ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
Trigonometric Ratio

এক নজরে এই অধ্যায় থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ

01. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে, প্রমাণ করুন যে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ [৪৩তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর উ. গণিত (অধ্যায়-৮.৩) অনুশীলনীর ৮(চ) নং প্রশ্ন হবহু]

Sol: দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 3\cos\theta = 4\sin\theta$

$\Rightarrow 9\cos^2\theta = 16\sin^2\theta$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 9(1 - \sin^2\theta) = 16\sin^2\theta$

$\Rightarrow 9 - 9\sin^2\theta - 16\sin^2\theta = 0$

$\Rightarrow -25\sin^2\theta = -9 \quad \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$ [$\because \sin\theta$ ঋণাত্মক]

আবার, $\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3\cos\theta = 4\sin\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{2}{4}} = \frac{-7}{5} \times \frac{4}{-2} = \frac{14}{5}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ (দেখানো হলো)

02. $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ [৪১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর উ. গণিত (অধ্যায়-৮.২) অনুশীলনীর ১০ নং প্রশ্ন হবহু]

Sol: দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x \Rightarrow \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = x$

$\Rightarrow \frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

$\Rightarrow \frac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = x^2 \Rightarrow \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = x^2 \Rightarrow \frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad \therefore \sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ (দেখানো হলো)

$7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় করুন। [৩৮তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর উ. গণিত (অধ্যায়-৮.২) উদাহরণের ১৪ নং প্রশ্ন হবহু]

Sol

$7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta - 4 + 3\cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta - 4 + 4\cos^2\theta - \cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta - 4 + 4\cos^2\theta = \cos^2\theta$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta - 4(1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta - 4\sin^2\theta = \cos^2\theta$ [$\because 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$]

$\Rightarrow 3\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

৪. $\frac{\sin\theta}{x} = \frac{\cos\theta}{y}$ হলে, প্রমাণ করুণ যে, $\sin\theta - \cos\theta = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [৩৮তম বিসিএস]

Sol দেওয়া আছে, $\frac{\sin\theta}{x} = \frac{\cos\theta}{y}$

$\Rightarrow y\sin\theta = x\cos\theta$ ..... (i)

$\Rightarrow y^2\sin^2\theta = x^2\cos^2\theta$ [উভয়কে বর্গ করে]

$\Rightarrow y^2\sin^2\theta = x^2(1 - \sin^2\theta)$

$\Rightarrow y^2\sin^2\theta = x^2 - x^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow y^2\sin^2\theta + x^2\sin^2\theta = x^2$

$\Rightarrow \sin^2\theta(y^2 + x^2) = x^2$

$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

আবার, (i) নং হতে পাই, $y\sin\theta = x\cos\theta$

$\Rightarrow y^2\sin^2\theta = x^2\cos^2\theta$ [উভয়কে বর্গ করে]

$\Rightarrow y^2(1 - \cos^2\theta) = x^2\cos^2\theta$

$\Rightarrow y^2 - y^2\cos^2\theta = x^2\cos^2\theta$

$\Rightarrow y^2 = x^2\cos^2\theta + y^2\cos^2\theta$

$\Rightarrow y^2 = \cos^2\theta(x^2 + y^2)$

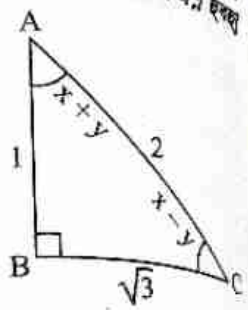
$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{y^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

এখন, $\sin\theta - \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (প্রমাণিত)

05. চিত্রে বর্ণিত ত্রিভুজ হতে AC-এর পরিমাণ কত? $\tan A + \tan C$-এর মান কত হবে? x ও y-এর মান কত? [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর সা.গণিত (অধ্যায়-৯.২) অনুশীলনীর ২৯ নং প্রশ্ন হবহু]



Sol" চিত্রানুযায়ী, ΔABC-এ $\angle ABC = 90^\circ$

$AB = 1$; $BC = \sqrt{3}$

AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

ΔABC-এ

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$

$\therefore AC = 2$ **(Ans.)**

চিত্রানুযায়ী, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ [$\because$ কোণের বিপরীত বাহু সবসময় লম্ব হয় এবং $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$]

$\therefore \tan A = \sqrt{3}$ ..... (i)

আবার, $\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because$ কোণের বিপরীত বাহু সবসময় লম্ব হয় এবং $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$]

$\therefore \tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ..... (ii)

এখন, (i) নং + (ii)নং হতে পাই, $\tan A + \tan C = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

চিত্রানুযায়ী, $\angle A = x + y$ এবং $\angle C = x - y$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $\tan A = \sqrt{3} \Rightarrow \tan A = \tan 60^\circ \Rightarrow A = 60^\circ$

$\therefore x + y = 60^\circ$ ..... (iii) নং [$\because \angle A = x + y$]

আবার, $\tan C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [(ii) নং সমীকরণ হতে]

$\Rightarrow \tan C = \tan 30^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$

$\therefore x - y = 30^\circ$ ..... (iv) নং [$\because \angle C = x - y$]

(iii) নং + (iv) নং সমীকরণ হতে পাই, $x + y + x - y = 60^\circ + 30^\circ \Rightarrow 2x = 90^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই, $x + y = 60^\circ \Rightarrow y = 60^\circ - 45^\circ \Rightarrow y = 15^\circ$

$\therefore x = 45^\circ$ এবং $y = 15^\circ$ **(Ans.)**

06. $0 < \theta < 2\pi$ হলে, $2(\sin\theta.\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ এর সমাধান নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর উ.গণিত (অধ্যায়-৮.৩) উদাহরণের কাজের অংক থেকে হুবহু]

Sol" $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\theta - 4\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta - 4\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(\cos\theta - 2) - \sqrt{3}(\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - \sqrt{3})(\cos\theta - 2) = 0$

হয় $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin 60^\circ$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(120^\circ)$

$\therefore \theta = 60^\circ, 120^\circ$

অথবা, $\cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 2$

কিন্তু $-1 \le \cos\theta \le 1$

$\therefore \cos\theta \neq 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\theta = 60^\circ, 120^\circ$ **Ans.**

07. দেখান যে, $\sec^4A - \sec^2A = \tan^4A + \tan^2A$ [৩৬তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর উ. গণিত (অধ্যায়-৮.২) অনুশীলনীর ৬(ঘ) নং প্রশ্ন হুবহু]

Sol^n বামপক্ষ: $\sec^4A - \sec^2A = (\sec^2A)^2 - \sec^2A$

$= (1 + \tan^2A)^2 - (1 + \tan^2A)$ [$\because \sec^2A = 1 + \tan^2A$]

$= 1 + 2\tan^2A + \tan^4A - 1 - \tan^2A$

$= \tan^4A + \tan^2A$

$\therefore$ বাম পক্ষ = ডান পক্ষ (দেখানো হলো)

এই অধ্যায়ের Analysis

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত থেকে ৩৫ তম বিসিএসের আগে কোন প্রশ্ন আসত না। ৩৫ তম বিসিএস থেকে নতুন সিলেবাস প্রবর্তনের পর থেকে এই অধ্যায় থেকে প্রশ্ন আসা শুরু হয়েছে। তবে নিয়মিত প্রশ্ন আসে না। ৩৬ তম, ৩৭ তম, ৩৮ তম, ৪১ তম ও ৪৩ তম বিসিএসে প্রশ্ন আসলেও ৩৫ তম, ৪০ তম ও ৪৪ তম বিসিএসে কোন প্রশ্ন আসে নি। তাই ৪৫ তম বিসিএসে প্রশ্ন আসবেই এরকমটি নিশ্চিত বলা যাচ্ছে না।

যেহেতু ত্রিকোণমিতি সংক্রান্ত দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক অধ্যায় থেকে নিয়মিত প্রশ্ন আসে তাই এ অধ্যায়টি তুলনামূলক কম গুরুত্বপূর্ণ।

পর্যন্ত আসা ৭ টি প্রশ্ন Analysis করে দেখা যায় ৬টি প্রশ্নই নবম-দশম শ্রেণির সাধারণ গণিত ও উচ্চতর গণিত বই থেকে বহু কমন এসেছে এবং বাকী প্রশ্নটিও বইয়ের Concept থেকে এসেছে।

তরাং আপনারা যদি শুধু এই দুইটি বইয়ের ত্রিকোণমিতি পড়েন তাহলে পরীক্ষায় সরাসরি কমন পাবার আশা করতে পারেন।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত নবম-দশম শ্রেণির অধ্যায়সমূহ:

সাধারণ গণিত	অধ্যায়: ৯.১ অধ্যায়: ৯.২
উচ্চতর গণিত	অধ্যায়: ৮.২ অধ্যায়: ৮.৩

কিন্তু দুই বইয়ের চারটি অধ্যায়ে উদাহরণ, অনুশীলনী ও শ্রেণির কাজ মিলিয়ে ছোট বড় প্রায় ১৭০ টি অংক আছে যার সব অংক Written-এর জন্য প্রয়োজনীয় নয়। তাই আমি এই বইয়ে অধ্যায়গুলো থেকে Written-এর জন্য প্রয়োজনীয় অংকগুলোর সমাধান দিয়েছি, যা করলেই আপনাদের জন্য যথেষ্ট ইনশাআল্লাহ্।

বি.দ্র.: প্রতিটি প্রশ্নের পাশের সংখ্যাটি উক্ত অংকের পাঠ্যবইয়ের ক্রমিক নম্বর প্রকাশ করছে।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

Category – 01:

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC}$;

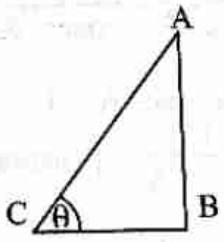
$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC}$;

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC}$;

$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{AC}{BC}$;

$\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{AC}{AB}$;

$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{BC}{AB}$;



Category – 02:

$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$; $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$;

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$; $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$; $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Category – 03:

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$; $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

(ii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$; $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$; $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$; $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$; $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

Category – 04: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর গুরুত্বপূর্ণ কিছু মান:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot θ	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec θ	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

এক নজরে এই অধ্যায় সম্পর্কিত নবম-দশম শ্রেণীর সাধারণ গণিত (অধ্যায় ৯.১) এর গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নসমূহ:

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও উত্তর

(প্রশ্ন ১-৫ দরকার নেই)

প্রমাণ কর (৬-২০):

06. (ক) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 A}} \left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A} \text{ এবং } \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}\right]$

$= \cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\therefore \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

(খ) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} \left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}\right]$

$= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} [\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A] = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

Category – 03:

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$; $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

(ii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$; $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$; $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$; $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$; $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

Category – 04: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর গুরুত্বপূর্ণ কিছু মান:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot θ	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec θ	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

এক নজরে এই অধ্যায় সম্পর্কিত নবম-দশম শ্রেণীর সাধারণ গণিত (অধ্যায় ৯.১) এর গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নসমূহ:

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও উত্তর

(প্রশ্ন ১-৫ দরকার নেই)

প্রমাণ কর (৬-২০):

06. (ক) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

Sol বামপক্ষ $= \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 A}} \left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A} \text{ এবং } \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}\right]$

$= \cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\therefore \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

(খ) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

Sol বামপক্ষ $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} \left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}\right]$

$= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} [\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A] = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

(গ) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A} [\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A] = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

17. (ক) $\frac{\sin A}{\text{cosec } A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{\sin A}{\text{cosec } A} + \frac{\cos A}{\sec A} = \frac{\sin A}{\frac{1}{\sin A}} + \frac{\cos A}{\frac{1}{\cos A}} \left[\because \text{cosec}A = \frac{1}{\sin A} \text{ এবং } \sec A = \frac{1}{\cos A}\right]$

$= (\sin A \times \sin A) + (\cos A \times \cos A)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sin A}{\text{cosec } A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$ (প্রমাণিত)

(খ) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A}$

$= \sec A \left(\frac{1}{\cos A}\right) - \tan A \left(\frac{1}{\cot A}\right)$

$= \sec A \,.\, \sec A - \tan A \,.\, \tan A \left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A} \text{ এবং } \tan A = \frac{1}{\cot A}\right]$

$= \sec^2 A - \tan^2 A = 1 [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$ (প্রমাণিত)

(গ) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2 A} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2 A} = \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1 + \sin^2 A} = \frac{1 + \sin^2 A}{1 + \sin^2 A} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

08. (ক) $\frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A \operatorname{cosec} A+1.$

Sol" বামপক্ষ $=\frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}+\frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}$ $\left[\because \tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\right]$

$=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}+\frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\times\frac{\sin A}{\sin A-\cos A}\right)+\left(\frac{\cos A}{\sin A}\times\frac{\cos A}{\cos A-\sin A}\right)$

$=\frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)}+\frac{\cos^2 A}{\sin A(\cos A-\sin A)}$

$=\frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)}-\frac{\cos^2 A}{\sin A(\sin A-\cos A)}$ [২য় পদে হরে (–) কমন নেয়াতে মাঝে (–) হয়ে গেছে]

$=\frac{\sin^3 A-\cos^3 A}{\sin A\cos A(\sin A-\cos A)}$

$=\frac{(\sin A-\cos A)(\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A)}{\sin A\cos A(\sin A-\cos A)}$ $[\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2]$

$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$

$=\frac{1+\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$ $[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$

$=\frac{1}{\sin A\cos A}+\frac{\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A}\cdot\frac{1}{\cos A}+1$

$=\operatorname{cosec} A\,.\sec A+1\left[\because \operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A} \text{ এবং } \sec A=\frac{1}{\cos A}\right]$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\operatorname{cosec} A+1$ (প্রমাণিত)

(খ) $\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\cot^2 A}=1$

Sol" বামপক্ষ $=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\cot^2 A}=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$

$=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}}=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$=\frac{1+\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\cot^2 A}=1$ (প্রমাণিত)

10. $\frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$

Sol বামপক্ষ $=\frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}$

$=\frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}\left[\because \tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\right]$

$=\frac{\cos A}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}+\frac{\sin A}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}=\frac{\cos A\,.\,\cos A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin A\,.\,\sin A}{\sin A-\cos A}$

$=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin^2 A}{\sin A-\cos A}=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}-\frac{\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$

$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-\sin A}=\frac{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}{(\cos A-\sin A)}$

$=\cos A+\sin A=\sin A+\cos A$ = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$ (প্রমাণিত)

18. $\tan A\sqrt{1-\sin^2 A}=\sin A$

Sol বামপক্ষ $=\tan A\sqrt{1-\sin^2 A}$

$=\frac{\sin A}{\cos A}\sqrt{\cos^2 A}\left[\because \tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } 1-\sin^2 A=\cos^2 A\right]$

$=\frac{\sin A}{\cos A}\,.\,\cos A=\sin A=$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan A\sqrt{1-\sin^2 A}=\sin A$ (প্রমাণিত)

11. $\frac{\sec A+\tan A}{\text{cosec } A+\cot A}=\frac{\text{cosec } A-\cot A}{\sec A-\tan A}$

Sol বামপক্ষ $=\frac{\sec A+\tan A}{\text{cosec } A+\cot A}$ [লব ও হরকে $(\text{cosec } A-\cot A)(\sec A-\tan A)$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \frac{(\sec A+\tan A)(\sec A-\tan A)(\text{cosec } A-\cot A)}{(\text{cosec } A+\cot A)(\text{cosec } A-\cot A)(\sec A-\tan A)}$

$=\frac{(\sec^2 A-\tan^2 A)(\text{cosec } A-\cot A)}{(\text{cosec}^2 A-\cot^2 A)(\sec A-\tan A)}$

$=\frac{\text{cosec } A-\cot A}{\sec A-\tan A}\left[\because \sec^2 A-\tan^2 A=1 \text{ এবং } \text{cosec}^2 A-\cot^2 A=1\right]$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sec A+\tan A}{\text{cosec } A+\cot A}=\frac{\text{cosec } A-\cot A}{\sec A-\tan A}$ (প্রমাণিত)

12. $\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}-1}+\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}+1}=2\sec^2 A.$

Sol^n বামপক্ষ $=\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}-1}+\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}+1}=\text{cosec A}\left\{\frac{1}{\text{cosec A}-1}+\frac{1}{\text{cosec A}+1}\right\}$

$=\text{cosec A}\left\{\frac{\text{cosec A}+1+\text{cosec A}-1}{\text{cosec}^2 A-1}\right\}$

$=\frac{\text{cosec A}\,.\,2\,\text{cosec A}}{\cot^2 A}$ [$\because \text{cosec}^2 A-1=\cot^2 A$]

$=\frac{2\,\text{cosec}^2 A}{\cot^2 A}=2\frac{\frac{1}{\sin^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$ [$\because \text{cosec}^2 A=\frac{1}{\sin^2 A}$ এবং $\cot^2 A=\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$]

$=\frac{2}{\sin^2 A}\cdot\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{2}{\cos^2 A}=2\frac{1}{\cos^2 A}=2\sec^2 A$ [$\because \frac{1}{\cos^2 A}=\sec^2 A$]

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}-1}+\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A}+1}=2\sec^2 A$ (প্রমাণিত)

13. $\frac{1}{1+\sin A}+\frac{1}{1-\sin A}=2\sec^2 A.$

Sol^n বামপক্ষ $=\frac{1}{1+\sin A}+\frac{1}{1-\sin A}=\frac{1-\sin A+1+\sin A}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\frac{2}{1-\sin^2 A}$ [$\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2$]

$=\frac{2}{\cos^2 A}$ [$\because 1-\sin^2 A=\cos^2 A$]

$=2\frac{1}{\cos^2 A}=2\sec^2 A$ [$\because \frac{1}{\cos^2 A}=\sec^2 A$]

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1+\sin A}+\frac{1}{1-\sin A}=2\sec^2 A$ (প্রমাণিত)

14. $\frac{1}{\text{cosec A}-1}-\frac{1}{\text{cosec A}+1}=2\tan^2 A.$

Sol^n বামপক্ষ $=\frac{1}{\text{cosec A}-1}-\frac{1}{\text{cosec A}+1}=\frac{\text{cosec A}+1-\text{cosec A}+1}{(\text{cosec A}-1)(\text{cosec A}+1)}$

$=\frac{2}{\text{cosec}^2 A-1}$ [$\because \text{cosec}^2 A-1=\cot^2 A$]

$=2\cdot\frac{1}{\cot^2 A}=2\tan^2 A$ [$\because \frac{1}{\cot^2 A}=\tan^2 A$]

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\text{cosec A}-1}-\frac{1}{\text{cosec A}+1}=2\tan^2 A$ (প্রমাণিত)

15. $\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=2\ \text{cosec}\ A$

Sol^n বামপক্ষ $=\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A\,.\,\sin A+(1-\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A)\sin A}$

$=\frac{\sin^2 A+(1-\cos A)^2}{(1-\cos A)\sin A}=\frac{\sin^2 A+1-2\cos A+\cos^2 A}{(1-\cos A)\sin A}$ [$\because (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$]

$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)+1-2\cos A}{(1-\cos A)\sin A}=\frac{1+1-2\cos A}{(1-\cos A)\sin A}$ [$\because \sin^2 A+\cos^2 A=1$]

$=\frac{2-2\cos A}{(1-\cos A)\sin A}=\frac{2(1-\cos A)}{(1-\cos A)\sin A}$

$=\frac{2}{\sin A}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\ \text{cosec}\ A\left[\because \frac{1}{\sin A}=\text{cosec}\ A\right]$

= ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=2\ \text{cosec}\ A$ (প্রমাণিত)

16. $\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$

Sol^n বামপক্ষ $=\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}$

$=\frac{\tan A\,.\,\tan A-(\sec A-1)(\sec A+1)}{(\sec A+1)\tan A}$

$=\frac{\tan^2 A-(\sec^2 A-1)}{(\sec A+1)\tan A}=\frac{\tan^2 A-\tan^2 A}{(\sec A+1)\tan A}$ [$\because \sec^2 A-1=\tan^2 A$]

$=\frac{0}{(\sec A+1)\tan A}=0=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$ (প্রমাণিত)

17. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$.

Sol^n বামপক্ষ $=(\tan\theta+\sec\theta)^2=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2\left[\because \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\text{ এবং }\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\right]$

$=\left(\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)^2=\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$

$=\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}\left[\begin{array}{l}\because 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta\text{ এবং}\\ \because (a+b)^2=(a+b)(a+b)\end{array}\right]$

$=\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$ [$\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2$]

$=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ (\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ (প্রমাণিত)

18. $\dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$

Sol" বামপক্ষ $= \dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \dfrac{\cot A + \tan B}{\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\cot A}} = \dfrac{\cot A + \tan B}{\frac{\cot A + \tan B}{\tan B \cot A}}$

$= (\cot A + \tan B) \times \dfrac{\cot A \tan B}{(\cot A + \tan B)} = \cot A \tan B =$ ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan B} = \cot A \cdot \tan B$ (প্রমাণিত)

19. $\sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$

Sol" বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \dfrac{\sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 + \sin A}}$

$= \dfrac{\sqrt{1 - \sin A} \times \sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 + \sin A} \times \sqrt{1 - \sin A}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{1 - \sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{(\sqrt{1 - \sin A})^2}{\sqrt{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}} = \dfrac{1 - \sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ [$\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$]

$= \dfrac{1 - \sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$ [$\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$]

$= \dfrac{1 - \sin A}{\cos A} = \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A \left[\because \sec A = \dfrac{1}{\cos A} \text{ এবং } \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}\right] =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$ (প্রমাণিত)

20. $\sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A.$

Sol" বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \dfrac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A - 1}}$

$= \dfrac{\sqrt{\sec A + 1} \times \sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A - 1} \times \sqrt{\sec A + 1}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{\sec A + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{(\sqrt{\sec A + 1})^2}{\sqrt{(\sec A - 1)(\sec A + 1)}}$

$= \dfrac{\sec A + 1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ [$\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$]

$= \dfrac{\sec A + 1}{\sqrt{\tan^2 A}}$ [$\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$]

$= \dfrac{\sec A + 1}{\tan A} = \dfrac{\sec A}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{\frac{1}{\cos A}}{\frac{\sin A}{\cos A}} + \cot A$

$$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A},\ \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } \frac{1}{\tan A} = \cot A\right]$$

$$= \frac{1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\sin A} + \cot A \qquad = \frac{1}{\sin A} + \cot A$$

$$= \operatorname{cosec} A + \cot A \left[\because \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A\right]$$

$$= \cot A + \operatorname{cosec} A = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A \text{ (প্রমাণিত)}$$

21. $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$.

Sol দেওয়া আছে, $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A \Rightarrow \sin A = \sqrt{2}\cos A - \cos A$

$\Rightarrow \sin A = (\sqrt{2} - 1)\cos A$

$\Rightarrow \sin A = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)}\cos A$ [ডান পক্ষে লব ও হরকে $\sqrt{2} + 1$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \sin A = \frac{2 - 1}{\sqrt{2} + 1}\cos A \Rightarrow (\sqrt{2} + 1)\sin A = \cos A$ [বজ্রগুণন করে]

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin A + \sin A = \cos A \Rightarrow \cos A = \sqrt{2}\sin A + \sin A$

$\Rightarrow \cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$ [পক্ষান্তর করে]

$\therefore \cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$. (প্রমাণিত)

22. যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

আমরা জানি, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \frac{1 + \cot^2 A - (1 + \tan^2 A)}{1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A}$

$$\left[\because 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \text{ এবং } 1 + \tan^2 A = \sec^2 A\right]$$

$$= \frac{1 + \cot^2 A - 1 - \tan^2 A}{1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A} = \frac{\cot^2 A - \tan^2 A}{2 + \cot^2 A + \tan^2 A}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 + (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \text{ [tan A ও cot A এর মান বসিয়ে]}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + 3 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{9 - 1}{3}}{\frac{6 + 9 + 1}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{3}} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান $\frac{1}{2}$.

23. $\text{cosec } A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\text{cosec } A + \cot A$ এর মান কত?

Sol" দেওয়া আছে, $\text{cosec } A - \cot A = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow (\text{cosec } A - \cot A)(\text{cosec } A + \cot A) = \frac{4}{3}(\text{cosec } A + \cot A)$ [উভয় পক্ষে $(\text{cosec } A + \cot A)$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \text{cosec}^2 A - \cot^2 A = \frac{4}{3}(\text{cosec } A + \cot A)$

$\Rightarrow 1 = \frac{4}{3}(\text{cosec } A + \cot A)$ [$\because \text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$]

$\Rightarrow \text{cosec } A + \cot A = 1 \times \frac{3}{4}$ $\therefore \text{cosec } A + \cot A = \frac{3}{4}$ $\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান $= \frac{3}{4}$

24. $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, $\cot A = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}$ [$\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$]

$\Rightarrow \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \frac{a \sin A}{b \cos A} = \frac{a^2}{b^2}$ [উভয় পক্ষে $\frac{a}{b}$ গুণ করে]

$\Rightarrow \frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান $= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

25. $\text{cosec}A - \cot A = \frac{1}{x}$ হলে,

(ক) $\text{cosec}A + \cot A$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $\sec A = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \cot A = \sec A \, \text{cosec} A$.

Sol"

(ক) দেওয়া আছে, $\text{cosec}A - \cot A = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{(\text{cosec}A - \cot A)(\text{cosec}A + \cot A)}{\text{cosec}A + \cot A} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{\text{cosec}^2 A - \cot^2 A}{\text{cosec}A + \cot A} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{\text{cosec}A + \cot A} = \frac{1}{x}$ [লব ও হরকে $(\text{cosec } A + \cot A)$ দ্বারা গুণ করে]

[$\because \text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

$\therefore \text{cosec}A + \cot A = x$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: x.

(খ) দেওয়া আছে, $\text{cosec}A - \cot A = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \left(\frac{1-\cos A}{\sin A}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$ [বর্গ করে] $\Rightarrow \frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A} = \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A} = \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)} = \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{1-\cos A+1+\cos A}{1-\cos A-1-\cos A} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2}{-2\cos A} = \frac{x^2+1}{-(x^2-1)}$ $\Rightarrow \frac{1}{\cos A} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sec A = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (দেখানো হলো)

(গ) দেওয়া আছে, $\text{cosec}A - \cot A = \frac{1}{x}$ ..... (i)

'ক' হতে প্রাপ্ত, $\text{cosec}A + \cot A = x$ ..... (ii)

'খ' হতে প্রাপ্ত, $\sec A = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

(ii) নং হতে (i) বিয়োগ করে পাই, $\text{cosec}A + \cot A - \text{cosec}A + \cot A = x - \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 2\cot A = \frac{x^2-1}{x}$

$\Rightarrow \cot A = \frac{x^2-1}{2x}$ $\Rightarrow \frac{1}{\tan A} = \frac{x^2-1}{2x}$ $\Rightarrow \tan A = \frac{2x}{x^2-1}$

(i) নং এ $\cot A = \frac{x^2-1}{2x}$ বসিয়ে পাই, $\text{cosec}A - \frac{x^2-1}{2x} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \text{cosec}A = \frac{1}{x} + \frac{x^2-1}{2x} = \frac{2+x^2-1}{2x} = \frac{x^2+1}{2x}$

বামপক্ষ $= \tan A + \cot A = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{2x} = \frac{4x^2+x^4-x^2-x^2+1}{2x(x^2-1)} = \frac{x^4+2x^2+1}{2x(x^2-1)}$

ডানপক্ষ $= \sec A \,\text{cosec}A = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x^4+x^2+x^2+1}{2x(x^2-1)} = \frac{x^4+2x^2+1}{2x(x^2-1)}$

$\therefore \tan A + \cot A = \sec A \,\text{cosec}A$ (প্রমাণিত)

উদাহরণের প্রশ্ন ও উত্তর

(উদাহরণ ১-৪ দরকার নেই)

05. প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta . \text{cosec}\theta$

Sol বামপক্ষ $= \tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta . \cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta . \cos\theta}$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} = \text{cosec}\theta . \sec\theta$

$= \sec\theta . \text{cosec}\theta =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

06. প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta$

Sol" বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta}$

$= \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} = \sec^2\theta \cdot \operatorname{cosec}^2\theta =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

07. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta} = \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2\theta}}$

$= \frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{1+\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta} = 1 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

08. প্রমাণ কর: $\frac{1}{2-\sin^2\theta} + \frac{1}{2+\tan^2\theta} = 1$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{1}{2-\sin^2\theta} + \frac{1}{2+\tan^2\theta} = \frac{1}{2-\sin^2\theta} + \frac{1}{2+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$= \frac{1}{2-\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{2\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{1}{2-\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{2(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta}$

$= \frac{1}{2-\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{2-2\sin^2\theta+\sin^2\theta}$

$= \frac{1}{2-\sin^2\theta} + \frac{1-\sin^2\theta}{2-\sin^2\theta} = \frac{2-\sin^2\theta}{2-\sin^2\theta} = 1 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

09. প্রমাণ কর: $\frac{\tan A}{\sec A+1} - \frac{\sec A-1}{\tan A} = 0$

Sol" বামপক্ষ $= \frac{\tan A}{\sec A+1} - \frac{\sec A-1}{\tan A} = \frac{\tan^2 A - (\sec^2 A - 1)}{(\sec A+1)\tan A}$

$= \frac{\tan^2 A - \tan^2 A}{(\sec A+1)\tan A}$ [$\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$]

$= \frac{0}{(\sec A+1)\tan A} = 0 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

10. প্রমাণ কর: $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

Sol" বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}} = \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1-\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

11. $\tan A + \sin A = a$ এবং $\tan A - \sin A = b$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^2 - b^2 = 4\sqrt{ab}$

Sol" এখানে প্রদত্ত, $\tan A + \sin A = a$ এবং $\tan A - \sin A = b$

বামপক্ষ $= a^2 - b^2 = (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$

$= 4\tan A \sin A \quad [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$

$= 4\sqrt{\tan^2 A \sin^2 A} \qquad = 4\sqrt{\tan^2 A (1 - \cos^2 A)}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A.\cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \sin^2 A} \quad \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$

$= 4\sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$

$= 4\sqrt{ab}$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

12. $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol" এখানে প্রদত্ত, $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ ..... (i)

আমরা জানি, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$\Rightarrow (\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A) = 1$

$\Rightarrow \frac{5}{2}(\sec A - \tan A) = 1$ [(i) হতে]

$\therefore \sec A - \tan A = \frac{2}{5}$

উদাহরণের কাজের অংক

01. $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $\cos^4 A + \cos^2 A = 1$.

Sol" দেওয়া আছে, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

$\Rightarrow \cot^4 A = 1 + \cot^2 A \quad \Rightarrow \cot^4 A = \operatorname{cosec}^2 A \quad [\because 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A]$

$\Rightarrow \frac{\cos^4 A}{\sin^4 A} = \frac{1}{\sin^2 A} \quad \left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}, \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}\right]$

$\Rightarrow \cos^4 A = \frac{\sin^4 A}{\sin^2 A}$ [উভয়পক্ষে $\sin^4 A$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \cos^4 A = \sin^2 A \quad \Rightarrow \cos^4 A = 1 - \cos^2 A$

$\therefore \cos^4 A + \cos^2 A = 1$ (প্রমাণিত)

02. $\sin^4 A + \sin^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

Sol" দেওয়া আছে, $\sin^4 A + \sin^2 A = 1$

$\Rightarrow \sin^4 A = 1 - \sin^2 A \quad \Rightarrow \sin^4 A = \cos^2 A \quad [\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A]$

$\Rightarrow \frac{\sin^4 A}{\cos^4 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^4 A}$ [উভয়পক্ষে $\cos^4 A$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^4 = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A.\cos^2 A} \quad \Rightarrow \tan^4 A = \frac{1}{\cos^2 A} \quad \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$

$\Rightarrow \tan^4 A = \sec^2 A \quad \left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A}\right]$

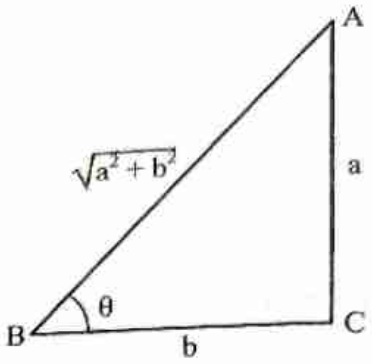
$\Rightarrow \tan^4 A = 1 + \tan^2 A \quad [\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$\therefore \tan^4 A - \tan^2 A = 1$ (প্রমাণিত)

01. θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হলে প্রমাণ করুন $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

অথবা, θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় করুন।

Sol" যেহেতু, $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$



$\therefore$ অতিভুজ, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}$

এবং $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore \quad \cos^2\theta = \frac{b^2}{a^2+b^2}$

এখন, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

$\therefore \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (প্রমাণিত)

02. যদি $\sin A + \cos A = a$ এবং $\sec A + \operatorname{cosec} A = b$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $b(a^2 - 1) = 2a$

Sol" বামপক্ষ $= b(a^2 - 1) = (\sec A + \operatorname{cosec} A)\{(\sin A + \cos A)^2 - 1\}$

$= (\sec A + \operatorname{cosec} A)(\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A - 1)$

$= (\sec A + \operatorname{cosec} A)(1 + 2\sin A.\cos A - 1) \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$= (\sec A + \operatorname{cosec} A)\, 2\sin A.\cos A$

$= 2\sin A.\cos A.\sec A + 2\sin A.\cos A.\operatorname{cosec} A$

$= 2\sin A.\cos A.\frac{1}{\cos A} + 2\sin A.\cos A.\frac{1}{\sin A}$

$= 2\sin A + 2\cos A$

$= 2(\sin A + \cos A)$

$= 2a =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

03. $x = a\cos\theta + b\sin\theta$ এবং $y = a\sin\theta - b\cos\theta$ হলে দেখান যে, $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Sol" বামপক্ষ $= x^2 + y^2$

$= (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\cos\theta)^2$

$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta.b\sin\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2.a\sin\theta.b\cos\theta$

$= a^2(1 - \sin^2\theta) + b^2(1 - \cos^2\theta) + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta$

$= a^2 - a^2\sin^2\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$

$= a^2 + b^2 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

এক নজরে এই অধ্যায় সম্পর্কিত নবম-দশম শ্রেণীর সাধারণ গণিত (অধ্যায় ৯.২) এর গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নসমূহ:

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও উত্তর

18. $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45°, B = 15°$।

Sol" দেওয়া আছে, $2\cos(A+B) = 1$

বা, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos(A+B) = \cos 60° \left[\because \cos 60° = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore A + B = 60°$ ..... (i)

আবার, $2\sin(A-B) = 1$

বা, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin(A-B) = \sin 30° \left[\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore A - B = 30°$ ..... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$A+B+A-B = 60° + 30° \quad \Rightarrow 2A = 90° \quad \therefore A = 45°$

আবার, সমীকরণ (i) থেকে সমীকরণ (ii) বিয়োগ করে পাই,

$A+B-A+B = 60° - 30° \quad \Rightarrow 2B = 30° \quad \therefore B = 15°$

$\therefore A = 45°$ এবং $B = 15°$. (দেখানো হলো)

19. $\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, $\cos(A-B) = 1$

$\Rightarrow \cos(A-B) = \cos 0°$

$\therefore A - B = 0°$ ..... (i)

আবার, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \sin(A+B) = \sin 60°$

$\therefore A + B = 60°$ ..... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2A = 60° \quad \therefore A = 30°$

এখন, সমীকরণ (ii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাই, $2B = 60° \quad \therefore B = 30°$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $A = 30°$ এবং $B = 30°$.

20. সমাধান কর: $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

Sol" এখানে, $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore \quad \frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$ বা, $-\frac{\cos A}{\sin A} = -\sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3}$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cot A = \sqrt{3}$ [$\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$]

বা, $\cot A = \cot 30^\circ \quad \therefore \quad A = 30^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $A = 30^\circ$.

21. **A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।**

Sol" এখানে, $\cot(A+B) = 1$

বা, $\cot(A+B) = \cot 45^\circ$ [$\because \cot 45^\circ = 1$]

$\therefore \quad A + B = 45^\circ$ ..... (i)

আবার, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ বা, $\cot(A-B) = \cot 30^\circ$ [$\because \cot 30^\circ = \sqrt{3}$]

$\therefore \quad A - B = 30^\circ$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2A = 75^\circ \Rightarrow A = \frac{75^\circ}{2} \quad \therefore A = 37\frac{1}{2}^\circ$

আবার, সমীকরণ (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $2B = 15^\circ$

$$\Rightarrow B = \frac{15}{2} \quad \therefore B = 7\frac{1}{2}^\circ$$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $A = 37\frac{1}{2}^\circ$, $B = 7\frac{1}{2}^\circ$

22. **দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$; যদি $A = 30^\circ$ হয়।**

Sol" বামপক্ষ $= \cos 3A = \cos(3 \times 30^\circ)$ [$\because A = 30^\circ$]

$= \cos 90^\circ = 0$ [$\because \cos 90^\circ = 0$]

ডানপক্ষ $= 4\cos^3 A - 3\cos A \quad = 4(\cos A)^3 - 3\cos A$

$= 4(\cos 30^\circ)^3 - 3\cos 30^\circ$ [$\because A = 30^\circ$]

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ [$\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

$= 4\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3})^2}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$. (দেখানো হলো)

23. সমাধান কর: $\sin\theta + \cos\theta = 1$; যখন $0° \le \theta \le 90°$.

Sol'n এখানে, $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$\Rightarrow (\sin\theta + \cos\theta)^2 = (1)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

$\Rightarrow 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = 0$

$\therefore \sin\theta \cdot \cos\theta = 0$

দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হলে রাশি দুইটির অন্তত যেকোনো একটির মান শূন্য হতে হবে।

হয়, $\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \sin\theta = \sin 0° \ [\because \sin 0° = 0] \quad \therefore \theta = 0°$

বা, $\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \cos\theta = \cos 90° \ [\because \cos 90° = 0] \quad \therefore \theta = 90°$

নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 0°, 90°$.

24. সমাধান কর: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

Sol'n এখানে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$

$\Rightarrow \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2 - 5\cos\theta$ [$\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

$\Rightarrow \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta - 2 + 5\cos\theta = 0$ [পক্ষান্তর করে]

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$

দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হলে তাদের অন্তত যেকোনো একটির মান শূন্য হবে।

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos 60° \ [\because \cos 60° = \frac{1}{2}] \quad \therefore \theta = 60$

আবার, $\cos + 3 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -3$ কিন্তু এটা গ্রহণযোগ্য নয়

$-1 \le \cos\theta \le 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 60°$.

25. সমাধান কর: $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$; θ সূক্ষ্মকোণ।

Sol'n দেওয়া আছে, $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$ [$\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

$\Rightarrow 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \cos\theta = \cos 0^\circ \quad \therefore \theta = 0^\circ$ [যেহেতু প্রশ্নে সূক্ষ্মকোণ বলেছে, তাই গ্রহণযোগ্য নয়]

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos 60^\circ \quad \therefore \theta = 60^\circ$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 60^\circ$.

26. সমাধান কর: $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$.

Sol দেওয়া আছে, $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

দুইটি রাশির গুণফল শুন্য। অতএব, তাদের অন্তত একটি রাশির মান শূন্য হবে।

হয়, $\tan\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^\circ$ [$\because \tan 45^\circ = 1$]

$\therefore \quad \theta = 45^\circ$

আবার, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \tan\theta = \tan 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

∴ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 45^\circ$ এবং 60°.

27. মান নির্ণয় কর: $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$

Sol $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$

$= 3(\cot 60^\circ)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{cosec} 30^\circ)^2 + 5(\sin 45^\circ)^2 - 4(\cos 60^\circ)^2$

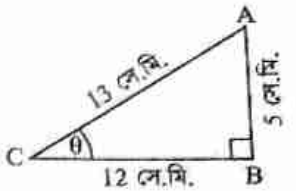
[$\because \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$, $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$]

$= 3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 2^2 + 5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 3\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot 4 + 5\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{5}{2} - 1 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$

∴ নির্ণেয় মান: $\frac{7}{2}$

28. ABC এর $\angle B = 90°$, AB = 5 সে.মি., BC = 12 সে.মি.।
(ক) AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
(খ) $\angle C = \theta$ হলে, $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।
(গ) দেখাও যে, $\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\ \text{cosec}^2\theta$



Sol"
(ক) দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B = 90°$
AB = 5 সে.মি.
BC = 12 সে.মি.

অতএব, θ কোণের বিপরীত বাহু, AB = 5 সে.মি.
সন্নিহিত বাহু, BC = 12 সে.মি.
অতিভুজ, $AC = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25}$ সে.মি. $= \sqrt{169}$ সে.মি.
∴ AC এর পরিমাণ 13 সে.মি.

(খ) 'ক' হতে পাই, $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

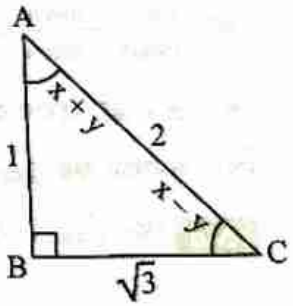
$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{5+12}{13} = \frac{17}{13}$

∴ নির্ণেয় মান $\frac{17}{13}$

(গ) বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta.\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta.\sin^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}.\frac{1}{\sin^2\theta} = \sec^2\theta\ \text{cosec}^2\theta$

29. চিত্রে বর্ণিত ত্রিভুজ হতে AC-এর পরিমাণ কত?
tanA + tanC-এর মান কত হবে? x ও y-এর মান কত?
[৩৭তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: অধ্যায়ের শুরুতে বিসিএস প্রশ্ন নং-০৫]



30. $\sin\theta = p$, $\cos\theta = q$, $\tan\theta = r$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।
(ক) $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।
(খ) $p + q = \sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\theta = 45°$
(গ) $7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Sol" (ক) দেওয়া আছে, $\tan\theta = r$

এখন, $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে, $\tan\theta = \sqrt{(3)^{-1}} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$ $\therefore \theta = 30°$

∴ নির্ণেয় মান: $\theta = 30°$

(খ) দেওয়া আছে, $\sin\theta = p$ এবং $\cos\theta = q$
$p + q = \sqrt{2}$ হলে, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$
$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta \quad \Rightarrow \sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]
$\Rightarrow \sin^2\theta = (\sqrt{2})^2 - 2.\sqrt{2}.\cos\theta + \cos^2\theta$
$\Rightarrow \sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$
$\Rightarrow 1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$
$\Rightarrow 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos 45^\circ \quad \therefore \theta = 45^\circ$ (প্রমাণিত)

(গ) দেওয়া আছে, $\sin\theta = p$ এবং $\cos\theta = q$

$7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta + 3 = 4 \quad \Rightarrow 4\sin^2\theta = 4 - 3$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

বামপক্ষ $= \tan\theta = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (দেখানো হলো)

উদাহরণের প্রশ্ন ও উত্তর

14. (ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1$, $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $A = 45^\circ$ প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(ঘ) সমাধান কর: $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

Sol^n (ক) $\sqrt{2}\cos(A - B) = 1 \quad \Rightarrow \cos(A - B) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad \cos(A - B) = \cos 45^\circ \quad \left[\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\therefore \quad A - B = 45^\circ$ ..... (i)

এবং $2\sin(A + B) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin(A + B) = \sin 60^\circ \quad \left[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\therefore \quad A + B = 60^\circ$ ..... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2A = 105^\circ \quad \therefore A = \frac{105^\circ}{2} = 52\frac{1^\circ}{2}$

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই, $2B = 15^\circ \quad \therefore B = \frac{15^\circ}{2} = 7\frac{1^\circ}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $A = 52\frac{1^\circ}{2}$ ও $B = 7\frac{1^\circ}{2}$

(খ) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2}{-2\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \cot A = \cot 60^\circ \quad \therefore \quad A = 60^\circ$

(গ) দেওয়া আছে, $A = 45^\circ$; প্রমাণ করতে হবে, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

বামপক্ষ $= \cos 2A = \cos(2 \times 45^\circ) = \cos 90^\circ = 0$

ডানপক্ষ $= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2} = \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(ঘ) প্রদত্ত সমীকরণ, $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) - 3(1-\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow (1-\sin\theta)\{2(1+\sin\theta) - 3\} = 0$

$\Rightarrow (1-\sin\theta)\{2\sin\theta - 1\} = 0$

$\therefore 1 - \sin\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 1$ $\Rightarrow 2\sin\theta = 1$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin 90^\circ$ $\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 90^\circ$ $\Rightarrow \sin\theta = \sin 30^\circ$

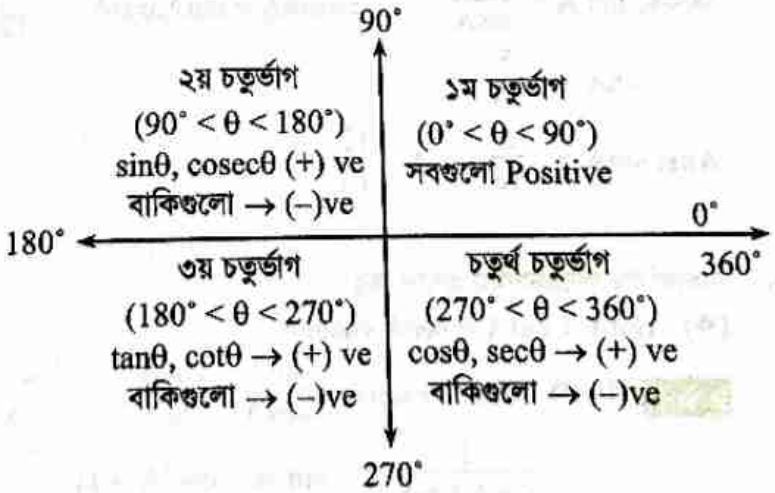
$\Rightarrow \theta = 30^\circ$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ, সেহেতু $\theta = 30^\circ$।

জেনে রাখা

✖ **চতুর্ভাগে কোণের অবস্থান নির্ণয় :**

উপর্যুক্ত diagram এ আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, লম্বভাবে পরস্পরচ্ছেদী দু'টি সরলরেখা অর্থাৎ, অক্ষরেখা দ্বারা সমতলটি চারটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। এদের প্রত্যেকটি ভাগকে একটি চতুর্ভাগ (Quadrant) বলা হয়। প্রত্যেকটি চতুর্ভাগের পরিমাপ 90°. ভাগগুলোকে যথাক্রমে First, Second, Third and Fourth Quadrant বলা হয়।



অনুশীলনীর প্রশ্ন ও উত্তর

04. দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{1}{2}$ এবং cosA ও sinA একই চিহ্নবিশিষ্ট। sinA ও tanA এর মান কত?

Sol" এখানে, $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 A = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 1 - \sin^2 A = \frac{1}{4}$ [$\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$]

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{4} = \sin^2 A \quad \Rightarrow \frac{3}{4} = \sin^2 A \quad \Rightarrow \sin A = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \sin A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

যেহেতু, cosA ধনাত্মক, সুতরাং sinA ধনাত্মক হবে।

$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Ans: $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \sqrt{3}$

05. দেওয়া আছে, $\tan A = -\frac{5}{12}$ এবং tanA ও cosA বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। sinA ও cosA এর মান নির্ণয় কর।

Sol" এখানে, $\tan A = -\frac{5}{12} \quad \Rightarrow \tan^2 A = \left(\frac{-5}{12}\right)^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \sec^2 A - 1 = \frac{25}{144}$ [$\because \tan^2 A = \sec^2 A - 1$]

$\Rightarrow \sec^2 A = \frac{25}{144} + 1 \quad \Rightarrow \sec^2 A = \frac{169}{144} \quad \Rightarrow \sec A = \pm\sqrt{\frac{169}{144}} \quad \Rightarrow \sec A = \pm\frac{13}{12}$

$\therefore \cos A = \pm\frac{12}{13}$ [$\because$ tan A ও cos A বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট]

$\therefore \cos A = \frac{12}{13}$

আবার, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \Rightarrow \sin A = \tan A.\cos A = -\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13}$

$\therefore \sin A = -\frac{5}{13}$

Ans: $\sin A = -\frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$

06. নিম্নলিখিত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

(ক) tanA + cotA = secA cosecA

Sol" বামপক্ষ $= \tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}$

$= \frac{1}{\cos A \sin A}$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

$= \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin A} = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A =$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$ (প্রমাণিত)

(খ) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$

Sol" এখানে, $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta + \cot\theta$

আবার, $\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)(\sec\theta+1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}} = \sqrt{\frac{(\sec\theta+1)^2}{\sec^2\theta-1}} = \frac{\sec\theta+1}{\sqrt{\tan^2\theta}} = \frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}$

$= \frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta = \text{cosec}\theta + \cot\theta$

$\therefore \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$ (প্রমাণিত)

(গ) $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

Sol" বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sqrt{\frac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}} = \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}}$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

$= \frac{1-\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A} = \sec A - \tan A =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$ (প্রমাণিত)

[৩৬তম বিসিএস]

(ঘ) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

Sol" বামপক্ষ $= \sec^4\theta - \sec^2\theta = (\sec^2\theta)^2 - \sec^2\theta$

$= (1+\tan^2\theta)^2 - (1+\tan^2\theta)$ [$\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$]

$= 1 + 2\tan^2\theta + \tan^4\theta - 1 - \tan^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$ (প্রমাণিত)

(ঙ) $(\sec\theta - \cos\theta)(\text{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

Sol" বামপক্ষ $= (\sec\theta - \cos\theta)(\text{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)$

$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= \frac{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta}{\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore (\sec\theta - \cos\theta)(\text{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$ (প্রমাণিত)

(চ) $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\tan\theta+\sec\theta$

Sol" বামপক্ষ $=\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{(\sec\theta+\tan\theta)-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

$=\frac{(\sec\theta+\tan\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

$=\frac{(\sec\theta+\tan\theta)(1-\sec\theta+\tan\theta)}{(1-\sec\theta+\tan\theta)}=\sec\theta+\tan\theta$ = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\tan\theta+\sec\theta$ (প্রমাণিত)

07. যদি $\text{cosec}\,A=\frac{a}{b}$ হয়, যেখানে $a>b>0$, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

Sol" দেওয়া আছে, $\text{cosec}\,A=\frac{a}{b}\Rightarrow \text{cosec}^2A=\frac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 1+\cot^2A=\frac{a^2}{b^2}$ [$\because \text{cosec}^2A-\cot^2A=1$]

$\Rightarrow \cot^2A=\frac{a^2}{b^2}-1\Rightarrow\frac{1}{\tan^2A}=\frac{a^2-b^2}{b^2}\Rightarrow\tan^2A=\frac{b^2}{a^2-b^2}$

$\Rightarrow \tan A=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}}$ $\therefore \tan A=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (প্রমাণিত)

08. যদি $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$

Sol" দেওয়া আছে, $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\sqrt{2}\sin\theta+\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=(\sqrt{2}+1)\sin\theta$

$\Rightarrow (\sqrt{2}-1)\cos\theta=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sin\theta$ [$(\sqrt{2}-1)$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

$\Rightarrow (\sqrt{2}-1)\cos\theta=(2-1)\sin\theta$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta-\cos\theta=\sin\theta$

$\therefore \cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ (দেখানো হলো)

09. $\tan\theta=\frac{x}{y}$, $x\neq y$ হলে, $\frac{x\sin\theta+y\cos\theta}{x\sin\theta-y\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, $\tan\theta=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{y}$

$\Rightarrow \frac{x\sin\theta}{y\cos\theta}=\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}$ $\left[\text{উভয়পক্ষকে }\frac{x}{y}\text{ দ্বারা গুণ করে}\right]$

$\Rightarrow \frac{x\sin\theta}{y\cos\theta}=\frac{x^2}{y^2}$

$\therefore \frac{x\sin\theta+y\cos\theta}{x\sin\theta-y\cos\theta}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

Ans: $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

11. $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ [৪১তম বিসিএস]

Sol: দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x \Rightarrow \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$

$\Rightarrow \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

$\Rightarrow \frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2 \Rightarrow \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

$\Rightarrow \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (দেখানো হলো)

12. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

Sol: দেওয়া আছে, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

$\Rightarrow (a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow a^2\cos^2\theta - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\sin^2\theta = c^2$

$\Rightarrow a^2(1-\sin^2\theta) - 2a\cos\theta.\ b\sin\theta + b^2(1-\cos^2\theta) = c^2$

$\Rightarrow a^2 - a^2\sin^2\theta - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta = c^2$

$\Rightarrow -(a^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\cos^2\theta) = -(a^2+b^2-c^2)$

$\Rightarrow a^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\cos^2\theta = a^2+b^2-c^2$

$\Rightarrow (a\sin\theta)^2 + 2a\sin\theta.b\cos\theta + (b\cos\theta)^2 = a^2+b^2-c^2$

$\Rightarrow (a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2+b^2-c^2$

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণের প্রশ্ন ও উত্তর

12. $\cos A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ এবং A ও B উভয়ই সূক্ষ্মকোণ হলে $\frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B.\tan A}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol: দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{4}{5}$

আমরা জানি, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ [A সূক্ষ্মকোণ]

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

আবার, $\sin B = \frac{12}{13}$

$\therefore \cos B = \sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

$\therefore \quad \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$

এখন, $\frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \,.\, \tan A} = \frac{\frac{12}{5} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{48-15}{20}}{1 + \frac{36}{20}} = \frac{\frac{33}{20}}{\frac{20+36}{20}} = \frac{33}{56}$

$\therefore \quad \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \,.\, \tan A} = \frac{33}{56}$ **(Ans.)**

13. মান নির্ণয় কর: $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{2}$

Sol" আমরা জানি, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ এবং $\cot\frac{\pi}{2} = 0$

$\therefore \quad \sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{2}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + (0)^2 \quad = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3 = \frac{15}{4}$

14. $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ [৩৮তম বিসিএস]

[সমাধান দেখুন: অধ্যায়ের শুরুতে বিসিএস প্রশ্ন নং-৯৯]

15. $15\cos^2\theta + 2\sin\theta = 7$ এবং $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol" দেওয়া আছে, $15\cos^2\theta + 2\sin\theta = 7$

$\Rightarrow \quad 15(1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta = 7 \; [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$\Rightarrow \quad 15 - 15\sin^2\theta + 2\sin\theta = 7$

$\Rightarrow 15\sin^2\theta - 2\sin\theta - 8 = 0$

$\Rightarrow \quad 15\sin^2\theta - 12\sin\theta + 10\sin\theta - 8 = 0$

$\Rightarrow (3\sin\theta + 2)(5\sin\theta - 4) = 0$

$\therefore \quad \sin\theta = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5}$

$\sin\theta$ এর উভয় মান গ্রহণযোগ্য। কেননা $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = -\frac{2}{3}$ হলে $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\theta = \frac{4}{5}$ হলে $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

$\therefore \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ [যখন $\sin\theta = -\frac{2}{3}$]

অথবা, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ [যখন $\sin\theta = \frac{4}{5}$] $\therefore$ নির্ণেয় মান: $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ বা, $\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

এক নজরে এই অধ্যায় সম্পর্কিত নবম-দশম শ্রেণীর উচ্চতর গণিত (অধ্যায় ৮.৩) এর গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নসমূহ:

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও উত্তর

11. (চ) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে, প্রমাণ করুন যে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ [৪৩তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow 3\cos\theta = 4\sin\theta$$
$$\Rightarrow 9\cos^2\theta = 16\sin^2\theta \text{ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]}$$
$$\Rightarrow 9(1-\sin^2\theta) = 16\sin^2\theta$$
$$\Rightarrow 9 - 9\sin^2\theta - 16\sin^2\theta = 0$$
$$\Rightarrow -25\sin^2\theta = -9 \quad \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{3}{5}$$
$$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5} \quad [\because \sin\theta \text{ ঋণাত্মক}]$$

আবার, $\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3\cos\theta = 4\sin\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{2}{4}} = \frac{-7}{5}\times\frac{4}{-2} = \frac{14}{5} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5} \text{ (দেখানো হলো)}$$

12. সমাধান কর: $\left(\text{যখন } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

(ক) $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$

Sol" দেওয়া আছে, $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$

$$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$$
$$\Rightarrow 2(1-\sin^2\theta) - 2\sin^2\theta = 1 \quad [\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$$
$$\Rightarrow 2 - 2\sin^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$$
$$\Rightarrow 2 - 4\sin^2\theta = 1$$
$$\Rightarrow -4\sin^2\theta = -1$$
$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{1}{2}$$

যেহেতু $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, সুতরাং $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \left[\because \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right]$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}$

জেনে রাখুন:

0^0	0	360^0	2π
30^0	$\frac{\pi}{6}$	120^0	$\frac{2\pi}{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	135^0	$\frac{3\pi}{4}$
60^0	$\frac{\pi}{3}$	150^0	$\frac{5\pi}{6}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	180^0	π

(খ) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

Sol" দেওয়া আছে, $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2(1-\cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow -(2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

$\therefore$ $2\cos\theta - 1 = 0$ যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2\cos\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

নতুবা, $\cos\theta + 2 = 0$
$\Rightarrow \cos\theta = -2$
যা গ্রহণযোগ্য নয়।
কারণ $-1 \le \cos\theta \le 1$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{3}$

(গ) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

Sol" দেওয়া আছে, $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

$\Rightarrow 6\sin^2\theta - 8\sin\theta - 3\sin\theta + 4 = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(3\sin\theta - 4) - 1(3\sin\theta - 4) = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)(3\sin\theta - 4) = 0$

অতএব, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

নতুবা, $3\sin\theta - 4 = 0$
$\Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{3}$
যা গ্রহণযোগ্য নয়।
কারণ $-1 \le \sin\theta \le 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{6}$

(ঘ) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Sol" দেওয়া আছে, $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয়, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}\left[\because \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\right]$

যা, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{6}$ বা, $\frac{\pi}{3}$

অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}\left[\because \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

(ঙ) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

Sol" দেওয়া আছে, $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3 \Rightarrow 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0 \Rightarrow -2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow -(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1) = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \cos\theta = 1$ $\Rightarrow \cos\theta = \cos 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = 0$ কিন্তু $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta \neq 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{3}$

13. সমাধান কর:(যখন $0 < \theta < 2\pi$)

(ক) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

Sol" দেওয়া আছে, $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 4\cos\theta + \cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 2) + 1(\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 2) = 0$

কিন্তু, $\cos\theta - 2 \neq 0$ কেননা $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

অতএব, $2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ [শর্তানুসারে $0 < \theta < 2\pi$]

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ $= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

(খ) $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

Sol" দেওয়া আছে, $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5 \Rightarrow 4(1 - \sin^2\theta + \sin\theta) = 5 \Rightarrow 4 - 4\sin^2\theta + 4\sin\theta = 5$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow (2\sin\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta - 1 = 0$ [বর্গমূল করে]

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ যা, $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

(গ) $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

Sol" দেওয়া আছে, $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3 \Rightarrow \cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

$\Rightarrow 2\cot^2\theta = 2 \Rightarrow \cot^2\theta = 1 \Rightarrow \cot\theta = \pm 1$

$\cot\theta = 1$ নিয়ে পাই, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\Rightarrow \cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে।

আবার, $\cot\theta = -1$ থেকে পাই, $\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cot\theta = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\Rightarrow \cot\theta = \cot\frac{3\pi}{4} = \cot\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ যা, $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

(ঘ) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

Sol" দেওয়া আছে, $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2 \Rightarrow \tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

$\Rightarrow \tan^4\theta + 1 = 2\tan^2\theta$ [উভয় পক্ষকে $\tan^2\theta$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \tan^4\theta - 2\tan^2\theta + 1 = 0 \Rightarrow (\tan^2\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \tan^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \pm 1$

এখন, $\tan\theta = 1$ নিয়ে পাই, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

আবার, $\tan\theta = -1$ নিয়ে পাই, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\frac{7\pi}{4} \quad \therefore \quad \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

(ঙ) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

Sol" দেওয়া আছে, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3} \Rightarrow 3(1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta) = 5 \Rightarrow 3 + 6\tan^2\theta - 5 = 0 \Rightarrow 6\tan^2\theta = 2$

$\tan^2\theta = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

আবার, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই, $\Rightarrow \quad \tan\theta = -\tan\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} \quad \therefore \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

(চ) $5\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\text{cosec}\theta - 2 = 0$

Sol" দেওয়া আছে, $5\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\text{cosec}\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{5}{\sin^2\theta} - \frac{7\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta = 0$

$\Rightarrow 5 - 7\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = 0$

$\Rightarrow 5 - 7\cos\theta - 2 + 2\cos^2\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 6\cos\theta - \cos\theta + 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 3) - 1(\cos\theta - 3) = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore \cos\theta = 3$; যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ, $-1 \le \cos\theta \le 1$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, যা প্রদত্ত সীমা $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

(ছ) $2\sin x\cos x = \sin x\ (0 \le x \le 2\pi)$

Sol" $2\sin x\cos x = \sin x \Rightarrow 2\sin x\cos x - \sin x = 0$

$\therefore \sin x(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \sin 0^\circ = \sin(\pi - 0) = \sin(2\pi - 0)$

$\therefore x = 0, \pi, 2\pi$

অথবা, $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, যা সীমা $0 \le x \le 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মানসমূহ: $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ **(Ans.)**

14. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ঢাকা ও পঞ্চগড় পৃথিবীর কেন্দ্রে 3.5° কোণ উৎপন্ন করে। শীতকালে একজন ব্যক্তি পঞ্চগড়ের অনুকূল নৈসর্গিক দৃশ্য দেখতে চায়। সে 0.84 মিটার ব্যাস বিশিষ্ট চাকাওয়ালা একটি গাড়ী নিয়ে গেল।

(ক) পৃথিবীর কেন্দ্রে ঢাকা ও পঞ্চগড়ের থেকে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ কত রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে?

