ \lfloor n-r}{\lfloor n+1}=\frac{\lfloor n}{\lfloor r}\times\frac{\lfloor r+1}{\lfloor n+1}=\left(\frac{r+1}{n+1}\right)$$

অনুরূপভাবে, $\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+2}+{}^nC_{r+3}}=\frac{{}^nC_{r+2}}{{}^{n+1}C_{r+3}}=\frac{r+3}{n+1}$

তাহলে, $\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{r+1}{n+1}+\frac{r+3}{n+1}=\frac{2r+4}{n+1}=\frac{2(r+2)}{n+1}$

এবং $\frac{2a_2}{a_2+a_3}=\frac{2({}^nC_{r+1})}{{}^nC_{r+1}+{}^nC_{r+2}}=\frac{2({}^nC_{r+1})}{{}^{n+1}C_{r+2}}=2\frac{\lfloor n}{\lfloor r+1\ \lfloor n-r-1}\times\frac{\lfloor r+2\ \lfloor n-r-1}{\lfloor n+1}=\frac{2(r+2)}{n+1}$

$\therefore$ $\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$ (প্রমাণিত)

[বি.দ্র.: প্রশ্নে a_1, a_2, a_3, a_4 দ্বিপদী $(1+x)^n$ এর চারটি ক্রমিক পদ এর পরিবর্তে চারটি ক্রমিক পদের সহগ হবে।]

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 02, 03,
Type-02	01, 02, 03, 04,
Type-03	01