(খ) ঢাকা এবং পঞ্চগড়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

(গ) ঢাকা হতে পঞ্চগড় আসা যাওয়ার ক্ষেত্রে গাড়ীর প্রতিটি চাকা কতবার ঘুরবে?

Sol"

(ক) পৃথিবীর কেন্দ্রে ঢাকা ও পঞ্চগড় থেকে অঙ্কিত ব্যাসার্ধের উৎপন্ন কোণ $= 3.5^\circ$

$= \left(3.5 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = 0.061087^c$ **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

ঢাকা ও পঞ্চগড়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 3.5^\circ = 0.061087^c$

$\therefore$ ঢাকা ও পঞ্চগড়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $S = r\theta = (6440 \times 0.061087) = 393.4$ কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

(গ) দেওয়া আছে, গাড়িটির চাকার ব্যাস $= 0.84$ মিটার

আমরা জানি, গাড়ির চাকা প্রতিবার ঘূর্ণনে তার পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 0.84 \times \pi$ [পরিধি = ব্যাস $\times \pi$]

$= 0.84\pi$ মিটার

$\therefore$ গাড়িটির চাকার ঘূর্ণনসংখ্যা $= \frac{393.4 \times 1000}{0.84\pi}$ টি $= 149074.78$ টি $= 149075$ টি (প্রায়) **(Ans.)**

উদাহরণের প্রশ্ন ও উত্তর

25. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$

Sol" $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।

অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{5}{12} = \frac{y}{x}$ $\quad \therefore x = 12, y = 5$

$\therefore r = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore \sin\theta = \frac{-y}{r} = -\frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{-x}{r} = \frac{-12}{13}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{13}{12}$

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ [$\because \cos(-\theta) = \cos\theta, \sec(-\theta) = \sec\theta$]

$= \frac{-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{-\frac{13}{12} + \frac{5}{12}} = \frac{-\frac{17}{13}}{-\frac{8}{12}} = \frac{17}{13} \times \frac{12}{8} = \frac{51}{26}$ **(প্রমাণিত)**

26. $\tan\theta = -\sqrt{3}, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ হলে θ এর মান কত?

Sol" $\tan\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ এর অবস্থান দ্বিতীয় বা চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকবে।

দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\tan\theta = -\sqrt{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{2\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$

এটি গ্রহণযোগ্য মান। কারণ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$

আবার, চতুর্থ চতুর্ভাগে $\tan\theta = -\sqrt{3} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{5\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{5\pi}{3}$

এটিও গ্রহণযোগ্য মান। কারণ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ $\therefore$ θ এর মান $\frac{2\pi}{3}$ ও $\frac{5\pi}{3}$

27. সমাধান কর: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

Sol" $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

$\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

$1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{4}$

28. $0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে সমীকরণটির সমাধান কর: $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

Sol" $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta \Rightarrow 1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow 1 - 2\cos^2\theta - \cos\theta = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা $\cos\theta + 1 = 0$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ অথবা $\cos\theta = -1$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3})$ অথবা $\cos\theta = \cos\pi$

$\Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ [শর্তানুসারে]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$, যা প্রদত্ত সীমা $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

29. $A = \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$ এবং $B = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta$

(ক) $\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে দেখাও যে, $B = \sqrt{3}$

Sol" $B = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \cot\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$ $\left[\because \theta = \frac{\pi}{3}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

(খ) প্রমাণ কর যে, $A^2 - B^2 = 0$

Sol" $A = \dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$ [$\because \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$]

$= \dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \dfrac{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)(1 - \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = B$

$\therefore \quad A^2 = B^2 \quad \therefore \quad A^2 - B^2 = 0$

(গ) $B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $0 < \theta \le 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

Sol" $B = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}(\cos\theta + 1) = \sin\theta$

$\Rightarrow 3(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1) = \sin^2\theta$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 3\cos^2\theta + 6\cos\theta + 3 = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow 4\cos^2\theta + 6\cos\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta + 2\cos\theta + \cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta + 1) + 1(\cos\theta + 1) = 0 \Rightarrow (\cos\theta + 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore \quad \cos\theta + 1 = 0$ অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0$

অর্থাৎ, $\cos\theta = -1$ অথবা, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \cos\pi$ অথবা, $\cos\theta = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right), \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$

অর্থাৎ, $\theta = \pi$ অথবা, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3} \quad \therefore \theta = \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}$

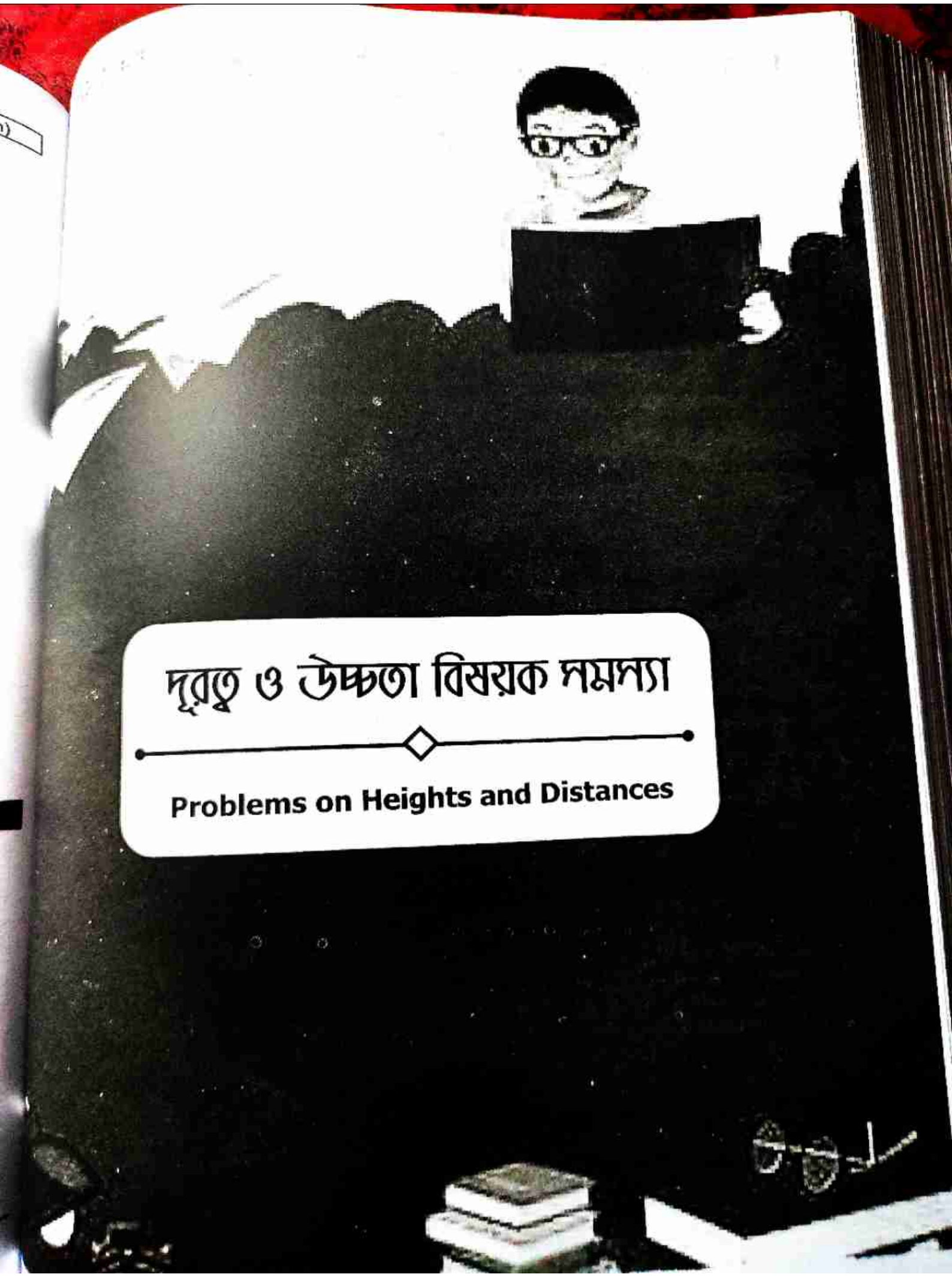
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

সাধারণ গণিত (অধ্যায়: ৯.১)
অনুশীলনীর অংক নং: ৭(গ), ৮(ক), ১১, ১৭, ১৯, ২০, ২১*, ২৪*, ২৫*
উদাহরণ: ৮, ৯, ১১* (উদাহরণের কাজের অংক: ০১*, ০২*)
সাধারণ গণিত (অধ্যায়: ৯.২)
অনুশীলনীর অংক নং: ২০, ২১, ২৩*, ২৪, ২৫, ২৬*, ২৮, ২৯*
উচ্চতর গণিত (অধ্যায়: ৮.২)
অনুশীলনীর অংক নং: ৬(খ, ঘ*, চ*), ৭*, ৮*, ৯*, ১০*, ১১*
উদাহরণ: ১৪*, ১৫*
উচ্চতর গণিত (অধ্যায়: ৮.৩)
অনুশীলনীর অংক নং: ৮(চ*), ১২(গ, ঘ), ১৩(ক, খ, ঙ, ছ)
উদাহরণ: ২৫*, ২৭, ২৮*

বি:দ্র: * চিহ্নিত অংকগুলো বেশি গুরুত্বপূর্ণ (প্রথম দিকে বিসিএস প্রশ্ন পড়ে রাখবেন)



দূরত্ব ও উচ্চতা বিষয়ক সমস্যা

Problems on Heights and Distances

এই অধ্যায়ের Analysis

দূরত্ব ও উচ্চতা অধ্যায়টি BCS রিটেনের জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ একটি অধ্যায়। ৩০ তম BCS এর আগে এখান থেকে খুব কম প্রশ্ন আসলেও ৩০ তম BCS থেকে নিয়মিত প্রশ্ন আসছে। নতুন পদ্ধতির BCS চালু হওয়ার পর (৩৫ তম থেকে) এই অধ্যায় থেকে ৩৫ তম, ৩৬ তম, ৩৭ তম, ৪০ তম, ৪১ তম এবং ৪৪ তম BCS এ প্রশ্ন এসেছে। তাই আশা করা যায় ৪৫ তম রিটেনেও এখান থেকে একটি প্রশ্ন আসতে পারে।

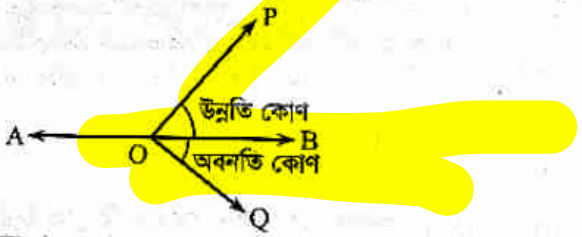
এ পর্যন্ত এই অধ্যায়ের Written-এ আসা প্রশ্নগুলো Analysis করলে দেখা যায় নবম-দশম শ্রেণির সাধারণ গণিত বইয়ের দশম অধ্যায়টি কেউ ভালভাবে পড়লে অন্য কোন অংক না করলেও উত্তর করা সম্ভব। কারণ অধিকাংশ পরীক্ষায় বই থেকে হুবহু (৩৭ তম, ৩৮ তম, ৩১ তম) এবং বাকী পরীক্ষায় বইয়ের অনুরূপ (৪৪ তম, ৪১ তম, ৪০ তম, ৩৪ তম, ৩৩ তম ইত্যাদি) প্রশ্ন এসেছে।

তাই আপনাদের সুবিধার্থে এই বইয়ে সবগুলো অংক Type আকারে ভেঙ্গে ভেঙ্গে করে দিয়েছি। পাশাপাশি বইয়ের সাথে মিল রেখে আপনার প্রস্তুতি শাণিত করার জন্য কিছু অতিরিক্ত অংক সংযোজন করেছি। আপনার পরীক্ষায় এই অধ্যায়ের উত্তর করতে এই বইটির অংকগুলোই যথেষ্ট ইনশাআল্লাহ্।

মৌলিক এবং তথ্যমূলক প্রয়োজনীয় আলোচনা

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ (Angle of Elevation and Angle of Depression):

চিত্রটি লক্ষ্য করি, ভূমির সমান্তরাল AB একটি সরলরেখা। A, O, B, P, Q বিন্দুগুলো একই উলম্বতলে অবস্থিত। AB সরলরেখার উপরের P বিন্দুটি AB রেখার সাথে ∠POB উৎপন্ন করে। এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর উন্নতি কোণ ∠POB।



সুতরাং ভূতলের উপরের কোন বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয়।

Q বিন্দু ভূরেখার সমান্তরাল AB রেখার নিচের দিকে অবস্থিত।
এখানে, O বিন্দুর সাপেক্ষে Q বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে ∠QOB।
সুতরাং ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোন বিন্দু ভূ-রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে অবনতি কোণ বলা হয়।

Important Problem & Solutions

TYPE 01 উন্নতি/অবনতি কোণের সাপেক্ষে ভূমি বরাবর দূরত্ব বা উচ্চতা নির্ণয়

Pattern-01

01. একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনারটি থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol ধরি, মিনারটির পাদবিন্দু B, ভূতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং শীর্ষ বিন্দু A।
আবার, মনে করি, মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব BO = x মিটার।
∴ মিনারের শীর্ষের উন্নতি ∠AOB = 30° এবং মিনারের উচ্চতা BA = 26 মিটার।

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজ হতে,

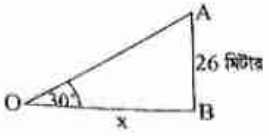
$\tan\angle AOB = \frac{AB}{OB}$

বা, $\tan 30^\circ = \frac{26}{x}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{26}{x}\left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

বা, $x = 26\sqrt{3} = 45.033$ মিটার (প্রায়)

∴ মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব 45.033 মিটার (প্রায়)।



02. একটি গাছের উচ্চতা 105 মিটার। গাছটির শীর্ষ ভূমির কোনো বিন্দুতে উন্নতি কোণ 60° তৈরি করলে, গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০২)]

Sol মনে করি, গাছের গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব BC = x মিটার,

গাছের উচ্চতা AB = 105 মিটার এবং C বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ A বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$

সমকোণী ΔABC থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

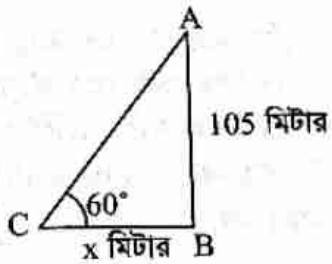
$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{105}{x} \quad \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{105}{x}\ [\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$

$\Rightarrow \sqrt{3}x = 105 \quad \Rightarrow x = \frac{105}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = \frac{105\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow x = 35\sqrt{3}$

$\therefore x = 60.622$ (প্রায়)

∴ গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব 60.62 মিটার (প্রায়)।



03. একটি নদীর এক তীরে অবস্থিত কোন বিন্দুর অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার উঁচু একটি গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60°; নদীটির প্রস্থ কত?

Sol ধরি, গাছটির পাদবিন্দু B, নদীর অপর পারের বিন্দু O এবং শীর্ষ বিন্দু A।

আবার, মনে করি, নদীটির প্রস্থ BO = x মিটার।

∴ গাছটির শীর্ষের উন্নতি $\angle AOB = 60^\circ$ এবং গাছটির উচ্চতা BA = 150 মিটার।

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজ হতে,

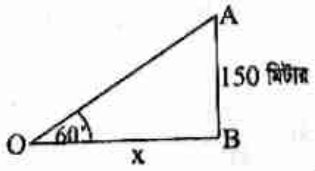
$\tan\angle AOB = \frac{AB}{OB}$

বা, $\tan 60^\circ = \frac{150}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{150}{x}\ [\tan 60^\circ = \sqrt{3}]$

বা, $x = \frac{150}{\sqrt{3}} = 86.603$ মিটার (প্রায়)

∴ মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব 86.603 মিটার (প্রায়)।



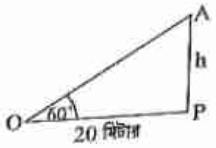
Pattern-02

04. একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]*

Sol" মনে করি, গাছের উন্নতি কোণ $\angle POA = 60^\circ$। গাছের পাদদেশ থেকে ভূতলের O বিন্দুর দূরত্ব $PO = 20$ মিটার।

এবং গাছের উচ্চতা $AP = h$ মিটার

এখন, POA সমকোণী ত্রিভুজ হতে,



$$\tan \angle POA = \frac{AP}{OP}$$

বা, $\tan 60^\circ = \frac{h}{20}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{20}$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

$\therefore \quad h = 20\sqrt{3} = 34.641$ (প্রায়)

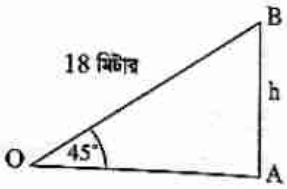
$\therefore$ গাছটির উচ্চতা 34.641 মিটার.(প্রায়)।

05. 18 মিটার দৈর্ঘ্য একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১২ এবং উদাহরণের অংক নং-০৯)]*

Sol" মনে করি, দেওয়ালের উচ্চতা $AB = h$ মিটার।

মইয়ের দৈর্ঘ্য, $OB = 18$ মিটার এবং $\angle AOB = 45^\circ$

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজ হতে,



$$\sin \angle AOB = \frac{AB}{OB} \quad \text{বা, } \sin 45^\circ = \frac{h}{18}$$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{18}\left[\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

বা, $h = \frac{18}{\sqrt{2}} = \frac{12 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 9\sqrt{2} = 12.725$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ দেওয়ালটির উচ্চতা 12.725 মিটার (প্রায়)।

06. একটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 75 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি 30° হলে, টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০৯)]*

Sol" মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h$ মিটার, টাওয়ারের পাদদেশ থেকে $BC = 75$ মিটার দূরে ভূতলস্থ C বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষ A বিন্দুর উন্নতি $\angle ACB = 30^\circ$

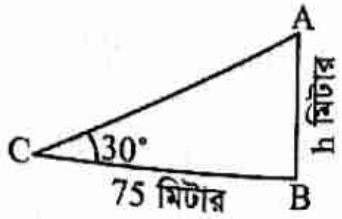
সমকোণী ΔABC থেকে পাই, $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{75} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{75} \quad \Rightarrow \sqrt{3}h = 75 \quad \Rightarrow h = \frac{75}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow h = \frac{75\sqrt{3}}{3}$ [হর ও লবকে $\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ করে]

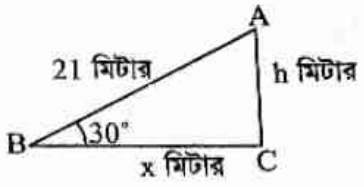
$\Rightarrow h = 25\sqrt{3} \quad \therefore h = 43.301$ (প্রায়)।

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা 43.30 মিটার (প্রায়)।



07. 21 মিটার দীর্ঘ একটি মই ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে দেয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেয়ালটির উচ্চতা এবং দেয়ালের গোড়া থেকে মইটির দূরত্ব নির্ণয় করুন।

Sol" মনে করি, দেয়ালের উচ্চতা CA = h মিটার এবং দেয়ালের গোড়া থেকে মইয়ের দূরত্ব, BC = x মিটার।
তাহলে, মইয়ের দৈর্ঘ্য AB = 21 মিটার এবং ∠CBA = 30°.



সমকোণী ΔABC-এ $\sin \angle CBA = \frac{AC}{AB}$

$\Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{h}{21} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{21} \Rightarrow h = 10.5$

আবার, $\cos \angle CBA = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{x}{21} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = \frac{21\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x = 18.1865$ (প্রায়)

$\therefore$ দেয়ালের উচ্চতা 10.5 মিটার

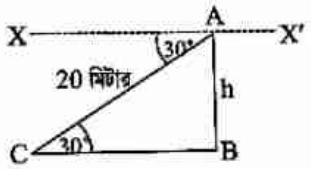
$\therefore$ এবং দেওয়ালের গোড়া থেকে মইয়ের দূরত্ব 18.1865 (প্রায়)। **(উত্তর)**

Pattern-03

08. একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" মনে করি, ঘরটির উচ্চতা AB = h মিটার, ঘরের ছাদের A বিন্দু থেকে AC = 20 মিটার দূরে ভূতলস্থ C বিন্দুর অবনতি ∠CAX = 30°।
সুতরাং ∠XAC = ∠ACB = 30° [একান্তর কোণ বলে]
AC = 20 মিটার

এখন, AB সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$



বা, $\sin 30^\circ = \frac{h}{20}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{h}{20} \left[\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right]$

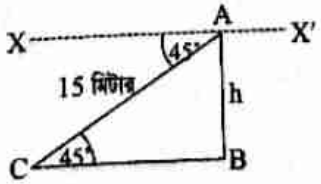
বা, 2h = 20 $\therefore$ h = 10 মিটার।

$\therefore$ ঘরটির উচ্চতা 10 মিটার।

09. একটি মিনারের শীর্ষবিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 15 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 45° হলে, মিনারটির উচ্চতা কত?

Sol" মনে করি, মিনারটির উচ্চতা AB = h মিটার, মিনারের শীর্ষবিন্দু A থেকে AC = 15 মিটার দূরে ভূতলস্থ C বিন্দুর অবনতি ∠CAX = 45°।
সুতরাং ∠XAC = ∠ACB = 45° [একান্তর কোণ বলে]
AC = 15 মিটার

এখন, AB সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$



বা, $\sin 45^\circ = \frac{h}{15}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{15} \left[\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

বা, $\sqrt{2}h = 15$ $\therefore$ h = 10.61 মিটার (প্রায়)

$\therefore$ ঘরটির উচ্চতা 10.61 মিটার (প্রায়)

Pattern-04

10. 12.728 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি দেয়ালের ছাদের সঙ্গে লাগানো মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। মইটির দৈর্ঘ্য কত? [৩০তম বিসিএস]

Sol" ধরি, দেয়াল AB, মই AC-কে A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে

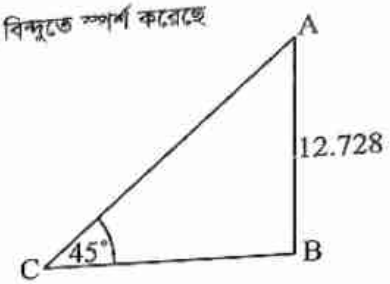
$\angle ACB = 45°$, $AC = ?$

ΔABC হতে, $\sin 45° = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{12.728}{AC}$

$\therefore AC = 18.0001$

উত্তর: 18.0001 মিটার বা 18 মিটার (প্রায়)।



TYPE 02: ভূতলে কোনো স্থান থেকে এগিয়ে বা পিছিয়ে গেলে উন্নতি/অবনতি কোণের পরিবর্তন সাপেক্ষে উচ্চতা নির্ণয়

Pattern-01

01. ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" মনে করি, স্তম্ভের উচ্চতা $AB = h$ মিটার, C স্থানে শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60°$ এবং C স্থান থেকে $CD = 25$ মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 30°$ হয়।

ধরি, $BC = x$ মিটার

$\therefore BD = BC + CD = (x + 25)$ মিটার

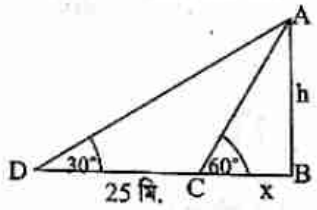
এখন, ABD সমকোণী ত্রিভুজ হতে,

$\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30° = \frac{h}{x+25}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+25}\left[\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

বা, $x + 25 = h\sqrt{3}$ ..... (i)



আবার, ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে,

$\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$ বা, $\tan 60° = \frac{h}{x}$ বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}[\because \tan 60° = \sqrt{3}]$

বা, $h = x\sqrt{3}$ ..... (ii)

এখন, (i) ও (ii) থেকে পাই, $x + 25 = x\sqrt{3}.\sqrt{3}$

বা, $x + 25 = 3x$ বা, $3x - x = 25$

বা, $2x = 25$ বা, $x = \frac{25}{2} = 12.5$

$\therefore h = x\sqrt{3} = 12.5 \times \sqrt{3} = 21.651$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ স্তম্ভটির উচ্চতা 21.651 মিটার (প্রায়)।

৫৫. একটি দেয়ালের শীর্ষবিন্দু থেকে একটি রড ভূমিতে 60° কোণ উৎপন্ন করে। অন্য একটি রড প্রথম রডের ভূমির স্পর্শবিন্দু হতে 42 ফুট পেছনে ভূমিতে 45° কোণ উৎপন্ন করে। দেয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় করুন। [৪৪তম বিসিএস]

অথবা, ভূ-তলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদের একটি বিন্দুর উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 42 মি. পিছিয়ে গেলে দালানের ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানের উচ্চতা নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০৫)]

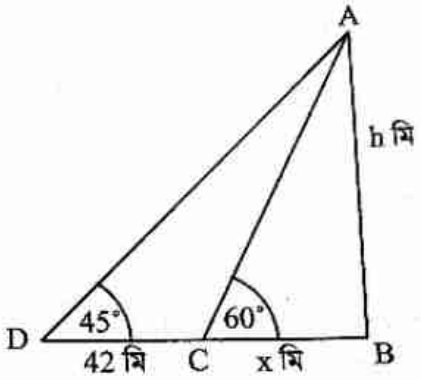
Sol মনে করি, দালানের উচ্চতা AB = h মি.
শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60^\circ$ এবং C স্থান থেকে CD = 42 মি. পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 45^\circ$ হয়।

ধরি, BC = x মি.
$\therefore$ BD = BC + CD = (x + 42) মি.

ΔABC থেকে পাই, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ..... (i)



আবার, ΔABD থেকে পাই, $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow 1 = \frac{h}{x+42}$ [$\because \tan 45^\circ = 1$]

$\Rightarrow h = x + 42 \quad \Rightarrow h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 42$ [(i) নং সমীকরণ থেকে x এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \sqrt{3}h = h + 42\sqrt{3}$ [উভয়পক্ষকে $\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow \sqrt{3}h - h = 42\sqrt{3} \quad \Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 42\sqrt{3}$

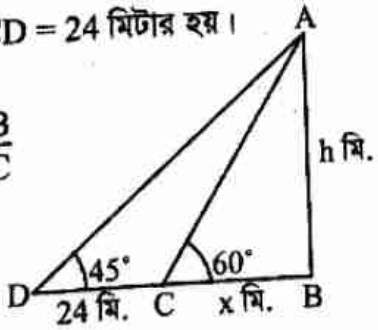
$\Rightarrow h = \frac{42\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

$\therefore$ h = 99.373 মি. (প্রায়)

$\therefore$ দালানটির উচ্চতা h = 99.373 মি. (প্রায়)

৫৬. ভূতলে একটি টাওয়ারের ছায়া 24 মিটার বেশি লম্বা হয় যদি সূর্যের উন্নতি কোণ 60° থেকে 45° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা কত?

Sol মনে করি, টাওয়ারটির উচ্চতা AB = h মিটার।
টাওয়ারটির ভূতলে C বিন্দুতে উন্নতি কোণ $\angle BCA = 60^\circ$
এবং D বিন্দুতে উন্নতি কোণ $\angle BDA = 45^\circ$ যখন CD = 24 মিটার হয়।
ধরি, BC = x মিটার।



এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ABC এ $\tan \angle BCA = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

$\Rightarrow \sqrt{3}x = h \quad \therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ..... (i)

আবার, ΔABD-এ $\tan \angle BDA = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{AB}{BC + CD} \quad \Rightarrow 1 = \frac{h}{x + 24} \quad \Rightarrow h = x + 24$

$\Rightarrow h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 24$ [(i) নং থেকে x এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 24 \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}h - h}{\sqrt{3}} = 24 \quad \Rightarrow \sqrt{3}h - h = 24\sqrt{3}$

$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 24\sqrt{3} \quad \Rightarrow h = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \quad \Rightarrow h = \frac{24\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$

$\Rightarrow h = \frac{24(3 + \sqrt{3})}{3 - 1} \quad \Rightarrow h = \frac{24(3 + \sqrt{3})}{2} \quad \Rightarrow h = 12(3 + \sqrt{3})$

$\Rightarrow h = 56.78461$ (প্রায়)

$\therefore$ টাওয়ারটির উচ্চতা 56.785 মিটার (প্রায়)। **(উত্তর)**

Pattern-02

04. কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে ২৫ মিটার এগিয়ে এলে মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতিকোণ ৩০° থেকে ৪৫° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করুন। [৪১তম বিসিএস]

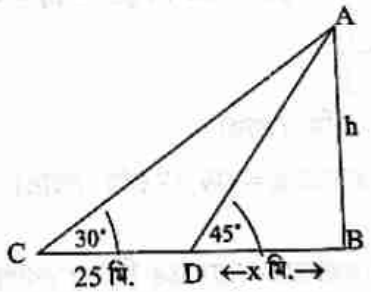
Sol মনে করি, মিনারটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার।

এবং C স্থানে শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 30^\circ$।

মিনারের দিকে $CD = 25$ মিটার এগিয়ে গেলে শীর্ষের উন্নতি $\angle ADB = 45^\circ$ হয়।

ধরি, $BD = x$ মিটার।

$\therefore BC = 25 + x$ (চিত্রানুযায়ী)



এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ABD এ,

$\tan \angle BDA = \frac{AB}{BD} \quad \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow 1 = \frac{h}{x}$ [$\because \tan 45^\circ = 1$]

$\therefore x = h$ ..... (i)

আবার, ΔABC এ $\tan \angle BCA = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{AB}{BD + DC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 25} \quad \left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$\Rightarrow \sqrt{3}h = x + 25$

$\Rightarrow \sqrt{3}h = h + 25$ [(i) নং থেকে x-এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \sqrt{3}h - h = 25$

$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 25$

$\Rightarrow h = \frac{25}{\sqrt{3} - 1}$

$\Rightarrow h = 34.15$ (প্রায়)

$\therefore$ মিনারটির উচ্চতা 34.15 মিটার (প্রায়)। **(উত্তর)**

05. কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]*

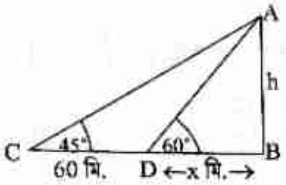
Sol" মনে করি, মিনারটির উচ্চতা AB = h মিটার।
এবং C স্থানে শীর্ষের উন্নতি ∠ACB = 45°।
মিনারের দিকে CD = 60 মিটার এগিয়ে গেলে শীর্ষের উন্নতি ∠ADB = 60° হয়।
ধরি, BD = x মিটার।
∴ BC = 60 + x (চিত্রানুযায়ী)
এখন, ΔACB হতে আমরা লিখতে পারি,

$\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 45^\circ = \frac{h}{60+x}$

বা, $1 = \frac{h}{60+x}$ [∵ tan 45° = 1]

∴ h = 60 + x ..... (i)



আবার, ΔADB হতে আমরা লিখতে পারি, $\tan\angle ADB = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$ বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ [∵ ∠tan 60° = $\sqrt{3}$]

∴ $h = x\sqrt{3}$ ..... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ হতে লিখতে পারি,

$x\sqrt{3} = 60 + x$ বা, $x\sqrt{3} - x = 60$ বা, $x(\sqrt{3}-1) = 60$

বা, $x = \frac{60}{\sqrt{3}-1} = 81.962$ মিটার

এখন, x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

h = (60 + 81.962) মিটার = 141.962 মিটার (প্রায়)

∴ মিনারটির উচ্চতা 141.962 মিটার (প্রায়)।

06. ভূতলস্থ কোন স্থানে একটি দালানের ছাদের কোন বিন্দুতে উন্নতি কোণ 30°। ঐ স্থান থেকে দালানের দিকে 60 মিটার এগিয়ে গেলে ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানটির উচ্চতা নির্ণয় করুন।

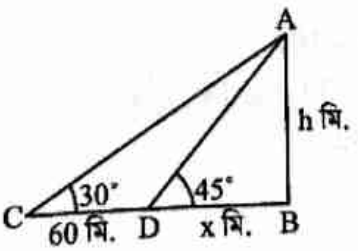
Sol" মনে করি, দালানটির উচ্চতা BA = h মিটার। ভূতলে C বিন্দুতে দালানের ছাদের A বিন্দুর উন্নতি কোণ ∠BCA = 30° এবং C বিন্দু থেকে B বিন্দুর দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে D বিন্দুতে উন্নতি কোণ ∠BDA = 45°।

∴ CD = 60 মিটার
ধরি, BD = x মিটার
এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ABD এ,

$\tan\angle BDA = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow 1 = \frac{h}{x}$ [∵ tan 45° = 1]

∴ x = h ..... (i)



আবার, ΔABC এ $\tan \angle BCA = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{AB}{BD + DC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 60} \quad \left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \quad \Rightarrow \sqrt{3}h = x + 60$

$\Rightarrow \sqrt{3}h = h + 60$ [(i) নং থেকে x-এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow \sqrt{3}h - h = 60 \quad \Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 60 \quad \Rightarrow h = \frac{60}{\sqrt{3} - 1}$

$\Rightarrow h = \frac{60.(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$ [ডানপক্ষের হর ও লবকে $(\sqrt{3} + 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow h = \frac{60(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} \quad \Rightarrow h = \frac{60(\sqrt{3} + 1)}{2} \quad \Rightarrow h = 30(\sqrt{3} + 1)$

$\Rightarrow h = 81.96152$ (প্রায়)

∴ দালানটির উচ্চতা 81.962 মিটার (প্রায়)। **(উত্তর)**

Pattern-03

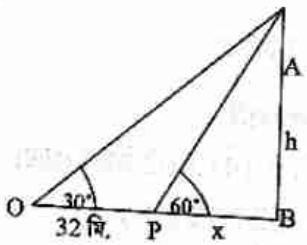
07. একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 32 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h$ মিটার এবং নদীর প্রস্থ $BP = x$ মিটার।

P স্থানে টাওয়ারের উন্নতি $\angle BPA = 60^\circ$ এবং ঐ স্থান থেকে $PO = 32$ মিটার পিছিয়ে গেলে O স্থানে শীর্ষের উন্নতি $\angle AOB = 30^\circ$ হয়।

∴ $BO = (BP + PO) = (x + 32)$ মিটার



এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$

বা, $\tan 30^\circ = \frac{h}{x + 32}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 32} \left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

বা, $x + 32 = h\sqrt{3}$ ..... (i)

আবার, APB সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $\tan \angle BPA = \frac{AB}{BP}$

বা, $\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$ বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x} [\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$

বা, $h = x\sqrt{3}$ ..... (ii)

এখন, (i) ও (ii) নং থেকে আমরা পাই, $x + 32 = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

বা, $x + 32 = 3x$ বা, $3x - x = 32$

বা, $2x = 32$ বা, $x = \frac{32}{2} = 16$

∴ $h = x\sqrt{3} = 16 \times \sqrt{3} = 27.713$ মিটার (প্রায়)

∴ টাওয়ারের উচ্চতা 27.713 মিটার এবং নদীর বিস্তার 16 মিটার।

৪৬. একটি নদীর তীরে কোন এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত একটি স্তম্ভের উন্নতি কোণ $60°$। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গিয়ে দেখলো যে, স্তম্ভটির উন্নতি কোণ $30°$ হয়েছে। স্তম্ভটির উচ্চতা ও নদীর বিস্তার নির্ণয় করুন। [৩৩তম, ২২তম, ২১তম বিসিএস]

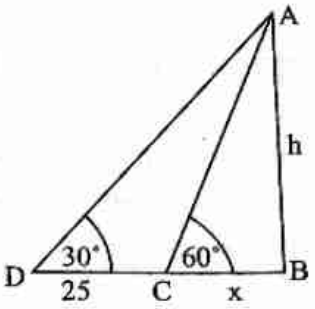
Sol মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার ও নদীর বিস্তার $BC = x$ মিটার

এখানে, $\angle BCA = 60°$, $\angle CDA = 30°$ এবং $CD = 25$ মিটার

এখানে, $\tan 30° = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{BC + CD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 25}$

$\Rightarrow h\sqrt{3} = x + 25$ ..... (i)

আবার, $\tan 60° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sqrt{3}$ ..... (ii)



h এর মান (i) নং এ বসিয়ে, $x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = x + 25$

$\Rightarrow 3x - x = 25$

$\Rightarrow x = 12\frac{1}{2}$

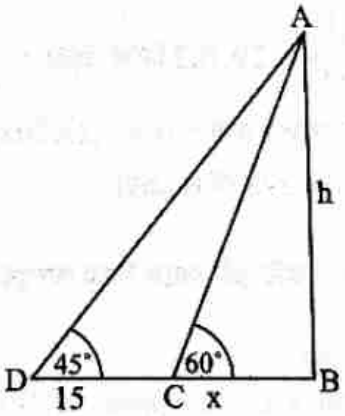
x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে, $h = x\sqrt{3} = \frac{25}{2}\sqrt{3}$

উত্তর: নদীর বিস্তার $12\frac{1}{2}$ মিটার ও স্তম্ভটির উচ্চতা $\frac{25}{2}\sqrt{3}$ মিটার।

৪৭. একটি নদীর তীরে কোন এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত একটি স্তম্ভের উন্নতি কোণ $60°$। ঐ স্থান থেকে 15 মিটার পিছিয়ে গিয়ে দেখল যে, স্তম্ভটির উন্নতি কোণ $45°$ হয়েছে। স্তম্ভটির উচ্চতা ও নদীর বিস্তার বের করুন। [২৩তম বিসিএস]

Sol মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার ও নদীর বিস্তার $BC = x$ মিটার

এখানে, $\angle BCA = 60°$, $\angle CDA = 45°$ এবং $CD = 15$ মিটার



এখানে, $\tan 45° = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow 1 = \frac{h}{BC + CD}$

$\Rightarrow 1 = \frac{h}{x + 15}$

$\Rightarrow h = x + 15$ ..... (i)

আবার, $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow h = \sqrt{3}x$ ..... (ii)

h এর মান (i) নং বসিয়ে, $\sqrt{3}x = x + 15$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - x = 15$

$\Rightarrow x(\sqrt{3} - 1) = 15$

$\Rightarrow x = \frac{15}{\sqrt{3} - 1} = \frac{15}{1.73 - 1} = \frac{15}{0.732} = 20.49$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে, $h = \sqrt{3} \times 20.49 = 35.49$ মিটার

উত্তর: নদীর বিস্তার 20.49 মিটার ও স্তম্ভটির উচ্চতা 35.49 মিটার।

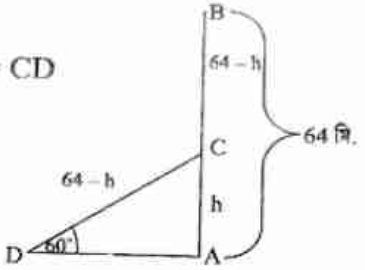
TYPE 03: খুঁটি ভেঙ্গে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হলে খুঁটির দৈর্ঘ্য বা ভাঙ্গা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয়

Pattern-01

01. 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙ্গে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙ্গা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [৩৬তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর কোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol মনে করি, AB খুঁটিটি h উচ্চতায় C বিন্দুতে ভাঙে। ভাঙা অংশ BC সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমি D বিন্দুতে 60° কোণ উৎপন্ন করে।



এখানে, AB = 64 মিটার ; ∠ADC = 60°

AC = h (ধরি) ∴ BC = 64 – h = CD

ADC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$$\sin\angle ADC = \frac{AC}{CD}$$

বা, $\sin 60^\circ = \frac{h}{64-h}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{64-h}\left[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

বা, $2h = 64\sqrt{3} - \sqrt{3}h$

বা, $2h + \sqrt{3}h = 64\sqrt{3}$

বা, $h(2+\sqrt{3}) = 64\sqrt{3}$

বা, $h = \frac{64\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 29.702$ মিটার (প্রায়)

∴ খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য = (64 – 29.702) মিটার = 34.298 মিটার

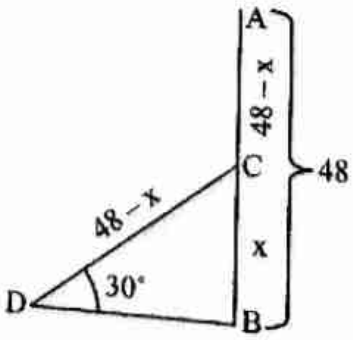
∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 34.298 মিটার (প্রায়)।

02. 48 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙ্গে গিয়ে সম্পূর্ণভাবে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সঙ্গে 30° কোণ উৎপন্ন করলো। খুঁটিটি কত উঁচুতে ভেঙ্গে ছিল?

Sol মনে করি,

খুঁটির দৈর্ঘ্য AB = 48 মিটার। খুঁটিটি C বিন্দুতে ভেঙ্গে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে D বিন্দুতে ভূমির সাথে ∠BDC = 30° উৎপন্ন করে। যদি খুঁটিটি x উচ্চতায় ভেঙ্গে থাকে তবে AC = AB – BC = 48 – x = CD

∴ ΔBCD-এ $\sin 30^\circ = \frac{BC}{CD}$



$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{48-x}$

$\Rightarrow 2x = 48 - x$

$\Rightarrow 3x = 48$

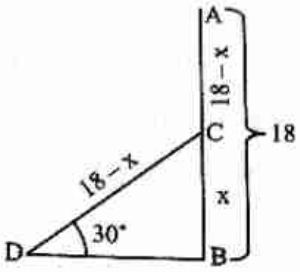
$\therefore x = \frac{48}{3} = 16$

∴ খুঁটিটি 16 মিটার উঁচুতে ভেঙেছিল। **(Ans.)**

03. 18 মিটার উচ্চ একটি খুঁটি এমনভাবে ভেঙ্গে গেল যে, ভাঙ্গা অংশটি বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সঙ্গে 30° কোণে স্পর্শ করলো। খুঁটিটি মাটি থেকে কত উঁচুতে ভেঙেছিল? [৩৪তম বিসিএস]

Sol" মনে করি,

খুঁটির দৈর্ঘ্য AB = 18 মিটার। খুঁটিটি C বিন্দুতে ভেঙ্গে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে D বিন্দুতে ভূমির সাথে ∠BDC = 30° উৎপন্ন করে। যদি খুঁটিটি x উচ্চতায় ভেঙ্গে থাকে তবে AC = AB − BC = 18 − x = CD



$\therefore$ ΔBCD-এ $\sin 30^\circ = \frac{BC}{CD}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{18-x}$

$\Rightarrow 2x = 18 - x$

$\Rightarrow 3x = 18$

$\therefore x = \frac{18}{3} = 6$

$\therefore$ খুঁটিটি 6 মিটার উঁচুতে ভেঙেছিল। **(Ans.)**

Pattern-02

04. একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে, ভাঙা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

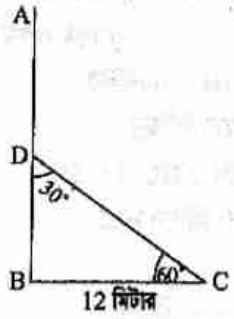
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol" ধরি, AB একটি গাছ, তা ঝড়ে D বিন্দুতে ভেঙে দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ ∠BDC = 30°

$\therefore \angle BCD = 60^\circ$

এবং গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে C বিন্দুতে মাটি স্পর্শ করে।

অর্থাৎ BC = 12 মিটার।



এখন, ΔBDC হতে, $\cos 60^\circ = \frac{BC}{CD}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BC}{CD}$

বা, $CD = 2BC \quad = 2 \times 12$

$\therefore$ CD = 24 মিটার

আবার, $\frac{BD}{BC} = \tan 60^\circ$

বা, $BD = BC \times \tan 60^\circ = 12 \times \tan 60^\circ = 12 \times \sqrt{3}$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

$\therefore$ BD = 20.785 (প্রায়)

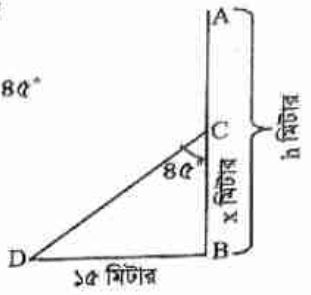
$\therefore$ গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য, AB = AD + BD

= CD + BD = 24 + 20.785 = 44.785 মিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 44.785 মিটার (প্রায়)।

05. একটি খুঁটি এমনভাবে ভেঙ্গে গেল যে, তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙ্গা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে ৪৫° কোণ উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে ১৫ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য AB = h মিটার
খুঁটিটি BC = x মিটার উচ্চতায় ভেঙ্গে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভাঙ্গা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে ∠BCD = ৪৫° উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে BD = ১৫ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে।



এখানে, CD = AC = AB − BC = (h − x) মিটার

ΔBCD থেকে পাই, $\tan \angle BCD = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \quad \tan 45^\circ = \frac{15}{x} \quad \Rightarrow 1 = \frac{15}{x}$

$\therefore \quad x = 15$ মিটার

আবার, BCD সমকোণী ত্রিভুজ, $CD^2 = BD^2 + BC^2$

$\Rightarrow CD^2 = 15^2 + 15^2$

$\Rightarrow CD^2 = 2 \times 15^2$

$\therefore CD = 15\sqrt{2}$ মিটার

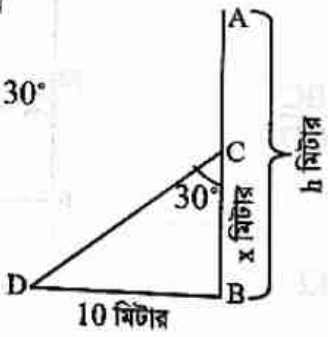
$\therefore$ খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $= BC + AC = BC + CD = 15 + 15\sqrt{2} = ৩৬.২১৩$ মিটার (প্রায়)

উত্তর: ৩৬.২১৩ মিটার (প্রায়)

06. একটি গাছ এমনভাবে ভেঙ্গে গেল যে, তার ভাঙ্গা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে **30°** কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য কত ছিল? [৩১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০৬)]

Sol" মনে করি, খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য AB = h মিটার
খুঁটিটি BC = x মিটার উচ্চতায় ভেঙ্গে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভাঙ্গা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে ∠BCD = 30° উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে BD = 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে।



এখানে, CD = AC = AB − BC = (h − x) মিটার

ΔBCD থেকে পাই, $\tan \angle BCD = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \quad \tan 30^\circ = \frac{10}{x} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$

$\therefore \quad x = 10\sqrt{3}$ মিটার

আবার, BCD সমকোণী ত্রিভুজ, $CD^2 = BD^2 + BC^2$

$\Rightarrow CD^2 = 10^2 + (10\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow CD^2 = 100 + 300 = 400$

$\therefore CD = 20$ মিটার

$\therefore$ খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $= BC + AC = BC + CD = 10\sqrt{3} + 20 = 17.32 + 20 = 37.32$ মিটার (প্রায়)

উত্তর: 37.32 মিটার (প্রায়)

ঝড়ে একটি গাছ হলে পড়লো। গাছের গোড়া থেকে 7 মিটার উচ্চতায় একটি খুঁটি ঠেস দিয়ে গাছটিকে সোজা করা হলো। মাটিতে খুঁটিটির স্পর্শ বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের অংক নং-০৪)]

Sol" মনে করি, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য BC = x মিটার, গাছের গোড়া থেকে AB = 7 মিটার উচ্চতায় খুঁটিটি ঠেস দিয়ে আছে এবং অবনতি $\angle DBC = 30°$

$\therefore \angle ACB = \angle DBC = 30°$ [একান্তর কোণ বলে]

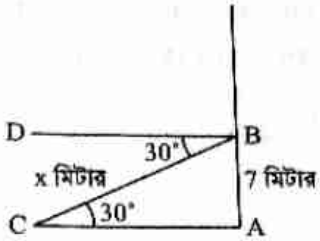
সমকোণী ΔABC থেকে পাই,

$\sin \angle ACB = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin 30° = \frac{7}{BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{7}{BC} \left[\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore BC = 14$

$\therefore$ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য 14 মিটার।

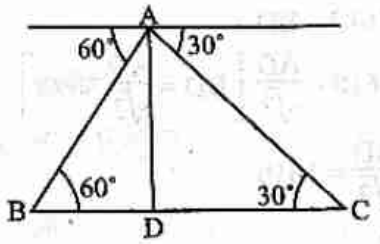


TYPE 04: দুইটি অবনতি কোণের সাহায্যে দুটি স্থানের মধ্যে অবস্থিত বস্তুর উচ্চতা নির্ণয়

01. দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি হেলিকপ্টার থেকে ঐ কিলোমিটার পোস্ট দুইটি অবনতি যথাক্রমে 60° ও 30° হলে, হেলিকপ্টারটির উচ্চতা কত?

Sol" আমরা জানি, দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 কিলোমিটার

মনে করি, A বিন্দু হেলিকপ্টারের অবস্থান। তাহলে AD হেলিকপ্টারের উচ্চতা। এখানে BC = 1 কিলোমিটার = 1000 মিটার।



ΔABD-এ $\tan 60° = \frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow AD = BD\sqrt{3}$

$\Rightarrow BD = \frac{AD}{\sqrt{3}}$

আবার, ΔACD-এ $\tan 30° = \frac{AD}{CD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{BC - BD}$ [CD = BC – BD]

$\Rightarrow \sqrt{3}AD = BC - BD$

$\Rightarrow \sqrt{3}AD = 1000 - BD$

$\Rightarrow \sqrt{3}AD = 1000 - \frac{AD}{\sqrt{3}}$ $\left[BD = \frac{AD}{\sqrt{3}} \text{ বসিয়ে}\right]$

$\Rightarrow \sqrt{3}AD + \frac{AD}{\sqrt{3}} = 1000$

$\Rightarrow \frac{3AD + AD}{\sqrt{3}} = 1000$

$\Rightarrow 4AD = 1000\sqrt{3}$

$\Rightarrow AD = \frac{1000\sqrt{3}}{4} = 250\sqrt{3}$ মিটার $= 250 \times 1.732058 = 433.0127 = 433.013$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা = 433.013 মিটার। **(উত্তর)**

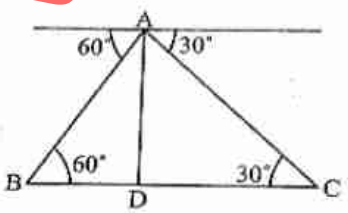
02. দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি বেলুন উড়ছে। বেলুনের স্থানে ঐ মাইল পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে $30°$ ও $60°$ হলে, বেলুনটির উচ্চতা কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের কাজের অংক)]

Sol" আমরা জানি, দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 মাইল $= 1.61$ কি.মি. (প্রায়)

মনে করি, A বিন্দু বেলুনটির অবস্থান। তাহলে AD বেলুনটির উচ্চতা।

এখানে BC = 1 মাইল $= 1.61$ কি.মি. $= 1610$ মিটার।



ΔABD-এ $\tan 60° = \frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AD}{BD}$

$\Rightarrow AD = BD\sqrt{3}$

$\Rightarrow BD = \frac{AD}{\sqrt{3}}$

আবার, ΔACD-এ $\tan 30° = \frac{AD}{CD}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{BC - BD}$ [CD = BC − BD]

$\Rightarrow \sqrt{3}AD = BC - BD$

$\Rightarrow \sqrt{3}AD = 1610 - BD$

$\Rightarrow \sqrt{3}AD = 1610 - \frac{AD}{\sqrt{3}}$ $\left[BD = \frac{AD}{\sqrt{3}} \text{ বসিয়ে}\right]$

$\Rightarrow \sqrt{3}AD + \frac{AD}{\sqrt{3}} = 1610$

$\Rightarrow \frac{3AD + AD}{\sqrt{3}} = 1610$

$\Rightarrow 4AD = 1610\sqrt{3}$

$\Rightarrow AD = \frac{1610\sqrt{3}}{4} = 697.15$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= 697.15$ মিটার (প্রায়)। **(উত্তর)**

TYPE 05: সৃজনশীল প্রশ্ন

01. একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ $30°$। লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছল।

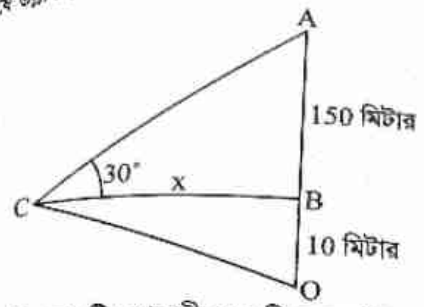
(ক) উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

(খ) নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

(গ) লোকটির যাত্রা স্থান থেকে গন্তব্য স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol (ক) মনে করি, নদীর দুই তীরের বিন্দুদ্বয় C ও B। B বিন্দুতে AB গাছের উচ্চতা 150 মিটার এবং C বিন্দুর গাছটির সাপেক্ষে উন্নতি $\angle ACB = 30^\circ$



ধরি, লোকটি অপর তীরে O বিন্দুতে পৌঁছল যা গাছ হতে 10 মিটার দূরে।
অর্থাৎ OB = 10 মিটার।

(খ) ধরি, নদীটির বিস্তার BC = x মিটার

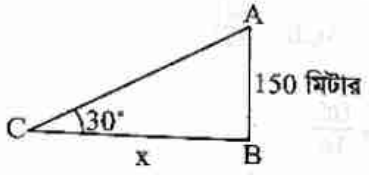
ΔABC হতে, $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{150}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{x} \left[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$\Rightarrow x = 150\sqrt{3} = 259.808$ (প্রায়)

$\therefore$ নদীটির বিস্তার 259.808 মিটার (প্রায়)।



(গ) ধরি, লোকটির যাত্রার স্থান হতে গন্তব্য স্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব, OC = S মিটার

ΔOBC এর $\angle OBC$ সমকোণ,

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই, $OC^2 = OB^2 + BC^2$

$\Rightarrow S^2 = (10)^2 + (150\sqrt{3})^2$ [খ নং হতে $BC = 150\sqrt{3}$ মিটার]

$\Rightarrow S^2 = 100 + 67500 = 67600$

$\Rightarrow S = \sqrt{67600} = 260$

$\therefore$ গন্তব্য স্থানের দূরত্ব 260 মিটার।

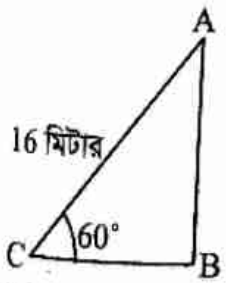
02. 16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দন্ডায়মান একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে রাখা হলো। ফলে এটি ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করল।

(ক) উদ্দীপক অনুসারে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র অঙ্কন কর।

(খ) দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

(গ) দেওয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা অবস্থায় মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে ভূমি বরাবর আর কতদূর সরালে মইটি ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]*

Sol (ক) এখানে, দেওয়ালের উচ্চতা AB. মই এর দৈর্ঘ্য AC = 16 মিটার এবং মইটি ভূমি BC এর সাথে $\angle ACB = 60^\circ$ উৎপন্ন করে।

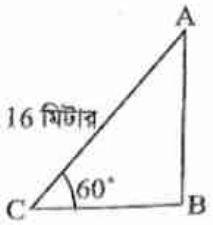


(খ) ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AB}{16}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{16}$

$\Rightarrow AB = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} = 13.856$ (প্রায়)



∴ দেওয়ালটির উচ্চতা 13.856 মিটার (প্রায়)।

(গ) মনে করি, মইটিকে দেওয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা অবস্থায় C বিন্দু থেকে ভূমি বরাবর CD = x মিটার দূরে সরালে মইটি ভূমির সাথে $\angle BDE = 30^\circ$ উৎপন্ন করে।

এখানে, AC = DE = 16 মিটার ; $\angle ACB = 60^\circ$

এবং BD = BC + CD = BC + x মিটার

ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{BC}{16} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{16}$

$\Rightarrow BC = \frac{16}{2} \quad \therefore BC = 8$

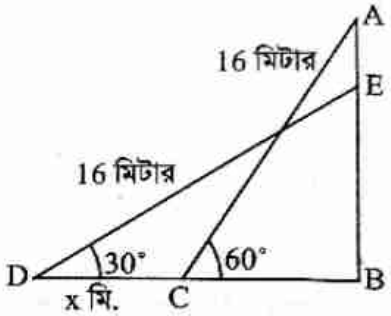
BDE সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos \angle BDE = \frac{BD}{DE}$

$\Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{BC + x}{16}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8 + x}{16} \quad \Rightarrow 16 + 2x = 16\sqrt{3} \quad \Rightarrow 2x = 16\sqrt{3} - 16$

$\Rightarrow 2x = 16(\sqrt{3} - 1) \quad \therefore \quad x = \frac{16(\sqrt{3} - 1)}{2} = 8(\sqrt{3} - 1) = 5.856$ (প্রায়)

∴ নির্ণেয় দূরত্ব 5.856 মিটার (প্রায়)।



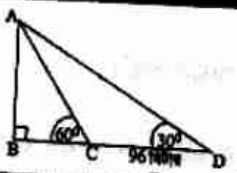
TYPE 06: প্রশ্নে প্রদত্ত চিত্র সাপেক্ষে সমস্যা

01. চিত্রে, CD = 96 মিটার।

(ক) ∠CAD এর ডিগ্রি পরিমাপ নির্ণয় কর।

(খ) BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(গ) ΔACD এর পরিসীমা নির্ণয় কর।



[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

সমাধান

(ক) ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle ACB = 60^\circ$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

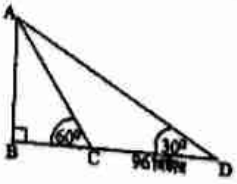
ABD সমকোণী ত্রিভুজে,

$\angle ABD = 90^\circ$ এবং $\angle ADB = 30^\circ$

$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle ADB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

$\therefore$ $\angle CAD$ এর পরিমাপ 30°



(খ) এখানে, $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle ADB = 30^\circ$, CD = 96 মিটার

$BD = BC + CD = (BC + 96)$ মিটার

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{BC}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{3}BC$

ABD সমকোণী ত্রিভুজে $\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,BC}{BC + 96}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,BC}{BC + 96}$

$\Rightarrow 3BC = BC + 96$

$\Rightarrow 3BC - BC = 96$

$\Rightarrow 2BC = 96$

$\Rightarrow BC = \frac{96}{2} = 48$

$\therefore$ BC এর দৈর্ঘ্য 48 মিটার।

(গ) এখানে, $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle ADB = 30^\circ$, CD = 96 মিটার, BC = 48 মিটার

$\therefore BD = BC + CD = (48 + 96)$ মিটার = 144 মিটার

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{48}{AC} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{48}{AC}$

$\Rightarrow$ AC = 96 মিটার

ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $\cos \angle ADB = \frac{BD}{AD}$

$\Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{144}{AD}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{144}{AD}$

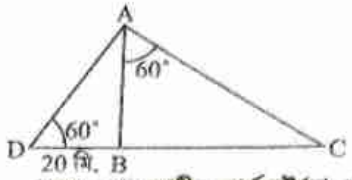
$\Rightarrow AD = \frac{144 \times 2}{\sqrt{3}} = 166.276878$

$\therefore$ ΔACD এর পরিসীমা = AC + CD + AD = (96 + 96 + 166.276878) মিটার = 358.277 মিটার (প্রায়)

$\therefore$ ΔACD এর পরিসীমা 358.277 মিটার (প্রায়)।

02.

(ক) গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
(খ) গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

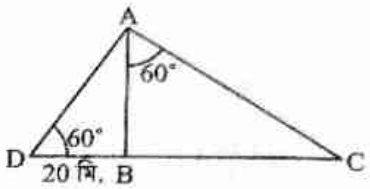


[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের কাজের অংক)]

Sol"

(ক) AB গাছটির গোড়া থেকে BD = 20 মিটার দূরে D বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle ADB = 60^\circ$। D বিন্দুর বিপরীত পাশে C বিন্দু এবং $\angle BAC = 60^\circ$। গাছের গোড়া থেকে C বিন্দুর দূরত্ব BC, D, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

চিত্রে AB গাছটির উচ্চতা নির্দেশ করে।



এখন, ΔABD থেকে পাই, $\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{AB}{20}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{20}$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

$\Rightarrow AB = 20\sqrt{3}$

$\therefore AB = 34.641$ (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির উচ্চতা = 34.641 মিটার (প্রায়)। **(Ans.)**

(খ) ΔABC থেকে পাই, $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{BC}{20\sqrt{3}}$ ['খ' হতে]

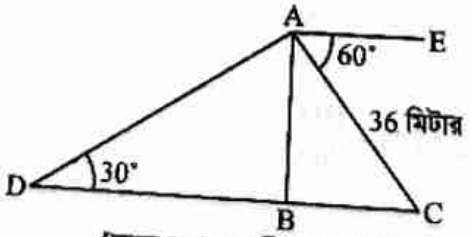
$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BC}{20\sqrt{3}}$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

$\Rightarrow BC = 20\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\therefore BC = 60$

$\therefore$ গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব 60 মিটার। **(Ans.)**

03. চিত্রে অবনতি $\angle CAE = 60^\circ$, উন্নতি $\angle ADB = 30^\circ$, AC = 36 মিটার, AB ⊥ DC এবং D, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, AB, AD এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-১০ (উদাহরণের কাজের অংক)]

Sol" চিত্রে, অবনতি $\angle CAE = 60^\circ$; উন্নতি $\angle ADB = 30^\circ$; AC = 36 মিটার

যেহেতু, BC ∥ AE সেহেতু, $\angle CAE = \angle ACB = 60^\circ$ [একান্তর কোণ]

এখন, ΔABC হতে, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AB}{36} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{36} \Rightarrow AB = \frac{36\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 31.176$ (প্রায়)

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য 31.176 মিটার (প্রায়)।

এখন, ΔABD হতে, $\sin \angle ADB = \frac{AB}{AD}$

$\Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{31.176}{AD}$ [$\because AB = 31.176$]

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{31.176}{AD}$

$\Rightarrow AD = 31.176 \times 2$

$\Rightarrow AD = 62.35$

$\therefore$ AD বাহুর দৈর্ঘ্য 62.35 মিটার (প্রায়)।

আবার, DAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, $\sin \angle ADC = \frac{AC}{CD}$

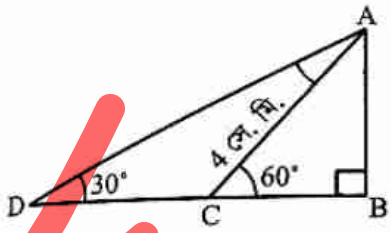
$\Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{36}{CD}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{36}{CD}$ [$\because AC = 36$]

$\Rightarrow CD = 72$

$\therefore$ CD বাহুর দৈর্ঘ্য 72 মিটার। **(Ans.)**

ঘ.



(ক) $\angle CAD$-এর মান নির্ণয় করুন। [৩৬তম বিসিএস]

Sol চিত্রে $\angle BCD$ = সরলকোণ = 180°

$\therefore \angle ACD = \angle BCD - \angle ACB$

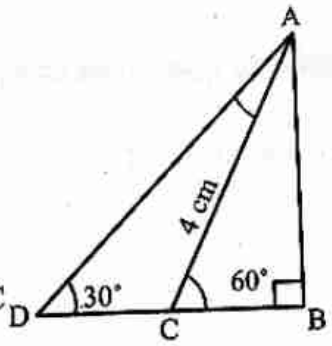
$= 180^\circ - 60^\circ$

$= 120^\circ$

$\therefore \angle CAD = 180^\circ - \angle ACD - \angle ADC$

$= 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ$

$= 30^\circ$



(খ) দেখান যে, $BC : AD = 1 : 2\sqrt{3}$ [৩৬তম বিসিএস]

Sol ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{4} \quad \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{3}}{2}$

$\therefore AB = 2\sqrt{3}$

$\therefore BC = \sqrt{(AC)^2 - (AB)^2} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = 2$

আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin 30^\circ = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{AD} \quad \Rightarrow AD = 4\sqrt{3}$

$\therefore BC : AD = 2 : 4\sqrt{3} = 1 : 2\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

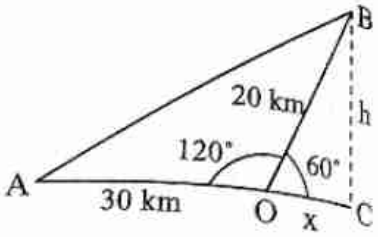
TYPE 07: Miscellaneous

01. একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা 120° কোণে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথা স্থানে ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার এবং ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওয়ানা হলো। 2 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় করুন। [৩৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর সা.গণিত (অধ্যায়-১৬.১) উদাহরণের ০৬ নং প্রশ্নের অনুরূপ]

Sol" মনে করি, একটি নির্দিষ্ট স্থানে O বিন্দুতে 120° কোণে A দুইটি রাস্তা OA ও OB চলে গেছে।
সুতরাং, 2 ঘণ্টা পরে

$OA = 30$ km
$OB = 20$ km
$AB = ?$



এখন, ΔOBC তে, $\angle BOC = 180° - 120° = 60°$
মনে করি, $BC = h$ km
$OC = x$ km

$\therefore \quad \sin 60° = \frac{h}{20}$ $\left[\because \sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} \text{ এবং } \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow h = 10\sqrt{3}$ km ..... (i)

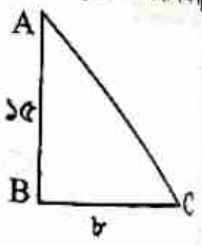
এবং $\cos 60° = \frac{x}{20}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} \text{ এবং } \cos 60° = \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{20} \quad \Rightarrow \quad x = 10$ km ..... (ii)

এখন, ΔABC এ পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে, $AB^2 = BC^2 + AC^2 = h^2 + (OA + OC)^2$
$= (10\sqrt{3})^2 + (30 + 10)^2 = 300 + 1600 = 1900$
$\therefore \quad AB = \sqrt{1900} = 43.59$ km
Ans: 43.59 km

02. একটি মই-এর প্রান্ত ভূমি থেকে ১৫ মিটার উঁচু ঘরের জানালা বরাবর পৌঁছায় এবং অপর প্রান্ত ঘর থেকে ৮ মিটার দূরে থাকে। মই-এর দৈর্ঘ্য কত? [১৩তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, A জানালার অবস্থান এবং AB দেয়াল।
AC = মই এর দৈর্ঘ্য,
কাজেই, AB = ১৫ মি.; BC = ৮ মি.

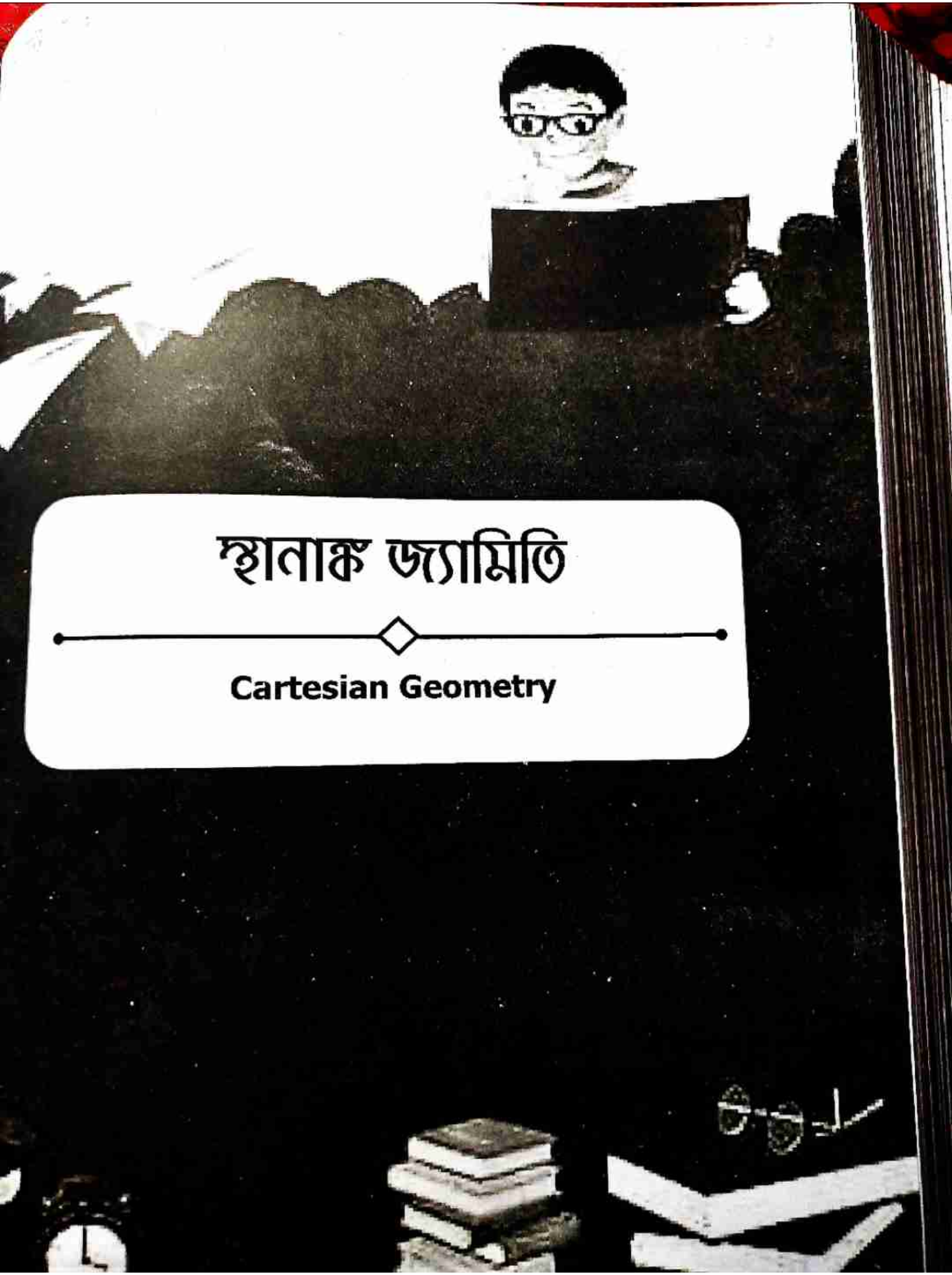


ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (১৫)^2 + ৮^2 = ২২৫ + ৬৪ = ২৮৯ = ১৭^2$
$\therefore$ AC = ১৭ মিটার $\quad \therefore$ মইটির দৈর্ঘ্য = 17 মিটার
উত্তর : 17 মিটার

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 04, 05, 08
Type-02	02, 03, 04, 06, 07, 08
Type-03	Full (VVI)
Type-04	02
Type-05	01, 02
Type-06	01, 03, 04
Type-07	01



স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Cartesian Geometry

এই অধ্যায়ের Analysis

৫ম তম বিসিএসে অধ্যায়টি বিসিএস রিটেনের সিলেবাসে অন্তর্ভুক্ত হয়। এরপর থেকে প্রত্যেক বিসিএসে এই অধ্যায় থেকে প্রশ্ন আসছে। সুতরাং ৪৫ তম বিসিএসেও এখান থেকে প্রশ্ন আসার সম্ভাবনা প্রায় শতভাগ।

বিগত প্রশ্ন বিশ্লেষণে দেখা যায় প্রশ্নগুলো নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত বইয়ের সংশ্লিষ্ট অধ্যায়ের কনসেপ্ট থেকে এসেছে। ৪০ তম বিসিএসে বই থেকে সরাসরি প্রশ্ন এসেছে এবং বাকী বিসিএসগুলোতে বইয়ের প্রশ্নের অনুরূপ প্রশ্ন এসেছে, শুধু সংখ্যা পরিবর্তন করে।

সুতরাং আপনাদের মধ্যে যারা মানবিক ও বাণিজ্য বিভাগের তারা শুধু নবম-দশম শ্রেণির বইটা গুরুত্ব দিয়ে পড়লেই পরীক্ষায় ভালো করতে পারবেন বলে আশা রাখি। তবে বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র-ছাত্রীরা একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির সরলরেখা অধ্যায়টি পড়তে পারলে (কেন জরুরী নয়)।

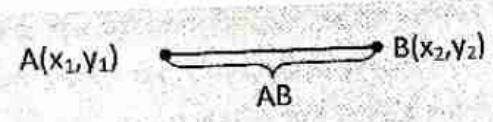
নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত বইয়ের ১১তম অধ্যায়টি এ টপিকের সাথে সম্পর্কিত, যাতে ৪টি পরিচ্ছেদ রয়েছে। পরীক্ষায় ভালো নম্বর নিশ্চিত করতে সবগুলো পরিচ্ছেদই করতে হবে। আমি এই বইয়ে চেষ্টা করেছি টপিক আকারে সহজভাবে অধ্যায়টি উপস্থাপন করার। আশা করি আপনারা এই বই পড়ে উত্তর করতে সক্ষম হবেন ইনশাআল্লাহ্।

Important Problem & Solutions

TYPE 01 দূরত্ব নির্ণয়ের মাধ্যমে ত্রিভুজের প্রকৃতি সংক্রান্ত সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Pattern 01, 02 & 03 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।



$A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ অথবা, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

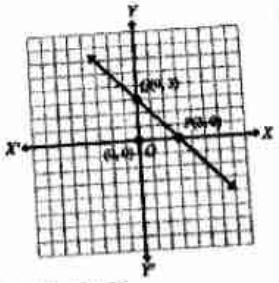
উদাহরণঃ (4, –3) ও (2, 5) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

Sol দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ Ans.

01. মূলবিন্দু O(0, 0) এবং অপর দুইটি বিন্দু P(3, 0) ও Q(0, 3) সমতলে চিহ্নিত কর। প্রত্যেকের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। তিনটি বিন্দু যোগ করলে যে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কিত হয় তার নাম কি এবং কেন?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরণের অংক নং-০২)]

Sol বিন্দু তিনটির অবস্থান সমতলে দেখানো হলো।



দূরত্ব $OP = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3$ একক

দূরত্ব $OQ = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{3^2} = 3$ একক

দূরত্ব $PQ = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক

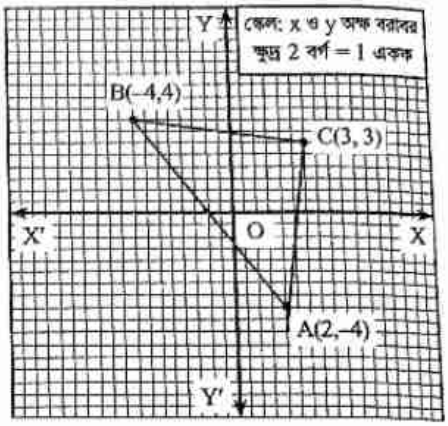
জ্যামিতিক চিত্রটির নাম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ কারণ এর দুই বাহু OP এবং OQ এর দৈর্ঘ্য সমান।

02. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে A(2, –4), B(–4, 4) ও C(3, 3)। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০২)]

Sol প্রদত্ত বিন্দুসমূহ A(2, –4), B(–4, 4) ও C(3, 3)

xy সমতলে বিন্দুগুলোর অবস্থান দেখানো হলো এবং A, B; B, C ও C,A যোগ করে ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো।



এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-2)^2 + (4+4)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+4)^2 + (3-4)^2}$

$= \sqrt{(7)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-2)^2 + (3+4)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (7)^2}$

$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

এখানে, BC = AC

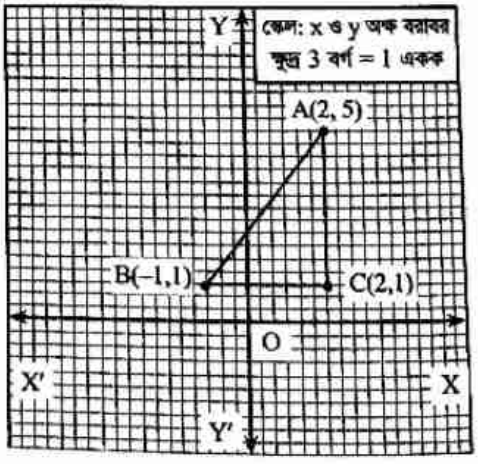
∴ A, B, C বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

03. **A(2, 5), B(–1, 1) ও C(2, 1) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2, 5), B(–1, 1) এবং C(2, 1)।

xy সমতলে বিন্দুত্রয়ের অবস্থান দেখানো হলো এবং এদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো।



এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{3^2} = 3$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{(0)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{4^2} = 4$ একক

কিন্তু, $BC^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = AB^2$

∴ পীথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

04. দেখাও যে, A(2, 2), B(–2, –2) এবং C($-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$) একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এর পরিসীমা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol" দেওয়া আছে, A(2, 2), B(–2, –2) এবং C($-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$)

এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2\sqrt{3}+2)^2 + (2\sqrt{3}+2)^2} = \sqrt{(12 - 8\sqrt{3} + 4) + (12 + 8\sqrt{3} + 4)}$

$= \sqrt{16 - 8\sqrt{3} + 16 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2\sqrt{3}-2)^2 + (2\sqrt{3}-2)^2}$

$= \sqrt{(12 + 8\sqrt{3} + 4) + (12 - 8\sqrt{3} + 4)}$

$= \sqrt{16 + 8\sqrt{3} + 16 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ একক

∴ দেখা যাচ্ছে, AB = BC = AC = $4\sqrt{2}$ একক

∴ A, B, C বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। (দেখানো হলো)

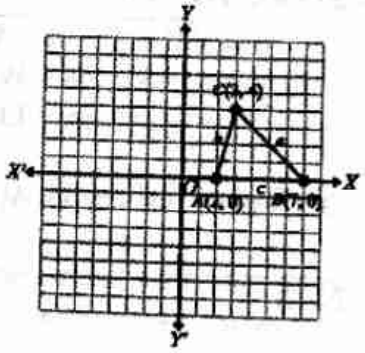
∴ পরিসীমা = (AB + BC + AC) [বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি]

$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 3 \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = 16.971$ একক (প্রায়)

05. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(2, 0), B(7, 0) ও C(3, 4)। সমতলে এদের অবস্থান দেখাও এবং ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ত্রিভুজটির পরিসীমা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১ (উদাহরণের অংক নং-০৩)]

Sol" xy সমতলে A(2, 0), B(7, 0) ও C(3, 4) এর অবস্থান দেখানো হলো।



ABC ত্রিভুজের, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-2)^2 + (0-0)^2}$

$= \sqrt{5^2} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-7)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-2)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ একক

∴ ত্রিভুজটির পরিসীমা = (AB + BC + AC) [বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি]

$= (5 + 4\sqrt{2} + \sqrt{17})$ একক = 14.77996 একক (প্রায়)

06. মূলবিন্দু থেকে (– 5, 5) ও (5, k) বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে k এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol" মূলবিন্দু (0, 0) থেকে (– 5, 5) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(-5-0)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

আবার, মূলবিন্দু (0, 0) থেকে (5, k) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(5-0)^2 + (k-0)^2}$

$= \sqrt{5^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2}$ একক

প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{25 + k^2} = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad 25 + k^2 = 50$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \quad k^2 = 25$

$\therefore \quad k = \pm 5$

∴ নির্ণেয় মান: k = 5, – 5 **(Ans.)**

07. A(10, 5), B(7, 6), C(–3, 5) বিন্দুগুলোর মধ্যে কোনটি P(3, –2) এর সবচেয়ে নিকটবর্তী ও কোনটি সবচেয়ে দূরবর্তী?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" দেওয়া আছে, A(10, 5), B(7, 6), C(–3, 5) এবং P(3, –2)

এখানে, A, P বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব AP $= \sqrt{(3-10)^2+(-2-5)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$
$= 7\sqrt{2}$ একক $= 9.899$ একক (প্রায়)

B, P বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব BP $= \sqrt{(3-7)^2+(-2-6)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$
$= 4\sqrt{5}$ একক $= 8.944$ একক (প্রায়)

C, P বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব CP $= \sqrt{(3+3)^2+(-2-5)^2} = \sqrt{(6)^2+(-7)^2} = \sqrt{36+49}$
$= \sqrt{85}$ একক $= 9.220$ একক (প্রায়)

∴ P বিন্দুর সবচেয়ে নিকটবর্তী বিন্দু B এবং সবচেয়ে দূরবর্তী বিন্দু A।

08. P(x, y) বিন্দু থেকে y-অক্ষের দূরত্ব এবং Q(3, 2) বিন্দুর দূরত্ব সমান। প্রমাণ কর যে, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" ধরি, y-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক, A(0, y)।

এখন, P(x, y) ও A(0, y) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব PA $= \sqrt{(0-x)^2+(y-y)^2}$
$= \sqrt{(-x)^2+0^2} = \sqrt{x^2} = x$ একক

এবং P(x, y) ও Q(3, 2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, PQ $= \sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2}$
$= \sqrt{(9-6x+x^2)+(4-4y+y^2)}$
$= \sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}$ একক

প্রশ্নানুসারে, PQ = PA

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13} = x$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x-4y+13 = x^2$ [বর্গ করে]

$\therefore y^2-4y-6x+13 = 0$ **(প্রমাণিত)**

09. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ A(2, –1), B(–4, 2), C(2, 5)। ত্রিভুজটির মধ্যমা AD এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" আমরা জানি, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে মধ্যমা বলে।

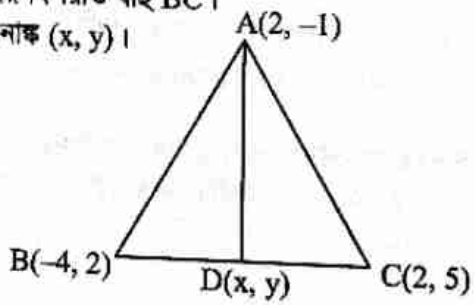
এখানে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A এর বিপরীত বাহু BC।

ধরি, BC এর মধ্যবিন্দু D এবং এর স্থানাঙ্ক (x, y)।

B ও C এর মধ্যবিন্দু D হলে,

$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

এবং $y = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$



এখন, A(2, –1) ও $D\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ বিন্দুর সংযোজক রেখাই হচ্ছে ত্রিভুজটির মধ্যমা AD।

$\therefore$ AD $= \sqrt{\{2-(-1)\}^2+\left\{(-1)-\frac{7}{2}\right\}^2} = \sqrt{(2+1)^2+\left(\frac{-2-7}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+\left(\frac{-9}{2}\right)^2} = \sqrt{9+\frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{36+81}{4}}$

$= \sqrt{\frac{117}{4}} = \sqrt{\frac{9\times 13}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$ একক **(Ans.)**

TYPE 02 তিনটি বিন্দু দ্বারা ত্রিভুজ গঠনের সম্ভাব্যতা যাচাই সংক্রান্ত সমস্যা

ত্রিভুজ গঠনের শর্ত: ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়।
অর্থাৎ দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান হলে কোনো ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়।

01. A(1, 2), B(–3, 5) ও C(5, –1) বিন্দুত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় কি না যাচাই কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(1, 2), B(–3, 5) ও C(5, –1)

এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+(3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{(8)^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ একক

দেখা যাচ্ছে, AB + AC = 5 + 5 = 10 = BC

অর্থাৎ দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান।

∴ এদের দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠন করা সম্ভব নয়।

02. দেখাও যে, (–3, –3), (0, 0) ও (3, 3) বিন্দু তিনটি দ্বারা কোনো ত্রিভুজ তৈরি করা যায় না।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(উদাহরণের অংক নং-০৫)]

Sol ধরি, A(–3, –3), B(0, 0) ও C(3, 3) প্রদত্ত বিন্দুসমূহ।

আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়। ধরে নিই ABC একটি ত্রিভুজ এবং AB, BC ও AC এর তিনটি বাহু।

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-(-3))^2+(0-(-3))^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = 3\sqrt{2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = 3\sqrt{2}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+3)^2+(3+3)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36\times2} = 6\sqrt{2}$ একক

সুতরাং $AB + BC = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = AC$

অর্থাৎ দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান। সুতরাং এদের দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়।

TYPE 03 চারটি শীর্ষবিন্দু কর্তৃক চতুর্ভুজ গঠন এবং চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয়

আয়তক্ষেত্র :

- আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।
- আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।
- আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।
- আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (ভূমি × উচ্চতা) বা (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ)

বর্গক্ষেত্র :

- বর্গক্ষেত্রের চারটি বাহুই সমান।
- বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।
- বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।
- বর্গের ক্ষেত্রফল = (এক বাহুর দৈর্ঘ্য)^2

সামান্তরিক :

- সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।
- সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় অসমান।
- কোণগুলো সমকোণ নয়।
- সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা।

রম্বস :

- রম্বসের সকল বাহু সমান হয়।
- বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান।
- কোণগুলো সমকোণ নয়।
- রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল

01. দেখাও যে, $(0, -1)$, $(-2, 3)$, $(6, 7)$ এবং $(8, 3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(উদাহরণের অংক নং-০৪)]

Sol" মনে করি, $A(0, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(6, 7)$ এবং $D(8, 3)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ।

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-0)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$
$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য = CD বাহুর দৈর্ঘ্য

আবার,

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-0)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-(-2))^2 + (7-3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ AD বাহুর দৈর্ঘ্য = BC বাহুর দৈর্ঘ্য $\quad \therefore$ বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং বলা যায়, ABCD একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র।

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-(-2))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-0)^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

$\therefore$ BD কর্ণের দৈর্ঘ্য = AC কর্ণের দৈর্ঘ্য

সুতরাং এ দ্বারা প্রমাণিত হলো যে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

02. দেখাও যে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$ একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" দেওয়া আছে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$

তাহলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(10)^2 + (0)^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5+5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$ একক

এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$ একক

এখানে, AB = CD; BC = AD অর্থাৎ বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং বলা যায়, ABCD একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ BD কর্ণের দৈর্ঘ্য = AC কর্ণের দৈর্ঘ্য। সুতরাং এ দ্বারা প্রমাণিত হলো যে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ A, B, C, D বিন্দু চারটি একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু। (দেখানো হলো)

03. $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্রে তা নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.১(অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" দেওয়া আছে, $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{(7)^2 + (5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-5)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-6)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$ একক

এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ একক

এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-5)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ একক

এখানে, AB = CD; BC = AD অর্থাৎ বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং বলা যায়, ABCD একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $\neq$ AC কর্ণের দৈর্ঘ্য। সুতরাং এ দ্বারা প্রমাণিত হলো যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ A, B, C, D দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

04. দেখান যে, (0, 7), (4, 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

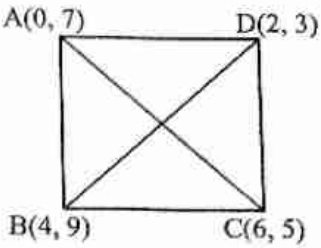
Sol ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(0, 7), B(4, 9), C(6, 5) ও D(2, 3)

$\therefore$ $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(4-6)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$CD = \sqrt{(6-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$DA = \sqrt{(2-0)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



আবার, কর্ণ, $AC = \sqrt{(0-6)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

কর্ণ, $BD = \sqrt{(4-2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পরস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BC = CD = DA = 2\sqrt{5}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BD = 2\sqrt{10}$ $\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি বর্গের কৌণিক বিন্দু।

05. দেখান যে, (1, 1), (– 4, 13), (8, 8) এবং (13, – 4) বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু।

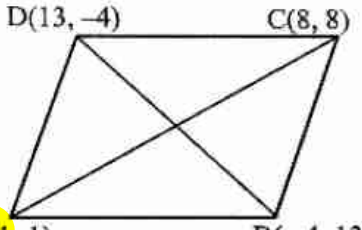
Sol ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি, A(1, 1), B(–4, 13), C(8, 8) ও D(13, – 4)

$\therefore$ $AB = \sqrt{(1+4)^2 + (1-13)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$BC = \sqrt{(-4-8)^2 + (13-8)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$CD = \sqrt{(8-13)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$DA = \sqrt{(13-1)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$



$AC = \sqrt{(1-8)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{2 \times 49} = 7\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(-4-13)^2 + (13+4)^2} = \sqrt{17^2 + 17^2} = \sqrt{2 \times 17^2} = 17\sqrt{2}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পরস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BC = CD = DA = 13$

কিন্তু কর্ণ দুটি অসমান। $\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু।

TYPE 04 বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Type 04, 05, 06, 07 & 08 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

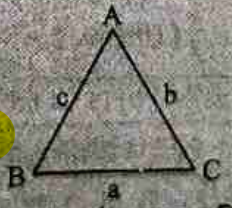
বাহুর মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর AB বাহু = c, BC বাহু = a এবং AC বাহু = b

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা, $2s = a + b + c$

$\therefore$ অর্ধ পরিসীমা, $s = \frac{a+b+c}{2}$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক



উদাহরণ: একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2, 5), B(–1, 1) ও C(2, 1)। বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$ একক

$\therefore s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(3+4+5) = \frac{12}{2} = 6$ একক

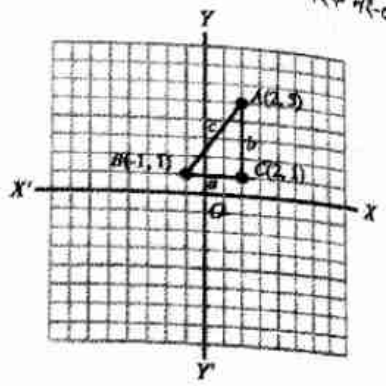
∴ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক $= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1}$ বর্গ একক $= \sqrt{6 \times 6} = 6$ বর্গ একক

Note: প্রশ্নে যদি বাহুর মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে বলা না থাকে তাহলে এই পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় না করাই ভালো। সেক্ষেত্রে বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে সাজিয়ে (Type-05 এর নিয়মে) ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা উত্তম হবে।

01. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2, 5), B(–1, 1) ও C(2, 1)। ত্রিভুজটির একটি মোটামুটি চিত্র আঁক এবং পরিসীমা ও বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ত্রিভুজটি কোন ধরনের ত্রিভুজ চিত্র দেখে আন্দাজ কর এবং তার সপক্ষে যুক্তি দাও। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-০৬)]*

Sol" চিত্রে ত্রিভুজটির চিত্র দেখানো হলো:



AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{0+16} = 4$ একক

$\therefore s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(3+4+5) = \frac{12}{2} = 6$ একক

∴ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1}$ বর্গ একক $= \sqrt{6 \times 6} = 6$ বর্গ একক

চিত্র দেখে আমরা বুঝাতে পারি এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে এটি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

$AB^2 = c^2 = 5^2 = 25$; $BC^2 = a^2 = 3^2 = 9$; $CA^2 = b^2 = 4^2 = 16$

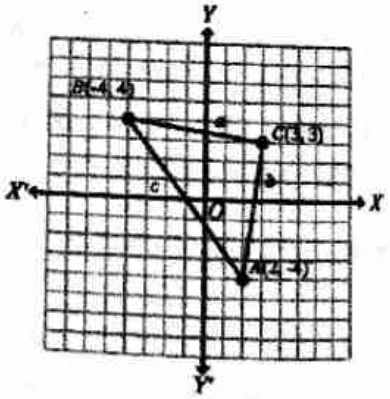
$\therefore BC^2 + CA^2 = 9 + 16 = 25 = AB^2$

∴ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। AB অতিভুজ ও ∠ACB সমকোণ।

02. A(2, – 4), B(–4, 4) এবং C(3, 3) একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ। ত্রিভুজটি আঁক এবং বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। চিত্র দেখে ত্রিভুজটির একটি নাম দাও এবং এর সপক্ষে যুক্তি দেখাও।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-০৭)]

Sol" ত্রিভুজটির চিত্র আঁকা হলো:



$AB = c = \sqrt{(-4-2)^2 + (4-(-4))^2} = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক

$BC = a = \sqrt{(3-(-4))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

$CA = b = \sqrt{(2-3)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$

$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

এখন, $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(10 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) = 5 + 5\sqrt{2}$ একক

∴ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(5+5\sqrt{2})(5+5\sqrt{2}-10)(5+5\sqrt{2}-5\sqrt{2})(5+5\sqrt{2}-5\sqrt{2})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(5+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-5)\,.\,5\,.\,5}$ বর্গ একক $= 5\sqrt{(5+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-5)}$ বর্গ একক

$= 5\sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = 5\sqrt{50-25} = 5\sqrt{25} = 5 \times 5 = 25$ বর্গ একক

প্রদত্ত ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। কেননা $BC = CA = 5\sqrt{2}$ একক। অর্থাৎ ত্রিভুজটির দুইটি বাহু সমান।

আবার, $AB^2 = 10^2 = 100$

$BC^2 + CA^2 = (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = 50 + 50 = 100$

$\therefore AB^2 = BC^2 + CA^2$

∴ ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। অর্থাৎ ΔABC ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ও সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

03. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে A(–2, 0), B(5, 0) এবং C(1, 4)। প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-০৮)]*

Sol" ত্রিভুজটির চিত্র দেখানো হলো:

$AB = c = \sqrt{(5-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{49} = 7$ একক

$BC = a = \sqrt{(1-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক

$CA = b = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ একক

$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5) = \frac{1}{2}(12+4\sqrt{2}) = 6+2\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-7)(6+2\sqrt{2}-4\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-5)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6^2-(2\sqrt{2}))^2 \times ((2\sqrt{2})^2-1^2)} = \sqrt{28\times 7} = 14$ বর্গ একক

প্রদত্ত ত্রিভুজটি একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ। কারণ এর কোনো বাহুই অপর কোনো বাহুর সমান নয়।

লক্ষণীয়: যে তিনটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হলো তার ১ম টি সমকোণী, ২য় টি সমদ্বিবাহু ও সমকোণী এবং তৃতীয়টি বিষমবাহু ত্রিভুজ। একটি মাত্র সূত্রের সাহায্যে প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব হয়েছে। অন্য যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রেও ঠিক একইভাবে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

04. A(–2, 0), B(5, 0) এবং C(1, 4) যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষবিন্দু।
(ক) AB, BC, CA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ΔABC এর পরিসীমা নির্ণয় কর।
(খ) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০১)]

Sol"

(ক) দেওয়া আছে, প্রদত্ত বিন্দুসমূহ A(–2, 0), B(5, 0) এবং C(1, 4)

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(-2-5)^2+(0-0)^2} = \sqrt{(-7)^2+0^2}$

$= \sqrt{49+0} = \sqrt{49} = 7$ একক **(Ans.)**

BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(5-1)^2+(0-4)^2} = \sqrt{4^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

CA বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(1-(-2))^2+(4-0)^2} = \sqrt{3^2+4^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ একক **(Ans.)**

$\therefore$ ΔABC এর পরিসীমা $= AB + BC + CA = (7+4\sqrt{2}+5)$ একক

$= (12+4\sqrt{2})$ একক **(Ans.)**

(খ) ABC ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{(12+4\sqrt{2})}{2}$ একক $= (6+2\sqrt{2})$ একক

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-4\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-5)(6+2\sqrt{2}-7)}$

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}$

$= \sqrt{\{6^2-(2\sqrt{2})^2\}\{(2\sqrt{2})^2-1^2\}}$

$= \sqrt{(36-8)(8-1)}$

$= \sqrt{28\times 7} = \sqrt{196} = 14$ বর্গ একক। **(Ans.)**

TYPE 05 বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে সাজিয়ে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ ত্রিভুজ ABC এর তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে এর ক্ষেত্রফল-

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

যেখানে গুণফলের দিক ↘ ধনাত্মক চিহ্ন হিসেবে নিয়ে পাওয়া গেছে $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$ এবং গুণফলের দিক ↗ ঋণাত্মক চিহ্ন হিসেবে নিয়ে পাওয়া গেছে $-x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3$

বি.দ্র.: মনে রাখা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ যে এ পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ অবশ্যই ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিতে হবে।

01. A(2, 3), B(5, 6) এবং C(–1, 4) শীর্ষবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-১২)]

Sol" A(2, 3), B(5, 6) এবং C(–1, 4) শীর্ষ তিনটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নেওয়া হলো।

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}\{(12 + 20 - 3) - (15 - 6 + 8)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12 + 20 - 3 - 15 + 6 - 8)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12)$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক।

02. নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:

(ক) A(2, 3), B(5, 6) এবং C(–1, 4)

(খ) A(5, 2), B(1, 6) এবং C(–2, –3)

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০২)]

Sol" (ক) দেওয়া আছে, A(2, 3), B(5, 6) এবং C(–1, 4) শীর্ষবিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}(12 + 20 - 3 - 15 + 6 - 8)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(38 - 26)$ বর্গ একক $= \frac{1}{2} \times 12$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, A(5, 2), B(1, 6) এবং C(–2, –3)

শীর্ষবিন্দুগুলোর ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,

ΔABC এর ক্ষেত্রে $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}(30 - 3 - 4 - 2 + 12 + 15)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 48 = 24$ বর্গ একক **(Ans.)**

03. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ A(1, 3), B(5, 1) এবং C(3, r) এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক হলে r এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-১৩)]

Sol" A(1, 3), B(5, 1) এবং C(3, r) শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে,

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & r & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}(1 + 5r + 9 - 15 - 3 - r)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(4r - 8) = (2r - 4)$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $|(2r - 4)| = 4 \Rightarrow \pm(2r - 4) = 4 \Rightarrow 2r - 4 = \pm 4$

অর্থাৎ, $2r = 0$ বা, 8

$\therefore r = 0, 4$

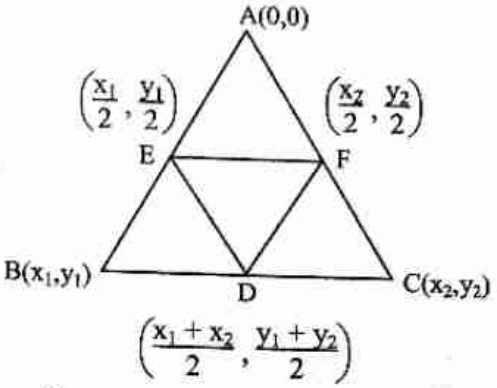
04. প্রমাণ করুন যে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঐ ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চারগুণ। [৪১তম বিসিএস]

Sol" ধরি, ত্রিভুজ ABC এর শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(0, 0), B(x_1, y_1) এবং C(x_2, y_2)।
AB, BC ও CA বাহুর মধ্যবিন্দু E, D, F হলে-

E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{x_1+0}{2}, \frac{y_1+0}{2}\right) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

F বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{x_2+0}{2}, \frac{y_2+0}{2}\right) = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$



সুতরাং ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{(0 + x_1y_2 + 0) - (0 + x_2y_1 + 0)\}$

$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ ..... (i)

আবার, ΔDEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{x_1}{2} & \frac{x_2}{2} & \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} & \frac{y_1}{2} & \frac{y_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x_1y_1+x_2y_1}{4} + \frac{x_1y_2}{4} + \frac{x_2y_1+x_2y_2}{4}\right) - \left(\frac{x_1y_1+x_1y_2}{4} + \frac{x_2y_1}{4} + \frac{x_1y_2+x_2y_2}{4}\right)\right\}$

$= \frac{1}{8}(x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 - x_2y_2)$

$= \frac{1}{8}(x_2y_1 - x_1y_2) = -\frac{1}{8}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{8}(x_1y_2 - x_2y_1)$ [ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না]

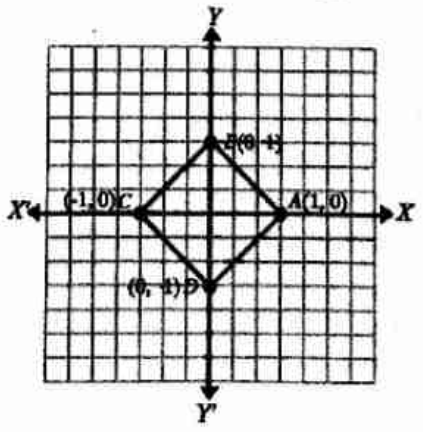
(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)}{\frac{1}{8}(x_1y_2 - x_2y_1)} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{1} = 4 \quad \Rightarrow \Delta ABC = 4\Delta DEF$ (প্রমাণিত)

TYPE 06 বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

01. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(1, 0), B(0, 1), C(–1, 0) এবং D(0, –1)। চতুর্ভুজটির চিত্র আঁক এবং যেকোনো দুই বাহু ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-০৯)]

Sol" পার্শ্বের চিত্রে বিন্দু পাতনের মাধ্যমে ABCD চতুর্ভুজটি দেখানো হলো। AB, BC, CD এবং DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু এবং AC ও BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।



বাহু $AB = c = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ একক

বাহু $BC = a = \sqrt{(0+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ একক

কর্ণ $AC = b = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4+0} = 2$ একক

বাহু $CD = \sqrt{(-1-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ একক

বাহু $DA = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ একক

দেখা যাচ্ছে, $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$ একক

∴ চতুর্ভুজটি একটি বর্গ বা রম্বস।

এখন, $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4 = AC^2$

∴ চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।

চতুর্ভুজ ABCD এর ক্ষেত্রফল = 2 × ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল।

এখন ত্রিভুজ ABC এর পরিসীমা, $2s = AB + BC + CA = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 2 + 2\sqrt{2}$ একক

$\therefore s = \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \times 2(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-2)(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})}$

$= \sqrt{(\sqrt{2}+1) \cdot 1 \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot 1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{2-1} = 1$ বর্গ একক

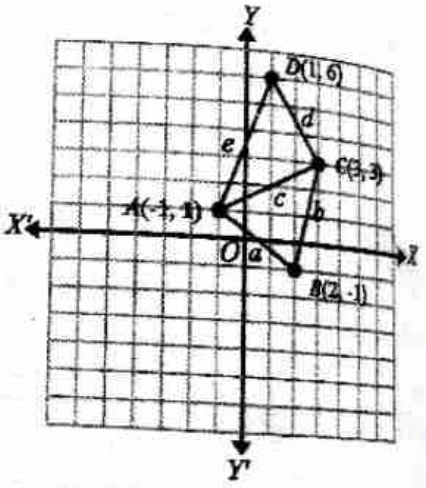
$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্র এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times 1$ বর্গ একক $= 2$ বর্গ একক।

মন্তব্য: বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে বর্গ করেও ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। আয়ত এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ গুণ করেও ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। কিন্তু যেকোনো চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায় না।

02. A(–1, 1), B(2, –1), C(3, 3) এবং D(1, 6) দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি অঙ্কন করে এর প্রতিটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-১০)]

Sol" বিন্দু পাতনের মাধ্যমে xy সমতলে ABCD চতুর্ভুজটি দেখানো হলো। ABCD চতুর্ভুজটির-



বাহু $AB = a = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ একক

বাহু $BC = b = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ একক

বাহু $CD = d = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ একক

বাহু $DA = e = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$ একক

কর্ণ $AC = c = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$ একক

ΔABC এ $2s = a + b + c = (\sqrt{13} + \sqrt{17} + \sqrt{20})$ একক

$= (3.6056 + 4.1231 + 4.4721)$ একক $= 12.2008$ একক

$\therefore s = 6.1004$ একক

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6.1004 \times 2.4948 \times 1.9773 \times 1.6283}$ বর্গ একক

$= \sqrt{49.000}$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক

ΔACD এ $2s = c + d + e = (\sqrt{20} + \sqrt{13} + \sqrt{29})$ একক $= (4.4721 + 3.6056 + 5.3852)$ একক $= 13.4629$ একক

$\therefore s = 6.7314$ একক

ΔACD এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক $= \sqrt{6.7315 \times 2.591 \times 3.1256 \times 1.3460}$ বর্গ একক

$= \sqrt{64.9744}$ বর্গ একক $= 7.9983$ বর্গ একক

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (7.000 + 7.998)$ বর্গ একক $= 14.998$ বর্গ একক $= 15$ বর্গ একক (প্রায়)

মন্তব্য: চতুর্ভুজটি বর্গ বা আয়ত বা সামান্তরিক বা রম্বস কোনোটিই নয়। এ ধরনের বিষম আকারের জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে এ পদ্ধতি অত্যন্ত কার্যকর।

03. চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(2, –3), B(3, 0), C(0, 1) এবং D(–1, –2)।

(ক) দেখাও যে, ABCD একটি রম্বস।

(খ) AC ও BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং ABCD একটি বর্গ কিনা যাচাই কর।

(গ) ত্রিভুজক্ষেত্রের মাধ্যমে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-১১)] [৪৩তম বিসিএস]

Sol" ABCD চতুর্ভুজটি বিন্দু পাতনের মাধ্যমে দেখানো হলো:

(ক) ধরি, a, b, c, d যথাক্রমে AB, BC, CD এবং DA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং কর্ণ AC = e ও কর্ণ BD = f।

$a = \sqrt{(3-2)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ একক

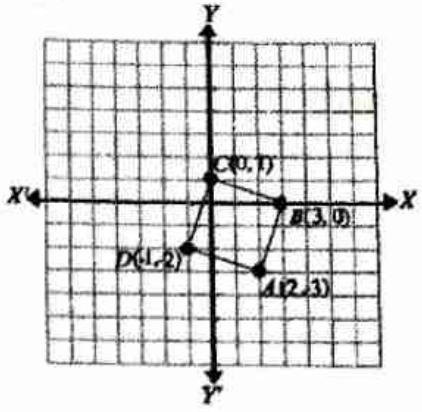
$b = \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ একক

$c = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ একক

$d = \sqrt{(2+1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ একক

যেহেতু $a = b = c = d = \sqrt{10}$ একক

$\therefore$ ABCD একটি রম্বস বা বর্গ।



(খ) কর্ণ $AC = e = \sqrt{(0-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

এবং কর্ণ $BD = f = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ একক

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে $AC = BD$ অর্থাৎ, কর্ণদ্বয় সমান

$AC^2 = (\sqrt{20})^2 = 20$

$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 10 + 10 = 20 = AC^2$

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $\angle ABC$ সমকোণ।

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি বর্গ।

(গ) চতুর্ভুজ ABCD এর ক্ষেত্রফল = 2 × ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল

এখানে, ΔABC এর ক্ষেত্রে

$$s = \frac{1}{2}(a+b+e) = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{10}+\sqrt{5}$$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{10})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{10})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{20})}$

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{5}).\sqrt{5}.\sqrt{5}.(\sqrt{10}-\sqrt{5})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{5.((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{5.5} = 5$ বর্গ একক

$\therefore$ ABCD বর্গের ক্ষেত্রফল = 2 × 5 বর্গ একক = 10 বর্গ একক।

মন্তব্য: সহজ পদ্ধতি ABCD বর্গটির ক্ষেত্রফল $= (\sqrt{10})^2 = 10$ বর্গ একক।

TYPE 07 বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে সাজিয়ে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

চতুর্ভুজটির চারটি শীর্ষ যথাক্রমে, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ এবং $D(x_4, y_4)$ এবং A, B, C, D কে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক অনুসারে নিয়ে পাই,

ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$

বি.দ্র.: একইভাবে পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ ইত্যাদি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলও নির্ণয় করা যায়।

01. A(1, 4), B(–4, 3), C(1, –2) এবং D(4, 0) শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(উদাহরণের অংক নং-১৪)]

Sol বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে

চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(3 + 8 + 0 + 16 + 16 - 3 + 8 - 0)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(48)$ বর্গ একক $= 24$ বর্গ একক

02. A(–a, 0), B(0, –a), C(a, 0) এবং D(0, a) শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো A(–a, 0), B(0, –a), C(a, 0) এবং D(0, a)

এখন, A, B, C, D বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,

$$\therefore \text{ABCD এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a & 0 & a & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 & a & 0 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + 0 + a^2 + 0 - 0 + a^2 - 0 + a^2) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4a^2 \text{ বর্গ একক} \quad = 2a^2 \text{ বর্গ একক (Ans.)}$$

03. নিম্নোক্ত চতুর্ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [পদ্ধতি ২ ব্যবহার কর]:

(ক) (0, 0), (– 2, 4), (6, 4), (4, 1)

(খ) (1, 4), (– 4, 3), (1, – 2), (4, 0)

(গ) (0, 1), (– 3, – 3), (4, 3), (5, 1)

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" (ক) ধরি, A(0, 0), B(– 2, 4), C(6, 4) ও D(4, 1) বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2}\{0 + 16 + 24 + 0 - 0 - 6 - (-8) - 0\} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(16 + 24 - 6 + 8) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(48 - 6) \text{ বর্গ একক} \quad = \frac{1}{2}(42) \text{ বর্গ একক} \quad = 21 \text{ বর্গ একক (Ans.)}$$

(খ) ধরি, A(1, 4), B(– 4, 3), C(1, – 2) ও D(4, 0) বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2}\{3 + 8 + 0 + 16 - (-16) - 3 - (-8) - 0\} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 8 + 16 + 16 - 3 + 8) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(51 - 3) \text{ বর্গ একক} \quad = \frac{1}{2}(48) \text{ বর্গ একক} \quad = 24 \text{ বর্গ একক (Ans.)}$$

(গ) ধরি, A(–3, –3), B(5, 1), C(4, 3) ও D(0, 1) বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$$= \frac{1}{2}(-3 + 15 + 4 + 0 + 15 - 4 - 0 + 3) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \text{ বর্গ একক} \quad = 15 \text{ বর্গ একক (Ans.)}$$

04. দেখাও যে, A(2, – 3), B(3, – 1), C(2, 0), D(– 1, 1) এবং E(– 2, –1) শীর্ষবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" A(2, – 3), B(3, – 1), C(2, 0), D(– 1, 1) এবং E(– 2, –1) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট পঞ্চভুজ ABCDE।
বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পঞ্চভুজ ABCDE এর ক্ষেত্রফল

$$\therefore = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}\{-2+0+2+1+6-(-9)-(-2)-0-(-2)-(-2)\} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(7+9+2+2+2) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times 22 \text{ বর্গ একক}$$

$$= 11 \text{ বর্গ একক (দেখানো হলো)}$$

05. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ A(3, 4), B(– 4, 2), C(6, – 1) এবং D(p, 3) এবং শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে p এর মান নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(3, 4), B(– 4, 2), C(6, – 1) এবং D(p, 3) এবং শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & p & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}\{6+4+18+4p-(-16)-12-(-p)-9\} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(28+4p+16-12+p-9) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(23+5p) \text{ বর্গ একক}$$

আবার, A, B ও C বিন্দুকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে ত্রিভুজক্ষেত্র

$$\text{ABC এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}\{6+4+24-(-16)-12-(-3)\} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(34+16-12+3) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(53-12) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{41}{2} \text{ বর্গ একক}$$

প্রশ্নমতে, ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 2 × ABC ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(23+5p) = 2 \times \frac{41}{2}$$

$$\Rightarrow 23+5p = 41 \times 2$$

$$\Rightarrow 5p = 82-23$$

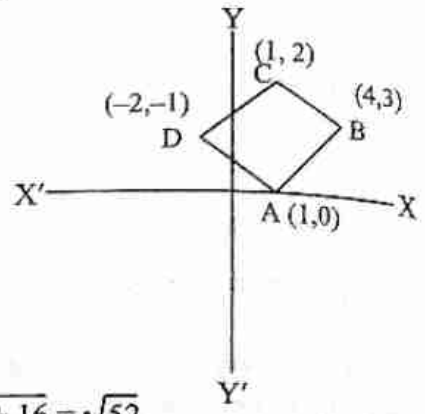
$$\Rightarrow 5p = 59$$

$$\therefore p = \frac{59}{5} \textbf{ (Ans.)}$$

TYPE 08 ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের যৌথ প্রয়োগ সংক্রান্ত সমস্যা

01. প্রমাণ করুন যে, (–2, –1), (1, 0), (4, 3) এবং (1, 2) বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। [৪১তম বিসিএস]

Sol" ধরি, বিন্দু চারটি যথাক্রমে A(1, 0), B(4, 3), C(1, 2) ও D(–2, –1)



A ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2}$
$= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

B ও C বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2}$
$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

C ও D বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-2)^2}$
$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

D ও A বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(1+2)^2 + (0+1)^2}$
$= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

আবার, কর্ণ $AC = \sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{9+1} = 2$

কর্ণ $BD = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

যেহেতু AB = CD, BC = AD এবং কর্ণ AC ≠ কর্ণ BD

সুতরাং বিন্দুগুলী একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

02. দেখাও যে, A(1, 1), B(4, 4), C(4, 8) এবং D(1, 5) বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। AC ও BD কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol" দেওয়া আছে, A(1, 1), B(4, 4), C(4, 8) এবং D(1, 5)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$ একক

DC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-4)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$ একক

এবং BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4-4)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-4)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$ একক

এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ একক

এখানে, AB = DC এবং AD = BC; কিন্তু কর্ণ AC ≠ BD.

∴ A, B, C, D বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। **(দেখানো হলো)**

∴ AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{58}$ একক এবং

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{10}$ একক **(Ans.)**

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

এখন, ΔABD এর অর্ধ পরিসীমা $= \frac{AB + AD + BD}{2} = \frac{(3\sqrt{2} + 4 + \sqrt{10})}{2} = 5.70$ একক

∴ ΔABD এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{5.70\,(5.70 - 3\sqrt{2})\,(5.70 - 4)\,(5.70 - \sqrt{10})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{5.70\,(1.457)\,(1.70)\,(2.538)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{35.832}$ বর্গ একক $= 5.986$ বর্গ একক (প্রায়)

∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ ΔABD এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times 5.986$ বর্গ একক (প্রায়) $= 11.972$ বর্গ একক (প্রায়) **(Ans.)**

৫। দেখাও যে, A(0, –1), B(–2, 3), C(6, 7) এবং D(8, 3) বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol^n দেওয়া আছে, A(0, –1), B(–2, 3), C(6, 7) এবং D(8, 3)

এখন, AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-8)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

এবং AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-6)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$ একক $= 10$ একক **(Ans.)**

এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{10^2} = 10$ একক

দেখা যাচ্ছে, AB = CD, BC = AD এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD.

∴ A, B, C, D বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু। (দেখানো হলো)

আয়তক্ষেত্রটির কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 10 একক। **(Ans.)**

∴ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= AB \times BC = \sqrt{80} \times \sqrt{20}$ বর্গ একক

$= \sqrt{1600}$ বর্গ একক $= 40$ বর্গ একক **(Ans.)**

৬। তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(–2, 1), B(10, 6) এবং C(a, –6)। AB = BC হলে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। 'a' এর মানের সাহায্যে যে ত্রিভুজ গঠিত হয় এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol^n দেওয়া আছে, A(–2, 1), B(10, 6) এবং C(a, –6)

এখন, $AB = \sqrt{(-2-10)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ একক

এবং $BC = \sqrt{(10-a)^2 + (6+6)^2} = \sqrt{(10-a)^2 + 144}$ একক

প্রশ্নানুসারে, $AB = BC \Rightarrow 13 = \sqrt{(10-a)^2 + 144} \Rightarrow 169 = (10-a)^2 + 144$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (10-a)^2 = 25 \Rightarrow 10 - a = \pm 5 \Rightarrow -a = \pm 5 - 10$

∴ a = 5, 15

∴ a এর সম্ভাব্য মানসমূহ 5 ও 15 **(Ans.)**

যখন, a = 5, তখন বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,

ΔACB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 10 & -2 \\ 1 & -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}(12 + 30 + 10 - 5 + 60 + 12)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(124 - 5)$ বর্গ একক

$= \frac{119}{2}$ বর্গ একক $= 59\frac{1}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

যখন a = 15, তখন শীর্ষগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,

ΔACB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 15 & 10 & -2 \\ 1 & -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12 + 90 + 10 - 15 + 60 + 12)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(124 - 15)$ বর্গ একক

$= \frac{169}{2}$ বর্গ একক $= 84\frac{1}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

05. A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(a, a + 1), B(–6, –3) এবং C(5, –1)। AB এর দৈর্ঘ্য AC এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হলে 'a' এর সম্ভাব্য মান এবং ABC ত্রিভুজটির বৈশিষ্ট্য বর্ণনা কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.২(অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" দেওয়া আছে, A(a, a + 1), B(–6, –3) এবং C(5, –1)

তাহলে, AB এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(a+6)^2 + (a+1+3)^2} = \sqrt{(a^2+12a+36) + (a^2+8a+16)} = \sqrt{2a^2+20a+52}$ একক।

এবং AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(a-5)^2 + (a+1+1)^2}$

$= \sqrt{(a^2-10a+25)(a^2+4a+4)}$

$= \sqrt{2a^2-6a+29}$ একক।

প্রশ্নানুসারে, AB এর দৈর্ঘ্য = 2(AC এর দৈর্ঘ্য)

$\Rightarrow \sqrt{2a^2+20a+52} = 2(\sqrt{2a^2-6a+29})$

$\Rightarrow 2a^2+20a+52 = 4(2a^2-6a+29)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 2a^2+20a+52 = 8a^2-24a+116$

$\Rightarrow 8a^2-24a+116-2a^2-20a-52 = 0$

$\Rightarrow 6a^2-44a+64 = 0$

$\Rightarrow 3a^2-22a+32 = 0$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 3a^2-6a-16a+32 = 0$

$\Rightarrow 3a(a-2)-16(a-2) = 0$

$\Rightarrow (a-2)(3a-16) = 0$

$\therefore a = 2, \frac{16}{3}$

$\therefore$ a এর সম্ভাব্য মানসমূহ 2 এবং $\frac{16}{3}$ **(Ans.)**

a = 2 হলে,

AB এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2.2^2+20.2+52} = \sqrt{8+40+52} = \sqrt{100} = 10$ একক

AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2.2^2-6.2+29} = \sqrt{8-12+29} = \sqrt{25} = 5$ একক

আবার BC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-6-5)^2+(-3+1)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ একক

দেখা যাচ্ছে, $AB^2 + AC^2 = 10^2 + 5^2 = 100 + 25 = 125 = (5\sqrt{5})^2 = BC^2$

$\therefore$ পীথাগোরাসের সূত্রানুসারে, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, BC অতিভুজ এবং $\angle BAC$ সমকোণ।

আবার, $a = \frac{16}{3}$ হলে,

AB এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2.\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 20.\frac{16}{3} + 52} = \sqrt{2.\frac{256}{9} + \frac{320}{3} + 52}$

$= \sqrt{\frac{512+960+468}{9}} = \sqrt{\frac{1940}{9}}$ একক

AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2.\left(\frac{16}{3}\right)^2 - 6.\frac{16}{3} + 29} = \sqrt{\frac{512}{9} - 32 + 29}$

$= \sqrt{\frac{512-288+261}{9}} = \sqrt{\frac{485}{3}}$ একক

এবং BC এর দৈর্ঘ্য $= 5\sqrt{5}$ একক

যেহেতু $AB \neq AC \neq BC$

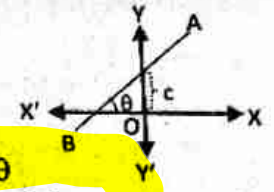
সুতরাং ABC ত্রিভুজটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।

TYPE 09 সরলরেখার ঢাল সংক্রান্ত সমস্যা

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Type 09, 10, 11 & 12 এর জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

ঢাল: একটি সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক tan অনুপাতকে ঐ সরলরেখাটির ঢাল বলা হয়। ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়।



এই অধ্যায়ে দুইটি শর্তে ঢাল নির্ণয় করা হয়। সেগুলো হলঃ

(i) কোন সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল, $m=\tan\theta$

উদাহরণ–01ঃ একটি সরলরেখা X-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটির ঢাল নির্ণয় কর।

Sol^n: $m = \tan 45° = 1$ **Ans.**

উদাহরণ–02ঃ একটি সরলরেখা X-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটির ঢাল নির্ণয় কর।

Sol^n: $m = \tan(180° - 45°) = \tan 135° = -1$ **Ans.**

(ii) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) গামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

উদাহরণ–03ঃ (4, 7) ও (–6, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল কত?

Sol^n: ঢাল, $m = \frac{7-2}{4-(-6)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

তিনটি বিন্দু সমরেখ হওয়ার শর্ত:

$A(x_1y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে AB রেখার ঢাল ও BC রেখার ঢাল সমান হবে।
অর্থাৎ AB রেখার ঢাল = BC রেখার ঢাল

অথবা,

$A(x_1y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে এদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

01. A(K, 3K), B(K^2, 2K), C(K – 2, K) এবং D(1, 1) চারটি ভিন্ন বিন্দু। যদি AB এবং CD রেখাদ্বয় সমান্তরাল হয়, তবে K এর মান কত হবে? [৪৩তম বিসিএস]

অথবা, A(t, 3t), B(t^2, 2t), C(t – 2, t) এবং D(1, 1) চারটি ভিন্ন বিন্দু। AB এবং CD রেখা সমান্তরাল হলে এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৩(উদাহরণের অংক নং-১৯)]*

Sol^n AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{2t-3t}{t^2-t} = \frac{-t}{t(t-1)} = \frac{-1}{t-1} = \frac{1}{1-t}$

CD রেখার ঢাল $m_2 = \frac{1-t}{1-t+2} = \frac{1-t}{3-t}$

যেহেতু AB ও CD রেখা সমান্তরাল, AB ও CD রেখার ঢাল সমান অর্থাৎ, $m_1 = m_2$

$\Rightarrow \frac{1}{1-t} = \frac{1-t}{3-t}$ $\Rightarrow (1-t)^2 = 3-t$ $\Rightarrow 1-2t+t^2 = 3-t$

$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$ $\Rightarrow t^2 - 2t + t - 2 = 0$ $\Rightarrow t(t-2) + 1(t-2)$ $\Rightarrow t = -1$ অথবা $t = 2$

সুতরাং t এর সম্ভাব্য মানসমূহ –1, 2

02. A(t, 1), B(2, 4) এবং C(1, t) তিনটি ভিন্ন বিন্দু সমরেখ হলে t এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৩(অনুশীলনীর অংক নং-০২)]

Sol" দেওয়া আছে, A(t, 1), B(2, 4) এবং C(1, t)

এখন, AB রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-t} = \frac{3}{2-t}$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{t-4}{1-2} = \frac{t-4}{-1} = 4-t$

প্রশ্নানুসারে, A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = BC রেখার ঢাল

$\Rightarrow \frac{3}{2-t} = 4-t \quad \Rightarrow (4-t)(2-t) = 3 \quad \Rightarrow 8 - 4t - 2t + t^2 = 3$

$\Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \quad \Rightarrow t^2 - 5t - t + 5 = 0 \quad \Rightarrow t(t-5) - 1(t-5) = 0$

$\therefore (t-5)(t-1) = 0$

হয়, $t - 5 = 0$ অথবা, $t - 1 = 0$

কিন্তু $t = 1$ হলে A ও C বিন্দু একই হয়।

$\therefore$ $t = 1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ **$t = 5$ (Ans.)**

03. দেখাও যে, A(0, – 3), B(4, – 2) এবং C(16, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৩(অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol" দেওয়া আছে, A(0, – 3), B(4, – 2) এবং C(16, 1)

A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি AB রেখার ঢাল ও BC রেখার ঢাল সমান হয়।

এখানে, AB রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2+3}{4-0} = \frac{1}{4}$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1+2}{16-4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = BC রেখার ঢাল।

$\therefore$ A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(দেখানো হলো)**

04. **A(1, –1), B(t, 2) এবং $C(t^2, t+3)$ সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৩(অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" দেওয়া আছে, A(1, –1), B(t, 2) এবং $C(t^2, t+3)$

এখানে, AB রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+1}{t-1} = \frac{3}{t-1}$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{t+3-2}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$

যেহেতু A, B, C সমরেখ

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = BC রেখার ঢাল

$\Rightarrow \frac{3}{t-1} = \frac{t+1}{t(t-1)} \Rightarrow 3t(t-1) = (t-1)(t+1)$

$\Rightarrow 3t(t-1) - (t-1)(t+1) = 0$

$\Rightarrow (t-1)(3t-t-1) = 0$

$\Rightarrow (t-1)(2t-1) = 0 \quad \therefore t = 1, \frac{1}{2}$

$\therefore$ সম্ভাব্য মানসমূহ $1, \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

05. $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2 + 1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল -1 হলে p এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৩(অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol" $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2 + 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{p^2 + 1 - 3p}{4 - 3} = p^2 - 3p + 1$

প্রশ্নানুসারে, $p^2 - 3p + 1 = -1 \Rightarrow p^2 - 3p + 2 = 0 \Rightarrow p^2 - 2p - p + 2 = 0$

$\Rightarrow p(p - 2) - 1(p - 2) = 0 \Rightarrow (p - 2)(p - 1) = 0$

হয়, $p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$ অথবা, $p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1$

$\therefore p = 2, 1$

$\therefore p$ এর মান 2, 1 **(Ans.)**

06. প্রমাণ কর যে, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$ সমরেখ হবে, যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ হয়।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৩(অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol" দেওয়া আছে, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$

যেহেতু বিন্দুত্রয় সমরেখ।

অতএব, AB এর ঢাল = BC এর ঢাল

$\therefore \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{1 - b}{1 - 0} \Rightarrow \frac{b}{-a} = \frac{1 - b}{1} \Rightarrow b = -a + ab \Rightarrow ab = a + b \Rightarrow 1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ [উভয়পক্ষকে ab দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ **(প্রমাণিত)**

07. $A(a, b)$, $B(b, a)$ এবং $C\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ সমরেখ হলে প্রমাণ কর যে, $a + b = 0$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৩(অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol" দেওয়া আছে, $A(a, b)$, $B(b, a)$ এবং $C\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$

AB রেখার ঢাল $= \frac{a - b}{b - a} = \frac{a - b}{-(a - b)} = -1$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{\frac{1}{b} - a}{\frac{1}{a} - b} = \frac{\frac{1 - ab}{b}}{\frac{1 - ab}{a}} = \frac{(1 - ab)}{b} \times \frac{a}{(1 - ab)} = \frac{a}{b}$

যেহেতু A, B, C সমরেখ

$\therefore$ AB রেখার ঢাল = BC রেখার ঢাল $\Rightarrow -1 = \frac{a}{b} \Rightarrow a = -b$

$\therefore a + b = 0$ **(প্রমাণিত)**

TYPE 10 নির্দিষ্ট ঢাল ও নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা

♦ একটি সরলরেখার ঢাল m এবং সরলরেখাটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে গেলে সরলরেখাটির সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$.

উদাহরণঃ একটি সরলরেখা $(2, 3)$ দিয়ে অতিক্রম করে এবং সরলরেখার ঢাল 5 হলে সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol" সরলরেখাটির সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 3 = 5(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 5x - 10 \Rightarrow 5x - y - 7 = 0$ **Ans.**

01. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ঢাল 3 এবং রেখাটি $(-2, -3)$ বিন্দুগামী। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(উদাহরণের অংক নং-২১)]

Sol" দেওয়া আছে, ঢাল $m = 3$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1) = (-2, -3)$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - (-3) = 3\{x - (-2)\} \Rightarrow y + 3 = 3(x + 2) \Rightarrow y + 3 = 3x + 6 \Rightarrow y = 3x + 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $y = 3x + 3$

02. (k, 0) বিন্দুগামী ও k ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ k এর মাধ্যমে নির্ণয় কর। যদি রেখাটি (5, 6) বিন্দুগামী হয় তবে k এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" (k, 0) বিন্দুগামী ও k ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $(y-0) = k(x-k)$ $[\because y - y_1 = m(x - x_1)]$

$\therefore y = k(x-k)$ ..... (i)

(i) নং সরলরেখা (5, 6) বিন্দুগামী।

সুতরাং $6 = k(5-k)$

$\Rightarrow 6 = 5k - k^2$

$\Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 2k - 3k + 6 = 0$

$\Rightarrow k(k-2) - 3(k-2) = 0$

$\Rightarrow (k-2)(k-3) = 0$

$\therefore k = 2, 3$

03. $(k^2, 2k)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{k}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। যদি রেখাটি (–2, 1) বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে তবে k এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]*

Sol" প্রথম অংশ: দেওয়া আছে, ঢাল $m = \frac{1}{k}$; নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1) = (k^2, 2k)$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2k = \frac{1}{k}(x - k^2)$

$\Rightarrow y - 2k = \frac{x}{k} - k \qquad \Rightarrow y = \frac{x}{k} - k + 2k$

$\therefore y = \frac{x}{k} + k = \frac{1}{k}(x + k^2)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় অংশ: $y = \frac{x}{k} + k$ রেখাটি (–2, 1) বিন্দুগামী।

$\therefore 1 = \frac{-2}{k} + k \qquad \Rightarrow 1 = \frac{-2 + k^2}{k} \qquad \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 2k + k - 2 = 0 \qquad \Rightarrow k(k-2) + 1(k-2) = 0$

$\Rightarrow (k-2)(k+1) = 0$

হয়, $k - 2 = 0$ অথবা, $k + 1 = 0$

$\therefore k = 2 \qquad \therefore k = -1$

$\therefore$ k এর সম্ভাব্য মান –1, 2 **(Ans.)**

04. একটি রেখা A(–2, 3) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল $\frac{1}{2}$। রেখাটি যদি (3, k) বিন্দু দিয়েও যায় তবে k এর মান কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" A(–2,3) বিন্দুগামী ও $\frac{1}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $(y-3) = \frac{1}{2}(x+2)$

$\Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1 + 3 \qquad \therefore y = \frac{x}{2} + 4$

রেখাটি (3, k) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, $k = \frac{3}{2} + 4 \qquad \Rightarrow k = \frac{11}{2}$

$\therefore$ k এর মান $\frac{11}{2}$ **(Ans.)**

TYPE 11 তিনটি সরলরেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

01. $y = 3x + 4$, $y = -3x + 10$ এবং $y = 2$ সমীকরণ তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। [৪৪তম বিসিএস]

Sol^n দেওয়া আছে, $y = 3x + 4$ ..... (i)

$y = -3x + 10$ ..... (ii)

$y = 2$ ..... (iii)

ধরি, (i) ও (ii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু A, (ii) ও (iii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু B এবং (iii) ও (i) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু C

এখন, (i) নং (ii) নং হতে, $3x + 4 = -3x + 10$

$\Rightarrow 3x + 3x = 10 - 4$

$\Rightarrow 6x = 6$

$\therefore x = 1$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y = 3.1 + 4 = 7$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু, A (1, 7)

আবার, (ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে, $-3x + 10 = 2$

$\Rightarrow -3x = -8$

$\Rightarrow 3x = 8$

$\therefore x = \frac{8}{3}$

সুতরাং (ii) ও (iii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু B $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

আবার, (i) নং ও (iii) নং সমীকরণ হতে, $3x + 4 = 2 \Rightarrow 3x = -2 \quad \therefore x = \frac{-2}{3}$

সুতরাং (i) নং ও (iii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু C $\left(\frac{-2}{3}, 2\right)$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{8}{3} & 1 \\ 7 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ [বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে সাজিয়ে]

$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{56}{3} + \frac{14}{3} - \frac{16}{3} - 2\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{6 - 4 + 56 + 14 - 16 - 6}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{76 - 26}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{3} = \frac{25}{3}$ বর্গ একক

02. $2x + y - 3 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$ এবং $2x + 3y + 4 = 0$ এই তিনটি সরলরেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। [৩৫তম বিসিএস]

Sol^n দেওয়া আছে, $2x + y - 3 = 0$ ..... (i)

$3x + 2y - 1 = 0$ ..... (ii)

$2x + 3y + 4 = 0$ ..... (iii)

ধরি, (i) ও (ii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু A, (ii) ও (iii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু B এবং (iii) ও (i) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু C.

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

(i) $\times 2$ – (ii) থেকে পাই,

$4x + 2y - 6 = 0$

$3x + 2y - 1 = 0$

(–) (–) (+)

$x - 5 = 0 \quad \therefore x = 5$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $2 \times 5 + y - 3 = 0$

$\Rightarrow 10 + y - 3 = 0 \quad \Rightarrow y + 7 = 0 \quad \therefore y = -7$

(i) ও (ii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু, A (5, – 7)

আবার, (ii) ও (iii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

(ii) × 3 – (iii) × 2 থেকে পাই,

$9x + 6y - 3 = 0$

$4x + 6y + 8 = 0$

(–) (–) (–)

$5x - 11 = 0 \quad \Rightarrow 5x = 11 \therefore x = \frac{11}{5}$

$\therefore$ x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $3x + 2y - 1 = 0$

$\Rightarrow 3.\frac{11}{5} + 2y = 1 \quad \Rightarrow 2y = 1 - \frac{33}{5} \quad \Rightarrow 2y = \frac{5-33}{5}$

$\Rightarrow y = \frac{-28}{10} \quad \therefore y = -\frac{14}{5}$

$\therefore$ (ii) ও (iii) নং সমীকরণের ছেদবিন্দু, $B\left(\frac{11}{5}, -\frac{14}{5}\right)$

আবার, (iii) ও (i) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই,

(iii) – (i) × 3 থেকে পাই,

$2x + 3y + 4 = 0$

$6x + 3y - 9 = 0$

(–) (–) (+)

$-4x + 13 = 0 \quad \Rightarrow -4x = -13 \quad \therefore x = \frac{13}{4}$

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $2x + 3y + 4 = 0$

$\Rightarrow 2.\frac{13}{4} + 3y = -4 \quad \Rightarrow 3y = -4 - \frac{26}{4} \quad \Rightarrow 3y = \frac{-16-26}{4}$

$\Rightarrow y = \frac{-42}{12} \quad \therefore y = -\frac{7}{2}$

(iii) ও (i) নং সমীকরণের ছেদ বিন্দু, $C\left(\frac{13}{4}, -\frac{7}{2}\right)$

$\therefore A(5, -7);\ B\left(\frac{11}{5}, -\frac{14}{5}\right)$ ও $C\left(\frac{13}{4}, -\frac{7}{2}\right)$

শীর্ষবিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ΔABC এর ক্ষেত্রফল,

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & \frac{11}{5} & \frac{13}{4} & 5 \\ -7 & -\frac{14}{5} & -\frac{7}{2} & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{5.\left(-\frac{14}{5}\right) + \frac{11}{5}\left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{13}{4}.(-7) - \frac{11}{5}.(-7) - \frac{13}{4}.\left(-\frac{14}{5}\right) - 5.\left(\frac{-7}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-14 - \frac{77}{10} - \frac{91}{4} + \frac{77}{5} + \frac{91}{10} + \frac{35}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-280 - 154 - 455 + 308 + 182 + 350}{20}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-889 + 840}{20}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{49}{20}\right) = -\frac{49}{40}$$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \left|-\frac{49}{40}\right| = \frac{49}{40}$ বর্গ একক। Ans.

03. $y = x + 5$, $y = -x + 5$ এবং $y = 2$ সমীকরণ তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। ত্রিভুজটির চিত্র আঁক এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]*

Sol" প্রদত্ত রেখাত্রয়, $y = x + 5$ ..... (i)

$y = -x + 5$ ..... (ii)

$y = 2$ ..... (iii)

(i) নং রেখা x-অক্ষকে (–5, 0) বিন্দুতে [(i) নং এ $y = 0$ বসিয়ে $x = -5$] এবং y-অক্ষকে (0, 5) বিন্দুতে [(i) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $y = 5$] ছেদ করে।

(ii) নং রেখা x-অক্ষকে (5, 0) বিন্দুতে [(i) নং এ $y = 0$ বসিয়ে $x = 5$] এবং y-অক্ষকে (0, 5) বিন্দুতে [(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে, $y = 5$] ছেদ করে।

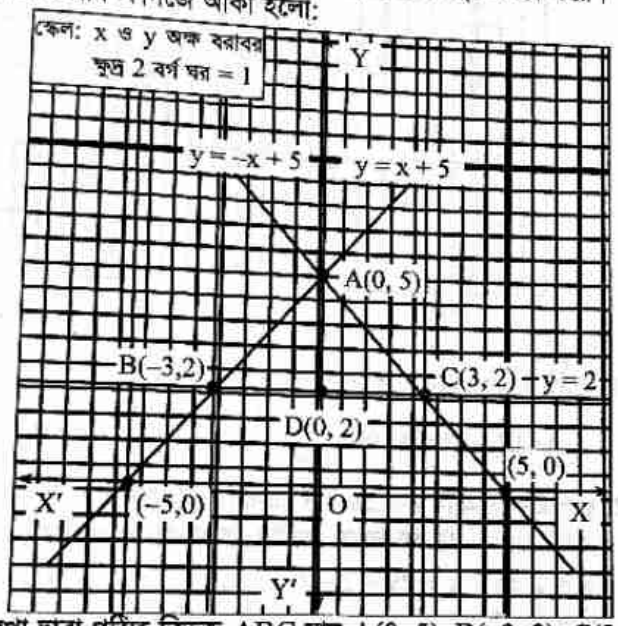
∴ (i) নং ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু (0, 5)

(i) নং এ $y = 2$ বসিয়ে পাই, $x = -3$ ∴ (i) নং ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু (–3, 2)

(ii) নং এ $y = 2$ বসিয়ে পাই, $x = 3$ ∴ (i) নং ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু (3, 2)

(iii) নং রেখা $y = 2$ হলো x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা যা y-অক্ষকে (0, 2) বিন্দুতে ছেদ করে।

উপরিউক্ত তথ্যের আলোকে রেখাগুলো গ্রাফ কাগজে আঁকা হলো:



চিত্র থেকে (i), (ii) ও (iii) নং রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ ABC যার A(0, 5), B(–3, 2), C(3, 2)

∴ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(0 - 6 + 15 + 15 - 6 - 0)$ বর্গ একক $= \frac{1}{2} \times 18$ বর্গ একক $= 9$ বর্গ একক **(Ans.)**

04. $y = 3x + 4$ এবং $3x + y = 10$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রেখাদ্বয়ের চিত্র আঁক এবং x অক্ষ সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-২০)]*

Sol" প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $y = 3x + 4$

$\Rightarrow 3x - y + 4 = 0$ ..... (i)

এবং $3x + y = 10$

$\Rightarrow 3x + y - 10 = 0$ ..... (ii)

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (i) ও (ii) নং সমীকরণের সমাধান।

(i) ও (ii) নং সমীকরণ জোটে বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$\frac{x}{10-4} = \frac{y}{12+30} = \frac{1}{3+3}$ $\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{42} = \frac{1}{6}$

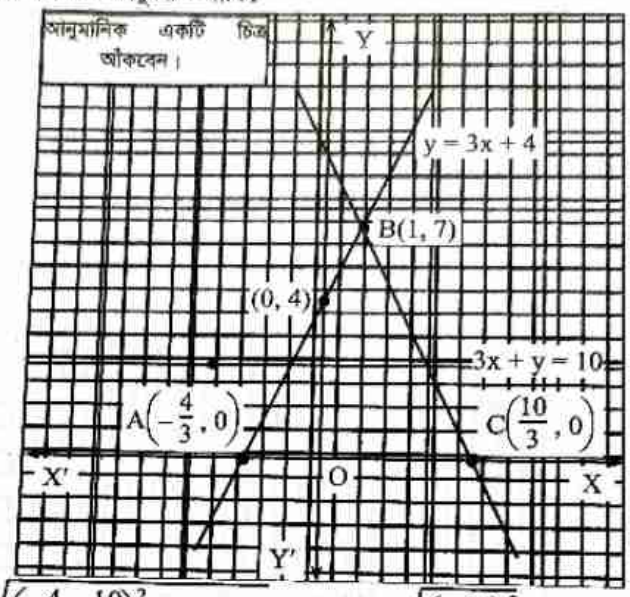
∴ $\frac{x}{6} = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow x = 1$ এবং $\frac{y}{42} = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow y = 7$

∴ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 7) **(Ans.)**

(i) নং রেখার উপর একটি বিন্দু (1, 7) এবং অপর একটি বিন্দু $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ [(i) নং এ $y = 0$ বসিয়ে]

(ii) নং রেখার উপর একটি বিন্দু (1, 7) এবং অপর একটি বিন্দু $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ [(ii) নং এ $y = 0$ বসিয়ে]

এখন প্রাপ্ত বিন্দুগুলো গ্রাফ কাগজে বসিয়ে ত্রিভুজটি আঁকি:



ABC ত্রিভুজের ভূমি, $AC = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}-\frac{10}{3}\right)^2 + (0-0)^2}$ একক $= \sqrt{\left(-\frac{14}{3}\right)^2}$ একক $= \frac{14}{3}$ একক

যেহেতু, ভূমি x অক্ষের উপর অবস্থিত এবং ভূমি হতে বিপরীত শীর্ষের দূরত্ব 7 একক।

$\therefore$ উচ্চতা = 7 একক $\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{14}{3} \times 7 = \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3}$ বর্গ একক **(Ans.)**

05. প্রমাণ কর যে, $2y - x = 2$, $y + x = 7$ এবং $y = 2x - 5$ রেখা তিনটি সমবিন্দু অর্থাৎ একই বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol" প্রদত্ত রেখাত্রয় $2y - x = 2 \Rightarrow -x + 2y - 2 = 0$ ..... (i)

$x + y - 7 = 0$ ..... (ii)

এবং $y = 2x - 5 \Rightarrow 2x - y - 5 = 0$ ..... (iii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই, $\frac{x}{-14+2} = \frac{y}{-2-7} = \frac{1}{-1-2} \Rightarrow \frac{x}{-12} = \frac{y}{-9} = \frac{1}{-3}$

সুতরাং $\frac{x}{-12} = \frac{1}{-3} \Rightarrow x = \frac{-12}{-3} \therefore x = 4$

এবং $\frac{y}{-9} = \frac{1}{-3} \Rightarrow y = \frac{-9}{-3} \therefore y = 3$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখার ছেদ বিন্দু $(x, y) = (4, 3)$

আবার, (ii) ও (iii) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই, $\frac{x}{-5-7} = \frac{y}{-14+5} = \frac{1}{-1-2} \Rightarrow \frac{x}{-12} = \frac{y}{-9} = \frac{1}{-3}$

সুতরাং $\frac{x}{-12} = \frac{1}{-3} \Rightarrow x = \frac{-12}{-3} = 4 \therefore x = 4$

এবং $\frac{y}{-9} = \frac{1}{-3} \Rightarrow y = \frac{-9}{-3} = 3 \therefore y = 3$

$\therefore$ (ii) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু, $(x, y) = (4, 3)$

অর্থাৎ (i), (ii) ও (iii) নং রেখা (4, 3) বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে।

$\therefore$ রেখা তিনটি সমবিন্দু। অর্থাৎ একই বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে। **(প্রমাণিত)**

TYPE 12 দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ সংক্রান্ত সমস্যা

• (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$ অথবা, $\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}$

উদাহরণঃ (2, 1) ও (3, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কত?

Sol: $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2} \Rightarrow \frac{x-2}{2-3}=\frac{y-1}{1-2} \Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-1}$

$\Rightarrow x-2=y-1 \quad \Rightarrow x-y-1=0$ **Ans.**

01. (1, 2) ও (– 3, 5) বিন্দুগামী সরলরেখা থেকে (–2, 0) বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করুন। [৩৮তম বিসিএস]

Sol: আমরা জানি, দুই বিন্দুগামী সরলরেখার সূত্র, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$

$\Rightarrow \frac{x-1}{1-(-3)}=\frac{y-2}{2-5} \quad \Rightarrow \frac{x-1}{1+3}=\frac{y-2}{-3}$

$\Rightarrow \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-3} \quad \Rightarrow -3x+3=4y-8$

$\Rightarrow -3x-4y+3+8=0 \quad \Rightarrow -3x-4y+11=0$

$\Rightarrow -(3x+4y-11)=0 \quad \Rightarrow 3x+4y-11=0$

$\therefore$ দূরত্ব $=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\times(-2)+4\times(0)-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-6+0-11|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|-17|}{\sqrt{25}}=\frac{17}{5}$ **(উত্তর)**

02. A(–1, 3) এবং B(5, 15) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(উদাহরণের অংক নং-২৪)]

Sol: AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y-3}{3-15}=\frac{x-(-1)}{-1-5} \Rightarrow \frac{y-3}{-12}=\frac{x+1}{-6} \Rightarrow \frac{y-3}{2}=\frac{x+1}{1}$

$\Rightarrow y-3=2x+2$

$\Rightarrow y=2x+5$ ..... (i)

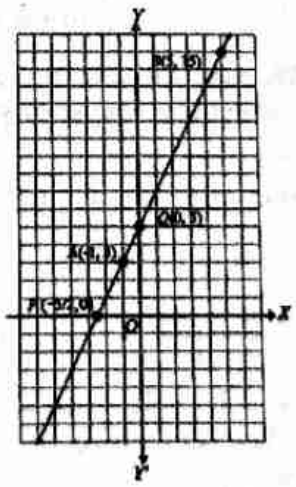
(i) হতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 5)

$\therefore$ PQ রেখার সমীকরণ, $\frac{y-0}{x+\frac{5}{2}}=\frac{0-5}{\frac{-5}{2}-0}$

$\Rightarrow \frac{2y}{2x+5}=\frac{10}{5}=\frac{2}{1}$

$\Rightarrow 2y=4x+10$

$\Rightarrow y=2x+5$



মন্তব্য: AB এবং PQ একই সরলরেখা।

PQ এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}-0\right)^2+(0-5)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+25}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ একক।

TYPE 13 সৃজনশীল প্রশ্ন

যথেষ্ট সহজভাবে বইয়ে উপস্থাপনের পরও যদি আপনার বুঝতে সমস্যা হয়, তাহলে Type 13 থেকে পরবর্তী টাইপের জন্য পাশের QR কোডটি Scan করে প্রাপ্ত লিংকে ক্লিক করে Youtube থেকে আমার Video Class এর মাধ্যমে বুঝে নিন।

Note: ক্লাসের মধ্যে অংকের যে নম্বরগুলো বলা হয়েছে তা বর্তমান এডিশনের সাথে কিছুটা ভিন্ন হতে পারে।

01. 3 ঢাল বিশিষ্ট একটি রেখা A(–1, 6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য রেখা x অক্ষকে C(2, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(ক) AB ও AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(খ) ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol" (ক) A(–1, 6) বিন্দুগামী এবং 3 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ, $y-6=3(x+1)$ $[\because y-y_1=m(x-x_1)]$

$\Rightarrow y-6=3x+3$

$\Rightarrow 3x-y+9=0$

যেহেতু রেখাটি x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, সেহেতু উক্ত বিন্দুতে কোটি, $y=0$

$\therefore \quad 3x-0+9=0 \Rightarrow 3x=-9 \Rightarrow x=-3$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–3, 0)

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-(-1)}{-1-(-3)}=\frac{y-6}{6-0}$ $\left[\because (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}\right]$

$\Rightarrow \frac{x+1}{-1+3}=\frac{y-6}{6} \Rightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y-6}{6} \Rightarrow x+1=\frac{y-6}{3} \Rightarrow 3x+3=y-6 \Rightarrow 3x-y+9=0$ **Ans.**

এবং AC রেখার সমীকরণ, $\frac{x-(-1)}{-1-2}=\frac{y-6}{6-0}$ $\left[\because (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{-3}=\frac{y-6}{6} \Rightarrow \frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2} \Rightarrow 2x+2=-y+6 \Rightarrow 2x+y-4=0$ **Ans.**

(খ) ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(0+0+12+18-0-0)=\frac{1}{2}\times 30$ বর্গ একক $=15$ বর্গ একক **Ans.**

02. দেওয়া আছে, A(1, 4a) এবং B(5, a^2-1) বিন্দুগামী রেখার ঢাল = – 1, a এর মান নির্ণয় করুন। 'a'-এর মানের জন্য চারটি বিন্দু পাওয়া যায়; বিন্দু চারটি P, Q, R, S. PQRS-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। PQRS কী সামান্তরিক না আয়ত? ব্যাখ্যা করুন।

Sol" দেওয়া আছে, A(1, 4a), B(5, a^2-1) এবং ঢাল = – 1 [৩৭তম বিসিএস]

আমরা জানি, ঢাল $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\therefore \quad m=\frac{a^2-1-4a}{5-1} \Rightarrow -1=\frac{a^2-4a-1}{4}$ $[\because$ ঢাল $m=-1]$

$\Rightarrow \quad a^2-4a-1=-4 \Rightarrow a^2-4a-1+4=0 \Rightarrow a^2-4a+3=0 \Rightarrow a^2-a-3a+3=0$

$\Rightarrow a(a-1)-3(a-1)=0 \Rightarrow (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ অথবা, $a=3$

এখানে, a এর মান আছে, $a=1$ এর জন্য বিন্দু দুটি (1, 4) ও (5, 0)

এবং $a=3$ এর জন্য বিন্দু দুইটি (1, 12) ও (5, 8)

$\therefore$ বিন্দু চারটি P(1, 4); Q(5, 0); R(5, 8) এবং S(1, 12)

এখন, PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:
বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সাজিয়ে পাই।

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(0 + 40 + 60 + 4 - 20 - 0 - 8 - 12) = \frac{1}{2} \times 64 = 32 \text{ বর্গ একক}$$

∴ PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = 32 বর্গ একক

আবার, বিন্দু চারটি যথাক্রমে, P(1, 4); Q(5, 0); R(5, 8) এবং S(1, 12)

এখন, PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক

QR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{8^2} = 8$ একক

RS বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-5)^2 + (12-8)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক

PS বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-1)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{8^2} = 8$ একক

আবার,

কর্ণ PR $= \sqrt{(5-1)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক

এবং কর্ণ QS $= \sqrt{(1-5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160}$ একক

এখানে, $PQ = RS = 4\sqrt{2}$ এবং $QR = PS = 8$

কিন্তু কর্ণ $PR = 4\sqrt{2}$ এবং $QS = \sqrt{160}$

অর্থাৎ $PR \neq SQ$

অতএব, চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান কিন্তু কর্ণদ্বয় অসমান তাই এটি একটি সামন্তরিক।

03. **একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(–2, 0), B(5, 1) এবং C(1, 4) :**

(ক) দেখান যে, ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ।

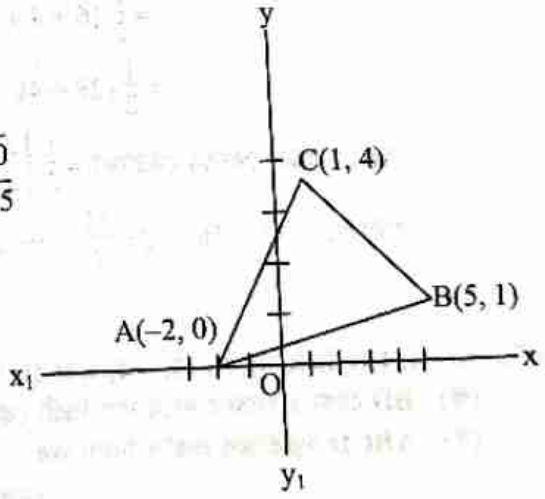
(খ) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক ব্যবহার করে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

[৩৬তম বিসিএস]

Sol (ক)

দেওয়া আছে, A(–2, 0), B(5, 1) এবং C(1, 4)।

উক্ত বিন্দুগুলো স্থাপন করে আমরা সম্ভাব্য নিম্নোক্ত চিত্রটি পাই-



এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{5-(-2)\}^2 + (1-0)^2} = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{1-(-2)\}^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25}$

এবং BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25}$

∴ এখানে, $AC = BC = \sqrt{25}$

এবং $AB^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$

$AC^2 + BC^2 = (\sqrt{25})^2 + (\sqrt{25})^2 = 50$

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে- $(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{ভূমি})^2 + (\text{লম্ব})^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

অতএব, এটি একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। **(প্রমাণিত)**

(খ) **Sol** দেওয়া আছে, A(–2, 0), B(5, 1), C(1, 4)

শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে-

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2 + 20 + 0 - 0 - 1 + 8)$$

$$= \frac{1}{2}(28 - 3) = \frac{1}{2} \times 25 = 12.5 \textbf{ (Ans.)}$$

বিকল্প পদ্ধতি:

আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ সমকোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের গুণফল

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{25} \times \sqrt{25} = \frac{1}{2} \times 25 = 12.5 \text{ (Ans.)}$$

04. A(3, 4), B(–4, 2), C(6, – 1) এবং D(k, 3) বিন্দু চারটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

(ক) দেখাও যে, A ও B বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

(খ) P(x, y) বিন্দুটি A ও B থেকে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $14x + 4y = 5$

(গ) ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ΔABC এর ক্ষেত্রফলের তিনগুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(উদাহরণের অংক নং-২৩)]

Sol"

(ক) AB রেখার ঢাল m হলে, $m = \frac{2-4}{-4-3} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

ঢাল ধনাত্মক হওয়ায় রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

(খ) $PA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$ এবং $PB = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$

P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হওয়ায় PA = PB

$\therefore \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4$

$\Rightarrow -6x - 8y - 8x + 4y = 20 - 25$

$\Rightarrow -14x - 4y = -5$

$\therefore 14x + 4y = 5$

(গ) ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & k & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{6 + 4 + 18 + 4k - (-16 + 12 - k + 9)\}$$

$$= \frac{1}{2}(28 + 4k - 5 + k) \quad = \frac{1}{2}(23 + 5k)$$

ABC ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{6 + 4 + 24 - (-16 + 12 - 3)\} = \frac{41}{2}$

শর্তমতে, $\frac{1}{2}(23+5k) = 3 \times \frac{41}{2} \Rightarrow 23+5k = 123 \Rightarrow 5k = 100 \Rightarrow k = 20$

$\therefore \quad k = 20$

05. A(– 4, 13), B(8, 8), C(13, – 4) এবং D(1, 1) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

(ক) BD রেখা x অক্ষের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

(খ) ABCD চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

Sol"

(ক) দেওয়া আছে, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 8) এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1)

ধরি, BD রেখা x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। BD রেখা x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার tangent এর মান ঐ রেখার ঢালের সমান।

তাহলে, $\frac{8-1}{8-1} = \tan\theta \quad \Rightarrow \tan\theta = 1 \quad \therefore \theta = 45^\circ$

অর্থাৎ BD রেখা x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

(খ) দেওয়া আছে,
A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-4, 13)$; B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(8, 8)$
C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(13, -4)$; D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, 1)$

$\therefore$ AB রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-8)^2 + (13-8)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ একক
BC রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-13)^2 + \{8-(-4)\}^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ একক
CD রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(13-1)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{144+25} = 13$ একক
এবং AD রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-1)^2 + (13-1)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ একক
এখানে, AB = BC = CD = AD
আবার, AC $= \sqrt{(-4-13)^2 + \{13-(-4)\}^2} = \sqrt{289+289} = \sqrt{578}$
এবং BD $= \sqrt{(8-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{(7)^2 + (7)^2} = \sqrt{98}$
$\therefore$ AC $\neq$ BD
$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি রম্বস, কেননা ইহার বাহুগুলো পরস্পর সমান হলেও কর্ণগুলো পরস্পর সমান নয়। **(Ans.)**

06. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হলো P(5, 2), Q(−3, 2), R(4, −1), এবং S(−2, −1)।
(ক) PS রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
(খ) PQRS চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(উ. গণিত), অধ্যায়-১১.৪(অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol^n

(ক) দেওয়া আছে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক ≡ (5, 2); S বিন্দুর স্থানাঙ্ক ≡ (−2, −1)

$\therefore$ PS রেখার সমীকরণ, $\frac{x-5}{5-(-2)} = \frac{y-2}{2-(-1)} \Rightarrow \frac{x-5}{7} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3x-15 = 7y-14$

$\therefore$ $3x - 7y - 1 = 0$ **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, P, Q, R ও S বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, (5, 2), (−3, 2), (4, −1) এবং (−2, −1)

$\therefore$ বিন্দুগুলো ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ক্রমানুসারে নিয়ে পাই,

PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(10+3+2+8+6+4+4+5)$

$= \frac{1}{2} \times 42 = 21$ বর্গ একক

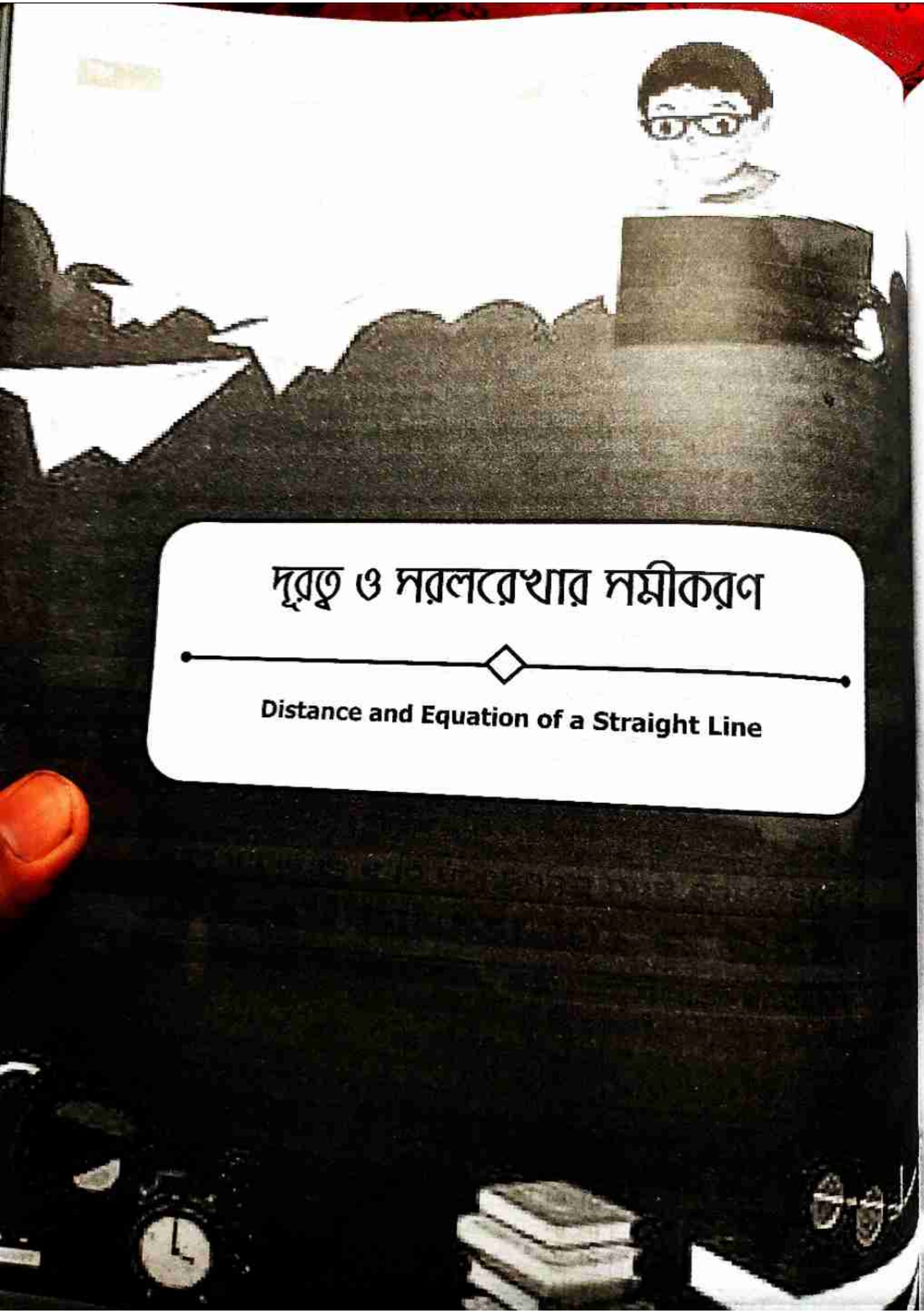
$\therefore$ বর্গের ক্ষেত্রফল = 3 বর্গ একক; তাহলে, বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{21}$ একক

$\therefore$ বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{21} \times \sqrt{2} = \sqrt{42}$ একক **(Ans.)**

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	02, 04, 08, 09
Type-03	01, 03, 05
Type-04	02, 04
Type-05	02, 03, 04
Type-06	03
Type-07	03, 05
Type-08	01, 02, 04
Type-09	01, 04, 06
Type-10	03, 04
Type-11	01, 02
Type-13	Full (VVI)



দূরত্ব ও সরলরেখার সমীকরণ

Distance and Equation of a Straight Line

দূরত্ব ও সরলরেখার সমীকরণ
Distance and Equation of a Straight Line

এক নজরে এই অধ্যায় থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ

01. (1, 2) ও (– 3, 5) বিন্দুগামী সরলরেখা থেকে (–2, 0) বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করুন। Ans. $\frac{17}{5}$

[৩৮তম বিসিএস]

[সমাধান দেখুন: Type-09, Question No.- 06]

এই অধ্যায়ের Analysis

দূরত্ব ও সরলরেখার সমীকরণ অধ্যায়টি একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির ১ম পত্রের তৃতীয় অধ্যায়ে সরলরেখা নামে বিস্তারিতভাবে রয়েছে। নবম-দশম শ্রেণির স্থানাঙ্ক জ্যামিতি অধ্যায়ে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বিস্তারিতভাবে থাকলেও সরলরেখার সমীকরণ অংশটি তেমন আলোচনা করা হয় নি।

৫ম বিসিএস থেকে কার্তেসীয় জ্যামিতি অধ্যায়টি বিসিএস রিটেনের সিলেবাসে অন্তর্ভুক্ত করা হয়। তখন থেকে ৪৪ তম বিসিএস পর্যন্ত প্রতি বিসিএসে প্রশ্ন এসেছে যা মূলত নবম-দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিত বইয়ের টপিক থেকেই এসেছে। অর্থাৎ একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির সরলরেখা থেকে শুধু একবার একটি প্রশ্নের অংশবিশেষ ছাড়া কোন প্রশ্ন আসে নি। সুতরাং একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির সরলরেখা অধ্যায়টি তেমন গুরুত্বপূর্ণ নয়।

একাদশ-দ্বাদশ শ্রেণির উচ্চতর গণিত বইয়ে সরলরেখা অধ্যায়টি খুবই বড়, যা মানবিক ও বাণিজ্য বিভাগের ছাত্র-ছাত্রীদের পুরোপুরি হৃদয়ঙ্গম করা প্রায় অসম্ভব। নিয়মিত চর্চা ছাড়া বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র-ছাত্রীদের জন্যও তা কষ্টকর।

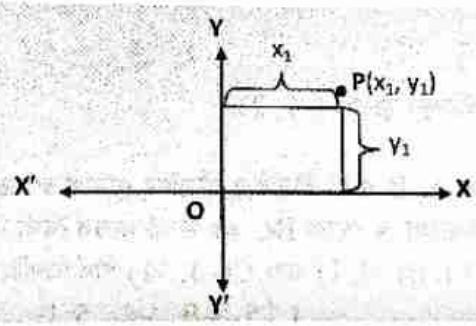
তাই আমি এ বইয়ে খুব গুরুত্বপূর্ণ অংকগুলো গুছিয়ে উপস্থাপনের চেষ্টা করেছি এবং অধ্যায়টি কম গুরুত্বপূর্ণ বিধায় সংক্ষিপ্ত করেছি। তবে কেউ চাইলে অধ্যায়টি বাদ দিতে পারেন। এত আপনার তেমন চিন্তার কারণ নেই বলে আমি আশাবাদী ইনশাআল্লাহ্।

TYPE 01 দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Required Formulas For This Category :

01. x অক্ষ থেকে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর দূরত্ব = $|y_1|$ এবং
y অক্ষ থেকে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর দূরত্ব = $|x_1|$.

02. $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,
$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



01. (4, –3) ও (2, 5) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

Sol^n দূরত্ব = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(4-2)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ Ans.

02. একটি বিন্দুর ভুজ, এর কোটির তিনগুণ। (5, 10) বিন্দু হতে এর দূরত্ব $\sqrt{65}$ একক হলে বিন্দুটি নির্ণয় কর।

Sol^n মনে করি, বিন্দুটির কোটি = y; বিন্দুটির ভুজ = 3y

বিন্দুটি (3y, y) হলে শর্তমতে- $\sqrt{(3y-5)^2 + (y-10)^2} = \sqrt{65}$

$\Rightarrow 10y^2 - 50y + 60 = 0 \quad \therefore y = 2, 3 \quad \therefore$ বিন্দুটি (6, 2) or (9, 3)

03. y অক্ষ এবং (7, 2) থেকে (a, 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান কত?

Sol" y অক্ষ থেকে (a, 5) বিন্দুটির দূরত্ব $= |a|$

আবার, (7, 2) থেকে (a, 5) এর দূরত্ব $= \sqrt{(7-a)^2+(2-5)^2} = \sqrt{49-14a+a^2+9} = \sqrt{58-14a+a^2}$

শর্তানুসারে, $\sqrt{58-14a+a^2} = |a|$ বা, $a^2-14a+58 = a^2$ $\therefore a = \frac{58}{14} = \frac{29}{7}$ **Ans.**

04. x অক্ষ এবং (–5, –7) থেকে (4, k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে k এর মান কত?

Sol" x অক্ষ থেকে (4, k) বিন্দুটির দূরত্ব $= |k|$

আবার, (–5, –7) থেকে (4, k) এর দূরত্ব $= \sqrt{(-5-4)^2+(-7-k)^2} = \sqrt{81+49+14k+k^2} = \sqrt{130+14k+k^2}$

শর্তানুসারে, $\sqrt{130+14k+k^2} = |k|$ বা, $k^2+14k+130 = k^2$ বা, $14k+130=0$ বা, $k = -\frac{65}{7}$ **Ans.**

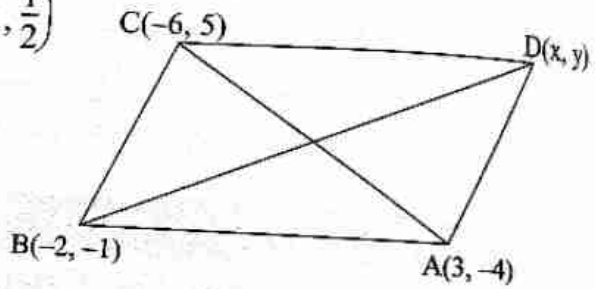
TYPE 02: স্থানাঙ্ক সংক্রান্ত সমস্যা

01. কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3, –4) এবং (–6, 5); এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু (–2, –1) হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol" মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণের প্রান্তবিন্দু A(3, –4), C(–6, 5) এবং তৃতীয় শীর্ষবিন্দু B(–2, –1). ধরি, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক D(x, y).

$\therefore$ AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3-6}{2}, \frac{-4+5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$



যেহেতু ABCD একটি সামান্তরিক।

সুতরাং AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু একই।

অর্থাৎ $\frac{x-2}{2} = -\frac{3}{2}$ বা, $x-2 = -3$ বা, $x = -1$

এবং $\frac{y-1}{2} = \frac{1}{2}$ বা, $y-1 = 1$ বা, $y = 2$

$\therefore$ চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (–1, 2).

02. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (5, 6), (–9, 1) ও (–3, –1)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol" A(5, 6), B(–9, 1) এবং C(–3, –1) শীর্ষ তিনটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নেওয়া হলো।

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & -9 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ বর্গ একক $= \frac{1}{2}(5+9-18+54+3+5)$ বর্গ একক

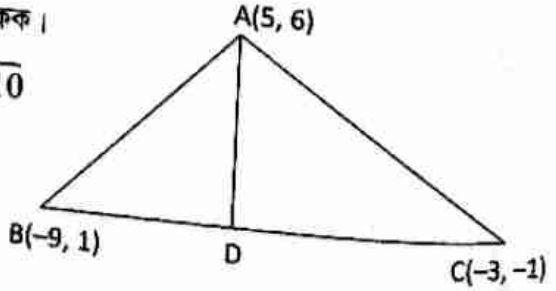
$= \frac{1}{2}(76-18)$ বর্গ একক $= 29$ বর্গ একক।

$BC = \sqrt{(-9+3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

মনে করি, $AD \perp BC$

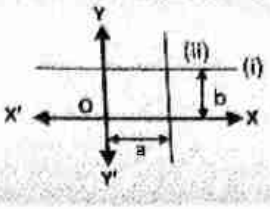
$\therefore \frac{1}{2} AD \times BC = \Delta ABC$

$\Rightarrow \frac{1}{2} AD \times 2\sqrt{10} = 29 \Rightarrow AD = \frac{29}{\sqrt{10}} = 9.17$ একক।



TYPE 03 x অক্ষ বা, y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ

(i) x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $y = b$.
উল্লেখ্য যে, এই সমীকরণে কখনোই x থাকে না।
(ii) y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $x = a$.
উল্লেখ্য যে, এই সমীকরণে কখনোই y থাকে না।



Note: (i) x অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$.
(ii) y অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$.

i. $(4, -5)$ বিন্দুগামী x-অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ কি?

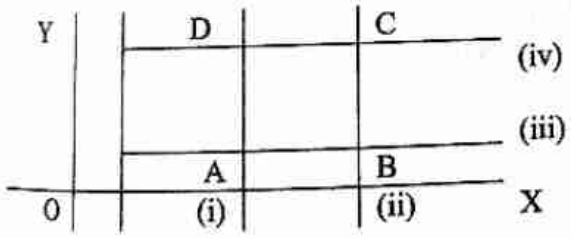
Sol: x-অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখা = y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা
∴ y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা, $x = a$
যেহেতু রেখাটি $(4, -5)$ বিন্দুগামী, সুতরাং $x = 4$
∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x = 4$

ii. x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(4, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

Sol: x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y = b$
যেহেতু রেখাটি $(4, -5)$ বিন্দুগামী, সেহেতু $y = -5$
∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $y = -5$

iii. $x = 3, x = 4, y = 4$ এবং $y = 6$ রেখা দ্বারা গঠিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ বের কর।

Sol: প্রদত্ত রেখাগুলি
$x = 3$ ..... (i)
$x = 4$ ..... (ii)
$y = 4$ ..... (iii)
$y = 6$ ..... (iv)



লেখচিত্র হতে বর্গক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু
A(3, 4) B(4, 4) C(4, 6) D(3, 6)

AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-4} = \frac{y-4}{4-6}$ $\Rightarrow \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{-2}$

$\Rightarrow -2x + 6 = -y + 4$ $\Rightarrow y - 2x + 2 = 0$

$\therefore 2x - y - 2 = 0$ **Ans.**

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-4}{4-3} = \frac{y-4}{4-6}$ $\Rightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{-2}$

$\Rightarrow -2x + 8 = y - 4$ $\Rightarrow y + 2x - 12 = 0$

$\Rightarrow 2x + y - 12 = 0$ **Ans.**

TYPE 04 ঢাল আকৃতির সরলরেখার সমীকরণ

Y অক্ষ থেকে একটি নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে এবং X-অক্ষের সাথে ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx+c$

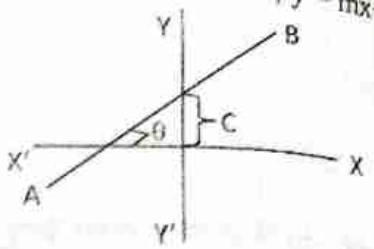
Note:

(i) সরলরেখাটির ঢাল = m

(ii) m সর্বদাই সসীম

(iii) c =0 হলে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী এবং সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = mx$

(iv) c হচ্ছে y-অক্ষ থেকে কর্তিত অংশের পরিমাণ।



01. x অক্ষের সহিত 120° কোণ উৎপন্ন করে এবং y-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 5 একক অংশ ছেদ করে। এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n $y = \tan 120°x + 5$

$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 5 \quad \Rightarrow \sqrt{3}x + y - 5 = 0$

02. একটি সরলরেখা X-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং Y-অক্ষ থেকে 4 একক অংশ কর্তন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $c = 4$

∴ সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = mx + c \quad \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 4 \quad \Rightarrow x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} = 0$ **Ans.**

TYPE 05: ছেদ আকৃতির সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

ছেদ আকৃতির সরলরেখার আদর্শ সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

উপর্যুক্ত সরলরেখাটির বৈশিষ্ট্য ঃ

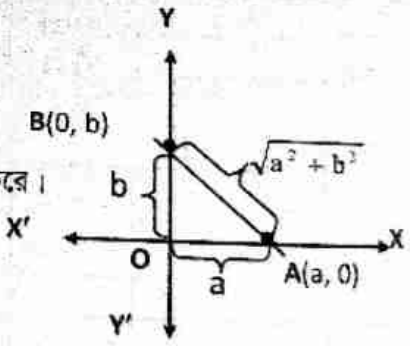
(i) সরলরেখাটি উভয় অক্ষকে ছেদ করে।

(ii) সরলরেখাটি x-অক্ষকে (a, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে (0, b) বিন্দুতে ছেদ করে।

(iii) সরলরেখাটি দ্বারা x অক্ষ থেকে কর্তিত অংশের পরিমাণ a এবং y অক্ষ থেকে কর্তিত অংশের পরিমাণ b.

(iv) সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(v) সরলরেখাটি এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta OAB = \frac{1}{2}ab$.



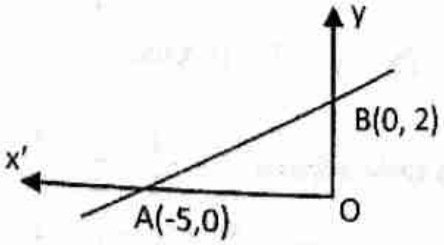
01. $2x-5y+10=0$ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখা এবং অক্ষরেখা দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n প্রদত্ত রেখা হতে, $2x-5y=-10$ বা, $\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$ ---- (i)

যেখানে, (i) রেখাটি দ্বারা x-অক্ষ হতে ছেদিত অংশের পরিমাণ, OA= –5 এবং y-অক্ষ হতে ছেদিত অংশের পরিমাণ, OB = 2

∴ (i) রেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভূজ OAB ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$ বর্গ একক। **Ans.**



৫. $x+2y-5=0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাংক-

Sol" প্রদত্ত সমীকরণটিকে লেখা যায়, $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{5}{2}}=1$ ∴ রেখাটি x অক্ষকে $(5, 0)$ এবং y অক্ষকে $(0, \frac{5}{2})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

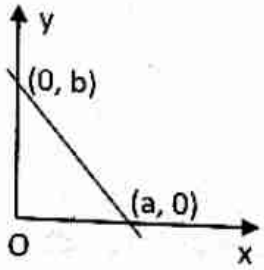
∴ উপর্যুক্ত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু $\equiv \left(\frac{5+0}{2}, \frac{0+\frac{5}{2}}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ **Ans.**

৬. একটি সরল রেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ $(2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়। সরলরেখাটির সমীকরণ-

Sol" ধরি, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ --- --- (i)

যেখানে, (i) রেখাটি x–অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে এবং y- অক্ষকে $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
এখন, $(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর

স্থানাঙ্কঃ $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$



প্রশ্নমতে, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)=(2,3)$ ∴ $\frac{a}{2}=2$

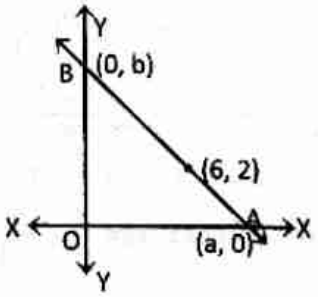
এবং $\frac{b}{2}=3 \Rightarrow a=4$ এবং $b=6$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1 \Rightarrow 3x+2y-12=0$ **Ans.**

৭. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ **(6, 2)** বিন্দুতে **2 : 3** অনুপাতে বিভক্ত হয়। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol" মনে করি, সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ..... (i)

রেখাটি x অক্ষকে $A(a, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
শর্তানুসারে $(6, 2)$ বিন্দুটি AB রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে।



∴ $6=\frac{2\times 0+3a}{2+3}$ এবং $2=\frac{2b+3\times 0}{2+3}$

⇒ $30=3a$ এবং $10=2b$

⇒ $a=10$ এবং $b=5$

a ও b এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $\frac{x}{10}+\frac{y}{5}=1$

⇒ $x+2y-10=0$; এটিই নির্ণেয় সমীকরণ। **Ans.**

৮. $x+2y+7=0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উক্ত খন্ডিতাংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol" প্রদত্ত সমীকরণ, $x+2y+7=0 \Rightarrow x+2y=-7 \Rightarrow \frac{x}{-7}+\frac{y}{-7/2}=1$

রেখাটি অক্ষদ্বয়কে (ধরি) $A(-7, 0)$ এবং $B(0, -7/2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-7+0}{2}, \frac{0-7/2}{2}\right)$ বা, $\left(\frac{-7}{2}, \frac{-7/2}{2}\right)$ বা, $\left(\frac{-7}{2}, \frac{-7}{4}\right)$

এবং $AB^2=(-7)^2+(-7/2)^2=49+\frac{49}{4}=\frac{196+49}{4}=\frac{245}{4}=61\frac{1}{4}$

∴ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিতাংশ AB কোন বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল $=61\frac{1}{4}$ বর্গ একক।

06. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন, OA – OB = 2 হয়, যেখানে O মূল বিন্দু।

Sol" মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ..... (i)

$\therefore$ OA = a, OB = b

প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী, $a-b=2$ ..... (ii)

আবার, যেহেতু সরলরেখাটি (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore \quad \frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1 \Rightarrow 3b+2a=ab$

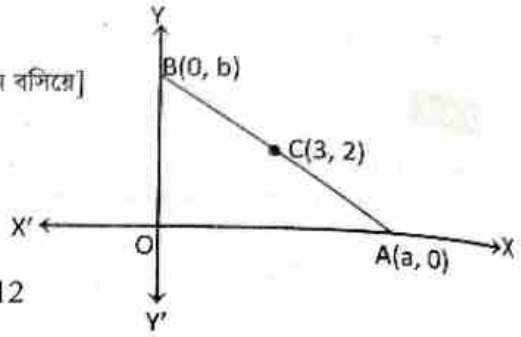
$\Rightarrow 3b+2(2+b)=(2+b)b$ [(ii) নং এর সাহায্যে a এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 3b+4+2b=2b+b^2 \Rightarrow b^2-3b-4=0$

$\Rightarrow b^2-4b+b-4=0 \quad \Rightarrow b(b-4)+1(b-4)=0$

$\Rightarrow (b-4)(b+1)=0 \quad \therefore b=4,-1.$

এবং a = 6 অথবা, a = 1



(i) নং এ a ও b এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1 \therefore 2x+3y=12$

আবার, $\frac{x}{1}-\frac{y}{1}=1 \quad \therefore x-y=1$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $2x+3y-12=0; x-y-1=0$ **Ans.**

07. এমন একটি সরলরেখা সমীকরণ নির্ণয় করুন যা (–2, – 5) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন OA + 2.OB = 0 হয়, যখন O মূলবিন্দু।

Sol" ধরি, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ..... (i)

এখানে, a = OA এবং b = OB

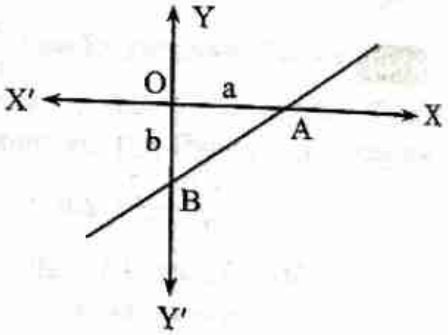
প্রশ্নমতে, $OA+2.OB=0 \quad \Rightarrow a+2b=0 \quad \Rightarrow a=-2b$

(i) রেখাটি (–2, – 5) বিন্দুগামী

$\therefore \quad \frac{-2}{a}+\frac{-5}{b} \Rightarrow \frac{-2}{-2b}+\frac{-5}{b}=1$ [$\because a=-2b$]

$\Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{-5}{b}=1 \quad \Rightarrow \frac{1-5}{b}=1$

$\therefore \quad b=-4$ এবং $a=-2\times-4=8$



$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{8}+\frac{y}{-4}=1 \Rightarrow \frac{x-2y}{8}=1 \Rightarrow x-2y=8$ **(Ans.)**

TYPE 06: দুটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত বিষয়ক সমস্যা

◆ $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হওয়ার শর্ত, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$

অথবা, রেখাদ্বয়ের ঢাল, $m_1=m_2$

01. k এর মান কত হলে $5x+4y-6=0$ এবং $2x+ky+9=0$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে?

Sol" $\frac{5}{2}=\frac{4}{k} \quad \Rightarrow k=\frac{8}{5}$ **Ans.**

ঘ. α এর মান কত হলে $(\alpha-1)x+(\alpha+1)y-7=0$; $3x+5y+7=0$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে?

Sol" $\frac{\alpha-1}{3}=\frac{\alpha+1}{5} \Rightarrow \alpha=4$ **Ans.**

TYPE 07 দুটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত বিষয়ক সমস্যা

• $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত, $a_1a_2+b_1b_2=0$
অথবা, রেখাদ্বয়ের ঢাল $m_1 \times m_2=-1$

ঘ. a এর মান কত হলে $2x-y+3=0$; $3x+ay-2=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে?

Sol" $2x-y+3=0$ এর ঢাল, $m_1=\frac{-2}{-1}=2$; $3x+ay-2=0$ এর ঢাল, $m_2=\frac{-3}{a}$

সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $m_1 \times m_2=-1 \Rightarrow 2\times\frac{3}{a}=1 \Rightarrow a=6$ **Ans.**

TYPE 08 সমান্তরাল ও লম্ব সরলরেখা নির্ণয়

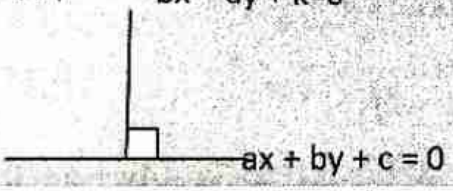
• $ax+by+c=0$

d d d

$ax+by+k=0$

$ax+by+c=0$ সরলরেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $ax+by+k=0$; যেখানে, k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

• $ax+by+c=0$ সরলরেখার লম্ব রেখার সমীকরণ, $bx-ay+k=0$;
যেখানে, k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।



ঘ. $5x-7y-15=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(2,-3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হবে

Sol"

পদ্ধতি-০১: প্রদত্ত $5x-7y-15=0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ, $7x+5y+k=0$ --- --- (i)

∴ (i) রেখাটি $(2,-3)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

∴ $7.2+5.(-3)+k=0$ বা, $k=1$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $7x+5y+1=0$ **Ans.**

পদ্ধতি-০২: $5x-7y-15=0$ রেখার ঢাল $=-\frac{5}{-7}=\frac{5}{7}$

∴ $5x-7y-15=0$ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $=-\frac{7}{5}$

∴ লম্ব রেখার সমীকরণ, $y-(-3)=-\frac{7}{5}(x-2) \Rightarrow y+3=-\frac{7}{5}(x-2)$

$\Rightarrow 5y+15=-7x+14$

$\Rightarrow 7x+5y+1=0$ **Ans.**

02. $5x-2y+7=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ

Sol" প্রদত্ত $5x-2y+7=0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ, $2x+5y+k=0$ --- --- (i)

$\therefore$ (i) রেখাটি $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়, $\therefore 2.(-3)+5.1+k=0$ বা, $k=1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $2x+5y+1=0$ **Ans.**

Note: ২য় পদ্ধতিতে নিজে করুন

03. $3x-7y+2=0$ সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(1, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ

Sol" $3x-7y+2=0$ রেখার ঢাল $= -\frac{3}{-7} = \frac{3}{7}$ $\therefore 3x-7y+6=0$ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{7}{3}$

$\therefore$ লম্ব রেখার সমীকরণ $y-2=-\frac{7}{3}(x-1)$ $\Rightarrow 3y-6=-7x+7$

$\therefore 7x+3y-13=0$ **Ans.**

Note: ১ম পদ্ধতিতে নিজে করুন

04. $(1, 2)$ বিন্দুগামী এবং $3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ-

Sol"

পদ্ধতি-০১: $3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $3x-4y+k=0$

রেখাটি $(1, 2)$ বিন্দুগামী বলে, $3.1-4.2+k=0$ বা, $k=5$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $3x-4y+5=0$ **Ans.**

পদ্ধতি-০২: $3x-4y+8=0$ রেখার ঢাল $= -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$

$\therefore 3x-4y+8=0$ রেখার উপর সমান্তরাল রেখার ঢাল $= \frac{3}{4}$

$\therefore$ সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $y-2=\frac{3}{4}(x-1)$

$\Rightarrow 4y-8=3x-3$ $\Rightarrow 3x-4y+5=0$ **Ans.**

05. $(4, 5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x-3y=7$ এর সমান্তরাল রেখার সমীকরণ কত?

Sol" $x-3y=7$ রেখার ঢাল $= -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

$\therefore x-3y-7=0$ এর সমান্তরাল রেখার ঢাল $= \frac{1}{3}$

$\therefore$ সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y-5=\frac{1}{3}(x-4)$

$\Rightarrow 3y-15=x-4$

$\therefore x-3y+11=0$ **Ans.**

Note: ১ম পদ্ধতিতে নিজে করুন

ex. (2, –1) বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol" মনে করি, প্রদত্ত রেখা $3x - 4y + 5 = 0$ ..... (i) এর ওপর লম্ব এরূপ যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ $4x + 3y + k = 0$, k যে কোনো ধ্রুবক।

যদি রেখাটি (2, –1) বিন্দু দিয়ে যায় তবে, $4 \times 2 + 3 \times (-1) + k = 0 \Rightarrow k = -5$

সুতরাং প্রদত্ত রেখার ওপর লম্ব এবং (2, –1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$4x + 3y - 5 = 0$ ..... (ii)

তাহলে, (i) ও (ii) নং এর ছেদ বিন্দুই নির্ণেয় লম্বের পাদবিন্দু।

(i) ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন করে পাই, $\frac{x}{20-15} = \frac{y}{20+15} = \frac{1}{9+16}$

$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{35} = \frac{1}{25} \qquad \Rightarrow x = \frac{5}{25} = \frac{1}{5},\ y = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$

∴ নির্ণেয় পাদবিন্দু $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

TYPE 09 কোন বিন্দু হতে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

Technic: (x_1, y_1) বিন্দু হতে $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

যে কোন প্রকার দূরত্ব নির্ণয় করতে বললে তা সবসময়ই ধনাত্মক হবে, তবে দূরত্ব দিয়ে কোন অজানা মান বের করতে বললে সেক্ষেত্রে দূরত্ব ± দুটোই হবে।

ex. (4, –2) বিন্দু থেকে $5x+12y=3$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য-

Sol" প্রদত্ত (4, –2) বিন্দু থেকে $5x+12y-3=0$ রেখার উপর অঙ্কিত

লম্বের দৈর্ঘ্য $= \left|\frac{5.4+12(-2)-3}{\sqrt{5^2+12^2}}\right| = \left|\frac{-7}{13}\right| = \frac{7}{13}$ একক। **Ans.**

ex. $4x-3y-5=0$ রেখা হতে (–1, 2) বিন্দুর দূরত্ব d হলে, d = ?

Sol" উপরোক্ত সূত্র অনুযায়ী, $|d| = \left|\frac{4(-1)-3.2-5}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{-4-6-5}{5}\right| = \left|\frac{-15}{5}\right| = |-3| = 3$ **Ans.**

ex. (-2, 1) বিন্দু হতে $4x-3y+1=0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol" নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য d হলে, $d = \left|\frac{4(-2)-3.1+1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| = \left|\frac{-8-3+1}{\sqrt{16+9}}\right| = 2$

ex. $4x-3y=9$ সরলরেখা হতে (–2, 1) বিন্দুর দূরত্ব কত?

Sol" ∴ $4x-3y=9$ সরলরেখা হতে (–2, 1) বিন্দুর দূরত্ব $= \left|\frac{4.(-2)-3.(1)-9}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \frac{20}{5} = 4$ unit **Ans.**

05. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।

Sol" প্রদত্ত রেখাদ্বয়, $4x + 3y - c = 0$ ..... (i)

এবং $12x - 5y - 2(c + 3) = 0$ ..... (ii)

মূলবিন্দু (0, 0) হতে (i) নং এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|4 \times 0 - 3 \times 0 - c|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|c|}{5}$

আবার, (0, 0) হতে (ii) নং এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|12 \times 0 - 5 \times 0 - 2(c + 3)|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|2(c + 3)|}{13}$

শর্তানুসারে, $\frac{c}{5} = \pm \frac{2(c + 3)}{13} \quad \Rightarrow 13c = \pm 10(c + 3)$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই, $13c = 10c + 30 \quad \Rightarrow c = 10$

(–) চিহ্ন নিয়ে পাই, $13c = -10c - 30 \quad \Rightarrow c = \frac{-30}{23}$

$\therefore$ c এর ধনাত্মক মান 10

06. (1, 2) ও (– 3, 5) বিন্দুগামী সরলরেখা থেকে (–2, 0) বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করুন। [৩৮তম বিসিএস]

Sol" আমরা জানি, দুই বিন্দুগামী সরলরেখার সূত্র, $\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

$$\Rightarrow \frac{x - 1}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{2 - 5}$$

$$\Rightarrow \frac{x - 1}{1 + 3} = \frac{y - 2}{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{-3} \quad \Rightarrow -3x + 3 = 4y - 8$$

$$\Rightarrow -3x - 4y + 3 + 8 = 0 \Rightarrow -3x - 4y + 11 = 0$$

$$\Rightarrow -(3x + 4y - 11) = 0 \quad \Rightarrow 3x + 4y - 11 = 0$$

$$\therefore \text{দূরত্ব} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \times (-2) + 4 \times (0) - 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|-6 + 0 - 11|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-17|}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5} \text{ (উত্তর)}$$

07. $4x - 3y = 8$ রেখার সমান্তরাল এবং তা হতে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol" প্রদত্ত সরলরেখা $4x - 3y - 8 = 0$ ..... (i)

(i) নং সরলরেখার সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ, $4x - 3y + k = 0$ ..... (ii)

[যেখানে k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক]

প্রশ্নানুযায়ী, (i) নং এবং (ii) নং রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব 2 একক।

অর্থাৎ $\frac{|k - (-8)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$

$$\Rightarrow k + 8 = \pm 10$$

$$\Rightarrow k = -8 \pm 10 \quad \therefore k = -18, 2$$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $4x - 3y + 2 = 0$ অথবা, $4x - 3y - 18 = 0$ **Ans.**

TYPE 10: দুটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

$ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$.

01. $3x - 4y = 20$ এবং $3x - 4y + 48 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

Sol" দেওয়া আছে, $3x - 4y = 20$ বা, $3x - 4y - 20 = 0$ $\therefore c_1 = -20$

এবং $3x - 4y + 48 = 0$ $\therefore c_2 = 48$

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{-20 - 48}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \frac{68}{5}$ unit **Ans.**

02. $y = x + 4$ এবং $y = x$ রেখাদ্বয়ের লম্বদূরত্ব?

Sol" দেওয়া আছে, $y = x + 4$ বা, $x - y + 4 = 0$ $\therefore c_1 = 4$

এবং $y = x$ বা, $x - y + 0 = 0$ $\therefore c_2 = 0$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের লম্বদূরত্ব $= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{4 - 0}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ একক **Ans.**

TYPE 11 দুই বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বিষয়ক সমস্যা

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$

01. একটি সরলরেখা (1, 2) ও (3, 4) বিন্দুগামী এবং (x, y) বিন্দুটি তার ওপর অবস্থিত হলে, দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$.

Sol" (1, 2) এবং (3, 4) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x - 1}{1 - 3} = \frac{y - 2}{2 - 4}$

$\Rightarrow \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{-2}$

$\Rightarrow x - 1 = y - 2$

$\Rightarrow x - y - 1 + 2 = 0$

$\therefore x - y + 1 = 0$ ..... (i)

আবার, (x, y) বিন্দুটি (i) নং রেখার ওপর অবস্থিত।

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $x - y + 1 = 0$ (দেখানো হলো)

02. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, –2) হলে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC এর সমান্তরাল ও BC এর অর্ধেক।

Sol" মনে করি, AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q.

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1 + 3}{2}, \frac{1 + 4}{2}\right)$ অর্থাৎ, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1 + 5}{2}, \frac{1 - 2}{2}\right)$ অর্থাৎ, $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

∴ PQ রেখার সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-3}=\frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{2y-5}{2}\times\frac{2}{6}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{2y-5}{6}$

$\Rightarrow 6x-12=-2y+5$

$\Rightarrow 6x+2y-12-5=0$

$\therefore 6x+2y-17=0$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $6x+2y-17=0$ **Ans.** ..... (i)

∴ BC রেখার সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-5}=\frac{y-4}{4+2}$

$\Rightarrow 3x-9=-y+4 \quad \Rightarrow 3x+y-13=0$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণের ঢাল, $m_1=-3$

(ii) " " " $m_2=-3$

∴ $m_1=m_2$ ∴ BC ∥ PQ (দেখানো হলো)

অতঃপর, BC এর দূরত্ব $=\sqrt{(3-5)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

এবং PQ এর দূরত্ব $=\sqrt{(2-3)^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{36}{4}}=\sqrt{10}$

∴ PQ রেখা BC রেখার অর্ধেক। অর্থাৎ $PQ=\frac{1}{2}BC$. (দেখানো হলো)

03. A (h, k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং B(k, h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত; AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol" A(h, k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত।

সুতরাং আমরা পাই, $6h-k=1$ ..... (i)

আবার, B(k, h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত।

∴ $-5h+2k=5$ ..... (ii)

(i) কে 2 দ্বারা গুণ করে, $12h-2k=2$ ..... (iii)

(ii) + (iii) $\Rightarrow 7h=7$ বা, $h=1$

এবং (i) থেকে $k=6h-1=6\times1-1=5$

∴ প্রথম রেখার উপরস্থ বিন্দুটি A(1, 5) এবং দ্বিতীয় রেখার উপরস্ত বিন্দুটি B (5, 1)

∴ AB সরলরেখার সমীকরণ; $\frac{y-5}{5-1}=\frac{x-1}{1-5}$

বা, $\frac{y-5}{4}=\frac{x-1}{-4}$

বা, $y-5=-1(x-1)$

বা, $x+y-6=0$

∴ PQ রেখার সমীকরণ, $\frac{x-2}{2-3}=\frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{2y-5}{2}\times\frac{2}{6}$

$\Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{2y-5}{6}$

$\Rightarrow 6x-12=-2y+5$

$\Rightarrow 6x+2y-12-5=0$

$\therefore 6x+2y-17=0$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ, $6x+2y-17=0$ **Ans.** ..... (i)

∴ BC রেখার সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-5}=\frac{y-4}{4+2}$

$\Rightarrow 3x-9=-y+4 \quad \Rightarrow 3x+y-13=0$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণের ঢাল, $m_1=-3$

(ii) " " " $m_2=-3$

∴ $m_1=m_2$ ∴ BC ∥ PQ (দেখানো হলো)

অতঃপর, BC এর দূরত্ব $=\sqrt{(3-5)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

এবং PQ এর দূরত্ব $=\sqrt{(2-3)^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{36}{4}}=\sqrt{10}$

∴ PQ রেখা BC রেখার অর্ধেক। অর্থাৎ $PQ=\frac{1}{2}BC$. (দেখানো হলো)

03. A (h, k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং B(k, h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত; AB সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol A(h, k) বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত।

সুতরাং আমরা পাই, $6h-k=1$ ..... (i)

আবার, B(k, h) বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত।

∴ $-5h+2k=5$ ..... (ii)

(i) কে 2 দ্বারা গুণ করে, $12h-2k=2$ ..... (iii)

(ii) + (iii) $\Rightarrow 7h=7$ বা, $h=1$

এবং (i) থেকে $k=6h-1=6\times1-1=5$

∴ প্রথম রেখার উপরস্থ বিন্দুটি A(1, 5) এবং দ্বিতীয় রেখার উপরস্থ বিন্দুটি B (5, 1)

∴ AB সরলরেখার সমীকরণ; $\frac{y-5}{5-1}=\frac{x-1}{1-5}$

বা, $\frac{y-5}{4}=\frac{x-1}{-4}$

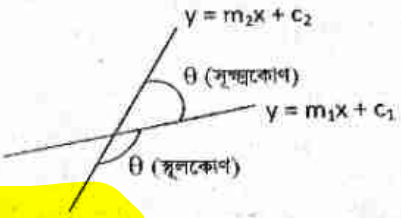
বা, $y-5=-1(x-1)$

বা, $x+y-6=0$

TYPE 12 দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়

• $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$



Note: (i) সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় করতে বললে যোগবোধক (+) মানটি নিতে হবে।
(ii) স্থূলকোণ নির্ণয় করতে বললে বিয়োগবোধক (−) মানটি নিতে হবে।

01. $3y + 4x - 5 = 0$ এবং $2y - x + 3 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ θ হলে, $\tan\theta = ?$

Sol" প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয় যথাক্রমে m_1 এবং m_2 হলে,

$$m_1 = -\frac{4}{3} \text{ এবং } m_2 = \frac{1}{2}. \qquad \therefore \tan\theta = \pm\frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{6}}$$

বা, $\tan\theta = \pm\frac{11}{2}$ $\qquad \therefore \tan\theta = \frac{11}{2}$ [$\because$ সূক্ষ্মকোণ] **Ans.**

02. $y = 3x+7$ এবং $3y - x = 8$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ?

Sol" $y = 3x+7$ রেখার ঢাল, $m_1 = 3$ এবং $3y - x = 8$ রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{1}{3}$

$$\therefore \tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \pm\frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 3\times\frac{1}{3}} = \pm\frac{4}{3}$$

$\therefore$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ **Ans.**

TYPE 13 লম্বসমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ

01. P(4, 11) ও Q(−2, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর?

Sol" PQ এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{4-2}{2}, \frac{11+2}{2}\right) = \left(1, \frac{13}{2}\right)$

PQ রেখার ঢাল $= \frac{11-2}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ PQ রেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{2}{3}$ [যেহেতু $m_1 \times m_2 = -1$]

এখন, $\left(1, \frac{13}{2}\right)$ বিন্দুগামী এবং $-\frac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - \frac{13}{2} = -\frac{2}{3}(x - 1) \qquad \Rightarrow 4x + 6y - 43 = 0 \text{ Ans.}$$

02. (8, 5) ও (–4, –3) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখার লম্ব দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol" মনে করি, বিন্দুদ্বয় A(8, 5) ও B(–4, –3)

এবং AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু $M\left(\frac{8-4}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$

$\Rightarrow M(2, 1)$

তাহলে M(2, 1) বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে লম্ব, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

AB রেখার সমীকরণ $\frac{y-5}{5+3} = \frac{x-8}{8+4}$

$\Rightarrow \frac{y-5}{8} = \frac{x-8}{12}$

$\Rightarrow 3(y-5) = 2(x-8)$

$\Rightarrow 2x - 3y - 1 = 0$

এখন AB এর ওপর লম্ব এরূপ রেখার সমীকরণ:

$3x + 2y + k = 0$ ..... (i) যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এই রেখাটি M(2, 1) বিন্দুগামী হলে, $3 \times 2 + 2 \times 1 + k = 0$

$\Rightarrow k = -8$

k এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $3x + 2y - 8 = 0$; যা নির্ণেয় সমীকরণ।

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	03, 04
Type-03	03
Type-05	03, 05
Type-08	01, 04, 06
Type-09	01, 05, 06, 07
Type-10	03

পাটিগণিতীয় সরলীকরণ

Simplification of Arithmetic

ঞ. যোগ-বিয়োগের সময় মিশ্র ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশে পরিণত করে যোগ-বিয়োগ করতে হবে। তবে ফলাফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে মিশ্র ভগ্নাংশে পরিবর্তন করাই ভালো।

ট. 'BODMAS' শব্দটি মনে রাখলে সরলীকরণের ক্ষেত্রে সুবিধা হয়।
B – Brackets (বন্ধনী)
O – Of (এর)
D – Division (ভাগ)
M – Multiplication (গুণ)
A – Addition (যোগ)
S – Subtraction (বিয়োগ)

ঠ. আবৃত/পৌনঃপুনিক দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন:

- নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব = প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশের দশমিক বিন্দু বাদ দিয়ে প্রাপ্ত সংখ্যা থেকে আবৃত অংশ বাদ দিয়ে প্রাপ্ত সংখ্যার বিয়োগফল।
- নির্ণেয় ভগ্নাংশের হর = প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশের আবৃত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো (৯) এবং অনাবৃত অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে ততগুলো শূন্য (০) দ্বারা গঠিত সংখ্যা।

উদাহরণ: $৫.২৩\dot{৪}\dot{৫}\dot{৭} = \frac{৫২৩৪৫৭ - ৫২৩}{৯৯৯০০} = \frac{৫২২৯৩৪}{৯৯৯০০}$

এক নজরে এই অধ্যায় থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ

০১. সরল করুন: $(০.\dot{৩}$ এর $০.\dot{৮}\dot{৩}) \div (০.৫ \times ০.\dot{১}) + ০.৩\dot{৫} \div ০.০\dot{৮}$ [৪৪তম বিসিএস]

Solⁿ $(০.\dot{৩}$ এর $০.\dot{৮}\dot{৩}) \div (০.৫ \times ০.\dot{১}) + ০.৩\dot{৫} \div ০.০\dot{৮}$

$= \left(\frac{৩-০}{৯} \text{ এর } \frac{৮৩-৮}{৯০}\right) \div \left(\frac{৫}{১০} \times \frac{১-০}{৯}\right) + \frac{৩৫-৩}{৯০} \div \frac{৮-০}{৯০}$

$= \left(\frac{৩}{৯} \text{ এর } \frac{৭৫}{৯০}\right) \div \left(\frac{১}{২} \times \frac{১}{৯}\right) + \frac{৩২}{৯০} \div \frac{৮}{৯০} \quad = \left(\frac{১}{৩} \text{ এর } \frac{১৫}{১৮}\right) \div \frac{১}{১৮} + \frac{১৬}{৪৫} \div \frac{৪}{৪৫}$

$= \frac{৫}{১৮} \div \frac{১}{১৮} + \frac{১৬}{৪৫} \div \frac{৪}{৪৫} \quad = \frac{৫}{১৮} \times \frac{১৮}{১} + \frac{১৬}{৪৫} \times \frac{৪৫}{৪} \quad = \frac{৫}{১} + \frac{১৬}{৪} \quad = ৫ + ৪ \quad = ৯$ **(Ans.)**

০২. সরল করুন: $\frac{২.৮ \text{ এর } ২.\dot{২}\dot{৭}}{১.\dot{৩}\dot{৬}} + \frac{৪.\dot{৪} - ২.৮\dot{৩}}{১.\dot{৩} + ২.৬২\dot{৯}} \text{ এর } ৮.২$ [৩৪তম বিসিএস]

Solⁿ $\frac{২.৮ \text{ এর } ২.\dot{২}\dot{৭}}{১.\dot{৩}\dot{৬}} + \frac{৪.\dot{৪} - ২.৮\dot{৩}}{১.\dot{৩} + ২.৬২\dot{৯}} \text{ এর } ৮.২$

$= \frac{\frac{২৮}{১০} \text{ এর } \frac{২২৭-২}{৯৯}}{\frac{১৩৬-১}{৯৯}} + \frac{\frac{৪৪-৪}{৯} - \frac{২৮৩-২৮}{৯০}}{\frac{১৩-১}{৯} + \frac{২৬২৯-২৬২}{৯০০}} \text{ এর } \frac{৮২}{১০}$

$= \frac{\frac{২৮}{১০} \text{ এর } \frac{২২৫}{৯৯}}{\frac{১৩৫}{৯৯}} + \frac{\frac{৪০}{৯} - \frac{২৫৫}{৯০}}{\frac{১২}{৯} + \frac{২৩৬৭}{৯০০}} \text{ এর } \frac{৮২}{১০}$

$= \frac{২৮}{১০} \text{ এর } \frac{২২৫}{৯৯} + \frac{১৩৫}{৯৯} + \frac{৪০০ - ২৫৫}{\frac{১২০০ + ২৩৬৭}{৯০০}} \text{ এর } \frac{৮২}{১০}$

$= \frac{২৮}{১০} \text{ এর } \frac{২২৫}{৯৯} + \frac{১৩৫}{৯৯} + \frac{\frac{১৪৫}{৯০}}{\frac{৩৫৬৭}{৯০০}} \text{ এর } \frac{৮২}{১০}$

$= \frac{২৮}{১০} \text{ এর } \frac{২২৫}{৯৯} \times \frac{৯৯}{১৩৫} + \frac{১৪৫}{৯০} \times \frac{৯০০}{৩৫৬৭} \text{ এর } \frac{৮২}{১০}$

$= \frac{১৪}{৩} + \frac{১০}{৩} = \frac{১৪ + ১০}{৩} = \frac{২৪}{৩} = ৮$

০৩. সরল করুন: $\frac{৩\frac{১}{২}-২\frac{১}{৬}}{\frac{১}{৪}\text{ এর }\frac{১}{৫}+\frac{১}{৭}} \div ১৫\frac{৫}{৯} \times \frac{৯}{৪}$ [৩৩তম বিসিএস]

Sol" $\frac{৩\frac{১}{২}-২\frac{১}{৬}}{\frac{১}{৪}\text{ এর }\frac{১}{৫}+\frac{১}{৭}} \div ১৫\frac{৫}{৯} \times \frac{৯}{৪}$ $= \frac{\frac{৭}{২}-\frac{১৩}{৬}}{\frac{১}{২০}+\frac{১}{৭}} \div \frac{১৪০}{৯} \times \frac{৯}{৪}$

$= \frac{\frac{২১-১৩}{৬}}{\frac{৭+২০}{১৪০}} \div \frac{১৪০}{৯} \times \frac{৯}{৪}$ $= \frac{\frac{৮}{৬}}{\frac{২৭}{১৪০}} \div \frac{১৪০}{৯} \times \frac{৯}{৪}$

$= \frac{৮}{৬} \times \frac{১৪০}{২৭} \times \frac{৯}{১৪০} \times \frac{৯}{৪}$ $= ১$ (উত্তর)

০৪. সরল করুন: $\left(5\frac{1}{2}-17\right) \times \left\{4\left(3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}\right) \div 2\frac{2}{3}\right\} \div 5 + 3\frac{1}{2}$ [৩১তম বিসিএস]

Sol" $\left(5\frac{1}{2}-17\right) \times \left\{4\left(3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}\right) \div 2\frac{2}{3}\right\} \div 5 + 3\frac{1}{2}$

$= \left(\frac{11}{2}-17\right) \times \left\{4\left(\frac{7}{2}-\frac{8}{3}\right) \div \frac{8}{3}\right\} \div 5 + \frac{7}{2}$

$= \left(\frac{11-34}{2}\right) \times \left\{4\left(\frac{21-16}{6}\right) \div \frac{8}{3}\right\} \div 5 + \frac{7}{2}$

$= \frac{-23}{2} \times \left\{4 \times \frac{5}{6} \div \frac{8}{3}\right\} \div 5 + \frac{7}{2}$

$= \frac{-23}{2} \times \left\{\frac{10}{3} \times \frac{3}{8}\right\} \div 5 + \frac{7}{2}$

$= \frac{-23}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{7}{2}$ $= -\frac{23}{8} + \frac{7}{2}$

$= \frac{7}{2} - \frac{23}{8}$ $= \frac{28-23}{8}$ $= \frac{5}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $= \frac{5}{8}$

০৫. সরল করুন: $১.৫ \div ০.০৭৫ \times ৩.২৫ \div ১.৩ \times ৩.৩ \div ২.২৫ - ১.৩\dot{৬}$ [৩০তম বিসিএস]

Sol" $১.৫ \div ০.০৭৫ \times ৩.২৫ \div ১.৩ \times ৩.৩ \div ২.২৫ - ১.৩\dot{৬}$

$= \frac{১৫}{১০} \div \frac{৭৫}{১০০০} \times \frac{৩২৫}{১০০} \div \frac{১৩}{১০} \times \frac{৩৩}{১০} \div \frac{২২৫}{১০০} - \frac{১৩৬-১৩}{৯০}$

$= \frac{১৫}{১০} \times \frac{১০০০}{৭৫} \times \frac{৩২৫}{১০০} \times \frac{১০}{১৩} \times \frac{৩৩}{১০} \times \frac{১০০}{২২৫} - \frac{১২৩}{৯০}$

$= \frac{১৫ \times ৩২৫}{৭৫} \times \frac{৩৩}{১৩} \times \frac{৪}{৯} - \frac{৪১}{৩০}$ $= ৬৫ \times \frac{৩৩}{১৩} \times \frac{৪}{৯} - \frac{৪১}{৩০}$

$= ১৬৫ \times \frac{৪}{৯} - \frac{৪১}{৩০}$ $= \frac{২২০}{৩} - \frac{৪১}{৩০}$ $= \frac{২২০০-৪১}{৩০}$ $= \frac{২১৫৯}{৩০} = ৭১.৯৬$ (উত্তর)

০৪. সরল করুন: $[(৬.২৭\times০.৫) \div \{(.৫ \text{ এর } .৭৫)\times৮.৩৬\}] \div \{(.২৫ \text{ এর } .১)\times(.৭৫ \text{ এর } ২১.\dot{৩})\times.৫\}$ [২৮তম বিসিএস]

Sol"

$[(৬.২৭\times০.৫) \div \{(.৫ \text{ এর } .৭৫)\times৮.৩৬\}] \div \{(.২৫ \text{ এর } .১)\times(.৭৫ \text{ এর } ২১.\dot{৩})\times.৫\}$

$= \left[\left(\frac{৬২৭}{১০০}\times\frac{৫}{১০}\right) \div \left\{\left(\frac{৫}{১০} \text{ এর } \frac{৭৫}{১০০}\right)\times\frac{৮৩৬}{১০০}\right\}\right] \div \left\{\left(\frac{২৫}{১০০} \text{ এর } \frac{১}{১০}\right)\times\left(\frac{৭৫}{১০০} \text{ এর } \frac{২১৩-২১}{৯}\right)\times\frac{৫}{১০}\right\}$

$= \left[\frac{৬২৭}{২০০} \div \left\{\frac{৩}{৮}\times\frac{৮৩৬}{১০০}\right\}\right] \div \left\{\frac{১}{৪০}\times\left(\frac{৭৫}{১০০} \text{ এর } \frac{১৯২}{৯}\right)\times\frac{৫}{১০}\right\}$

$= \left[\frac{৬২৭}{২০০} \div \left\{\frac{৩}{৮}\times\frac{৮৩৬}{১০০}\right\}\right] \div \left\{\frac{১}{৪০}\times\left(\frac{৩}{৪} \text{ এর } \frac{১৯২}{৯}\right)\times\frac{১}{২}\right\}$

$= \left[\frac{৬২৭}{২০০} \div \frac{৬২৭}{২০০}\right] \div \left\{\frac{১}{৪০}\times ১৬\times\frac{১}{২}\right\}$

$= \left[\frac{৬২৭}{২০০}\times\frac{২০০}{৬২৭}\right] \div \frac{১}{৫}$

$= ১ \div \frac{১}{৫} = ১\times\frac{৫}{১} = ৫$ **(উত্তর)**

০৫. সরল করুন: $\dfrac{4\frac{2}{9}+2\frac{8}{15}}{4\frac{2}{9}-2\frac{8}{15}} \div \dfrac{1\frac{2}{9}}{2\frac{2}{9}} \text{ এর } \dfrac{2\frac{2}{7}}{3\frac{1}{7}}\times\dfrac{1\frac{1}{7}}{5\frac{2}{7}+6\frac{1}{7}}$ [২৭তম বিসিএস]

Sol"

$\dfrac{4\frac{2}{9}+2\frac{8}{15}}{4\frac{2}{9}-2\frac{8}{15}} \div \dfrac{1\frac{2}{9}}{2\frac{2}{9}} \text{ এর } \dfrac{2\frac{2}{7}}{3\frac{1}{7}}\times\dfrac{1\frac{1}{7}}{5\frac{2}{7}+6\frac{1}{7}}$

$= \dfrac{\frac{38}{9}+\frac{38}{15}}{\frac{38}{9}-\frac{38}{15}} \div \dfrac{\frac{11}{9}}{\frac{20}{9}} \text{ এর } \dfrac{\frac{16}{7}}{\frac{22}{7}}\times\dfrac{\frac{8}{7}}{\frac{37}{7}+\frac{43}{7}}$

$= \dfrac{\frac{190+114}{45}}{\frac{190-114}{45}} \div \dfrac{\frac{11}{9}}{\frac{20}{9}} \text{ এর } \dfrac{\frac{16}{7}}{\frac{22}{7}}\times\dfrac{\frac{8}{7}}{\frac{37}{7}+\frac{43}{7}}$

$= \dfrac{\frac{304}{45}}{\frac{76}{45}} \div \dfrac{\frac{11}{9}}{\frac{20}{9}} \text{ এর } \dfrac{\frac{16}{7}}{\frac{22}{7}}\times\dfrac{\frac{8}{7}}{\frac{80}{7}}$

$= \left(\frac{304}{45}\times\frac{45}{76}\right) \div \left(\frac{11}{9}\times\frac{9}{20}\right) \text{ এর } \left(\frac{16}{7}\times\frac{7}{22}\right)\times\left(\frac{8}{7}\times\frac{7}{80}\right)$

$= \frac{76}{19} \div \frac{11}{20} \text{ এর } \frac{8}{11}\times\frac{1}{10}$

$= \frac{76}{19} \div \frac{2}{5}\times\frac{1}{10}$

$= \frac{76}{19}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{10} = 1$ **(উত্তর)**

০৮. সরল করুন: $\frac{4\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}}{4\frac{1}{4}\times 3\frac{1}{3}}+\frac{5\frac{1}{5}-4\frac{1}{4}}{5\frac{1}{5}\times 4\frac{1}{4}}-\frac{5\frac{1}{5}-3\frac{1}{3}}{5\frac{1}{5}\times 3\frac{1}{3}}$ [২৫তম, ১৭তম বিসিএস]

Sol" $\frac{4\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}}{4\frac{1}{4}\times 3\frac{1}{3}}+\frac{5\frac{1}{5}-4\frac{1}{4}}{5\frac{1}{5}\times 4\frac{1}{4}}-\frac{5\frac{1}{5}-3\frac{1}{3}}{5\frac{1}{5}\times 3\frac{1}{3}}$

$=\frac{\frac{17}{4}-\frac{10}{3}}{\frac{17}{4}\times\frac{10}{3}}+\frac{\frac{26}{5}-\frac{17}{4}}{\frac{26}{5}\times\frac{17}{4}}-\frac{\frac{26}{5}-\frac{10}{3}}{\frac{26}{5}\times\frac{10}{3}}$

$=\frac{\frac{51-40}{12}}{\frac{85}{6}}+\frac{\frac{104-85}{20}}{\frac{221}{10}}-\frac{\frac{78-50}{15}}{\frac{52}{3}}$

$=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{85}{6}}+\frac{\frac{19}{20}}{\frac{221}{10}}-\frac{\frac{28}{15}}{\frac{52}{3}}$

$=\frac{11}{12}\times\frac{6}{85}+\frac{19}{20}\times\frac{10}{221}-\frac{28}{15}\times\frac{3}{52}$

$=\frac{11}{170}+\frac{19}{442}-\frac{7}{65}=\frac{143+95-238}{2210}=\frac{238-238}{2210}=\frac{0}{2210}=0$

উত্তর: 0

০৯. সরল করুন: $\frac{৩\frac{১}{২}-২\frac{১}{৬}}{\frac{১}{৪}\text{ এর }\frac{১}{৫}+\frac{১}{৭}}\div ১৫\frac{৫}{৯}$ [১৫তম বিসিএস]

Sol" $\frac{৩\frac{১}{২}-২\frac{১}{৬}}{\frac{১}{৪}\text{ এর }\frac{১}{৫}+\frac{১}{৭}}\div ১৫\frac{৫}{৯}=\frac{\frac{৭}{২}-\frac{১৩}{৬}}{\frac{১}{২০}+\frac{১}{৭}}\div\frac{১৪০}{৯}$

$=\frac{\frac{২১-১৩}{৬}}{\frac{৭+২০}{১৪০}}\div\frac{১৪০}{৯}$

$=\frac{৮}{৬}\times\frac{১৪০}{২৭}\times\frac{৯}{১৪০}$

$=\frac{৪}{৯}$ **(Ans.)**

৯৯. সরল করুন: $\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}+\frac{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}}{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{2}\text{ এর }\frac{4}{5}}\right)\div\frac{\sqrt[3]{81}}{\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}$

[১৩তম বিসিএস]

Sol

$$\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}+\frac{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}}{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{2}\text{ এর }\frac{4}{5}}\right)\div\frac{\sqrt[3]{81}}{\frac{4}{7}-\frac{3}{11}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}+\frac{\frac{7}{2}\div\frac{5}{2}\times\frac{4}{5}}{\frac{7}{2}\div\frac{5}{2}\text{ এর }\frac{4}{5}}\right)\div\frac{\sqrt[3]{3^4}}{\frac{44-21}{77}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{7}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}}{\frac{7}{2}\div 2}\right)\div\frac{3}{\frac{23}{77}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{4+3}{4}}+\frac{\frac{28}{25}}{\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}}\right)\div\frac{3}{\frac{23}{77}}$$

$$=\left(1+\frac{4}{7}+\frac{28}{25}\times\frac{4}{7}\right)\div\frac{77\times 3}{23}$$

$$=\left(1+\frac{4}{7}+\frac{16}{25}\right)\div\frac{77\times 3}{23}$$

$$=\left(\frac{175+100+112}{175}\right)\div\frac{77\times 3}{23}$$

$$=\frac{387}{175}\times\frac{23}{77\times 3}=\frac{2967}{13475}$$

উত্তর: $\frac{2967}{13475}$

১১. সরল করুন: $6\frac{1}{6} \div 3\frac{1}{2}\left\{8\frac{2}{3} - 6 \text{ এর } \left(9\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)\right\} + \frac{\sqrt[3]{125}}{3 + \frac{1}{3}}$ [১১তম বিসিএস]

Sol" $6\frac{1}{6} \div 3\frac{1}{2}\left\{8\frac{2}{3} - 6 \text{ এর } \left(9\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)\right\} + \frac{\sqrt[3]{125}}{3 + \frac{1}{3}}$

$= 6\frac{1}{6} \div 3\frac{1}{2}\left\{\frac{14}{3} - 6 \text{ এর } \left(\frac{28 - 3}{36}\right)\right\} + \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\frac{9+1}{3}}$

$= 6\frac{1}{6} \div 3\frac{1}{2}\left\{\frac{14}{3} - 6 \text{ এর } \frac{25}{36}\right\} + \frac{5}{10}\frac{3}{3}$ $= 6\frac{1}{6} \div 3\frac{1}{2}\left\{\frac{14}{3} - \frac{25}{6}\right\} + \frac{15}{10}$ $= 6\frac{1}{6} \div 3\frac{1}{2}\left\{\frac{28 - 25}{6}\right\} + 2\frac{1}{3}$

$= 6\frac{1}{6} \div \left(3\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{3}\right) + 2\frac{1}{3}$ $= 6\frac{1}{6} \div \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$

$= 6\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

উত্তর : ২

১২. সরল করুন : $2\frac{2}{5} \times \frac{5\frac{5}{8}}{6\frac{3}{7}} \text{ এর } \frac{6\frac{7}{11}}{8\frac{1}{4}} \div 8\frac{1}{4} \text{ এর } 2\frac{11}{22} \text{ এর } \frac{2\frac{1}{7}}{12\frac{1}{2}}$ [১০তম বিসিএস]

Sol" $2\frac{2}{5} \times \frac{5\frac{5}{8}}{6\frac{3}{7}} \text{ এর } \frac{6\frac{7}{11}}{8\frac{1}{4}} \div 8\frac{1}{4} \text{ এর } 2\frac{11}{22} \text{ এর } \frac{2\frac{1}{7}}{12\frac{1}{2}}$

$= \frac{12}{5} \times \frac{\frac{85}{8}}{\frac{85}{7}} \text{ এর } \frac{\frac{73}{11}}{\frac{73}{8}} \div 8\frac{1}{4} \text{ এর } \frac{55}{22} \text{ এর } \frac{\frac{15}{2}}{\frac{25}{2}}$

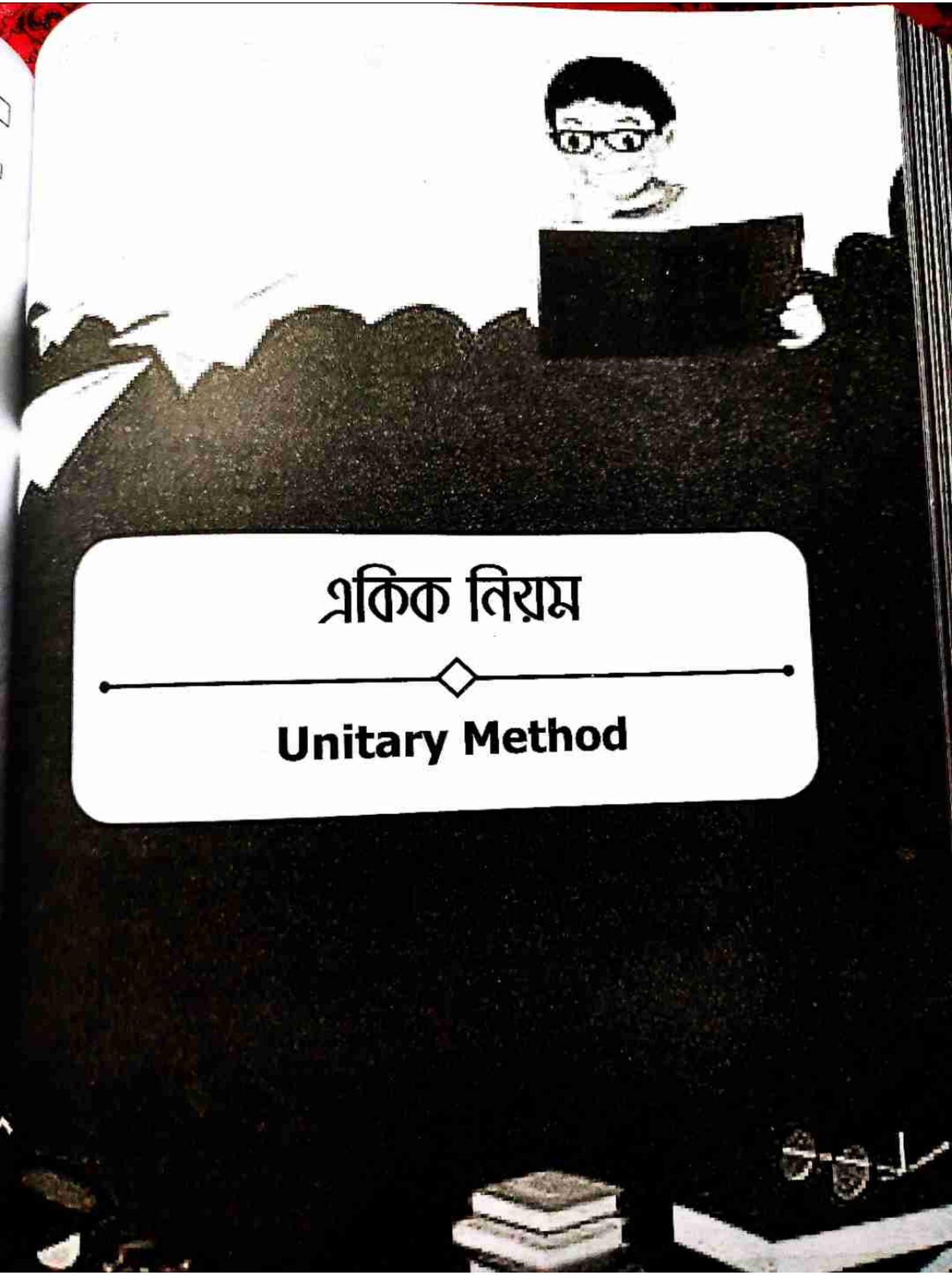
$= \frac{12}{5} \times \left(\frac{85}{8} \times \frac{7}{85}\right) \text{ এর } \left(\frac{73}{11} \times \frac{8}{73}\right) \div 8\frac{1}{4} \text{ এর } \frac{55}{22} \text{ এর } \left(\frac{15}{2} \times \frac{2}{25}\right)$

$= \frac{12}{5} \times \frac{7}{8} \text{ এর } \frac{8}{11} \div 8\frac{1}{4} \text{ এর } \frac{55}{22} \text{ এর } \frac{3}{5}$ $= \frac{12}{5} \times \frac{7}{11} \div \frac{4}{3} = \frac{12 \times 7}{55} \times \frac{3}{4} = \frac{63}{55} = 1\frac{8}{55}$

উত্তর : $1\frac{8}{55}$

এ অধ্যায়ের Suggestion

যেহেতু এই অধ্যায় থেকে এখন প্রশ্ন আসে না, সেহেতু যারা গণিতে দুর্বল তারা এই অধ্যায় বাদ দিতে পারেন। তবে যারা গণিতে ভাল তারা সরলের ব্যাসিকটা জেনে যেতে পারেন।



একিক নিয়ম

Unitary Method

মৌলিক এবং তথ্যমূলক প্রয়োজনীয় আলোচনা

ঐকিক নিয়মের অংকগুলো করতে আমাদের গাণিতিক দক্ষতার পাশাপাশি বাস্তব জীবনের অর্জিত জ্ঞান কাজে লাগাতে হয়। কারণ এ সমস্ত অংকে কখন গুণ করতে হবে আর কখন ভাগ করতে হবে তা সূত্র দিয়ে মনে রাখা মুশকিল এবং একটু ঘুরিয়ে আসলেই পরীক্ষায় ভুল হবার সম্ভাবনা থাকে। যেমন-

১০ জন লোক ১ টি কাজ করে = ২০ দিনে

∴ ১ " " ১ " " " = (২০ × ১০) দিনে = ২০০ দিনে

এখানে গুণ হয়েছে, কারণ আমরা স্বাভাবিকভাবেই জানি কোন নির্দিষ্ট কাজ করার বেলায় যদি লোকসংখ্যা কমে তাহলে সময় বেশি লাগবে। তাই এখানে গুণ হয়েছে। আবার একই প্যাটার্নে নিচের উদাহরণটি দেখুন-

১০ জন লোক ১ টি কাজে আয় করে = ২০ টাকা

∴ ১ " " ১ " " " " $= \frac{২০}{১০}$ টাকা = ২ টাকা।

এখানে ভাগ করা হয়েছে। কারণ আমরা স্বাভাবিকভাবে জানি যদি কোন ক্ষেত্রে লোকসংখ্যা কমে যায় তাহলে আয়ও কমে যাবে। তাই ভাগ করা হয়েছে।

উপরের দুটি উদাহরণ খেয়াল করে দেখুন একই প্যাটার্নের। কিন্তু একটিতে গুণ করা হয়েছে, আরেকটিতে ভাগ করা হয়েছে। এখানে কিন্তু কোন সূত্র প্রয়োগ হয় নি। সম্পূর্ণভাবে বাস্তবিক জ্ঞান প্রয়োগ করা হয়েছে।

তাই এ অধ্যায়ে ঐকিক নিয়মের অংকগুলো করার সময় আপনারা খুব মনোযোগ দিয়ে করবেন। তবে যাদের প্যাচ লেগে যায়, তারা একটু অনুশীলন করলেই ভুল হবে না আশা করি।

নৌকা ও স্রোত বিষয়ক:

- অনুকূলে হলে, নৌকার বেগ + স্রোতের বেগ
- প্রতিকূলে হলে, নৌকার বেগ − স্রোতের বেগ
- বেগ $= \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$

এক্ষেত্রে নৌকার বেগ সর্বদা স্রোতের বেগের চেয়ে বড় হবে। কারণ স্রোতের বেগ বেশি হলে তো নৌকা সামনে যেতে পারবে না।

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: সময় ও কাজ বিষয়ক সমস্যা

Pattern-01

01. চারজন পুরুষ এবং চারজন বালক যে কাজ তিন দিনে করতে পারে, দুই জন পুরুষ এবং সাতজন বালকের সেই কাজ করতে চার দিন লাগে। একজন পুরুষের একা ঐ কাজ করতে কত দিন লাগবে?

[২৫তম বিসিএস]

Sol 4 জন পুরুষ + 4 জন বালক 3 দিনে করে কাজটির 1 অংশ

∴ 4 " " + 4 " " 1 " " " $\frac{1}{3}$ অংশ .....(i)

আবার,

2 জন পুরুষ + 7 জন বালক 4 দিনে করে কাজটির 1 অংশ

∴ 2 " " + 7 " " 1 " " " $\frac{1}{4}$ অংশ ..... (ii)

(i) নং কে 7 দ্বারা এবং (ii) নং কে 4 দ্বারা গুণ করে

28 জন পুরুষ + 28 জন বালক 1 দিনে করে $\frac{7}{3}$ অংশ

$\therefore$ 8 " " + 28 " " 1 " " $\frac{4}{4}$ "

বিয়োগ করে, 20 জন পুরুষ 1 দিনে করে $\frac{7}{3}-\frac{4}{4}=\frac{28-12}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$ অংশ

$\therefore$ 1 জন পুরুষ 1 দিনে করে $\frac{4}{3\times 20}$ অংশ $=\frac{1}{15}$ অংশ

$\therefore$ $\frac{1}{15}$ অংশ 1 জন পুরুষ করে 1 দিনে

$\therefore$ 1 (সম্পূর্ণ) অংশ 1 দিনে করে $\frac{1\times 15}{1}=15$ দিনে

উত্তর: 15 দিন।

02. দুই জন পুরুষ এবং দুই জন বালক যে কাজ ছয় দিনে সম্পন্ন করতে পারে, তিন জন পুরুষ এবং আট জন বালক তা তিন দিনে সম্পন্ন করতে পারে। একজন পুরুষ বা একজন বালক ঐ কাজ কত দিনে সম্পন্ন করতে পারবে? [২৪তম বিসিএস]

Sol" ২ জন পুরুষ + ২ জন বালক ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{৬}$ অংশ .....(i)

৩ " " + ৮ " " ১ " " " $\frac{১}{৩}$ " ..... (ii)

(i) নং কে ৪ দ্বারা গুণ করে সেটি থেকে (ii) নং বিয়োগ করি,

৮ জন পুরুষ + ৮ জন বালক ১ দিনে করে $=\frac{১\times ৪}{৬}=\frac{২}{৩}$ অংশ

৩ " " + ৮ " " ১ " " $=\frac{১}{৩}$ অংশ

(–) ৫ জন পুরুষ ১ " " $=\left(\frac{২}{৩}-\frac{১}{৩}\right)$ অংশ $=\frac{১}{৩}$ অংশ

৫ জন পুরুষ $\frac{১}{৩}$ অংশ কাজ করে ১ দিনে

১ " " ১ " " " $\frac{১\times ৫\times ৩}{১}=১৫$ দিনে

(i) নং কে ৩ দ্বারা এবং (ii) নং কে ২ দ্বারা গুণ করে পাই,

৬ জন পুরুষ + ৬ জন বালক ১ দিনে করে $\frac{৩}{৬}$ অংশ

৬ " " + ১৬ " " ১ " " $\frac{২}{৩}$ "

(–) (–) (–)

১০ জন বালক ১ দিনে করে $=\left(\frac{২}{৩}-\frac{৩}{৬}\right)$ অংশ $=\frac{১}{৬}$ অংশ

১ " " ১ " " $=\frac{১}{৬\times ১০}=\frac{১}{৬০}$ "

$\therefore$ ১ জন বালক $\frac{১}{৬০}$ অংশ করে = ১ দিনে

১ " " ১ " " $=১\times ৬০=৬০$ দিনে

উত্তর: পুরুষ = ১৫ দিন; বালক = ৬০ দিন।

03. ৫ জন পুরুষ ৯ জন স্ত্রীলোকের সমান আয় করে এবং ৬ জন স্ত্রীলোক ১০ জন বালকের সমান আয় করে। একজন বালক যদি রোজ ১২.৫০ টাকা আয় করে তবে ১০ জন পুরুষ দৈনিক কত টাকা আয় করবে?

Sol"

৫ জন পুরুষের আয় = ৯ জন স্ত্রীলোকের আয়

১ " " " $= \frac{৯}{৫}$ " " "

∴ ১০ " " $= \frac{৯ \times ১০}{৫}$ " " = ১৮ জন স্ত্রীলোকের আয়

৬ জন স্ত্রীলোকের আয় = ১০ জন বালকের আয়

∴ ১ " " " $= \frac{১০}{৬}$ " " "

∴ ১৮ " " " $= \frac{১০ \times ১৮}{৬}$ " " = ৩০ জন বালকের আয়

১ জন বালকের আয় = ১২.৫০ টাকা

∴ ৩০ " " " = ১২.৫০ × ৩০ টাকা = ৩৭৫.০০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় ১০ জন পুরুষের আয় ৩৭৫ টাকা

উত্তর : ৩৭৫ টাকা।

04. দৈনিক ৮ ঘণ্টা পরিশ্রম করে ৫০ জন লোক একটি কাজ ১২ দিনে করতে পারে। দৈনিক কত ঘণ্টা পরিশ্রম করে ৬০ জন লোক ১৬ দিনে ঐ কাজটি করতে পারে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol"

৫০ জন লোক ১২ দিনে কাজটি করে দৈনিক ৮ ঘণ্টা খেটে

∴ ১ " " ১২ " " " " = ৮ × ৫০ ঘণ্টা খেটে

∴ ১ " " ১ " " " " = ৮ × ৫০ × ১২ "

∴ ৬০" " ১ " " " " $= \frac{৮ \times ৫০ \times ১২}{৬০}$ "

∴ ৬০" " ১৬ " " " " $= \frac{৮ \times ৫০ \times ১২}{৬০ \times ১৬}$ " = ৫ ঘণ্টা খেটে

অতএব, নির্ণেয় সময় ৫ ঘণ্টা।

উত্তর : ৫ ঘণ্টা।

05. যদি ৮ জন পুরুষ দৈনিক ৭ ঘণ্টা খেটে একটা কাজ ১২ দিনে সম্পন্ন করতে পারে তবে ১৪ জন বালক দৈনিক ৬ ঘণ্টা খেটে কত দিনে তা শেষ করতে পারবে? জানা আছে যে ১ জন পুরুষের কাজ = ২ জন বালকের কাজ।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৫)]

Sol" ১ জন পুরুষ = ২ জন বালক

৮ জন পুরুষ = ২ × ৮ = ১৬ জন বালক

১৬ জন বালক দৈনিক ৭ ঘণ্টা খেটে কাজটি করে = ১২ দিনে

∴ ১ " " " ৭ " " " " = ১২ × ১৬

∴ ১ " " " ১ " " " " = ১২ × ১৬ × ৭

∴ ১৪ " " " ৬ " " " " $= \frac{১২ \times ১৬ \times ৭}{১৪ \times ৬}$ = ১৬ দিনে।

উত্তর : ১৬ দিন।

06. দৈনিক 6 ঘন্টা পরিশ্রম করে 10 জন লোক একটি কাজ 7 দিনে করতে পারে। দৈনিক কত ঘন্টা পরিশ্রম 14 জনে 6 দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" মনে করি, দৈনিক x ঘন্টা পরিশ্রম করে 14 জনে 6 দিনে কাজটি করতে পারবে।

লোকের সংখ্যা	কার্যদিবস	কর্ম ঘন্টা
10	7	6
14	6	x

১ম ক্ষেত্রে, দৈনিক 1 ঘন্টা পরিশ্রম করে 1 জনে 1 দিনে করে $\frac{1}{10\times 7\times 6}$ অংশ কাজ

২য় ক্ষেত্রে, দৈনিক 1 ঘন্টা পরিশ্রম করে 1 জনে 1 দিনে করে $\frac{1}{14\times 6\times x}$ অংশ কাজ করে

সুতরাং, $\frac{1}{10\times 7\times 6}=\frac{1}{14\times 6\times x}$

$\Rightarrow 14\times 6\times x=10\times 7\times 6 \Rightarrow x=\frac{10\times 7\times 6}{14\times 6} \quad \therefore x=5$

∴ দৈনিক 5 ঘন্টা পরিশ্রম করে কাজটি করতে পারবে।

07. ৩ জন পুরুষ, ৪ জন স্ত্রীলোক এবং ১০ জন বালক একটি কাজ ৮ দিনে করতে পারে। ৪ জন স্ত্রীলোক এবং ৫ জন বালক ঐ কাজ ১৬ দিনে করতে পারে। দেখান যে, ৩ জন পুরুষের কাজ = ৪ জন স্ত্রীলোকের কাজ।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৭)]

Sol"

৩ জন পুরুষ + ৪ জন স্ত্রীলোক + ১০ জন বালক ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{৮}$ অংশ

আবার,

৪ জন স্ত্রীলোক +৫ জন বালক ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{১৬}$ অংশ [২ দ্বারা গুণন করে]

৮ " " +১০ " " ১ " " " $\frac{১}{৮}$ অংশ

সুতরাং,
(৩ জন পুরুষ + ৪ জন স্ত্রীলোক + ১০ জন বালক) এর কাজ = (৮ জন স্ত্রীলোক + ১০ জন বালক) এর কাজ
উভয় পক্ষ হতে ১০ জন বালকের কাজ বাদ দিলে পাই,
(৩ জন পুরুষ + ৪ জন স্ত্রীলোক) এর কাজ = ৮ জন স্ত্রী লোকের কাজ
অর্থাৎ, ৩ জন পুরুষের কাজ = ৪ জন স্ত্রীলোকের কাজ। (দেখানো হলো)

08. যদি ৩ জন পুরুষ বা ৫ জন বালক একটি কাজ ২০ দিনে করতে পারে তবে ৪ জন পুরুষ ও ১০ জন বালক কত দিনে তা করতে পারে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৮)]

Sol"

৩ জন পুরুষের কাজ = ৫ জন বালকের কাজ

∴ ১ " " " $=\frac{৫}{৩}$ " " "

∴ ৪ " " " $=\frac{৪\times ৫}{৩}=\frac{২০}{৩}$ জন বালকের কাজ

কাজ হিসেবে,

৪ জন পুরুষ ও ১০ জন বালক $= \frac{২০}{৩}$ জন বালক + ১০ জন বালক

$= \left(\frac{২০ + ৩০}{৩}\right)$ জন বালক $= \frac{৫০}{৩}$ জন বালক

৫ জন বালক কাজটি করে = ২০ দিনে

$\therefore$ ১ " " " " $= ২০ \times ৫$ "

$\therefore \frac{৫০}{৩}$ " " " $= \frac{২০ \times ৫ \times ৩}{৫০}$ দিনে

$= ৬$ দিনে

উত্তর : ৬ দিন।

(৮৯. যদি ১২ জন পুরুষ ও ১০ জন বালক কোন কাজের $\frac{৪৬}{৬৩}$ অংশ ৩ দিনে এবং ৪ জন পুরুষ ও ৫ জন বালক ঐ কাজের $\frac{১৭}{২৭}$ অংশ ৭ দিনে করে তবে ৭ জন পুরুষ ঐ কাজ কত দিনে করবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৬)]

Sol ১২ জন + ১০ বালক ৩ দিনে করে কাজটির $= \frac{৪৬}{৬৩}$ অংশ

১২ জন + ১০ বালক ১ দিনে করে কাজটির $= \frac{৪৬}{৬৩ \times ৩}$

$= \frac{৪৬}{১৮৯}$ অংশ ..... (১)

আবার, ৪ " "+ ৫ " " ৭ " " " $= \frac{১৭}{২৭}$ অংশ

৪ " "+ ৫ " " ১ " " " $= \frac{১৭}{২৭ \times ৭}$ অংশ

$= \frac{১৭}{১৮৯}$ অংশ ..... (২)

(২) কে ২ দ্বারা গুণন করে (১) হতে (২) বিয়োগ করে,

৪ জন পুরুষ ১ দিনে করে কাজটির $\frac{৪৬}{১৮৯} - \frac{৩৪}{১৮৯}$ অংশ

$= \frac{৪৬-৩৪}{১৮৯} = \frac{১২}{১৮৯} = \frac{৪}{৬৩}$ অংশ

$\therefore$ ১ " " ১ " " " $\frac{৪}{৬৩ \times ৪}$ অংশ

$\therefore$ ৭ " " ১ " " " $\frac{৪ \times ৭}{৬৩ \times ৪}$ অংশ $= \frac{১}{৯}$ অংশ

৭ জন পুরুষ $\frac{১}{৯}$ অংশ করে = ১ দিনে

$\therefore$ ৭ জন পুরুষ সম্পূর্ণ অংশ করে $= \frac{১ \times ৯}{১} = ৯$ দিনে

অতএব নির্ণেয় সময় ৯ দিন (উত্তর)

10. ৩০ জন লোক একটি কাজ ৩০ দিনে করতে পারে। যদি প্রতি ১০ দিন পর ৫ জন করে লোক চলে যায়, তবে কত দিনে কাজটি শেষ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩১)]

Sol" ৩০ জন লোক ১ দিনে করে কাজটির $= \frac{১}{৩০}$ অংশ

৩০ " " ১০ " " " $= \frac{১ \times ১০}{৩০} = \frac{১}{৩}$ অংশ

আবার, ৩০ জন লোক ১ দিনে করে কাজটির $= \frac{১}{৩০}$ অংশ

১ " " ১ " " " $= \frac{১}{৩০ \times ৩০} = \frac{১}{৯০০}$ অংশ

(৩০−৫) জন বা ২৫ জন ১০ দিনে করে কাজটির $= \frac{১ \times ২৫ \times ১০}{৯০০} = \frac{৫}{১৮}$ অংশ

(২৫−৫) জন বা ২০ জন ১০ দিনে করে কাজটির $= \frac{১ \times ২০ \times ১০}{৯০০} = \frac{২}{৯}$ অংশ

(২০−৫) জন বা ১৫ জন ১০ দিনে করে কাজটির $= \frac{১ \times ১৫ \times ১০}{৯০০} = \frac{১}{৬}$ অংশ

মোট কাজের পরিমাণ $= \frac{১}{৩} + \frac{৫}{১৮} + \frac{২}{৯} + \frac{১}{৬} = \frac{৬ + ৫ + ৪ + ৩}{১৮}$ অংশ $= \frac{১৮}{১৮} = ১$ অংশ বা সম্পূর্ণ কাজ

৩০ জন লোক করে = ১০ দিন

২৫ " " " = ১০ "

২০ " " " = ১০ "

১৫ " " " = ১০ "

মোট দিন = ৪০ দিন (উত্তর)

Pattern-02

11. মিতা একটি কাজ 10 দিনে করতে পারে। রিতা সে কাজ 15 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" মনে করি, তারা একত্রে d দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

নাম	কাজ সম্পন্ন করার দিন	১ দিনে সম্পন্ন কাজ	d দিনে সম্পন্ন কাজ
মিতা	10	$\frac{1}{10}$	$\frac{d}{10}$
রিতা	15	$\frac{1}{15}$	$\frac{d}{15}$

প্রশ্নমতে, $\frac{d}{10} + \frac{d}{15} = 1$

$\Rightarrow \frac{3d + 2d}{30} = 1 \quad \Rightarrow \frac{5d}{30} = 1 \quad \Rightarrow d = \frac{30}{5} \quad \therefore d = 6$

অতএব, তারা একত্রে 6 দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

12. রফিক একটি কাজ 10 দিনে করতে পারে। শফিক ঐ কাজ 15 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৩৫)]

Solⁿ মনে করি, তারা একত্রে d দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

নাম	কাজ সম্পন্ন করার দিন	১ দিনে কাজ সম্পন্ন অংশ	d দিনে কাজের সম্পন্ন অংশ
রফিক	10	$\frac{1}{10}$	$\frac{d}{10}$
শফিক	15	$\frac{1}{15}$	$\frac{d}{15}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{d}{10}+\frac{d}{15}=1$

বা, $d\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)=1$

বা, $d\left(\frac{3+2}{30}\right)=1$

বা, $\frac{5d}{30}=1$

বা, $d=\frac{30}{5}=6$

সুতরাং, তারা একত্রে 6 দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

13. করিম ও রহিম একত্রে একটি কাজ ৮ দিনে করতে পারে। রহিম একাকী কাজটি ১২ দিনে করতে পারে। করিম একাকী কত দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে?

Solⁿ
করিম ও রহিম একত্রে ৮ দিনে করতে পারে ১ অংশ

∴ " " " ১ " " " $\frac{১}{৮}$ "

আবার, রহিম একাকী ১২ দিনে করতে পারে ১ অংশ

∴ " " ১ " " " $\frac{১}{১২}$ "

সুতরাং করিম একাকী এক দিনে করতে পারে $\left(\frac{১}{৮}-\frac{১}{১২}\right)$ অংশ $=\frac{১}{২৪}$ অংশ

এখন, করিম একাকী $\frac{১}{২৪}$ অংশ কাজ করতে পারে ১ দিনে

∴ " " ১(সম্পূর্ণ) " " $\frac{১\times ২৪}{১}$ " = ২৪ দিনে।

অতএব, নির্ণেয় সময় ২৪ দিন।
উত্তর : ২৪ দিন।

14. একটি কাজ ক ১৪ দিনে এবং খ ২৮ দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কাজটি আরম্ভ করে কয়েক দিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল এবং খ বাকী কাজ ৭ দিনে সম্পন্ন করল। সম্পূর্ণ কাজটি কত দিনে সম্পন্ন হয়েছিল? [৪০তম বিসিএস]

Solⁿ ক ১৪ দিনে করে কাজটির ১ অংশ

∴ ক ১ " " " $\frac{১}{১৪}$ "

আবার, খ ২৮ দিনে করে কাজটির ১ অংশ

∴ " ১ " " " $\frac{১}{২৮}$ "

∴ " ৭ " " " $\frac{১}{২৮} \times ৭ = \frac{১}{৪}$ অংশ

∴ ক ও খ একত্রে ১ দিনে করে কাজটির $= \left(\frac{১}{১৪} + \frac{১}{২৮}\right)$ অংশ $= \frac{২+১}{২৮} = \frac{৩}{২৮}$ অংশ

যেহেতু খ শেষের ৭ দিনে একাকী করেছিল কাজটির $\frac{১}{৪}$ অংশ

সুতরাং ক ও খ একত্রে করেছিল কাজটির বাকী $\left(১ - \frac{১}{৪}\right) = \frac{৩}{৪}$ অংশ

ক ও খ একত্রে কাজটির $\frac{৩}{২৮}$ অংশ করে ১ দিনে

∴ " " " ১ " " $\frac{২৮}{৩}$ "

∴ " " " $\frac{৩}{৪}$ " " $\left(\frac{২৮}{৩} \times \frac{৩}{৪}\right)$ দিনে $= ৭$ দিনে

∴ কাজটি সম্পন্ন হয়েছিল $(৭ + ৭) = ১৪$ দিনে

উত্তর: ১৪ দিন

15. ক একটি কাজ ৯ দিনে এবং খ ১৮ দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে যায়। বাকি কাজটুকু খ ৬ দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল? [২০তম বিসিএস]

Sol" ক ৯ দিনে করে কাজটির ১ অংশ

∴ ক ১ " " " $\frac{১}{৯}$ অংশ

এবং খ ১৮ দিনে করে কাজটির ১ অংশ

∴ খ ১ " " " $\frac{১}{১৮}$ অংশ

∴ খ ৬ " " " $\frac{১ \times ৬}{১৮} = \frac{১}{৩}$ অংশ

অবশিষ্ট কাজ হলো $= \left(১ - \frac{১}{৩}\right)$ অংশ $= \left(\frac{৩-১}{৩}\right)$ অংশ $= \frac{২}{৩}$ অংশ

অবশিষ্ট $\frac{২}{৩}$ অংশ কাজ ক ও খ একত্রে সম্পন্ন করে।

ক ও খ ১ দিনে করে কাজটির $\left(\frac{১}{৯} + \frac{১}{১৮}\right)$ অংশ $= \left(\frac{২+১}{১৮}\right)$ অংশ $= \frac{১}{৬}$ অংশ

(ক + খ) $\frac{১}{৬}$ অংশ কাজ করে = ১ দিনে

∴ ১ " " " $= \frac{১ \times ৬}{১}$ দিনে

∴ $\frac{২}{৩}$ " " " $= \frac{১ \times ৬ \times ২}{৩}$ দিনে $= ৪$ দিনে

অতএব, কাজটি শেষ হয় = (৪ + ৬) দিনে বা ১০ দিনে।

উত্তর: ১০ দিনে।

16. ক একটি কাজ ১২ দিনে এবং খ তা ২৪ দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে যায়। বাকি কাজটুকু খ ৩ দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?

Sol"

ক একাকী ১২ দিনে করতে পারে ১ অংশ

∴ " " ১ " " " $\frac{১}{১২}$ "

খ একাকী ২৪ দিনে করতে পারে ১ অংশ

∴ " " ১ " " " $\frac{১}{২৪}$ "

সুতরাং ক ও খ একত্রে ১ দিনে করতে পারে $\left(\frac{১}{১২}+\frac{১}{২৪}\right)$ বা, $\frac{৩}{২৪}$ বা $\frac{১}{৮}$ অংশ

ক চলে যাওয়ার পর খ একাকী ৩ দিনে কাজ করেছিল।

এখন খ একাকী ১ দিনে করে $\frac{১}{২৪}$ কাজ

∴ খ " ৩ " " $\frac{৩}{২৪}$ বা, $\frac{১}{৮}$ কাজ।

বাকী $\left(১-\frac{১}{৮}\right)$ বা $\frac{৭}{৮}$ কাজ ক ও খ একত্রে করেছিল।

এখন,

ক ও খ একত্রে $\frac{১}{৮}$ কাজ করে ১ দিনে

∴ " " ১(সম্পূর্ণ) " ১ ÷ $\frac{১}{৮}$ দিনে বা ১ × ৮ দিনে

∴ " " $\frac{৭}{৮}$ " " ১ × ৮ × $\frac{৭}{৮}$ দিনে বা ৭ দিনে।

সুতরাং সম্পূর্ণ কাজটি শেষ হতে প্রয়োজন হয় মোট (৭ + ৩) দিন বা ১০ দিন।

উত্তর : ১০ দিন।

17. **ক একটি কাজ p দিনে করে এবং খ 2p দিনে করে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" খ 2p দিনে করে 1 টি কাজ

∴ খ 1 " " $\frac{1}{2p}$ "

∴ খ r " " $\frac{r}{2p}$ "

∴ ক ও খ একত্রে কাজ করে $\left(1-\frac{r}{2p}\right)=\frac{2p-r}{2p}$ অংশ

আবার, ক p দিনে করে 1 টি কাজ

∴ ক 1 " " $\frac{1}{p}$ " "

∴ ক ও খ একত্রে 1 দিনে করে $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right)=\frac{2+1}{2p}=\frac{3}{2p}$ অংশ কাজ

এখন, ক ও খ একত্রে $\frac{3}{2p}$ অংশ কাজ করে 1 দিনে

∴ ক ও খ " 1 " " " $1 \times \frac{2p}{3}$ দিনে

∴ ক ও খ " $\frac{2p-r}{2p}$ " " " $1 \times \frac{2p}{3} \times \frac{2p-r}{2p} = \frac{2p-r}{3}$ দিনে

∴ মোট সময় লেগেছিল $= \left(\frac{2p-r}{3} + r\right) = \frac{2p-r+3r}{3} = \frac{2p+2r}{3} = \frac{2(p+r)}{3}$ দিন

∴ কাজটি $\frac{2}{3}(p + r)$ দিনে শেষ হয়েছিল। **(Ans.)**

18. করিম একটি কাজের $\frac{১}{৩}$ অংশ ৮ দিনে করে চলে গেল। এরপর রহিম কাজে যোগ দিল এবং সে ৫ দিন পর কাজ ত্যাগ করলল। বাকি কাজ করিম ১২ দিনে শেষ করল। রহিম সম্পূর্ণ কাজটি কত দিনে করতে পারবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

করিম ৮ দিনে করে কাজটির $= \frac{১}{৩}$ অংশ

" ১ " " " $= \frac{১}{৩ \times ৮}$ অংশ

" ১২ " " " $= \frac{১ \times ১২}{৩ \times ৮}$ অংশ $= \frac{১}{২}$ অংশ

করিম মোট করে কাজটির $\left(\frac{১}{৩} + \frac{১}{২}\right)$ অংশ $= \left(\frac{২+৩}{৬}\right)$ অংশ $= \frac{৫}{৬}$ অংশ

রহিম ৫ দিনে করে কাজটির $\left(১ - \frac{৫}{৬}\right)$ অংশ $= \left(\frac{৬-৫}{৬}\right)$ অংশ $= \frac{১}{৬}$ অংশ

∴ রহিম $\frac{১}{৬}$ অংশ কাজ করে ৫ দিনে

∴ " সম্পূর্ণ " " $= \frac{৫ \times ৬}{১}$ দিনে $=$ ৩০ দিনে

অতএব, নির্ণেয় সময় ৩০ দিন। **(Ans.)**

19. হাবিবা ও হালিমা একটি কাজ একত্রে ২০ দিনে করতে পারে। হাবিবা ও হালিমা একত্রে ৮ দিন কাজ করার পর হাবিবা চলে গেল। হালিমা বাকি কাজ ২১ দিনে শেষ করল। সম্পূর্ণ কাজটি হালিমা কত দিনে করতে পারত?

[সপ্তম শ্রেণীর বোর্ড বই(গণিত), অধ্যায়-২.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" হাবিবা ও হালিমা একত্রে ২০ দিনে করে ১টি কাজ

∴ " " " " ১ " " $\frac{১}{২০}$ অংশ কাজ

∴ " " " " ৮ " " $\frac{১ \times ৮}{২০}$ অংশ কাজ $= \frac{২}{৫}$ অংশ

মনে করি, সম্পূর্ণ কাজটি $= ১$

∴ কাজ বাকি থাকে $= \left(১ - \frac{২}{৫}\right)$ অংশ $= \frac{৫-২}{৫}$ অংশ $= \frac{৩}{৫}$ অংশ

হালিমা $\frac{৩}{৫}$ অংশ কাজ শেষ করে ২১ দিনে

∴ " ১(সম্পূর্ণ) অংশ কাজ শেষ করে $\frac{৫ \times ২১}{৩}$ দিনে $=$ ৩৫ দিনে **(Ans.)**

20. তিনজন শ্রমিক একটি কাজ 12 দিনে করতে পারে। শ্রমিকদের মধ্যে 2 জন প্রত্যেকে তৃতীয় শ্রমিকের চেয়ে দ্বিগুণ দ্রুততায় কাজ করতে পারে। একজন দ্রুততর শ্রমিক একাকী কাজটি কতদিনে শেষ করতে পারবে? [৪১তম বিসিএস]

Sol" মনে করি,

৩য় শ্রমিক কাজটি করে 2x দিনে

১ম " " " x "

২য় " " " x "

৩য় শ্রমিক 2x দিনে করে 1 অংশ

" " 1 " " $\frac{1}{2x}$ "

∴ ১ম শ্রমিক x দিনে করে 1 অংশ

" " 1 " " $\frac{1}{x}$ "

∴ ২য় শ্রমিক x দিনে করে 1 অংশ

" " 1 " " $\frac{1}{x}$ "

∴ তারা একত্রে 1 দিনে করে $= \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)$ অংশ $= \frac{1+2+2}{2x}$ অংশ $= \frac{5}{2x}$ অংশ

প্রশ্নমতে, $\frac{5}{2x}=\frac{1}{12} \Rightarrow 2x = 60 \quad \therefore x = 30$

∴ দ্রুততর শ্রমিক একাকী করে 30 দিনে।

21. ক এক দিনে যে কাজ করতে পারে, খ এক দিনে তার তিনগুণ কাজ করতে পারে। তারা একত্রে ১০ দিনে কোন কাজের $\frac{8}{১৫}$ অংশ সমাধা করল। কতদিনে তারা আলাদাভাবে এ কাজ করতে পারবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol" মনে করি,

ক ১ দিনে করে কাজের x অংশ

খ ১ " " " ৩x অংশ

∴ ক ১০ " " " $x \times ১০ = ১০x$ অংশ

খ ১০ " " " $৩x \times ১০ = ৩০x$

প্রশ্নমতে, $১০x + ৩০x = \frac{৪}{১৫}$ বা, $৪০x \times ১৫ = ৪$ বা, $x = \frac{৪}{৬০০} = \frac{১}{১৫০}$

∴ ক ১ দিনে করে কাজের $\frac{১}{১৫০}$ অংশ

∴ খ ১ " " " $৩ \times \frac{১}{১৫০} = \frac{১}{৫০}$ "

ক $\frac{১}{১৫০}$ অংশ কাজ করে ১ দিনে

∴ ক ১(সম্পূর্ণ) " " " $\frac{১ \times ১৫০}{১} = ১৫০$ দিনে

এবং খ $\frac{১}{৫০}$ অংশ কাজ করে ১ দিনে

∴ খ ১(সম্পূর্ণ) " " " $= \frac{১ \times ৫০}{১}$ " $= ৫০$ দিনে

∴ নির্ণেয় সময় ১৫০ দিন ও ৫০ দিন

উত্তর : ১৫০ দিন এবং ৫০ দিন।

Pattern-03

22. ক একটি কাজ ১৫ দিনে, খ উহা ২০ দিনে এবং গ উহা ১২ দিনে করতে পারে। তিনজনে একত্রে কাজটি কতদিনে করতে পারবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol"

ক ১৫ দিনে করে কাজটির ১ অংশ

∴ ক ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{১৫}$ অংশ

অনুরূপভাবে,

খ ২০ দিনে করে কাজটির ১ অংশ

∴ খ ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{২০}$ অংশ

অনুরূপভাবে,

গ ১২ দিনে করে কাজটির ১ অংশ

∴ গ ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{১২}$ অংশ

ক, খ ও গ ১ দিনে করে কাজটির $\left(\frac{১}{১৫}+\frac{১}{২০}+\frac{১}{১২}\right)$ অংশ $=\left(\frac{৪+৩+৫}{৬০}\right)$ অংশ $=\frac{১২}{৬০}$ অংশ $=\frac{১}{৫}$ অংশ

$\frac{১}{৫}$ অংশ কাজ ক, খ ও গ করে ১ দিনে

∴ ১ " " " $=\frac{১\times৫}{১}=৫$ দিনে

অতএব, নির্ণেয় সময় ৫ দিন। (উত্তর)

23. ক ও খ একটি কাজ একত্রে ১০ ঘণ্টায় করতে পারে। খ ও গ সেই কাজ একত্রে ১২ ঘণ্টায় এবং ক ও গ সেই কাজ ১৫ ঘণ্টায় করতে পারে। যদি তারা তিনজনে একত্রে কাজ করে তবে কত ঘণ্টায় কাজটি শেষ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol"

ক ও খ ১০ ঘণ্টায় করে কাজের ১ অংশ

∴ " ১ " " " $\frac{১}{১০}$ অংশ

অনুরূপভাবে,

(খ + গ) ১ " " " $=\frac{১}{১২}$ "

(ক + গ) ১ " " " $=\frac{১}{১৫}$ "

যোগ করে পাই,

২ (ক + খ + গ) ১ ঘণ্টায় করে কাজটির $\left(\frac{১}{১০}+\frac{১}{১২}+\frac{১}{১৫}\right)$ অংশ $=\frac{৬+৫+৪}{৬০}$ অংশ $=\frac{১৫}{৬০}$ অংশ $=\frac{১}{৪}$ অংশ

∴ ক + খ + গ ১ " " " $=\frac{১}{৪\times২}$ অংশ বা $\frac{১}{৮}$ অংশ

$\frac{১}{৮}$ অংশ কাজ করে ক, খ ও গ করে = ১ ঘণ্টায়

∴ সম্পূর্ণ " " " " $=\frac{১\times৮}{১}$ " = ৮ ঘণ্টায়

অতএব, নির্ণেয় সময় ৮ ঘণ্টা।

Ashraful's Math Cocktail (written) -40/B

24. একটি কাজ ক যে সময়ে করতে পারে, খ ও গ একত্রে সেই সময়ে করতে পারে। যদি ক ও খ একত্রে ঐ কাজ ১০ দিনে এবং গ একা ৫০ দিনে করতে পারে, তবে খ একা কত দিনে কাজটি করতে পারবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol

ক এর কাজের সময় = (খ ও গ) এর কাজের সময়

অর্থাৎ ক = খ + গ

(ক + খ) একটি কাজ করে ১০ দিনে

∴ (ক + খ) ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{১০}$ অংশ

আবার, গ কাজটি করে ৫০ দিনে

∴ গ ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{৫০}$ অংশ

ক + খ + গ ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{১০} + \frac{১}{৫০} = \frac{৩}{২৫}$ অংশ

বা, ২ক " " " " $= \frac{৩}{২৫}$ অংশ [∵ খ + গ = ক]

বা, ক " " " " $= \frac{৩}{২৫ \times ২}$ অংশ $= \frac{৩}{৫০}$ অংশ

∴ খ ১ দিনে করে কাজটির $= \left(\frac{১}{১০} - \frac{৩}{৫০}\right)$ অংশ

$= \frac{৫ - ৩}{৫০}$ অংশ $= \frac{২}{৫০}$ অংশ $= \frac{১}{২৫}$ অংশ

$\frac{১}{২৫}$ অংশ কাজ খ করে ১ দিনে

∴ (সম্পূর্ণ অংশ) " $= \frac{১ \times ২৫}{১}$ দিনে = ২৫ দিনে

অতএব, নির্ণেয় সময় ২৫ দিন।

উত্তর : ২৫ দিন।

25. একটি কাজ ক ২০ দিনে, খ ৩০ দিনে এবং গ ৬০ দিনে করতে পারে। প্রথম দিন হতে প্রতি তৃতীয় দিনে খ এবং প্রতি চতুর্থ দিনে গ, ক-কে সাহায্য করলে ঐ কাজটি কত দিনে সম্পন্ন হবে? [৩৪তম, ৩৩তম, ৩২তম, ১৫তম বিসিএস]

Sol ৩, ৪ এর ল. সা. গু = ১২

∴ প্রতি ১২ দিনে খ কাজ করে = (১২ ÷ ৩) = ৪ দিন

এবং " ১২ " গ " " = (১২ ÷ ৪) = ৩ "

ক ২০ দিনে করে কাজের ১ (সম্পূর্ণ) অংশ

∴ " ১ " " " $\frac{১}{২০}$ "

∴ " ১২ " " " $\frac{১২}{২০} = \frac{৩}{৫}$ "

আবার, খ ১ দিনে করে কাজের $\frac{১}{৩০}$ অংশ

∴ " ৪ " " " $\frac{৪}{৩০} = \frac{২}{১৫}$ অংশ

গ ১ দিনে করে কাজের $\frac{১}{৬০}$ অংশ

∴ " ৩ " " " $\frac{৩}{৬০}=\frac{১}{২০}$ অংশ

প্রথম ১২ দিনে মোট কাজ হয় $\left(\frac{৩}{৫}+\frac{২}{১৫}+\frac{১}{২০}\right)=\frac{৩৬+৮+৩}{৬০}=\frac{৪৭}{৬০}$ অংশ

কাজ বাকী থাকে $\left(১-\frac{৪৭}{৬০}\right)=\frac{৬০-৪৭}{৬০}=\frac{১৩}{৬০}$ অংশ

পরবর্তী তৃতীয় দিনে ক, খ এর সাহায্য নিলে ৩ দিনে মোট কাজ হয়

$\left(\frac{১}{২০}\times ৩+\frac{১}{৩০}\right)$ অংশ $=\frac{৯+২}{৬০}=\frac{১১}{৬০}$ অংশ

বাকী কাজ থাকে $\left(\frac{১৩}{৬০}-\frac{১১}{৬০}\right)$ অংশ $=\frac{১৩-১১}{৬০}=\frac{২}{৬০}=\frac{১}{৩০}$

মোট কাজ হয়েছে = (১২ + ৩) দিন = ১৫ দিন

১৬তম দিনে ক গ কে সাথে নিলে মোট কাজ হয় $=\left(\frac{১}{২০}+\frac{১}{৬০}\right)$ অংশ $=\frac{৩+১}{৬০}=\frac{৪}{৬০}=\frac{১}{১৫}$ অংশ

∴ $\frac{১}{১৫}$ অংশ কাজ হয় = ১ দিনে

∴ ১ " " " $=\frac{১\times ১৫}{১}$ দিনে

∴ $\frac{১}{৩০}$ " " " $=\frac{১\times ১৫}{৩০}=\frac{১}{২}$ দিনে

∴ কাজটি শেষ হতে মোট সময় লেগেছিল $\left(১৫+\frac{১}{২}\right)=১৫\frac{১}{২}$ দিন **(উত্তর)**

26. ক একটি কাজ ৩৬ দিনে, খ ১৮ দিনে এবং গ ১২ দিনে করতে পারে। প্রতি দ্বিতীয় দিনে খ এবং প্রতি তৃতীয় দিনে গ, ক-কে সাহায্য করলে ঐ কাজটি কত দিনে সম্পন্ন হবে? [২১তম বিসিএস]

Sol^n ২ ও ৩ এর ল. সা. গু = ৬

খ ৬ দিনের মধ্যে কাজ করে = ৬ ÷ ২ = ৩ দিন

এবং গ ৬ " " " " = ৬ ÷ ৩ = ২ দিন

প্রথম ৬ দিনে ক, খ ও গ-এর কাজ হিসাব করলে পাই,

ক ৩৬ দিনে করে কাজটির = ১ অংশ

ক ১ দিনে করে কাজটির $=\frac{১}{৩৬}$ অংশ

∴ ক ৬ " " " $=\frac{১\times ৬}{৩৬}=\frac{১}{৬}$ অংশ

আবার, খ ১৮ দিনে করে কাজটির = ১ অংশ

খ ১ দিনে করে কাজটির $=\frac{১}{১৮}$ অংশ

∴ খ ৩ " " " $=\frac{১\times ৩}{১৮}=\frac{১}{৬}$ অংশ

এবং, গ ১২ দিনে করে কাজটির = ১ অংশ

গ ১ দিনে করে কাজটির = $\frac{১}{১২}$ অংশ

∴ গ ২ " " " = $\frac{১ \times ২}{১২} = \frac{১}{৬}$ অংশ

∴ ৬ দিনে মোট কাজ হয় = $\left(\frac{১}{৬} + \frac{১}{৬} + \frac{১}{৬}\right)$ অংশ

$= \frac{১ + ১ + ১}{৬} = \frac{১}{২}$ অংশ

∴ $\frac{১}{২}$ অংশ কাজ হয় = ৬ দিনে

∴ ১ " " " = $\frac{৬ \times ২}{১}$ = ১২ দিনে

অতএব, কাজটি শেষ হতে ১২ দিন সময় লাগবে।
উত্তর: ১২ দিন

27. ক একটি কাজ ২০ দিনে, খ ৩০ দিনে এবং গ ৬০ দিনে করতে পারে। খ ও গ একত্রে যদি প্রত্যেক তৃতীয় দিনে ক-কে সাহায্য করে তবে কত দিনে কাজটি শেষ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol" ক কাজটি করে ২০ দিনে

∴ ক ১ দিনে করে কাজটির = $\frac{১}{২০}$ অংশ

∴ ক ৩ " " " = $\frac{৩}{২০}$ "

৩০ দিনে করে ১টি কাজ

∴ খ ১ দিনে করে কাজটির = $\frac{১}{৩০}$ অংশ

গ ৬০ দিনে করে ১টি কাজ

∴ গ ১ দিনে করে কাজটির = $\frac{১}{৬০}$ কাজ

খ ও গ প্রত্যেক তৃতীয় দিনে ক-কে সাহায্য করে।

∴ ৩ দিনে মোট কাজ হয় = $\left(\frac{৩}{২০} + \frac{১}{৩০} + \frac{১}{৬০}\right)$ অংশ = $\frac{৯ + ২ + ১}{৬০} = \frac{১}{৫}$ অংশ

$\frac{১}{৫}$ অংশ কাজ হয় ৩ দিনে

∴ ১ (সম্পূর্ণ) " " = $\frac{৩ \times ৫}{১}$ দিনে = ১৫ দিনে

অতএব, নির্ণেয় সময় ১৫ দিন। (উত্তর)

28. কোন কাজ ক ও খ একত্রে ১০ দিনে, খ ও গ একত্রে ১৫ দিনে এবং গ ও ক একত্রে ২৫ দিনে করতে পারে। তারা একত্রে ৪ দিন কাজ করল। তারপর ক চলে গেল এবং খ ও গ একত্রে ৪ দিন কাজ করল। তারপর খ চলে গেল। গ কত দিনে বাকি কাজটি শেষ করবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol"

ক ও খ ১ দিনে করে কাজটির $= \frac{১}{১০}$ অংশ

খ ও গ ১ " " " $= \frac{১}{১৫}$ "

গ ও ক ১ " " " $= \frac{১}{২৫}$ "

২(ক + খ + গ) ১ দিনে করে কাজটির $\left(\frac{১}{১০} + \frac{১}{১৫} + \frac{১}{২৫}\right)$ অংশ $= \frac{১৫ + ১০ + ৬}{১৫০} = \frac{৩১}{১৫০}$ অংশ

$\therefore$ (ক + খ + গ) ১ দিনে করে কাজটির $= \frac{৩১}{১৫০ \times ২} = \frac{৩১}{৩০০}$ অংশ

$\therefore$ " ৪ " " " $= \frac{৩১ \times ৪}{৩০০} = \frac{৩১}{৭৫}$ অংশ

খ ও গ ৪ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{১৫} \times ৪$ অংশ $= \frac{৪}{১৫}$ অংশ

৮ দিন শেষে মোট কাজ হয় $= \frac{৩১}{৭৫} + \frac{৪}{১৫} = \frac{৩১ + ২০}{৭৫} = \frac{৫১}{৭৫} = \frac{১৭}{২৫}$

বাকি কাজ থাকে $= \left(১ - \frac{১৭}{২৫}\right)$ অংশ $= \frac{২৫ - ১৭}{২৫}$ অংশ $= \frac{৮}{২৫}$ অংশ

গ ১ দিনে করে কাজটির $= \left(\frac{৩১}{৩০০} - \frac{১}{১০}\right) = \frac{৩১ - ৩০}{৩০০} = \frac{১}{৩০০}$ অংশ

$\frac{১}{৩০০}$ অংশ কাজ গ করে ১ দিনে

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১ \times ৩০০}{১}$ দিনে

$\therefore \frac{৮}{২৫}$ " " " $\frac{১ \times ৩০০ \times ৮}{১ \times ২৫} = ৯৬$ দিনে

অতএব নির্ণেয় সময় ৯৬ দিন।

উত্তর : ৯৬ দিন।

29. একটি কাজ ক ৮০ দিনে, খ ৯৬ দিনে এবং গ ২৪০ দিনে করতে পারে। প্রতি পঞ্চম দিনে খ এবং প্রতি ষষ্ঠ দিনে গ, ক-কে সাহায্য করলে, ঐ কাজটি কত দিনে সম্পন্ন হবে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-৫৭)]*

Sol" ৫ ও ৬ এর ল.সা.গু. = ৩০

মনে করি, প্রথম ৩০ দিনে ক, খ এবং গ কাজে অংশ গ্রহণ করে।

ক সম্পূর্ণ কাজ করে ৮০ দিনে

$\therefore$ ক ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{৮০}$ অংশ।

$\therefore$ ক ৩০ " " " $\frac{১ \times ৩০}{৮০}$ বা $\frac{৩}{৮}$ অংশ

খ ৩০ দিনে ৬ বার অর্থাৎ ৬ দিন কাজ করে।

খ সম্পূর্ণ কাজ করে ৯৬ দিনে।

$\therefore$ খ ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{৯৬}$ অংশ

$\therefore$ খ ৬ দিনে করে কাজটির $\frac{১ \times ৬}{৯৬}$ অংশ $= \frac{১}{১৬}$ অংশ

গ, ৩০ দিনে ৫ বার অর্থাৎ ৫ দিন কাজ করে।
গ সম্পূর্ণ কাজ করে ২৪০ দিনে

$\therefore$ গ ১ দিনে করে কাজটির $\frac{১}{২৪০}$ অংশ

$\therefore$ গ ৫ দিনে করে কাজটির $\frac{১ \times ৫}{২৪০}$ অংশ $= \frac{১}{৪৮}$ অংশ

৩০ দিনে মোট কাজ হয় $= \left(\frac{৩}{৮} + \frac{১}{১৬} + \frac{১}{৪৮}\right) = = \frac{১৮ + ৩ + ১}{৪৮} = \frac{২২}{৪৮} = \frac{১১}{২৪}$

অর্থাৎ ক, খ এবং গ $\frac{১১}{২৪}$ অংশ কাজ করে ৩০ দিনে

সুতরাং তারা ৬০ দিনে করবে $= \frac{১১ \times ২}{২৪}$ অংশ $= \frac{১১}{১২}$ অংশ

কাজ অবশিষ্ট থাকে $= \left(১ - \frac{১১}{১২}\right)$ অংশ $= \frac{১}{১২}$ অংশ

পরবর্তী ৫ দিনে ক ও খ করে $= \frac{১ \times ৫}{৮০}$ অংশ $+ \frac{১}{৯৬}$ অংশ $= \left(\frac{১}{১৬} + \frac{১}{৯৬}\right)$ অংশ $= \frac{৬ + ১}{৯৬} = \frac{৭}{৯৬}$ অংশ

অবশিষ্ট কাজ থাকে $= \frac{১}{১২} - \frac{৭}{৯৬} = \frac{৮ - ৭}{৯৬} = \frac{১}{৯৬}$

$\frac{১}{৯৬}$ অংশ (ক + গ) করে।

(ক + গ) ১ দিনে করে $= \left(\frac{১}{৮০} + \frac{১}{২৪০}\right) = \frac{৩ + ১}{২৪০} = \frac{৪}{২৪০} = \frac{১}{৬০}$ অংশ

$\frac{১}{৬০}$ অংশ কাজ (ক + গ) করে ১ দিনে।

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{১ \times ৬০}{১}$ দিনে

$\therefore \frac{১}{৯৬}$ " " " " $\frac{১ \times ৬০ \times ১}{১ \times ৯৬} = \frac{৫}{৮}$ দিনে।

$\therefore$ মোট কাজ হয় = ৬০ দিন + ৫ দিন + $\frac{৫}{৮}$ দিন = $৬৫\frac{৫}{৮}$ দিন (উত্তর)

Pattern-04

৩০. একজন ঠিকাদার ২৫ দিনে একটি রাস্তার কাজ শেষ করার জন্য চুক্তি করে ৩০ জন শ্রমিক নিয়োগ করলো। কিন্তু ১৫ দিন পর রাস্তার কাজ মাত্র অর্ধেক শেষ হলো। নির্ধারিত সময়ের মধ্যে রাস্তার কাজটি শেষ করতে অতিরিক্ত কতজন শ্রমিক নিয়োগের প্রয়োজন হবে? [৩০তম বিসিএস]

Sol দিন বাকি (২৫ − ১৫) দিন = ১০ দিন

কাজ বাকি $\left(১ - \frac{১}{২}\right)$ অংশ $= \frac{২ - ১}{২}$ অংশ $= \frac{১}{২}$ অংশ

অতএব,

$\frac{১}{২}$ অংশ কাজ ১৫ দিনে করে ৩০ জনে

$\therefore \frac{১}{২}$ " " ১ " " (৩০ × ১৫) জনে

$\therefore \frac{১}{২}$ " " ১০ " " $\frac{৩০ \times ১৫}{১০}$ " = ৪৫ জনে

$\therefore$ অতিরিক্ত লোক নিয়োগ করতে হয় = (৪৫ − ৩০) জন = ১৫ জন। ()

উত্তর: ১৫ জন

31. কয়েকজন শ্রমিক একটি কাজ 18 দিনে করে দেবে বলে ঠিক করে। কিন্তু তাদের মধ্যে 9 জন অনুপস্থিত থাকায় কাজটি 36 দিনে সম্পন্ন হলো। 36 জন শ্রমিক নিযুক্ত হলে কত দিনে কাজটি সম্পন্ন হতো? [২৩তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, মোট শ্রমিকের সংখ্যা = x জন

∴ 9 জন অনুপস্থিত থাকায় শ্রমিকের সংখ্যা = (x – 9) জন

(x – 9) জনে করে 36 দিনে

∴ 1 " " 36 × (x – 9) দিনে

∴ x " " $\frac{36(x-9)}{x}$ দিনে

∴ $\frac{36(x-9)}{x} = 18$ বা, $36x - 324 = 18x$ বা, $36x - 18x = 324$ বা, $18x = 324$

∴ x = 18 জন

18 জনে করে 18 দিনে

∴ 1 " " 18 × 18 দিনে

∴ 36 " " $\frac{18 \times 18}{36} = 9$ দিন (উত্তর)

32. একজন ঠিকাদার একটি কাজ 80 দিনে সম্পন্ন করার চুক্তিতে 60 জন লোক নিযুক্ত করল। 20 দিন পরে দেখা গেল যে, কাজের মাত্রা $\frac{1}{5}$ অংশ সম্পন্ন হয়েছে। নির্দিষ্ট সময়ে (80 দিনে) কাজটি সম্পন্ন করতে হলে অতিরিক্ত কতজন লোক নিয়োগ করতে হবে? [২২তম বিসিএস]

Sol" 20 দিন পরে কাজের বাকী অংশ $= \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ অংশ $= \left(\frac{5-1}{5}\right) = \frac{4}{5}$ অংশ

দিন বাকী থাকে = (80 – 20) দিন = 60 দিন

$\frac{1}{5}$ অংশ কাজ 20 দিনে করে = 60 জন লোক

∴ 1 " " 20 " " $= \frac{60 \times 5}{1}$ জন লোক

∴ 1 " " 1 " " $= \frac{60 \times 5 \times 20}{1}$ জন লোক

∴ $\frac{4}{5}$ " " 1 " " $= \frac{60 \times 5 \times 20 \times 4}{1 \times 5}$ জন লোক

∴ $\frac{4}{5}$ " " 60 " " $= \frac{60 \times 5 \times 20 \times 4}{1 \times 5 \times 60}$ জন লোক = 80 জন লোক

∴ অতিরিক্ত লোক প্রয়োজন = (80 – 60) = 20 জন

উত্তর: 20 জন।

33. 6 মাইল দীর্ঘ একটি রাস্তা 5 মাসে শেষ করে দেয়ার চুক্তিতে 60 জন লোক নিযুক্ত করা হয়। 1 মাস পর দেখা গেল মাত্র 1 মাইল কাজ শেষ হয়েছে। অতিরিক্ত কতজন লোক নিযুক্ত করলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হবে? [১৭তম বিসিএস]

Sol" 1 মাস কাজ করার পর সময় বাকি থাকল (5 – 1) মাস = 4 মাস

কাজ বাকি থাকল (6 – 1) = 5 মাইল

সুতরাং বাকি 4 মাস সময়ে 5 মাইল রাস্তা তৈরির কাজ শেষ করতে হবে।

1 মাইল রাস্তা 1 মাসে শেষ করতে পারে 60 জন লোকে

1 " " 4 " " " " $\frac{60}{4}$ জন লোকে

5 " " 4 " " " " $\frac{60 \times 5}{4} = 75$ জন লোকে

∴ অতিরিক্ত লোক নিয়োগ করতে হবে = (75 – 60) = 15 জন (উত্তর)

34. একজন ঠিকাদার ৫০ দিনে একটি কাজ সমাধা করবে বলে চুক্তি করল এবং ২০ জন শ্রমিক নিয়োগ করল। ২০ দিন পর দেখা গেল কাজটির মাত্র $\frac{১}{৪}$ অংশ সম্পন্ন হয়েছে। নির্ধারিত সময়ে কাজটি শেষ করতে হলে অতিরিক্ত আর কতজন শ্রমিক নিযুক্ত করতে হবে?

[১১তম বিসিএস]

Sol" কাজ বাকি $= \left(১ - \frac{১}{৪}\right) = \frac{৩}{৪}$ অংশ

সময় বাকি $= (৫০ - ২০) = ৩০$ দিন

$\therefore \frac{১}{৪}$ অংশ কাজ ২০ দিনে সমাধা করে ২০ জনে

$\therefore ১$ " " ১ " " " $৪ \times ২০ \times ২০$

$\therefore \frac{৩}{৪}$ " " ৩০ " " " $\frac{৪ \times ২০ \times ২০ \times ৩}{৩০ \times ৪} = ৪০$ জনে

$\therefore$ অতিরিক্ত শ্রমিক সংখ্যা $= (৪০ - ২০) = ২০$ জন **(Ans.)**

উত্তর : ২০ জন।

35. ৩০ জন শ্রমিক ২০ দিনে একটি বাড়ি তৈরি করতে পারে। কাজ শুরুর ১০ দিন পরে খারাপ আবহাওয়ার জন্য ৬ দিন কাজ বন্ধ রাখতে হয়েছে। নির্ধারিত সময়ে কাজটি শেষ করতে অতিরিক্ত কতজন শ্রমিক লাগবে?

[সপ্তম শ্রেণীর বোর্ড বই(গণিত), অধ্যায়-২.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" কাজ শুরুর ১০ দিন পর ৬ দিন কাজ বন্ধ থাকায় মোট অতিবাহিত সময় $= (১০ + ৬)$ দিন $= ১৬$ দিন

$\therefore$ অবশিষ্ট সময় $= (২০ - ১৬)$ দিন $= ৪$ দিন

৩০ জন শ্রমিক ২০ দিনে করে ১টি কাজ

$\therefore$ ৩০ " " ১ " " $\frac{১}{২০}$ অংশ কাজ

$\therefore$ ৩০ " " ১০ " " $\frac{১ \times ১০}{২০}$ অংশ কাজ

$= \frac{১}{২}$ অংশ কাজ

$\therefore$ কাজ বাকি থাকে $= \left(১ - \frac{১}{২}\right)$ অংশ $= \frac{২ - ১}{২}$ অংশ $= \frac{১}{২}$ অংশ

যেহেতু $\frac{১}{২}$ অংশ কাজ অবশিষ্ট $(১০ - ৬) = ৪$ দিনে শেষ করতে হবে

$\frac{১}{২}$ অংশ কাজ ১০ দিনে করতে পারবে ৩০ জন শ্রমিক

$\therefore \frac{১}{২}$ " " ১ " " " ৩০×১০ জন শ্রমিক

$\therefore \frac{১}{২}$ " " ৪ " " " $\frac{৩০ \times ১০}{৪}$ জন শ্রমিক

$= ৭৫$ জন শ্রমিক

$\therefore$ অতিরিক্ত শ্রমিক লাগবে $= (৭৫ - ৩০)$ জন $= ৪৫$ জন **(Ans.)**

36. একজন ঠিকাদার ৫ মাইল দীর্ঘ রেল লাইন ১৬০ দিনে করে দেওয়ার চুক্তিতে ৬০ জন লোক নিযুক্ত করল। ৪০ দিন পর দেখা গেল যে মাত্র ১ মাইল শেষ হয়েছে। অতিরিক্ত কতজন লোক নিয়োগ করলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩০)]

Sol" দিন বাকী = ১৬০ − ৪০ = ১২০ দিন

কাজ বাকী = ৫ − ১ = ৪ মাইল

১ মাইল দীর্ঘ রেলপথ ৪০ দিনে করে = ৬০ জন লোক

১ " " " ১ " " = ৬০ × ৪০ "

৪ " " " ১২০ " " = $\frac{৬০ \times ৪০ \times ৪}{১২০}$ = ৮০ জন লোক

অতিরিক্ত লোক প্রয়োজন = ৮০ − ৬০ = ২০ জন

অতএব নির্ণেয় লোকের সংখ্যা ২০ জন (উত্তর)।

Pattern-05

37. যে কাজ রহিম তিন ঘণ্টায় সম্পন্ন করতে পারে, করিম তা চার ঘণ্টায় সম্পন্ন করে এবং করিমের গতিতে আমান সেই কাজের অর্ধেক পরিমাণ করতে পারে। তিন জনকে ৮৫ টাকা মজুরি দেওয়া হলে প্রত্যেকে কত করে পাবে?

[১৩তম বিসিএস]

Sol" রহিম, ৩ ঘণ্টায় করে ১টি কাজ

∴ " ১ " " $\frac{১}{৩}$ অংশ

করিম, ৪ ঘণ্টায় করে ১টি কাজ

∴ " ১ " " $\frac{১}{৪}$ অংশ

যেহেতু করিমের গতিতে আমান $\frac{১}{২}$ অংশ কাজ করে

আমান, ৪ ঘণ্টায় করে $\frac{১}{২}$ অংশ

∴ " ১ " " $\frac{১}{৪ \times ২} = \frac{১}{৮}$ অংশ

রহিমের কাজ : করিমের কাজ : আমানের কাজ = $\frac{১}{৩} : \frac{১}{৪} : \frac{১}{৮}$ [৩, ৪ ও ৮ এর ল. সা. গু ২৪ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{১ \times ২৪}{৩} : \frac{১ \times ২৪}{৪} : \frac{১ \times ২৪}{৮}$ = ৮ : ৬ : ৩

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = (৮ + ৬ + ৩) = ১৭

∴ রহিম পাবে ৮৫ এর $\frac{৮}{১৭}$ = ৪০ টাকা

করিম পাবে ৮৫ এর $\frac{৬}{১৭}$ = ৩০ টাকা

আমান পাবে ৮৫ এর $\frac{৩}{১৭}$ = ১৫ টাকা

উত্তর: ৪০ টাকা, ৩০ টাকা, ১৫ টাকা।

Pattern-01 (দুই নল)

01. একটি চৌবাচ্চার দুইটি নল দিয়ে যথাক্রমে ২০ ও ৩০ মিনিটে পূর্ণ হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হতে কত সময় লাগবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৩)]

Sol" ১ম নল দ্বারা ১ মিনিটে পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির $= \frac{১}{২০}$ অংশ

২য় নল " ১ " " " " $= \frac{১}{৩০}$ অংশ

উভয় নল " ১ " " " " $= \left(\frac{১}{২০} + \frac{১}{৩০}\right)$ অংশ

$= \frac{৩+২}{৬০}$ অংশ $= \frac{৫}{৬০}$ অংশ $= \frac{১}{১২}$ অংশ

চৌবাচ্চার $\frac{১}{১২}$ অংশ পূর্ণ হয় = ১ মিনিটে।

" ১ " " " = ১ × ১২ মিনিটে।

সুতরাং নির্ণেয় সময় ১২ মিনিট। (উঃ)

02. একটি পিপায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নলটি খুলে দিলে পিপাটি 20 মিনিটে পূর্ণ হয়। দ্বিতীয় নলটি খুলে দিলে 30 মিনিটে পরিপূর্ণ পিপাটি খালি হয়। দুটি নল এক সঙ্গে খুলে দিলে খালি পিপাটি কত সময়ে পূর্ণ হয়?

[২৪তম বিসিএস]

Sol" ১ম নল দ্বারা 20 মিনিটে পূর্ণ হয় পিপাটির 1 অংশ

∴ ১ম " " 1 " " " " $\frac{1}{20}$ অংশ

২য় নল দ্বারা 30 মিনিটে খালি হয় পিপাটির 1 অংশ

∴ ২য় " " 1 " " " " $\frac{1}{30}$ অংশ

উভয় নল দ্বারা 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $= \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right)$ অংশ

$= \frac{3-2}{60} = \frac{1}{60}$ অংশ

$\frac{1}{60}$ অংশ পূর্ণ হয় = 1 মিনিটে

∴ 1(সম্পূর্ণ) অংশ পূর্ণ হয় $= \frac{1 \times 60}{1}$ মিনিটে = 60 মিনিটে

উত্তর: ৬০ মিনিট

03. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা t_2 মিনিটে খালি হয়। নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে? (এখানে $t_2 > t_1$)

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol" মনে করি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে p লিটার পানি প্রবেশ করে ও দ্বিতীয় নল দ্বারা প্রতি মিনিটে q লিটার পানি বের হয় এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট v লিটার পানি ধরে।

আরও মনে করি, নল দুইটি একত্রে খোলা থাকলে খালি চৌবাচ্চাটি m মিনিটে পূর্ণ হয়।

১ম নল দ্বারা t_1 মিনিটে খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়।

∴ $v = pt_1$ ..... (i)

২য় নল দ্বারা t_2 মিনিটে পূর্ণ চৌবাচ্চা খালি হয়।

$\therefore \quad v = qt_2$ ..... (ii)

দুইটি নল দ্বারা m মিনিটে খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়।

$\therefore \quad v = pm - qm$ বা, $v = (p - q)m$ ..... (iii)

(i) নং থেকে, $p = \frac{v}{t_1}$ এবং (ii) নং থেকে, $q = \frac{v}{t_2}$

$\therefore$ (iii) নং থেকে, $v = \left(\frac{v}{t_1} - \frac{v}{t_2}\right)m \Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)m = \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} \quad \therefore m = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1}$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $\frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1}$ মিনিট।

04. একটি চৌবাচ্চার দুটি নল দ্বারা পানি প্রবেশ করতে পারে। প্রথম নলটি ৯ ঘন্টায় এবং দ্বিতীয় নলটি ১২ ঘন্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করতে পারে। উভয় নল দ্বারা কয়েক ঘন্টা পানি প্রবেশ করার পর প্রথম নলটি বন্ধ করে দেয়া হয়। দ্বিতীয় নলটি পরবর্তী ২ ঘন্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে। চৌবাচ্চাটি কত ঘন্টায় পূর্ণ হয়েছিল?

[২১তম বিসিএস]

Sol" ১ম নল দ্বারা,

৯ ঘন্টায় পূর্ণ হয় চৌবাচ্চার ১ (সম্পূর্ণ) অংশ

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{১}{৯}$ অংশ

২য় নল দ্বারা,

১২ ঘন্টায় পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির ১ (সম্পূর্ণ) অংশ

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{১}{১২}$ অংশ

$\therefore$ ২ " " " " $\frac{২ \times ১}{১২} = \frac{১}{৬}$ অংশ

১ম ও ২য় নল একত্রে পূর্ণ করে চৌবাচ্চার $\left(১ - \frac{১}{৬}\right)$ অংশ $= \frac{৬ - ১}{৬} = \frac{৫}{৬}$ অংশ

১ম ও ২য় নল একত্রে ১ ঘন্টায় পূর্ণ করে $\left(\frac{১}{৯} + \frac{১}{১২}\right) = \frac{৪ + ৩}{৩৬} = \frac{৭}{৩৬}$ অংশ

১ম ও ২য় নল একত্রে

$\frac{৭}{৩৬}$ অংশ পূর্ণ করে = ১ ঘন্টায়

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{৩৬}{৭}$ "

$\therefore \frac{৫}{৬}$ " " " $= \frac{৩৬ \times ৫}{৭ \times ৬} = \frac{৩০}{৭}$ ঘন্টায়

$\therefore$ চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হতে মোট সময় লাগবে $= \left(\frac{৩০}{৭} + ২\right)$ ঘন্টা

$= \frac{৩০ + ১৪}{৭} = \frac{৪৪}{৭} = ৬\frac{২}{৭}$ ঘন্টা

উত্তর: $৬\frac{২}{৭}$ ঘন্টা

05. একটি পিপায় দুইটি নল আছে। প্রথম নল দ্বারা পিপাটি ৪০ মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা পিপাটি ৬০ মিনিটে খালি হয়। যদি পর পর এক মিনিটে করে নল দুইটি যথাক্রমে খুলে রাখা হয় এবং পূর্ণ সংখ্যক মিনিটে পিপাটি পূর্ণ হয়, তবে কত সময়ে পিপাটি পূর্ণ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২]

Sol" প্রথম নল দ্বারা ৪০ মিনিটে পূর্ণ হয় ১ অংশ

" " " ১ " " " $\frac{১}{৪০}$ অংশ

দ্বিতীয় নল দ্বারা ৬০ মিনিটে খালি হয় ১ অংশ

" " " ১ " " " $\frac{১}{৬০}$ অংশ

যেহেতু প্রথম থেকে নল দুইটি যথাক্রমে পর পর ১ মিনিট করে খোলা রাখা হয়, সেহেতু প্রথম থেকে প্রতি ২ মিনিটে উভয় নল দ্বারা পূর্ণ হয় পিপাটির $\left(\frac{১}{৪০}-\frac{১}{৬০}\right)$ অংশ বা $\frac{১}{১২০}$ অংশ

শেষ মিনিটে অবশ্যই প্রথম নলটি খোলা থাকবে এবং সেই সময় পিপাটির $\frac{১}{৪০}$ অংশ পূর্ণ হয়।

পিপাটির বাকি $\left(১-\frac{১}{৪০}\right)$ বা $\frac{৩৯}{৪০}$ অংশ প্রথম থেকে উভয় নল দ্বারা পূর্ণ হয়।

এখন, উভয় নল দ্বারা $\frac{১}{১২০}$ পিপা পূর্ণ হয় ২ মিনিটে

" " " ১ (সম্পূর্ণ) পিপা পূর্ণ হয় $২\times\frac{১২০}{১}$ মিনিটে

" " " $\frac{৩৯}{৪০}$ " " " $২\times\frac{১২০}{১}\times\frac{৩৯}{৪০}$ মিনিটে বা, ২৩৪ মিনিটে

সুতরাং, নির্ণেয় মোট সময় = (২৩৪ + ১) মিনিট = ২৩৫ মিনিটে = ৩ ঘণ্টা ৫৫ মিনিটে (উত্তর)

06. **একটি চৌবাচ্চার দুটি নল দ্বারা যথাক্রমে ১০ ঘণ্টায় ও ১৫ ঘণ্টায় পূর্ণ হতে পারে। দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেয়ার কিছুক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করে দেওয়া হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি ৫ ঘণ্টায় পূর্ণ হয়। প্রথম নল কত সময়ে বন্ধ হয়েছিল?**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৪)]

Sol" ১ম নল দ্বারা ১ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির $\frac{১}{১০}$ অংশ

∴ ২য় " " ১ " " " " $=\frac{১}{১৫}$ "

যেহেতু দ্বিতীয় নলটি ৫ ঘণ্টা খোলা ছিল–

সুতরাং, ২য় নল দ্বারা ৫ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় চৌবাচ্চার $=\frac{১}{১৫}\times ৫$ অংশ $=\frac{১}{৩}$ অংশ

বাকী থাকে $\left(১-\frac{১}{৩}\right)$ অংশ বা, $\frac{২}{৩}$ অংশ উভয় নল দ্বারা পূর্ণ হয়।

উভয় নল দ্বারা ১ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় $\left(\frac{১}{১০}+\frac{১}{১৫}\right)$ অংশ $=\left(\frac{৩+২}{৩০}\right)$ অংশ $=\frac{৫}{৩০}$ অংশ $=\frac{১}{৬}$ অংশ

$\frac{১}{৬}$ অংশ পূর্ণ হয় = ১ ঘণ্টায়

∴ ১ (সম্পূর্ণ) " " $=\frac{১\times৬}{১}$ "

∴ $\frac{২}{৩}$ " " " $=\frac{১\times৬\times২}{১\times৩}$ ঘণ্টায় = ৪ ঘণ্টায়

অতএব, ১ম নল ৪ ঘণ্টা পরে বন্ধ করা হয়।

07. দুইটি নল দ্বারা একটি খালি চৌবাচ্চা যথাক্রমে ২০ মিনিটে ও ৩০ মিনিটে পানি পূর্ণ করা যায়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল এক সাথে খুলে দেওয়া হলো। প্রথম নলটি কখন বন্ধ করলে চৌবাচ্চাটি ১৮ মিনিটে পানি পূর্ণ হবে?

[সপ্তম শ্রেণীর বোর্ড বই(গণিত), অধ্যায়-২.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol" দ্বিতীয় নল দ্বারা ৩০ মিনিটে পূর্ণ হয় ১টি চৌবাচ্চা

$\therefore$ " " " ১ " " " $\frac{১}{৩০}$ অংশ

$\therefore$ " " " ১৮ " " " $\frac{১ \times ১৮}{৩০}$ অংশ $= \frac{৩}{৫}$ অংশ

$\therefore$ প্রথম নল দ্বারা পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির $= \left(১ - \frac{৩}{৫}\right)$ অংশ $= \frac{৫ - ৩}{৫}$ অংশ $= \frac{২}{৫}$ অংশ

এখন,

প্রথম নল দ্বারা ১ বা সম্পূর্ণ অংশ পূর্ণ হতে সময় লাগে ২০ মিনিট

$\therefore$ " " " $\frac{২}{৫}$ " " " " " $\frac{২০ \times ২}{৫}$ মিনিট

$= ৮$ মিনিট

অতএব, ৮ মিনিট পর প্রথম নলটি বন্ধ করলে চৌবাচ্চাটি ১৮ মিনিটে পূর্ণ হবে।

উত্তর: ৮ মিনিট

08. একটি নল একটি চৌবাচ্চা ১২ মিনিটে পূর্ণ করতে পারে। অপর একটি নল ১ মিনিটে চৌবাচ্চা থেকে ১৫ লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়া হলো এবং চৌবাচ্চাটি ৪৮ মিনিটে পূর্ণ হলো। চৌবাচ্চাটিতে কতটুকু পানি ধরে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৭)]
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol" প্রথম নল দ্বারা ১২ মিনিটে পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির ১ অংশ

$\therefore$ " " " ১ " " " " $= \frac{১}{১২}$ অংশ

আবার,

প্রথম ও দ্বিতীয় নল খোলা অবস্থায় ৪৮ মিনিটে পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির ১ অংশ

$\therefore$ " ও " " " " ১ " " " " $= \frac{১}{৪৮}$ অংশ

উভয় নল খোলা থাকলে-

২য় নল দ্বারা ১ মিনিটে খালি হয় চৌবাচ্চাটির $\left(\frac{১}{১২} - \frac{১}{৪৮}\right)$ অংশ

$= \frac{৩}{৪৮}$ অংশ $= \frac{১}{১৬}$ অংশ

কারণ, ১ম নলের পূর্ণ অংশ হতেই ২য় নল দ্বারা খালি হয়ে থাকে।

২য় নল দ্বারা $\frac{১}{১৬}$ অংশ খালি হয় ১ মিনিটে

$\therefore$ ২য় " " ১ " " " $= \frac{১ \times ১৬}{১}$ মিনিটে $= ১৬$ মিনিটে

আবার, ১ মিনিটে পানি বের হয় ১৫ লিটার

$\therefore$ ১৬ " " " " $= ১৫ \times ১৬$ লিটার $= ২৪০$ লিটার

অতএব, চৌবাচ্চায় পানি ধরে ২৪০ লিটার।

বিকল্প:

Sol" মনে করি, প্রথম নল দ্বারা 1 মিনিটে x লিটার পানি প্রবেশ করে এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট y লিটার পানি ধরে।
প্রশ্নমতে, প্রথম নল দ্বারা 12 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়
$\therefore y = 12x$ ..... (i)
আবার, দুইটি নল দ্বারা 48 মিনিটে খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়
$\therefore y = 48x - 48 \times 15$ ..... (ii)
সমীকরণ (i) থেকে পাই, $x = \frac{y}{12}$
x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$y = 48 \times \frac{y}{12} - 48 \times 15 = 4y - 48 \times 15$$

$$\Rightarrow 3y = 48 \times 15 \quad \Rightarrow y = \frac{720}{3} \quad \therefore y = 240$$

সুতরাং, চৌবাচ্চাটিতে মোট 240 লিটার পানি ধরে।

৯. একটি নল 12 মিনিটে একটি খালি চৌবাচ্চা পূর্ণ করতে পারে। অপর একটি নল প্রতি মিনিটে 14 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসাথে খুলে দেওয়া হলে চৌবাচ্চাটি 96 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৩৭)]

Sol" মনে করি, প্রথম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে x লিটার পানি প্রবেশ কর এবং চৌবাচ্চাটিতে মোট y লিটার পানি ধরে।
প্রশ্নানুসারে, প্রথম নল দ্বারা 12 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়
$\therefore y = 12x$ ..... (i)
আবার, দুইটি নল দ্বারা 96 মিনিটে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়
$\therefore y = 96x - 96 \times 14$ ..... (ii)
সমীকরণ (i) থেকে পাই, $x = \frac{y}{12}$

x এর মান সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই, $y = 96 \times \frac{y}{12} - 96 \times 14$

বা, $y = 8y - 96 \times 14$ বা, $7y = 96 \times 14$ বা, $y = \frac{96 \times 14}{7} = 192$

সুতরাং, চৌবাচ্চাটিতে মোট 192 লিটার পানি ধরে।

Pattern-02 (তিন নল)

১০. একটি চৌবাচ্চার তিনটি নল দিয়ে যথাক্রমে ১০, ১২ ও ১৫ ঘন্টায় পূর্ণ হতে পারে। তিনটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে চৌবাচ্চার অর্ধেক পূর্ণ হতে কত সময় লাগবে?

Sol" ১ম নল
১০ ঘন্টায় পূর্ণ করে ১ অংশ
$\therefore$ ১ " " " $\frac{১}{১০}$ "
২য় নল
১২ ঘন্টায় পূর্ণ করে ১ অংশ
$\therefore$ ১ " " " $\frac{১}{১২}$ "
৩য় নল
১৫ ঘন্টায় পূর্ণ করে ১ অংশ
$\therefore$ ১ " " " $\frac{১}{১৫}$ "

তিনটি নল দ্বারা ১ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় $= \frac{১}{১০} + \frac{১}{১২} + \frac{১}{১৫} = \frac{৬+৫+৪}{৬০} = \frac{১৫}{৬০} = \frac{১}{৪}$ অংশ

$\frac{১}{৪}$ অংশ পূর্ণ ১ ঘণ্টায়

$\therefore$ ১ " " $১ \times \frac{৪}{১}$ "

$\frac{১}{২}$ অংশ পূর্ণ হয় $১ \times \frac{১}{২} \times \frac{৪}{১}$ " = ২ ঘণ্টায়

উত্তর : ২ ঘণ্টায়।

11. একটি চৌবাচ্চা তিনটি নল দিয়ে যথাক্রমে ৮, ১২ ও ২৪ ঘণ্টায় পূর্ণ হতে পারে। তিনটি নল একসংগে খুলে দিলে চৌবাচ্চাটির তিন-চতুর্থাংশ পূর্ণ হতে কত সময় লাগবে?

Sol" ১ম নল দিয়ে ৮ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় ১ অংশ

$\therefore$ ১ম নল দিয়ে ১ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় $\frac{১}{৮}$ অংশ

আবার, ২য় নল দিয়ে ১২ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় ১ অংশ

$\therefore$ ২য় নল দিয়ে ১ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় $\frac{১}{১২}$ অংশ

আবার, ৩য় নল দিয়ে ২৪ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় ১ অংশ

$\therefore$ " " " ১ " " " $\frac{১}{২৪}$ "

৩ টিনল দিয়ে একত্রে ১ ঘণ্টায় পূর্ণ হয় $= \left(\frac{১}{৮} + \frac{১}{১২} + \frac{১}{২৪}\right)$ অংশ $= \frac{৩+২+১}{২৪} = \frac{১}{৪}$ অংশ

$\therefore$ $\frac{১}{৪}$ অংশ পূর্ণ হয় ১ ঘণ্টায়

$\therefore$ ১ " " " ৪ "

$\therefore$ $\frac{৩}{৪}$ " " " $\frac{৪ \times ৩}{৪}$ ঘণ্টায় = ৩ ঘণ্টায়

12. একটি পিপায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুটি দ্বারা যথাক্রমে p ও q মিনিটে পিপাটি পূর্ণ হয় এবং তৃতীয়টি দ্বারা r মিনিটে পরিপূর্ণ পিপাটি পানি শূন্য হয়। তিনটি নল এক সঙ্গে খুলে দিলে s মিনিট পর ৩য় নলটি বন্ধ করা হলে কত সময়ে পিপাটি পূর্ণ হবে?

[৩৩তম বিসিএস]

Sol" ১ম নল দ্বারা 1 মিনিটে পূর্ণ হয় পিপাটির $= \frac{1}{p}$ অংশ

২য় নল দ্বারা 1 মিনিটে পূর্ণ হয় পিপাটির $= \frac{1}{q}$ অংশ

৩য় নল দ্বারা 1 মিনিটে খালি হয় পিপাটির $= \frac{1}{r}$ অংশ

নল তিনটি একসঙ্গে খুলে দিলে 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $= \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)$ অংশ $= \frac{qr + pr - pq}{pqr}$ অংশ

$\therefore$ " " " " " s " " " $= \frac{s(qr + pr - pq)}{pqr}$ অংশ $= \frac{qrs + prs - pqs}{pqr}$ অংশ

পিপাটির বাকি থাকে $= 1 - \frac{qrs + prs - pqs}{pqr} = \frac{pqr - qrs - prs + pqs}{pqr}$ অংশ

$(p+q)$ নল দুইটি 1 মিনিটে পূর্ণ করে $= \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$ অংশ $= \frac{p+q}{pq}$ অংশ

$\frac{p+q}{pq}$ অংশ পূর্ণ হয় $= 1$ মিনিটে

1 (সম্পূর্ণ) " " $= \frac{pq}{p+q}$ "

$\frac{pqr-qrs-prs+pqs}{pqr}$ অংশ পূর্ণ হয় $= \frac{pq(pqr-qrs-prs+pqs)}{(p+q)pqr} = \frac{pqr-qrs-prs+pqs}{r(p+q)}$

পিপাটি পূর্ণ হতে মোট সময় লাগবে $= s + \frac{pqr-qrs-prs+pqs}{r(p+q)}$

$= \frac{prs+qrs+pqr-qrs-prs+pqs}{r(p+q)} = \frac{pq(s+r)}{r(p+q)}$ মিনিট **(Ans.)**

১৩. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। ১ম ও ২য় নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে ১২ ও ১৮ মিনিটে পূর্ণ হয় এবং ৩য় নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি খালি হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়ায় চৌবাচ্চাটি ৩৬ মিনিটে পূর্ণ হলো। ৩য় নল দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চাটি কত সময়ে খালি হবে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৫)]*

Sol"

১ম নল দ্বারা ১ মিনিটে পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির $= \frac{১}{১২}$ অংশ

২য় নল " ১ " " " " $= \frac{১}{১৮}$ "

উভয় নল "১ " " " " $= \left(\frac{১}{১২}+\frac{১}{১৮}\right)$ অংশ $= \left(\frac{৩+২}{৩৬}\right)$ অংশ $\frac{৫}{৩৬}$ অংশ

কিন্তু ৩য় নল দ্বারা খালি হওয়ায়,

৩টি নল দ্বারা ৩৬ মিনিটে পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির ১ অংশ

∴ ৩টি " " ১ " " " " $= \frac{১}{৩৬}$ অংশ

১ মিনিটে পূর্ণ অংশ হতে অর্থাৎ অংশ হতে ৩য় নল দ্বারা খালি হয়।

সুতরাং ১ মিনিটে ৩য় নল দ্বারা খালি হয় $= \left(\frac{৫}{৩৬}-\frac{১}{৩৬}\right)$ অংশ $= \frac{৪}{৩৬}$ অংশ $= \frac{১}{৯}$ অংশ

৩য় নল দ্বারা $\frac{১}{৯}$ অংশ খালি হয় = ১ মিনিটে

∴ " " " ১ (সম্পূর্ণ) " " " $= \frac{১ \times ৯}{১}$ মিনিটে = ৯ মিনিটে

∴ নির্ণেয় সময় ৯ মিনিট।

১৪. একটি পিপায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে ১০ মিনিটে ও ১৫ মিনিটে পিপাটি পূর্ণ হয় এবং তৃতীয় নল দ্বারা ২০ মিনিটে পরিপূর্ণ পিপা পানিশূন্য হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলে ৫ মিনিট পর তৃতীয় নলটি বন্ধ করা হলো। কত সময়ে পিপাটি পূর্ণ হলো? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৮)]*

Sol"

১ম নল দ্বারা ১০ মিনিটে পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটির ১ অংশ

∴ " " " ১ " " " " $= \frac{১}{১০}$ অংশ

অনুরূপভাবে,

২য় " " ১ " " " " $= \frac{১}{১৫}$ "

∴ ৩য় " " ১ " " খালি হয় $= \frac{১}{২০}$ "

তিনটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে-

তিনটি নল দ্বারা ১ মিনিটে পূর্ণ হয় পিপাটির $\left(\frac{১}{১০}+\frac{১}{১৫}-\frac{১}{২০}\right)$ অংশ $= \frac{৬+৪-৩}{৬০} = \frac{৭}{৬০}$ অংশ

তিনটি নল দ্বারা ৫ মিনিটে পূর্ণ হয় পিপাটির $= \frac{৭\times৫}{৬০}$ অংশ $= \frac{৭}{১২}$ অংশ

অবশিষ্ট থাকে $= \left(১-\frac{৭}{১২}\right)$ অংশ $= \frac{৫}{১২}$ অংশ, যা ১ম ও ২য় নল দ্বারা পূর্ণ হয়।

এখন, ১ম ও ২য় নল দ্বারা ১ মিনিটে পূর্ণ হয় পিপাটির $= \left(\frac{১}{১০}+\frac{১}{১৫}\right)$ অংশ $= \frac{৩+২}{৩০} = \frac{৫}{৩০} = \frac{১}{৬}$ অংশ

∴ ১ম ও ২য় নল দ্বারা-

$\frac{১}{৬}$ অংশ পূর্ণ হয় ১ মিনিটে

∴ ১ " " " $\frac{১\times৬}{১}$ মিনিটে

∴ $\frac{৫}{১২}$ " " " $\frac{১\times৬\times৫}{১\times১২}$ মিনিটে $= \frac{৫}{২}$ মিনিটে $= ২\frac{১}{২}$ মিনিটে

অতএব, পিপাটি পূর্ণ হতে নির্ণেয় সমাধান $= ৫ + ২\frac{১}{২} = ৭\frac{১}{২}$ মিনিটে। (উত্তর)

15. একটি পিপা দুইটি নল দ্বারা পৃথক পৃথকভাবে যথাক্রমে ১৫ মিনিটে ও ২০ মিনিটে পূর্ণ হতে পারে। নল দুইটি একসঙ্গে খুলে রাখা হল। কিন্তু পিপার নিচে একটি ছিদ্র থাকায় খালি পিপাটি ১২ মিনিটে পূর্ণ হল। নল দুইটি বন্ধ থাকলে ঐ ছিদ্র দ্বারা পূর্ণ পিপাটি কত সময়ে খালি হবে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৬)]*

Sol" ১ম নল দ্বারা ১ মিনিটে পূর্ণ হয় পিপাটির $= \frac{১}{১৫}$ অংশ

২য় " "১ " " " " $= \frac{১}{২০}$ "

ছিদ্র "১ " খালি " " $= \frac{১}{১২}$ "

১ম ও ২য় " "১ " পূর্ণ " " $= \left(\frac{১}{১৫}+\frac{১}{২০}\right)$ অংশ $= \frac{৪+৩}{৬০} = \frac{৭}{৬০}$ অংশ

১ম ও ২য় নলের পূর্ণ অংশ থেকে ছিদ্র দ্বারা ১ মিনিটে খালি হয় $= \left(\frac{৭}{৬০}-\frac{১}{১২}\right)$ অংশ

$= \left(\frac{৭-৫}{৬০}\right)$ অংশ $= \frac{২}{৬০}$ অংশ $= \frac{১}{৩০}$ অংশ

ছিদ্র দ্বারা $\frac{১}{৩০}$ অংশ খালি হয় = ১ মিনিটে

" " ১ (সম্পূর্ণ) " " " $= \frac{১\times৩০}{১} = ৩০$ মিনিটে

উত্তর : ৩০ মিনিটে।

Ashraful's Math Cocktail (written) -41/8

Type03: নৌকা ও স্রোত বিষয়ক সমস্যা

1. এক মাঝি স্রোতের অনুকূলে ৬ মিনিটে $১\frac{১}{২}$ কি.মি. যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে ১৫ মিনিটে $১\frac{১}{৪}$ কি. মি. যায়। নৌকা ও স্রোতের বেগ নির্ণয় করুন।

[২৩তম, ১৭তম বিসিএস]

Sol: স্রোতের অনুকূলে ৬ মিনিটে যায় $১\frac{১}{২}$ কি.মি. বা, $\frac{৩}{২}$ কি.মি.

∴ " " ১ " " $\frac{৩}{২ \times ৬}$ কি.মি. $= \frac{১}{৪}$ কি.মি.

স্রোতের প্রতিকূলে ১৫ মিনিটে যায় $১\frac{১}{৪}$ কি.মি. বা, $\frac{৫}{৪}$ কি.মি.

∴ " " ১ " " $\frac{৫}{৪ \times ১৫} = \frac{১}{১২}$ কি.মি.

মনে করি, স্রোতের বেগ = v কি.মি./মি. ও নৌকার বেগ = u কি.মি./মি.

∴ $u + v = \frac{১}{৪}$

$u - v = \frac{১}{১২}$

(যোগ করে), $২u = \frac{১}{৪} + \frac{১}{১২} = \frac{৩ + ১}{১২} = \frac{৪}{১২} = \frac{১}{৩}$

$\therefore u = \frac{১}{৬}$

(বিয়োগ করে), $২v = \frac{১}{৪} - \frac{১}{১২} = \frac{৩ - ১}{১২} = \frac{২}{১২} = \frac{১}{৬}$

$\therefore v = \frac{১}{১২}$

∴ নৌকার বেগ $= \frac{১}{৬}$ কি.মি./মি. $= \frac{১}{৬} \times ৬০$ কি.মি./ঘ. [∵ ১ ঘণ্টা = ৬০ মিনিট]

$= ১০$ কি.মি./ঘ.

স্রোতের বেগ $= \frac{১}{১২}$ কি.মি./মি. $= \frac{১}{১২} \times ৬০$ কি.মি./ঘ. $= ৫$ কি.মি./ঘ.

উত্তর: নৌকার বেগ = ১০ কি.মি./ঘ. এবং স্রোতের বেগ = ৫ কি.মি./ঘ.

2. একজন মাঝি স্রোতের অনুকূলে যে সময়ে 8 কি.মি. যেতে পারে, স্রোতের প্রতিকূলে সেই সময়ে 5 কি.মি. যেতে পারে। যদি স্রোতের বেগ প্রতি ঘণ্টায় 1 কি.মি. বেশি হয় তবে সে স্রোতের প্রতিকূল অপেক্ষা অনুকূলে দ্বিগুণ বেগে যেতে পারে। নৌকা ও স্রোতের বেগ কত?

[২২তম বিসিএস]

Sol: মনে করি,

স্রোতের অনুকূলে 8 কিলোমিটার যেতে সময় লাগে x ঘণ্টা

∴ " প্রতিকূলে 5 " " " " = x ঘণ্টা

অনুকূলে,

x ঘণ্টায় যায় 8 কি.মি.

$\therefore$ 1 " " $\frac{8}{x}$ " "

$\therefore$ নৌকার বেগ + স্রোতের বেগ $= \frac{8}{x}$ কি.মি. ..... (i)

আবার, প্রতিকূলে,

x ঘণ্টায় যায় 5 কি.মি.

$\therefore$ 1 " " $\frac{5}{x}$ " "

$\therefore$ নৌকার বেগ – স্রোতের বেগ $= \frac{5}{x}$ কি. মি. ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে, $2 \times$ নৌকার বেগ $= \frac{8}{x} + \frac{5}{x}$

$\Rightarrow$ নৌকার বেগ $= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{x} + \frac{5}{x}\right)$

$\therefore$ নৌকার বেগ $= \frac{13}{2x}$ কি.মি.

(i) নং এ মান বসিয়ে,

স্রোতের বেগ $= \frac{8}{x} - \frac{13}{2x} = \frac{16-13}{2x} = \frac{3}{2x}$ কি. মি.

স্রোতের বেগ 1 কি.মি. বেশি হলে স্রোতের বেগ $= \frac{3}{2x} + 1 = \left(\frac{3+2x}{2x}\right)$ কি.মি.

স্রোতের বেগ $\frac{3+2x}{2x}$ কিলোমিটার হলে অনুকূলে,

নৌকার বেগ + স্রোতের বেগ $= \frac{13}{2x} + \frac{3+2x}{2x} = \frac{16+2x}{2x} = \frac{8+x}{x}$ কি.মি.

স্রোতের বেগ $\frac{3+2x}{2x}$ কিলোমিটার হলে প্রতিকূলে,

নৌকার বেগ – স্রোতের বেগ $= \frac{13}{2x} - \frac{3+2x}{2x} = \frac{10-2x}{2x} = \frac{5-x}{x}$ কি.মি.

শর্তানুসারে, $\frac{8+x}{x} = 2\left(\frac{5-x}{x}\right) \Rightarrow 8+x = 10-2x \Rightarrow 3x = 2$

$\therefore x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ নৌকার বেগ $= \frac{13}{2 \times \frac{2}{3}} = \frac{13 \times 3}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$ কি. মি.

এবং স্রোতের বেগ $= \frac{3}{2 \times \frac{2}{3}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ কি.মি.

উত্তর: স্রোতের বেগ $2\frac{1}{4}$ কি.মি. এবং নৌকার বেগ $9\frac{3}{4}$ কি. মি.

৫১. এক ব্যক্তি স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় $২\frac{১}{২}$ কি.মি. বেগে যেতে পারে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় ৩ কি.মি. হলে স্রোতের অনুকূলে $৪২\frac{১}{২}$ কি.মি. যেতে কত সময় লাগবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-৫৩)]

Sol দাঁড়ের বেগ − স্রোতের বেগ $= ২\frac{১}{২}$ কি.মি $= \frac{৫}{২}$ কি.মি.

বা, দাঁড়ের বেগ − ৩ কি.মি. $= \frac{৫}{২}$ কি.মি.

বা, দাঁড়ের বেগ $= \frac{৫}{২}$ কি.মি. + ৩ কি.মি. $= \frac{১১}{২}$ কি.মি.

স্রোতের অনুকূলে,

স্রোতের বেগ + দাঁড়ের বেগ $= \left(৩ + \frac{১১}{২}\right)$ কি.মি. $= \left(\frac{৬ + ১১}{২}\right)$ কি.মি. $= \frac{১৭}{২}$ কি.মি.

অনুকূলে $\frac{১৭}{২}$ কি.মি. যায় = ১ ঘণ্টায়

" ১ " " $= \frac{১ \times ২}{১৭}$ ঘণ্টায়

" $\frac{৮৫}{২}$ " " $= \frac{১ \times ২ \times ৮৫}{১৭ \times ২} = ৫$ $[\because ৪২\frac{১}{২} = \frac{৮৫}{২}]$

অতএব, নির্ণেয় সময় ৫ ঘণ্টা।

৬. একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে t_1 ঘণ্টায় x কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার t_2 ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অঙ্ক নং-৩৬)]

Sol ধরি, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় v কি.মি. এবং স্থির পানিতে নৌকার বেগ ঘণ্টায় u কি.মি.। তাহলে, স্রোতের অনুকূলে নৌকার কার্যকরী বেগ ঘণ্টায় $(u + v)$ কি.মি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার কার্যকরী বেগ ঘণ্টায় $(u - v)$ কি.মি.।

আমরা জানি, বেগ $= \frac{\text{অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{সময়}}$

প্রশ্নানুসারে, $u + v = \frac{x}{t_2}$ ..... (i)

এবং $u - v = \frac{x}{t_1}$ ..... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2u = \frac{x}{t_2} + \frac{x}{t_1} = x\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$ বা, $u = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$2v = \frac{x}{t_2} - \frac{x}{t_1} = x\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)$ বা, $v = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)$

সুতরাং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)$ কি.মি. এবং নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$ কি.মি.।

05. একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে p ঘণ্টায় d কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনকূলে ঐ পথ যেতে তার q ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol" হুবহু ০৪ নং প্রশ্নের নিয়মে নিজে করুন।

শুধু t_1 এর p জায়গায়, t_2 এর q জায়গায়, এবং x এর d জায়গায়,বসাবেন।

Ans:স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ কি.মি. এবং নৌকার বেগ ঘণ্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)$ কি.মি.

06. একজন মাঝির দাঁড় বেয়ে 15 কি.মি. যেতে এবং সেখান থেকে ফিরে আসতে 4 ঘণ্টা সময় লাগে। সে স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 5 কি.মি. যায়, স্রোতের প্রতিকূলে ততক্ষণে 3 কি.মি. যায়। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol" মনে করি, দাঁড়ের বেগ x কি.মি./ঘন্টা

এবং স্রোতের বেগ y কি.মি./ঘন্টা

তাহলে, স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে দাঁড়ের কার্যকরী বেগ যথাক্রমে-

$(x+y)$ ও $(x-y)$ কি.মি./ঘন্টা।

প্রশ্নমতে, $\frac{15}{x+y}+\frac{15}{x-y}=4$ ..... (i)

এবং $\frac{5}{x+y}=\frac{3}{x-y}$ $\left[\text{যেহেতু সময়}=\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{বেগ}}\right]$

$\Rightarrow 5x-5y=3x+3y$

$\Rightarrow 5x-3x=5y+3y$

$\Rightarrow 2x=8y$

$\therefore x=4y$ ..... (ii)

x-এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই, $\frac{15}{4y+y}+\frac{15}{4y-y}=4$

$\Rightarrow \frac{15}{5y}+\frac{15}{3y}=4$

$\Rightarrow \frac{3}{y}+\frac{5}{y}=4$

$\Rightarrow \frac{3+5}{y}=4$

$\Rightarrow 4y=8$

$\therefore y=2$

y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x=4.2=8$

সুতরাং, দাঁড়ের বেগ 8 কি.মি./ঘন্টা এবং স্রোতের বেগ 2 কি.মি./ঘন্টা।

বিকল্প পদ্ধতি:

ধরি,

স্রোতের অনুকূলে ৫ কি.মি. যায় x ঘণ্টায়

স্রোতের অনুকূলে ১ কি.মি. যায় $\frac{x}{৫}$ ঘণ্টায়

" " ১৫ " " $\frac{১৫x}{৫} = ৩x$ ঘন্টায়

আবার, স্রোতের প্রতিকূলে ৩ কি.মি. যায় x ঘণ্টায়

স্রোতের প্রতিকূলে ১ কি.মি. যায় $\frac{x}{৩}$ ঘণ্টায়

" " ১৫ " " $\frac{১৫x}{৩} = ৫x$ ঘণ্টায়

প্রশ্নমতে, $৩x + ৫x = ৪ \Rightarrow ৮x = ৪ \therefore x = \frac{১}{২}$

সুতরাং, স্রোতের অনুকূলে $\frac{১}{২}$ ঘণ্টায় যায় ৫ কি.মি.

" " ১ " " $৫ \times ২ = ১০$ কি.মি.

আবার, স্রোতের প্রতিকূলে $\frac{১}{২}$ ঘণ্টায় যায় ৩ কি.মি.

" " ১ " " $৩ \times ২ = ৬$ কি.মি.

স্রোতের অনুকূলে, দাঁড়ের বেগ + স্রোতের বেগ = ১০ কি.মি.

স্রোতের অনুকূলে, দাঁড়ের বেগ − স্রোতের বেগ = ৬ কি.মি.

(যোগ করে) ২ (দাঁড়ের বেগ) = ১৬ কি.মি.

$\therefore$ দাঁড়ের বেগ $= \frac{১৬}{২} = ৮$ কি.মি.

সুতরাং স্রোতের বেগ (১০ − ৮) = ২ কি.মি.

উত্তর : দাঁড়ের বেগ ৮ কি.মি. এবং স্রোতের বেগ ২ কি.মি.

TYPE 04: দূরত্ব বিষয়ক সমস্যা

01. কুকুর তাড়িত একটি খরগোশ যত সময়ে ৮ বার লাফ দেয়, কুকুরটি ততক্ষণে ৭ বার লাফ দেয়। কিন্তু খরগোশ ৫ লাফে যতদূর যায়, কুকুর ৪ লাফে ততদূর যায়। খরগোশের ও কুকুরের বেগের অনুপাত নির্ণয় করুন। [২৫তম বিসিএস]

সমাধান: খরগোশের ৫ লাফের দূরত্ব = কুকুরের ৪ লাফের দূরত্ব

$\therefore$ " ১ " " = কুকুরের $\frac{৪}{৫}$ " "

$\therefore$ " ৮ " " = কুকুরের $\frac{৪ \times ৮}{৫} = \frac{৩২}{৫}$ " "

$\therefore$ কুকুরের বেগ : খরগোশের বেগ = $৭ : \frac{৩২}{৫} = ৩৫ : ৩২$

উত্তর: ৩৫ : ৩২

02. করিম যে সময়ে ৭ বার পদক্ষেপ দেয়, রহিম ততক্ষণে ৮ বার পদক্ষেপ দেয়। কিন্তু রহিম ৫ পদক্ষেপে যতদূর যায়; করিম ৪ পদক্ষেপে ততদূর যায়। করিম ও রহিমের গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় করুন। [২০তম বিসিএস]

Sol: রহিমের ৫ পদক্ষেপের দূরত্ব = করিমের ৪ পদক্ষেপের দূরত্ব

∴ " ১ " " " $\frac{৪}{৫}$ " "

∴ " ৮ " " " $\frac{৪ \times ৮}{৫} = \frac{৩২}{৫}$ " "

∴ করিমের বেগ : রহিমের বেগ = $৭ : \frac{৩২}{৫} = ৩৫ : ৩২$

উত্তর: ৩৫ : ৩২

TYPE 05: Miscellaneous

01. 3750 কিউবিক ফিট ধারণক্ষমতাসম্পন্ন একটি পানির চৌবাচ্চা সম্পূর্ণভাবে পূর্ণ হতে কত মিনিট সময় লাগবে, যদি প্রতি মিনিটে 800 কিউবিক ফিট হারে চৌবাচ্চাটিতে পানি প্রবেশ করতে থাকে এবং চৌবাচ্চা থেকে প্রতি মিনিটে 300 কিউবিক ফিট পানি নির্গত হতে থাকে? [১৮তম বিসিএস]

Sol: চৌবাচ্চাটিতে প্রতি মিনিটে পানি ভর্তি হতে থাকে = (800 – 300)
= 500 কিউবিক ফুট

500 কিউবিক ফুট পানি ভর্তি হয় = 1 মিনিটে

∴ 1 " " " " " $= \frac{1}{500}$ "

∴ 3750 " " " " " $= \frac{1 \times 3750}{500}$

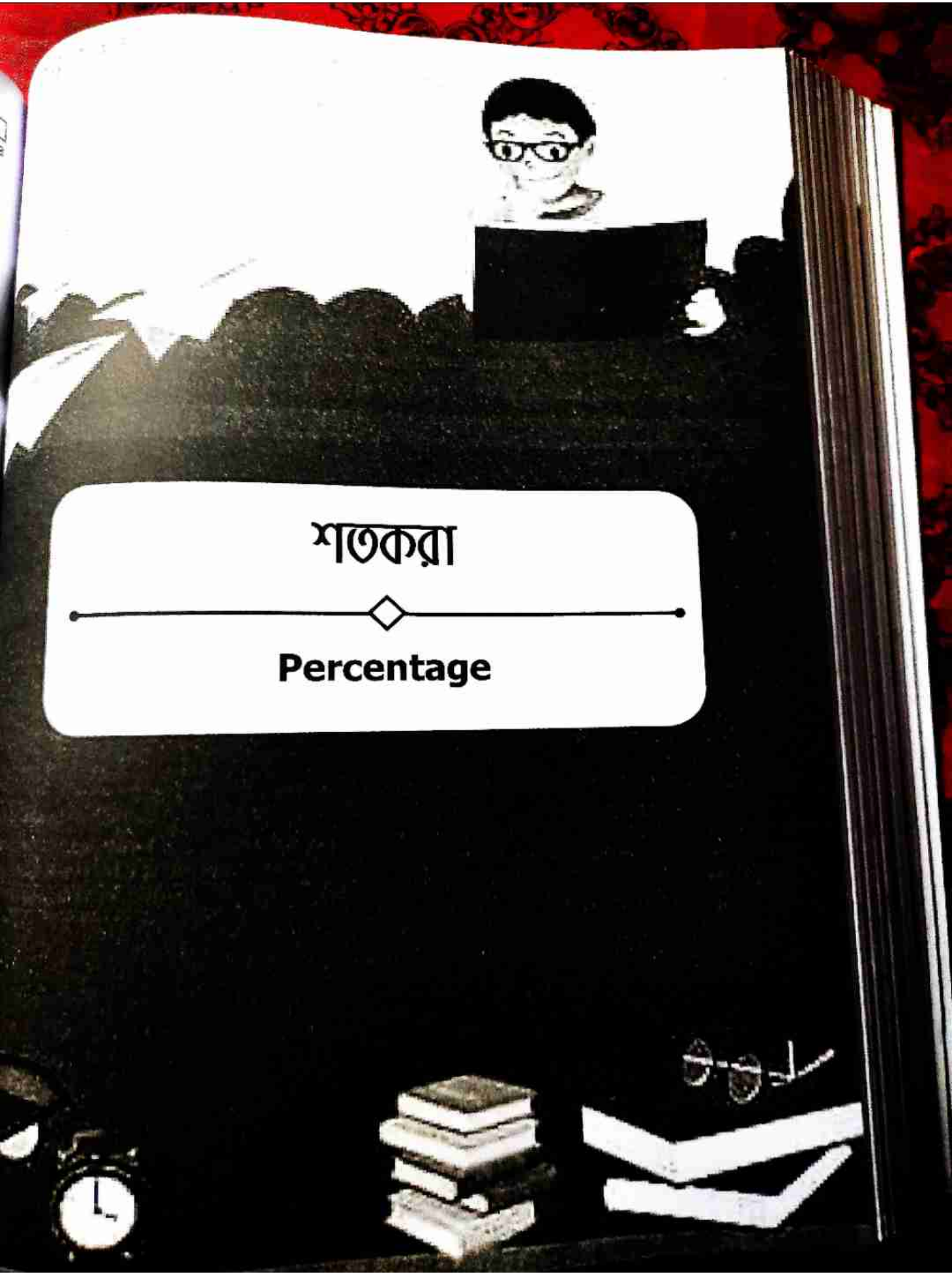
$= \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ মিনিটে

উত্তর: $7\frac{1}{2}$ মিনিট

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 07,10, 14, 17, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 32, 35
Type-02	02, 03, 04, 05, 07, 08, 10, 12, 14
Type-03	01, 04, 06
Type-04	01



শতকরা

Percentage

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: দুটি জিনিসের উপাত্তের হ্রাস বা বৃদ্ধির সাপেক্ষে উপাত্ত নির্ণয়

১. দুজন শ্রমিকের মাসিক বেতনের যোগফল ২০,০০০ টাকা। একজন শ্রমিকের বেতন ১০% হ্রাস পেলে যত টাকা হয় অপর শ্রমিকের বেতন ১০% বৃদ্ধিতে সমপরিমাণ টাকা হয়। শ্রমিক দুজনের বেতন মাসিক কত টাকা তা নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস]

Sol: ধরি, ১ম শ্রমিকের বেতন x টাকা

∴ ২য় " " $(২০,০০০ - x)$ টাকা

এখন,

১০% হ্রাসে ১ম শ্রমিকের বেতন $= (x - x \text{ এর } ১০\%)$ টাকা

$$= \left(x - \frac{১০x}{১০০}\right) \quad "$$

$$= \left(x - \frac{x}{১০}\right) \quad "$$

$$= \frac{৯x}{১০} \text{ টাকা}$$

আবার,

১০% বৃদ্ধিতে ২য় শ্রমিকের বেতন $= \{(২০০০০ - x) + (২০০০০ - x)\ ১০\%\}$

$$= \left(২০০০০ - x + \frac{২০০০০ - x}{১০}\right) \text{টাকা}$$

$$= \left(২০০০০ - x + ২০০০ - \frac{x}{১০}\right) \text{টাকা}$$

$$= \left(২২০০০ - \frac{১১x}{১০}\right) \text{টাকা}$$

∴ প্রশ্নমতে, $\frac{৯x}{১০} = ২২০০০ - \frac{১১x}{১০}$

$$\Rightarrow \frac{৯x}{১০} + \frac{১১x}{১০} = ২২০০০$$

$$\Rightarrow \frac{২০x}{১০} = ২২০০০$$

$$\Rightarrow ২x = ২২০০০$$

$$\Rightarrow x = \frac{২২০০০}{২} = ১১০০০$$

∴ ১ম শ্রমিকের বেতন = ১১০০০ টাকা

এবং ২য় শ্রমিকের বেতন $= (২০০০০ - ১১০০০)$ টাকা

$= ৯০০০$ টাকা

উত্তর: ১১০০০ টাকা ও ৯০০০ টাকা

২. কোনো শহরের লোকসংখ্যা ১০ লক্ষ। যদি পুরুষের সংখ্যা ১০% বৃদ্ধি পায় এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা ৬% কমে যায়, তবে শহরের লোকসংখ্যার কোনো পরিবর্তন হয় না। ঐ শহরের পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা কত? [৩২তম বিসিএস]

Sol: ধরি, পুরুষের সংখ্যা x জন, স্ত্রীলোকের সংখ্যা y জন

∴ $x + y = ১০,০০,০০০$ ..... (i)

১০% বৃদ্ধি পেলে পুরুষের সংখ্যা $= x + x$ এর ১০% $= x + \frac{x \times ১০}{১০০} = \frac{১১০x}{১০০} = \frac{১১x}{১০}$

৬% কমে গেলে স্ত্রীলোকের সংখ্যা $= y - y$ এর ৬% $= y - \frac{y \times ৬}{১০০} = \frac{৯৪y}{১০০} = \frac{৪৭y}{৫০}$

প্রশ্নমতে, $\frac{১১x}{১০} + \frac{৪৭y}{৫০} = x + y$

$\Rightarrow \frac{৫৫x + ৪৭y}{৫০} = x + y$

$\Rightarrow ৫৫x + ৪৭y = ৫০x + ৫০y$

$\Rightarrow ৫x - ৩y = 0$

$\Rightarrow ৫x = ৩y$

$\Rightarrow x = \frac{৩}{৫}y$

(i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে, $\frac{৩}{৫}y + y = ১০,০০,০০০$

$\Rightarrow \frac{৮y}{৫} = ১০,০০,০০০$

$\Rightarrow ৮y = ১০,০০,০০০ \times ৫$

$\Rightarrow y = \frac{৫০,০০,০০০}{৮} = ৬,২৫,০০০$

অর্থাৎ স্ত্রীলোক ৬,২৫,০০০ জন

$\therefore$ পুরুষ $= ১০,০০,০০০ - ৬,২৫,০০০ = ৩,৭৫,০০০$ জন

উত্তর: পুরুষের সংখ্যা ৩,৭৫,০০০ জন এবং স্ত্রীলোক সংখ্যা ৬,২৫,০০০ টাকা।

বিকল্প:

পুরুষ লোকের সংখ্যা $= x$ জন

স্ত্রীলোকের " $= (১০০০০০০ - x)$ জন

পুরুষের সংখ্যা ১০% বৃদ্ধিতে $\left(x\text{-এর } \frac{১১০}{১০০}\right)$ জন

স্ত্রীলোকের সংখ্যা ৬% কমে $= \left\{(১০০০০০০ - x)\text{-এর } \frac{৯৪}{১০০}\right\}$ জন $= \frac{৯৪০০০০০০ - ৯৪x}{১০০}$ জন

প্রশ্নমতে, $\frac{১১০x}{১০০} + \frac{৯৪০০০০০০ - ৯৪x}{১০০} = ১০০০০০০$

$\Rightarrow \frac{১১০x + ৯৪০০০০০০ - ৯৪x}{১০০} = ১০০০০০০$

$\Rightarrow ১৬x + ৯৪০০০০০০ = ১০০০০০০০০$

$\Rightarrow ১৬x = ১০০০০০০০০ - ৯৪০০০০০০$

$\therefore x = \frac{৬০০০০০০}{১৬}$

পুরুষের সংখ্যা $= ৩৭৫০০০$ জন

$\therefore$ স্ত্রীলোকের সংখ্যা $= ১০০০০০০ - ৩৭৫০০০ = ৬২৫০০০$ জন।

৫১. একটি শার্ট ও একটি প্যান্টের মূল্য একত্রে ৫২৫.০০ টাকা। যদি শার্টের মূল্য ৫% এবং প্যান্টের মূল্য ১০% বৃদ্ধি পায়, তাহলে উভয়ে কিনতে ৫৬৮.৭৮ টাকা লাগে। শার্ট ও প্যান্টের প্রত্যেকটির মূল্য কত?

[৩০তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol. মনে করি, শার্টের মূল্য x টাকা

প্যান্টের মূল্য (৫২৫ − x) টাকা

৫% বৃদ্ধিতে শার্টের মূল্য (১০০ + ৫) টাকা = ১০৫ টাকা

১০০ টাকার শার্টের মূল্য হয় ১০৫ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{১০৫}{১০০}$ "

$\therefore$ x " " " " $\frac{১০৫ \times x}{১০০}$ "

১০% বৃদ্ধিতে প্যান্টের বিক্রয়মূল্য (১০০ + ১০) টাকা = ১১০ টাকা

অতএব, ১০০ টাকার প্যান্টের মূল্য ১১০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১১০}{১০০}$ "

$\therefore$ (৫২৫ −x) " " " $\frac{১১০\ (৫২৫ - x)}{১০০}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{১০৫ \times x}{১০০} + \frac{১১০\ (৫২৫ - x)}{১০০} = ৫৬৮.৭৮$

$\Rightarrow \frac{১০৫x + ৫৭৭৫০ - ১১০x}{১০০} = ৫৬৮.৭৮$

$\Rightarrow \frac{৫৭৭৫০ - ৫x}{১০০} = ৫৬৮.৭৮ \quad \Rightarrow \quad ৫৭৭৫০ - ৫x = ৫৬৮৭৮$

$\Rightarrow -৫x = ৫৬৮৭৮ - ৫৭৭৫০ \quad \Rightarrow \quad -৫x = -৮৭২$

$\Rightarrow x = \frac{৮৭২}{৫}$

$\therefore$ x = ১৭৪.৪

$\therefore$ শার্টের মূল্য ১৭৪.৪ টাকা

$\therefore$ প্যান্টের মূল্য (৫২৫.০০ − ১৭৪.৪) টাকা = ৩৫০.৬ টাকা

উত্তর: শার্টের মূল্য ১৭৪.৪ টাকা এবং প্যান্টের মূল্য ৩৫০.৬ টাকা।

বিকল্প:

ধরি, শার্টের মূল্য x টাকা

$\therefore$ প্যান্টের মূল্য (৫২৫ − x) টাকা

প্রশ্নমতে, x এর ৫% + (৫২৫ − x) এর ১০% = ৫৬৮.৭৮ − ৫২৫

$\Rightarrow$.০৫x + ৫২.৫ − .১ x = ৪৩.৭৮

$\Rightarrow$.০৫x = ৫২.৫ − ৪৩.৭৮ = ৮.৭২

$\Rightarrow x = \frac{৮.৭২}{.০৫} = ১৭৪.৪$

$\therefore$ শার্টের মূল্য ১৭৪.৪ টাকা

$\therefore$ প্যান্টের মূল্য (৫২৫.০০ − ১৭৪.৪) টাকা = ৩৫০.৬ টাকা **(উত্তর)**

04. এক ভদ্রমহিলা তাঁর সমুদয় সঞ্চয় হতে ১,৬০,০০০ টাকার কিছু অংশ শতকরা ৬ টাকা এবং কিছু অংশ ৭ টাকা হারে বিনিয়োগ করলেন। বছর শেষে তিনি তাঁর এই বিনিয়োগ থেকে ১২,০০০ টাকা আয় করলেন। তিনি শতকরা ৭ টাকায় কত বিনিয়োগ করেছিলেন? [১৮তম বিসিএস]

Sol প্রশ্নটি ভুল আছে মোট আয় ১১,০০০ টাকা হলে প্রশ্নটি সঠিক হতো।

মনে করি, ৭ টাকা হারে x টাকা বিনিয়োগ করেছিল।

অতএব, ৬ টাকা হারে (১৬০০০০ − x) টাকা বিনিয়োগ করেছিল।

১০০ টাকায় ১ বছরে আয় হয় ৭ টাকা

$\therefore$ x " ১ " " " $\frac{৭ \times x}{১০০}$ টাকা $= \frac{৭x}{১০০}$ টাকা

আবার, ১০০ টাকায় ১ বছরে আয় হয় ৬ টাকা

$\therefore$ (১৬০০০০ − x) টাকায় ১ বছরের আয় হয় $= \frac{৬ \times (১৬০০০০ - x)}{১০০} = \frac{৯৬০০০০ - ৬x}{১০০}$

প্রশ্নমতে, $\frac{৭x}{১০০} + \frac{৯৬০০০০ - ৬x}{১০০} = ১১০০০$

$\Rightarrow$ $৭x + ৯৬০০০০ - ৬x = ১১০০০ \times ১০০$

$\Rightarrow$ $x = (১১০০০০০ - ৯৬০০০০)$ টাকা $= ১,৪০,০০০$ টাকা

$\therefore$ ৭ টাকা হারে ১,৪০,০০০ টাকা বিনিয়োগ করেছিল।

উত্তর: ১,৪০,০০০ টাকা

TYPE 02: মূল্যের হ্রাস বা বৃদ্ধির সাপেক্ষে বর্তমান ও পূর্বমূল্য নির্ণয়

01. চালের দাম $১২\frac{১}{২}\%$ কমে যাওয়ায় ১৪,০০০ টাকায় পূর্বের দামে যে পরিমাণ চাল কেনা যেত, বর্তমান দামের তার চেয়ে এক কুইন্টাল চাল বেশি কেনা যায়। প্রতি কেজি চালের দাম আগে কত ছিল? [২৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২০ এর অনুরূপ)]

Sol মনে করি, চালের পূর্ব মূল্য = ১০০ টাকা

তাহলে $১২\frac{১}{২}\%$ বা, $\frac{২৫}{২}\%$ কমে বর্তমান মূল্য $= \left(১০০ - \frac{২৫}{২}\right)$ টাকা $= \frac{২০০ - ২৫}{২} = \frac{১৭৫}{২}$ টাকা

পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য $= \frac{১৭৫}{২}$ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " " $= \frac{১৭৫}{২ \times ১০০}$ টাকা

$\therefore$ " ১৪০০০ " " " " $= \frac{১৭৫ \times ১৪০০০}{২ \times ১০০}$ টাকা $= ১২২৫০$ টাকা।

সুতরাং, পূর্বমূল্য অপেক্ষা মোট টাকা কমে $= (১৪০০০ - ১২২৫০)$ টাকা $= ১৭৫০$ টাকা

যেহেতু ১৭৫০ টাকা কমার ফলে ১ কুইন্টাল চাল বেশি কেনা যায়, সে কারণে ১ কুইন্টাল চালের বর্তমান দর ১৭৫০ টাকা।

আবার, বর্তমান মূল্য $\frac{১৭৫}{২}$ টাকা হলে পূর্বমূল্য = ১০০ টাকা

$\therefore$ " " ১ " " " $= \frac{১০০ \times ২}{১৭৫}$ টাকা

$\therefore$ " " ১৭৫০ " " " $= \frac{১০০ \times ২ \times ১৭৫০}{১৭৫}$ টাকা $= ২০০০$ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " " $= ২০০০$ টাকা

$= \frac{২০০০}{১০০} = ২০$ টাকা

উত্তর: ২০ টাকা

বিকল্প:
মনে করি, পূর্বমূল্য = ১০০ টাকা
১০০ টাকায় দাম কমে $১২\frac{১}{২}\%$ বা, $= \frac{২৫}{২}$ টাকা
১ " " " $= \frac{২৫}{২ \times ১০০}$ টাকা
∴ ১৪,০০০ " " " $= \frac{২৫ \times ১৪০০০}{২ \times ১০০} = ১৭৫০$ টাকা।
∴ ১ কুইন্টাল = ১০০ কেজি চালের বর্তমান দাম = ১৭৫০ টাকা
১ " " " " $= \frac{১৭৫০}{১০০} = ১৭.৫$ টাকা
∴ $১২\frac{১}{২}\%$ কমে ক্রয়মূল্য $= ১০০ - \frac{২৫}{২} = \frac{২০০ - ২৫}{২} = \frac{১৭৫}{২}$
বর্তমান দাম $\frac{১৭৫}{২}$ টাকা হলে পূর্বমূল্য = ১০০ টাকা
" " ১ " " " $= \frac{১০০ \times ২}{১৭৫}$ টাকা
∴ " " ১৭.৫ " " " $= \frac{১০০ \times ২ \times ১৭৫}{১৭৫ \times ১০} = ২০$ টাকা

উত্তর: ২০ টাকা

৫. পেট্রোলের দাম ৪০% কমে যাওয়ায় বর্তমানে ১০০ টাকায় পূর্বাপেক্ষা ৫ লিটার পেট্রোল বেশি পাওয়া যায়। প্রতি লিটার পেট্রোলের বর্তমান মূল্য ও পূর্ব মূল্য কত? [১০তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২০ এর অনুরূপ)]

Sol মনে করি পূর্বমূল্য ১০০ টাকা
৪০% দাম কমায় বর্তমান মূল্য ১০০ − ৪০ = ৬০ টাকা
যেহেতু ১০০ টাকায় পূর্বের তুলনায় ৫ লিটার বেশি পাওয়া যায়
বর্তমানে ৫ লিটারের দাম (১০০ − ৬০) টাকা = ৪০ টাকা
" ১ " " $\frac{৪০}{৫} = ৮$ টাকা
আবার, বর্তমান মূল্য ৬০ টাকা হলে পূর্বমূল্য ১০০ টাকা
" " ১ " " " $\frac{১০০}{৬০}$ টাকা
" " ৮ " " " $\frac{১০০ \times ৮}{৬০} = ১৩.৩৩$ টাকা

উত্তর : বর্তমান মূল্য ৮ টাকা, পূর্বমূল্য = ১৩.৩৩ টাকা

03. চালের দাম $১২\frac{১}{২}\%$ কমে যাওয়ায় ৮৪,০০ টাকায় পূর্বের দামে যে পরিমাণ চাল কেনা যেত, বর্তমান দামের তার চেয়ে এক কুইন্টাল চাল বেশি কেনা যায়। চালের বর্তমান দর কুইন্টাল প্রতি কত? পূর্বে চালের দাম কত ছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol" মনে করি, চালের পূর্ব মূল্য = ১০০ টাকা

তাহলে $১২\frac{১}{২}\%$ বা, $\frac{২৫}{২}\%$ কমে বর্তমান মূল্য $= \left(১০০ - \frac{২৫}{২}\right)$ টাকা $= \frac{২০০ - ২৫}{২} = \frac{১৭৫}{২}$ টাকা

পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য $= \frac{১৭৫}{২}$ টাকা

∴ " ১ " " " " $= \frac{১৭৫}{২ \times ১০০}$ টাকা

∴ " ৮৪০০ " " " " $= \frac{১৭৫ \times ৮৪০০}{২ \times ১০০}$ টাকা = ৭৩৫০ টাকা।

সুতরাং, পূর্বমূল্য অপেক্ষা মোট টাকা কমে = (৮৪০০ − ৭৩৫০) টাকা = ১০৫০ টাকা

যেহেতু ১০৫০ টাকা কমার ফলে ১ কুইন্টাল চাল বেশি কেনা যায়, সে কারণে ১ কুইন্টাল চালের বর্তমান দর ১০৫০ টাকা।

আবার, বর্তমান মূল্য $\frac{১৭৫}{২}$ টাকা হলে পূর্বমূল্য = ১০০ টাকা

∴ " " ১ " " " $= \frac{১০০ \times ২}{১৭৫}$ টাকা

∴ " " ১০৫০ " " " $= \frac{১০০ \times ২ \times ১০৫০}{১৭৫}$ টাকা = ১২০০ টাকা

উত্তর: বর্তমান মূল্য ১০৫০ টাকা ও পূর্বমূল্য ১২০০ টাকা

04. চিনির মূল্য ৬% বেড়ে যাওয়ায় ১০৬০ টাকায় পূর্বে যত কে.জি. চিনি কেনা যেত, এখন তার চেয়ে ৩ কে.জি চিনি কম কেনা যায়। চিনির বর্তমান দর কে.জি. প্রতি কত? পূর্বে চিনির দাম কে.জি. প্রতি কত ছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol" মনে করি, চিনির পূর্ব মূল্য = ১০০ টাকা

তাহলে ৬% বাড়ায় বর্তমান মূল্য = (১০০ + ৬) = ১০৬ টাকা

পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য = ১০৬ টাকা

∴ " ১ " " " " $= \frac{১০৬}{১০০}$ টাকা

∴ " ১০৬০ " " " " $= \frac{১০৬ \times ১০৬০}{১০০}$ টাকা

= ১১২৩.৬ টাকা।

সুতরাং, পূর্বমূল্য অপেক্ষা মোট টাকা বাড়ে = (১১২৩.৬ − ১০৬০) টাকা = ৬৩.৬ টাকা

যেহেতু ৬৩.৬ টাকা বৃদ্ধির ফলে ৩ কে.জি. চাল কম কেনা যায়, সে কারণে ৩ কে.জি. চালের বর্তমান দর ৬৩.৬ টাকা।

৩ কে.জি. চালের বর্তমান মূল্য ৬৩.৬ টাকা

∴ ১ " " " " $= \frac{৬৩.৬}{৩} = ২১.২$ টাকা

আবার, বর্তমান মূল্য ১০৬ টাকা হলে পূর্বমূল্য = ১০০ টাকা

∴ " " ১ " " " $= \frac{১০০}{১০৬}$ টাকা

∴ " " ২১.২ " " " $= \frac{১০০ \times ২১.২}{১০৬}$ টাকা = ২০ টাকা

উত্তর: বর্তমান মূল্য ২১.২ টাকা ও পূর্বমূল্য ২০ টাকা

05. কলার দাম $১৬\frac{২}{৩}\%$ কমে যাওয়ায় ৭৫ টাকায় আগের চেয়ে ৫টি কলা বেশি পাওয়া গেল। প্রতি ডজন কলার বর্তমান দাম কত? [৮ম শ্রেণি, অনু-২.১ (২০০৯ সংস্করণ)]

Sol" কলার দাম ১০০ টাকায় কমে $১৬\frac{২}{৩}$ টাকা বা $\frac{৫০}{৩}$ টাকা

$\therefore$ " " ১ " " $\frac{৫০}{৩ \times ১০০}$ টাকা

$\therefore$ " " ৭৫ " " $\frac{৫০ \times ৭৫}{৩ \times ১০০} = \frac{২৫}{২}$ টাকা

অর্থাৎ

৫টি কলার বর্তমান মূল্য $\frac{১২৫}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১" " " " $\frac{২৫}{২ \times ৫}$ টাকা

$\therefore$ ১২" " " " $\frac{২৫ \times ১২}{২ \times ৫}$ টাকা = ৩০ টাকা **(উত্তর)**

06. চা পাতার দাম ২০% কমে যাওয়ায় করিম ৪৫০০ টাকায় পূর্বাপেক্ষা ১৫ কেজি চা পাতা বেশি কিনতে পারে। প্রতি কেজি চা পাতার পূর্বমূল্য ও বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন। [৮ম শ্রেণি, অনু-২.১ (২০০৯ সংস্করণ)]

Sol" ২০% কমে-

চা পাতার দাম ১০০ টাকায় কমে ২০ টাকা

$\therefore$ " " " ১ " " $\frac{২০}{১০০}$ "

$\therefore$ " " " ৪৫০০ " " $\frac{২০ \times ৪৫০০}{১০০}$ টাকা = ৯০০ টাকা

প্রশ্নমতে,

১৫ কেজি চা পাতার বর্তমান মূল্য ৯০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " " $\frac{৯০০}{১৫}$ টাকা = ৬০ টাকা

আবার, ২০% কমে ১০০ টাকার চা পাতার বর্তমান মূল্য (১০০ – ২০) টাকা = ৮০ টাকা

এখন, বর্তমান মূল্য ৮০ টাকা হলে পূর্বের মূল্য ১০০ টাকা

$\therefore$ " " ১ " " " " $\frac{১০০}{৮০}$ "

$\therefore$ " " ৬০ " " " " $\frac{১০০ \times ৬০}{৮০}$ টাকা = ৭৫ টাকা

$\therefore$ প্রতি কেজি চা পাতার বর্তমান মূল্য ৬০ টাকা এবং পূর্বের মূল্য ৭৫ টাকা।

উত্তর: বর্তমান মূল্য ৬০ টাকা এবং পূর্বের মূল্য ৭৫ টাকা।

TYPE 03: মূল্যের হ্রাস বা বৃদ্ধিতে ব্যবহারের উপর প্রভাব সংক্রান্ত সমস্যা

01. প্রতি ঘনমিটার তিতাস গ্যাসের মূল্য যখন ২.২৫ টাকা ছিল, তখন একটি পরিবারের মাসিক গ্যাস বিল, মিটার ভাড়া ২০ টাকাসহ গড়ে ২২২.৫০ টাকা হত। গ্যাসের মূল্য বৃদ্ধি পেয়ে যখন প্রতি ঘনমিটার ২.৭৫ টাকা হল, তখন তারা গ্যাসের ব্যবহার এমনভাবে কমাল যে মাসিক গ্যাস বিল অপরিবর্তিত রইল। তারা গ্যাসের ব্যবহার শতকরা কত ভাগ কমাল? [১১তম বিসিএস]

Sol: মিটার ভাড়া বাদে গ্যাস বিল = (২২২.৫০ − ২০) = ২০২.৫০ টাকা।

২.২৫ টাকা ১ ঘনমিটারের দাম

$\therefore$ ১ " $\frac{১}{২.২৫}$ " "

$\therefore$ ২০২.৫০ " $\frac{১ \times ২০২.৫০}{২.২৫}$ " " = ৯০ ঘ.মি.

পরবর্তীতে

২.৭৫ টাকায় পাওয়া যায় ১ ঘনমিটার

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১}{২.৭৫}$ "

$\therefore$ ২০২.৫০ " " " $\frac{১ \times ২০২.৫০}{২.৭৫}$ " $= \frac{২০২৫০}{২৭৫} = \frac{৮১০}{১১}$ ঘ.মি.

ব্যবহার কমানো হলো $= ৯০ - \frac{৮১০}{১১} = \frac{৯৯০ - ৮১০}{১১} = \frac{১৮০}{১১}$ ঘ.মি.

৯০ ঘ.মি. এ কমানো হয় $\frac{১৮০}{১১}$ ঘ.মি.

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১৮০}{১১ \times ৯০}$ "

$\therefore$ ১০০ " " " $\frac{১৮০ \times ১০০}{১১ \times ৯০}$ " $= \frac{২০০}{১১} = ১৮\frac{২}{১১}$ ঘ.মি.

উত্তর : $১৮\frac{২}{১১}\%$

02. চা পাতার মূল্য 10% কমে গেলো চা পাতার বিক্রি শতকরা কত বৃদ্ধি পেলে চা পাতা বাবদ সরকার শতকরা 8 টাকা বেশি কর পাবে? *[অষ্টম শ্রেণীর (২০১২ সংস্করণ), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]*

Sol: শুরুতে চা পাতার মূল্য = 100 টাকা হলে সরকার কর পেতো এই 100 টাকার উপর।

এখন মূল্য 10% কমে গেলে নতুন মূল্য = 100 − 10 = 90 টাকা। (এতে সরকারের প্রাপ্ত করের পরিমাণও 10% কমে যাবে)

সুতরাং সরকারকে অতিরিক্ত 8% কর পেতে হলে চা পাতা বিক্রি হতে হবে = (100 + 8) = 108 টাকার।

$\therefore$ বিক্রি বৃদ্ধি পেতে হবে = 108 − 90 = 18 টাকার।

সুতরাং বিক্রি বৃদ্ধির শতকরা হার $= \frac{18}{90} \times 100 = 20\%$ **(Ans.)**

03. যদি তেলের মূল্য ২৫% বৃদ্ধি পায়, তবে তেলের ব্যবহার শতকরা কত কমালে তেল বাবদ কোন খরচ বৃদ্ধি পাবে না? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]*

Sol: ২৫% বৃদ্ধিতে,

পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য (১০০ + ২৫) টাকা = ১২৫ টাকা

বর্তমান মূল্য ১২৫ টাকা হলে পূর্বমূল্য ১০০ টাকা

$\therefore$ " " ১ " " " $\frac{১০০}{১২৫}$ টাকা

$\therefore$ " " ১০০ " " " $\frac{১০০ \times ১০০}{১২৫} = ৮০$ টাকা

$\therefore$ বর্তমান ব্যবহার কমাতে হবে (১০০ − ৮০)% = ২০% (উত্তর)

04. চালের দাম ২৫% কমে গেলে, একই খরচে চাল কেনা শতকরা কি পরিমাণ বৃদ্ধি করা যাবে?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol" ২৫% হ্রাসে,
পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য (১০০ − ২৫) টাকা = ৭৫ টাকা
বর্তমান মূল্য ৭৫ টাকা হলে পূর্বমূল্য ১০০ টাকা
∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{৭৫}$ টাকা
∴ " " ১০০ " " " $\frac{১০০ \times ১০০}{৭৫} = ১৩৩\frac{১}{৩}$ টাকা
∴ বর্তমান ব্যবহার বৃদ্ধি করতে হবে $(১৩৩\frac{১}{৩} - ১০০)\% = ৩৩\frac{১}{৩}\%$ (উত্তর)

05. কাপড়ের মূল্য ২০% কমে গেলে, কোন ব্যক্তি খরচ বৃদ্ধি না করেও কাপড়ের ব্যবহার শতকরা কত বৃদ্ধি করতে পারে?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" ২০% হ্রাসে,
পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য (১০০ − ২০) টাকা = ৮০ টাকা
বর্তমান মূল্য ৮০ টাকা হলে পূর্বমূল্য ১০০ টাকা
∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{৮০}$ টাকা
∴ " " ১০০ " " " $\frac{১০০ \times ১০০}{৮০} = ১২৫$ টাকা
∴ বর্তমান ব্যবহার বৃদ্ধি করতে হবে (১২৫ − ১০০)% = ২৫% (উত্তর)

06. যদি ডালের মূল্য $১২\frac{১}{২}\%$ বৃদ্ধি পায়, তবে ডালের ব্যবহার শতকরা কত কমালে ডাল বাবদ কোন খরচ বৃদ্ধি পাবে না?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol" $১২\frac{১}{২}\%$ বা, ১২.৫% বৃদ্ধিতে,
পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য (১০০ + ১২.৫) টাকা = ১১২.৫ টাকা
বর্তমান মূল্য ১১২.৫ টাকা হলে পূর্বমূল্য ১০০ টাকা
∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{১১২.৫}$ টাকা
∴ " " ১০০ " " " $\frac{১০০ \times ১০০}{১১২.৫} = ৮৮.৮৯$ টাকা
∴ বর্তমান ব্যবহার কমাতে হবে (১০০ − ৮৮.৮৯)% = ১১.১১% (উত্তর)

07. যদি চালের মূল্য ২৫% বৃদ্ধি পায় তবে চালের ব্যবহার শতকরা কত কমালে চাল বাবদ কোন খরচ বৃদ্ধি পাবে না?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol" ২৫% বৃদ্ধিতে,
পূর্বমূল্য ১০০ টাকা হলে বর্তমান মূল্য (১০০ + ২৫) টাকা = ১২৫ টাকা
বর্তমান মূল্য ১২৫ টাকা হলে পূর্বমূল্য ১০০ টাকা
∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{১২৫}$ টাকা
∴ " " ১০০ " " " $\frac{১০০ \times ১০০}{১২৫} = ৮০$ টাকা
∴ বর্তমান ব্যবহার কমাতে হবে (১০০ − ৮০)% = ২০% (উত্তর)

TYPE 04: পরীক্ষায় পাস বা ফেল সংক্রান্ত সমস্যা

01. কোনো পরীক্ষায় ১৮% পরীক্ষার্থী ইংরেজিতে, ১২% পরীক্ষার্থী গণিতে এবং ৯% পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করলো। শতকরা কতজন পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে পাস করেছে?

Sol: উভয় বিষয়ে ফেল করে = ৯%

শুধু ইংরেজিতে ফেল করে = (১৮ − ৯)% = ৯%

শুধু গণিতে ফেল করে = (১২ − ৯)% = ৩%

∴ ইংরেজি বা গণিতে বা উভয় বিষয়ে ফেল করে অর্থাৎ যেকোনো এক বিষয়ে ফেল করে = (৯ + ৩ + ৯)% = ২১%

∴ উভয় বিষয়ে পাস করে = (১০০ − ২১)% = ৭৯%

02. কোন ক্লাসে ৭০% শিক্ষার্থী ইংরেজিতে এবং ৮০% শিক্ষার্থী বাংলায় পাশ করেছে। কিন্তু ১০% শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে। যদি উভয় বিষয়ে ৩৬০ জন শিক্ষার্থী পাশ করে থাকে, তবে ঐ ক্লাসে কতজন শিক্ষার্থী পরীক্ষা দিয়েছে? [৩২তম, ২০তম, ১৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-১৫)]

Sol: ইংরেজিতে ফেল করে = ১০০% − ৭০% = ৩০%

বাংলায় ফেল করে = ১০০% − ৮০% = ২০%

ইংরেজিতে যে ৩০% ফেল করে তার মধ্যে উভয় বিষয়ে ১০% রয়েছে এবং বাংলা বিষয়ে যে ২০% ফেল করে এর মধ্যে উভয় বিষয়ের ১০% আছে।

শুধু ইংরেজিতে ফেল করে = ৩০% − ১০% = ২০%

" বাংলায় " " = ২০% − ১০% = ১০%

প্রতি এক বিষয়ে এবং উভয় বিষয়ে ফেল করে = ২০% + ১০% + ১০% = ৪০%

∴ উভয় বিষয়ে পাশ করে = ১০০% − ৪০% = ৬০%

উভয় বিষয়ে ৬০ জন পাশ করলে মোট শিক্ষার্থী ১০০ জন

" " ১ " " " " " $\frac{১০০}{৬০}$ "

" " ৩৬০ " " " " " $\frac{১০০ \times ৩৬০}{৬০} = ৬০০$ জন

অতএব, নির্ণেয় শিক্ষার্থীর সংখ্যা ৬০০ জন।

উত্তর: ৬০০ জন।

03. একটি স্কুলের 60% ছাত্র বাংলায় ও 70% ছাত্র গণিতে পাস করে। 20% ছাত্র উভয় বিষয়ে ফেল করলে এবং 250 জন ছাত্র উভয় বিষয়ে পাস করলে মোট কতজন ছাত্র শুধু বাংলায় ফেল করেছে?

Sol: বাংলায় ফেল করে (100 − 60)% = 40%

গণিতে ফেল করে (100 − 70)% = 30%

উভয় বিষয়ে ফেল করে = 20%

শুধু বাংলায় ফেল করে (40 − 20)% = 20%

শুধু গণিতে ফেল করে (30 − 20)% = 10%

মোট ফেল = 20% + 20% + 10% = 50%

উভয় বিষয়ে পাশ করে (100 − 50)% = 50%

মোট ছাত্রের 50% = 250 জন

" " 1% = $\frac{250}{50}$ "

" " 20% = $\frac{250 \times 20}{50}$ জন = 100 জন। **(Ans.)**

04. একটি পরীক্ষায় ৯০% পরীক্ষার্থী ইংরেজিতে এবং ৮৫% পরীক্ষার্থী গণিতে কৃতকার্য হয়। উভয় বিষয়ে কেউ যদি ফেল না করে এবং উভয় বিষয়ে ২২৫ জন ছাত্র কৃতকার্য হয়ে থাকলে ঐ পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী ছাত্রের সংখ্যা কত? [২৮তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অঙ্কে নং-১৬)]

Sol: ইংরেজিতে ফেল করে, ১০০% − ৯০% = ১০% পরীক্ষার্থী

গণিতে ফেল করে, ১০০% − ৮৫% = ১৫% পরীক্ষার্থী

ইংরেজি এবং গণিতে ফেল করে, ১০% + ১৫% = ২৫% পরীক্ষার্থী

মোট পাস করে ১০০% − ২৫% = ৭৫% পরীক্ষার্থী

প্রশ্নমতে, ৭৫ জন পাস করলে ছাত্রসংখ্যা ১০০ জন

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{১০০}{৭৫}$ "

$\therefore$ ২২৫ " " " " $\frac{১০০ \times ২২৫}{৭৫} = ৩০০$ জন

উত্তর: ৩০০ জন

05. একটি পরীক্ষায় ১২০০ বালক পরীক্ষার্থী ছিল। যদি ৫০% বালক ও ৪০% বালিকা পরীক্ষায় পাস করে, বালিকা পরীক্ষার্থীর সংখ্যা নির্ণয় করুন। যেখানে মোট ৪৬% পরীক্ষার্থী পাস করেছে। [২২তম বিসিএস]

Sol: ধরি, মেয়ে পরীক্ষার্থী = x

$\therefore$ মোট পরীক্ষার্থী = (১২০০ + x) জন

প্রশ্নমতে, (x এর ৪০%) + (১২০০ এর ৫০%) = (১২০০ + x) এর ৪৬%

$\Rightarrow x \times \frac{৪০}{১০০} + ১২০০ \times \frac{৫০}{১০০} = (১২০০ + x) \times \frac{৪৬}{১০০}$

$\Rightarrow \frac{৪০x}{১০০} + \frac{৬০০০০}{১০০} = \frac{৪৬(১২০০ + x)}{১০০}$

$\Rightarrow ৪০x + ৬০০০০ = ৫৫২০০ + ৪৬x$

$\Rightarrow ৪৬x - ৪০x = ৬০০০০ - ৫৫২০০ \quad \Rightarrow ৬x = ৪৮০০ \quad \therefore x = ৮০০$

$\therefore$ মেয়ে পরীক্ষার্থীর সংখ্যা = ৮০০ জন। **(উত্তর)**

06. কোন পরীক্ষায় বাংলায় ৬০% এবং গণিতে ৫০% পরীক্ষার্থী কৃতকার্য হয়েছে। যদি উভয় বিষয়ে ৪০% পরীক্ষার্থী কৃতকার্য হয়ে থাকে এবং উভয় বিষয়ে মোট ৬০ জন ফেল করে থাকে তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত? [২১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (সা.গণিত-১৯৮৩) অধ্যায়-৪.১ এর ১৫ নং প্রশ্নের অনুরূপ]

Sol: বাংলায় কৃতকার্য হয় ৬০%, উভয় বিষয় ৪০%

$\therefore$ শুধু বাংলায় কৃতকার্য হয় (৬০ − ৪০)% = ২০%

গণিতে কৃতকার্য হয় ৫০%

$\therefore$ শুধু গণিতে কৃতকার্য হয় (৫০ − ৪০)% = ১০%

$\therefore$ উভয় বিষয়ে অথবা যে কোন এক বিষয়ে কৃতকার্য হয়= (২০ + ১০ + ৪০)%

= ৭০%

$\therefore$ উভয় বিষয়ে ফেল করে (১০০ − ৭০)% = ৩০%

প্রশ্নমতে, উভয় বিষয়ে ৩০ জন ফেল করলে পরীক্ষার্থী = ১০০ জন

$\therefore$ " " ১ " " " " $= \frac{১০০}{৩০}$ "

$\therefore$ " " ৬০ " " " " $= \frac{১০০ \times ৬০}{৩০}$ জন = ২০০ জন

উত্তর: ২০০ জন

07. একটি পরীক্ষায় ৮০% পরীক্ষার্থী গণিতে এবং ৯০% পরীক্ষার্থী বাংলায় পাস করেছে। উভয় বিষয়ে কেউ যদি ফেল না করে এবং উভয় বিষয়ে পাস করেছে ৩৫০ জন। ঐ পরীক্ষায় কতজন পরীক্ষার্থী ছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" গণিতে ফেল করে, ১০০% − ৮০% = ২০% পরীক্ষার্থী

বাংলায় ফেল করে, ১০০% − ৯০% = ১০% পরীক্ষার্থী

গণিত এবং বাংলায় ফেল করে, ২০% + ১০% = ৩০% পরীক্ষার্থী

মোট পাস করে ১০০% − ৩০% = ৭০% পরীক্ষার্থী

প্রশ্নমতে, ৭০ জন পাস করলে ছাত্রসংখ্যা ১০০ জন

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{১০০}{৭০}$ "

$\therefore$ ৩৫০ " " " " $\frac{১০০ \times ৩৫০}{৭০} = ৫০০$ জন

উত্তর: ৫০০ জন

08. একটি পরীক্ষায় ৮৫% পরীক্ষার্থী ইসলামিয়াতে এবং ৮০% পরীক্ষার্থী পৌরনীতিতে কৃতকার্য হল। যদি ৫% পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করে থাকে এবং দুই বিষয়েই ২৮০ পাস করে থাকে, তবে পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol" ইসলামিয়াতে ফেল করে = ১০০% − ৮৫% = ১৫%

পৌরনীতিতে ফেল করে = ১০০% − ৮০% = ২০%

উভয় বিষয়ে ফেল করে ৫%

শুধু ইসলামিয়াতে ফেল করে = ১৫% − ৫% = ১০%

" পৌরনীতিতে " " = ২০% − ৫% = ১৫%

অন্তত এক বিষয়ে এবং ফেল করে = ১০% + ১৫% + ৫% = ৩০%

উভয় বিষয়ে পাস করে = ১০০% − ৩০% = ৭০%

উভয় বিষয়ে ৭০ জন পাশ করলে মোট শিক্ষার্থী ১০০ জন

$\therefore$ " " ১ " " " " " $= \frac{১০০}{৭০}$ "

$\therefore$ " " ২৮০ " " " " " $= \frac{১০০ \times ২৮০}{৭০} = ৪০০$ জন

অতএব, নির্ণেয় পরীক্ষার্থীর সংখ্যা ৪০০ জন।

উত্তর: ৪০০ জন।

TYPE 05 উপাত্ত হ্রাস বা বৃদ্ধিতে শতকরা হ্রাস বা বৃদ্ধির হার নির্ণয়

01. একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়কে ২০% বৃদ্ধি করলে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে? [২৮তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, বাগানের দৈর্ঘ্য x মিটার

$\therefore$ " প্রস্থ y "

$\therefore$ ক্ষেত্রফল = xy বর্গ মিটার।

দৈর্ঘ্য ২০% বাড়ালে পাই,

দৈর্ঘ্য = x + x এর ২০% = x + x এর $\frac{২০}{১০০} = x + \frac{x}{৫} = \frac{৬x}{৫}$

প্রস্থ ২০% বাড়ালে পাই, প্রস্থ = y + y এর ২০% = y + y এর $\frac{২০}{১০০} = y + \frac{y}{৫} = \frac{৬y}{৫}$

∴ পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল $= \frac{৬x}{৫} \times \frac{৬y}{৫} = \frac{৩৬\ xy}{২৫}$

∴ ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি $= \frac{৩৬\ xy}{২৫} - xy = \frac{৩৬\ xy - ২৫\ xy}{২৫} = \frac{১১\ xy}{২৫}$

xy বর্গমিটারে বৃদ্ধি পায় $\frac{১১\ xy}{২৫}$ বর্গমিটার

∴ ১ " " " $\frac{১১\ xy}{২৫ \times xy}$ "

∴ ১০০ " " " $\frac{১১\ xy \times ১০০}{২৫ \times xy}$ বর্গমিটার = ৪৪ বর্গমিটার

উত্তর: ৪৪%

02. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ২৪ মিটার এবং প্রস্থ ১০ মিটার। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ৬% করে বৃদ্ধি করলে এর ক্ষেত্রফল শতকরা কত বাড়বে? [১৭তম বিসিএস]

Sol" আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (২৪ × ১০) বর্গমিটার = ২৪০ বর্গমিটার

৬% বৃদ্ধিতে বর্তমান দৈর্ঘ্য = ২৪ + ২৪ এর ৬% $= ২৪ + \frac{২৪ \times ৬}{১০০} = \frac{২৪০০ + ১৪৪}{১০০} = \frac{৬৩৬}{২৫}$ মিটার

আবার, ৬% বৃদ্ধিতে বর্তমান প্রস্থ = ১০ + ১০ এর ৬% $= ১০ + \frac{১০ \times ৬}{১০০} = \frac{১০০০ + ৬০}{১০০} = \frac{৫৩}{৫}$ মিটার

∴ ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{৬৩৬}{২৫} \times \frac{৫৩}{৫}\right) = \frac{৩৩৭০৮}{১২৫}$ বর্গমিটার

∴ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $= \left(\frac{৩৩৭০৮}{১২৫} - ২৪০\right) = \frac{৩৩৭০৮ - ৩০০০০}{১২৫} = \frac{৩৭০৮}{১২৫}$ বর্গমিটার

২৪০ বর্গমিটারে বৃদ্ধি পায় $= \frac{৩৭০৮}{১২৫}$ বর্গমিটার

∴ ১ " " " $= \frac{৩৭০৮}{১২৫ \times ২৪০}$ বর্গমিটার

∴ ১০০ " " " $= \frac{৩৭০৮ \times ১০০}{১২৫ \times ২৪০}$ "

$= \frac{৩০৯}{২৫} = ১২\frac{৯}{২৫}$ বর্গমিটার (উত্তর)

03. ক-এর বেতন খ-এর বেতন অপেক্ষা ১৫% বেশি। খ-এর বেতন ক-এর বেতন অপেক্ষা শতকরা কত কম? [১০তম বিসিএস]

Sol" ধরি, খ-এর বেতন ১০০ টাকা

∴ ক-এর বেতন = (১০০ + ১৫) টাকা = ১১৫ টাকা

ক-এর ১১৫ টাকা বেতন হলে খ এর বেতন ১০০ টাকা

∴ ক " ১ " " " খ " " $\frac{১০০}{১১৫}$ "

∴ ক " ১০০ " " " খ " " $\frac{১০০ \times ১০০}{১১৫} = \frac{২০০০}{২৩}$

খ এর বেতন ক এর বেতন থেকে $\left(১০০ - \frac{২০০০}{২৩}\right)$ টাকা কম $= \frac{৩০০}{২৩} = ১৩\frac{১}{২৩}$ টাকা কম

উত্তর : $১৩\frac{১}{২৩}\%$ কম

04. একটি রেলগাড়ি ঘণ্টায় ৮০ কিলোমিটার বেগে চলে। একটি লোক ৩ মিনিটে ১ কিলোমিটার দৌড়ালে লোকটির গতিবেগ রেলগাড়ির গতিবেগের শতকরা কত হবে? যদি লোক এবং রেলগাড়ি উভয়েই তাদের গতিবেগ ৫% কমায়, তবে বর্তমানে লোকটির গতিবেগ রেলগাড়ির নতুন গতিবেগের শতকরা হিসেবে প্রকাশ করুন। [১৩তম বিসিএস]

Sol" লোকটি ৩ মিনিটে দৌড়াতে পারে ১ কি.মি.

" ১ " " " $\frac{১}{৩}$ "

" ৬০ " " " $\frac{১ \times ৬০}{৩} = ২০$ কি.মি.

রেলগাড়ি ৮০ কি.মি. অতিক্রম করলে লোকটি অতিক্রম করে ২০ কি.মি.

" ১ " " " " " " $\frac{২০}{৮০}$ "

" ১০০ " " " " " $\frac{২০ \times ১০০}{৮০}$ " = ২৫ কি.মি.

অতএব, লোকটির গতিবেগ রেলগাড়ির গতিবেগের ২৫%

রেলগাড়ি গতিবেগ ১০০ কি.মি. কমানো হয় ৫ কি.মি.

" " ১ " " " $\frac{৫}{১০০}$ "

" " ৮০ " " " $\frac{৫ \times ৮০}{১০০} = ৪$ কি.মি.

রেলগাড়ির বর্তমান গতিবেগ (৮০ − ৪) বা ৭৬ কি.মি.

লোকটির গতিবেগ ১০০ কি.মি. কমানো হয় ৫ কি.মি.

" " ১ " " " $\frac{৫}{১০০}$ "

" " ২০ " " " $\frac{৫ \times ২০}{১০০} = ১$ কি.মি.

লোকটির বর্তমান গতিবেগ = (২০ − ১) = ১৯ কি.মি.

রেলগাড়ির গতিবেগ ৭৬ কি.মি. হলে লোকটির গতিবেগ ১৯ কি.মি.

" " ১ " " " " " $\frac{১৯}{৭৬}$ "

" " ১০০ " " " $\frac{১৯ \times ১০০}{৭৬} = ২৫$ কি.মি.

উত্তর : ২৫% ও ২৫%

১৫. হাতুড়ি ও বাটালির বর্তমান দর সমান। যদি হাতুড়ির দাম ৫% ও বাটালির দাম ৩% বাড়ে, তবে তিনটি হাতুড়ি ও তিনটি বাটালি কিনতে পূর্বের তুলনায় শতকরা কত বেশি ব্যয় হবে? [১১তম বিসিএস]

Sol মনে করি, প্রতিটি হাতুড়ি ও বাটালির দাম ১০০ টাকা

∴ ৩টি হাতুড়ির দাম = ৩ × ১০০ = ৩০০ টাকা

∴ ৩টি বাটালির দাম = ৩ × ১০০ = ৩০০ টাকা

হাতুড়ি ও বাটালির মোট দাম = (৩০০ + ৩০০) = ৬০০ টাকা

৩% বৃদ্ধিতে বাটালির দাম = (১০০ + ৩) = ১০৩ টাকা

পূর্বদাম ১০০ টাকা হলে বর্তমান দাম ১০৩ টাকা

∴ " ১ " " " " $\frac{১০৩}{১০০}$ "

∴ " ৩০০ " " " " $\frac{১০৩ \times ৩০০}{১০০} = ৩০৯$ টাকা

৫% বৃদ্ধিতে হাতুড়ির দাম = (১০০ + ৫) = ১০৫ টাকা

পূর্বদাম ১০০ টাকা হলে বর্তমান দাম ১০৫ টাকা

∴ " ১ " " " " $\frac{১০৫}{১০০}$ "

∴ " ৩০০ " " " " $\frac{১০৫ \times ৩০০}{১০০} = ৩১৫$ টাকা

∴ মোট দাম = (৩০৯ + ৩১৫) = ৬২৪ টাকা

∴ মোট বেশি লাগে = (৬২৪ − ৬০০) = ২৪ টাকা

∴ শতকরা বৃদ্ধির হার = $\frac{২৪ \times ১০০}{৬০০} = ৪\%$ (উত্তর)

১৬. একটি স্কুলের ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ৯০০। ৪% ছাত্র চলে গেল, আর ৫% ছাত্রী নতুন ভর্তি হলো। এর ফলে ছাত্র-ছাত্রীর মোট সংখ্যার কোনো পরিবর্তন হলো না। ঐ স্কুলে পূর্বে কত জন ছাত্রী ছিল এবং বর্তমানে কত জন ছাত্র আছে? [৮ম শ্রেণি, অনু-২.১ (২০০৯ সংস্করণ)]

Sol মনে করি, পূর্বে ঐ স্কুলে ছাত্রী ছিল = ক জন

তাহলে, পূর্বে ঐ স্কুলে ছাত্র ছিল = (৯০০ − ক) জন

∴ ৪% ছাত্র চলে যাওয়ায় বর্তমান ছাত্র সংখ্যা = (৯০০ − ক) এর ৯৬% = (৯০০ − ক) এর $\frac{৯৬}{১০০}$

৫% নতুন ছাত্রী ভর্তি হওয়ায় বর্তমান ছাত্রী সংখ্যা = ক এর ১০৫% = $\frac{১০৫\,ক}{১০০}$ জন

প্রশ্নমতে, (৯০০ − ক) এর $\frac{৯৬}{১০০} + \frac{১০৫\,ক}{১০০} = ৯০০$

⇒ ৮৬৪০০ − ৯৬ক + ১০৫ক = ৯০০০০ [উভয়পক্ষকে ১০০ দ্বারা গুণ করে]

⇒ ৯ক = ৯০০০০ − ৮৬৪০০ = ৩৬০০

∴ ক = $\frac{৩৬০০}{৯} = ৪০০$

∴ পূর্বে ঐ স্কুলে ছাত্রী ছিল ৪০০ জন

∴ বর্তমানে ছাত্র সংখ্যা = (৯০০ − ৪০০) এর $\frac{৯৬}{১০০} = ৫০০ \times \frac{৯৬}{১০০} = ৪৮০$

উত্তর: পূর্বে ছাত্রী ছিল ৪০০ জন এবং বর্তমানে ছাত্র আছে ৪৮০ জন।

TYPE 06: ভোট সংক্রান্ত শতকরা

01. একটি ভোট কেন্দ্রে উপস্থিত ভোটারদের ৫৫% ভোট পেয়ে একজন প্রার্থী বিজয়ী হয়েছেন। তিনি তাঁর একমাত্র প্রতিদ্বন্দ্বী অপেক্ষা ১১,০০০ ভোট বেশি পেয়েছেন। ভোট কেন্দ্রে কতজন ভোটার উপস্থিত ছিলেন? [৪১তম বিসিএস]

Sol ধরি, উপস্থিত ভোটার সংখ্যা x জন

বিজয়ী প্রার্থী পেয়েছেন x এর $\frac{৫৫}{১০০}$ অংশ $= \frac{৫৫x}{১০০}$

পরাজিত প্রার্থী পেয়েছেন $= \left(x - \frac{৫৫x}{১০০}\right)$

$= \frac{১০০x - ৫৫x}{১০০} = \frac{৪৫x}{১০০}$

প্রশ্নমতে, $\frac{৫৫x}{১০০} - \frac{৪৫x}{১০০} = ১১,০০০$

$\Rightarrow \frac{৫৫x - ৪৫x}{১০০} = ১১,০০০$

$\Rightarrow ১০x = ১১,০০,০০০$

$\therefore \quad x = ১,১০,০০০$

$\therefore$ মোট ভোটার উপস্থিত ছিলেন ১,১০,০০০ জন।

02. একটি ভোট কেন্দ্রে উপস্থিত ভোটারদের 60% ভোট পেয়ে একজন প্রার্থী নির্বাচিত হয়েছে। তিনি একমাত্র প্রতিদ্বন্দ্বী অপেক্ষা 7500 ভোট বেশি পেয়েছেন। ভোট কেন্দ্রের কত জন ভোটার উপস্থিত ছিল?

Sol পরাজিত প্রার্থী ভোট পায় $(100 - 60)\% = 40\%$

দুই প্রতিদ্বন্দ্বী প্রার্থীর ভোটের ব্যবধান $(60 - 40)\% = 20\%$

ভোটের ব্যবধান 20 হলে মোট ভোটার 100 জন

" " 1 " " " $\frac{100}{20}$ "

" " 7500 " " " $\frac{100 \times 7500}{20} = 37500$ জন। **(Ans.)**

03. একটি নির্বাচনে মোট ভোটারের 22% ভোট দেয়নি। দুজন প্রার্থীর মধ্যে পরাজিত প্রতিদ্বন্দ্বী 21,216 ভোট পায় এবং বিজয়ী প্রতিদ্বন্দ্বী পরাজিত প্রার্থী অপেক্ষা 50% ভোট বেশি পায়। যদি বিজয়ী প্রার্থী 60% ভোট পেয়ে থাকে তাহলে ঐ এলাকার মোট ভোটার কতজন?

Sol নির্বাচনে অংশগ্রহণকারী মোট ভোটার $= (100 - 22)\% = 78\%$

50% বেশি ভোট প্রাপ্তিতে পরাজিত প্রতিদ্বন্দ্বী-

100 ভোট পেলে বিজয়ী প্রতিদ্বন্দ্বী পায় 150 ভোট

1 " " " " " $\frac{150}{100}$ "

21216 " " " " " $\frac{150 \times 21216}{100} = 31824$ জন।

নির্বাচনে অংশগ্রহণকারী মোট ভোটার $= (31824 + 21216)$ জন $= 53040$ জন

শর্তমতে, $78\% = 53040$

$100\% = \frac{53040 \times 100}{78} = 68000$ জন। **(Ans.)**

একটি নির্বাচনে A প্রার্থী ভোটারদের 30% ভোট পায় যেখানে B প্রার্থী অবশিষ্ট ভোটারদের 60% ভোট পায়। বাকি ভোটার ভোট দেয়নি। যারা A প্রার্থীকে ভোট দিয়েছে এবং যারা ভোট দেয়নি এমন ভোটার সংখ্যার পার্থক্য 1200। এই নির্বাচনে কতজন ভোটার ভোট দিয়েছিল?

Sol: মোট ভোটারের সংখ্যা 100 জন হলে-
A প্রার্থী ভোট পায় (100 এর 30%) জন = 30 জন
বাকি ভোটার (100 – 30) জন = 70 জন
B প্রার্থী ভোট পায় (70 এর 60%) জন = 42 জন
বাকি ভোটার (70 – 42) জন = 28 জন
ভোটের পার্থক্য = (30 – 28) জন = 2 জন
ভোটের পার্থক্য 2 জন হলে মোট ভোটার 100 জন
" 1200 " " " " $\frac{100 \times 1200}{2}$ = 60000 জন। **(Ans.)**

TYPE 07: চক্রবৃদ্ধি মুনাফার সূত্রের ব্যবহারজনিত সমস্যা

কোন বছরে একটি গ্রামের লোকসংখ্যা 12% বাড়ে। বছরের শেষে লোক সংখ্যা 3360 হলে, বছরের শুরুতে লোকসংখ্যা কত ছিল?

Sol: লোকসংখ্যা 12% বাড়ায় 100 জন বৃদ্ধি পেয়ে হয় (100 + 12) জন বা 112 জন।
বছরের শেষে লোক সংখ্যা-
112 জন হলে শুরুতে লোকসংখ্যা 100 জন
1 " " " " $\frac{100}{112}$ জন
3360 " " " " $\frac{100 \times 3360}{112}$ জন = 3000 জন।

একটি শহরের জনসংখ্যা প্রতি বছর শতকরা ৪ জন করে বৃদ্ধি পায় এবং ঐ শহরে জনসংখ্যা ছিল ২০০০০০০ জন। ৩ বছর পর ঐ শহরের জনসংখ্যা কত হবে? [৩৪তম, ২৯তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর (সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩ এর অনুরূপ)]

Sol: আমরা জানি, কোন বছরের জনসংখ্যা P এবং প্রতি বছর জনসংখ্যা শতকরা r হারে বৃদ্ধি পেলে n বছরের শেষে জনসংখ্যা হবে $P\left(১ + \frac{r}{১০০}\right)^n$

এখানে, জনসংখ্যা P = ২০, ০০, ০০০
বৃদ্ধির হার r = ৪
বছরের সংখ্যা n = ৩

৩ বছর পর জনসংখ্যা হবে $= ২০,০০,০০০\left(১ + \frac{৪}{১০০}\right)^৩$ জন

$= ২০,০০,০০০\left(\frac{১০০ + ৪}{১০০}\right)^৩$ জন

$= \frac{২০,০০,০০০ \times ১০৪ \times ১০৪ \times ১০৪}{১০০ \times ১০০ \times ১০০}$ জন

$= ২ \times ১০৪ \times ১০৪ \times ১০৪$ জন

$= ২২,৪৯,৭২৮$

উত্তর: ২২,৪৯,৭২৮ জন।

বিকল্প:
বছরের প্রথমে জনসংখ্যা ১০০ জন হলে,
৪% বৃদ্ধিতে বছরের শেষে জনসংখ্যা হয় $(১০০ + ৪) = ১০৪$ জন
অতএব,
১০০ জন বৃদ্ধি পেয়ে বছরের শেষে হয় ১০৪ জন
∴ ১ " " " " " " $\frac{১০৪}{১০০}$ "
∴ ২০০০০০০ " " " " " " $\frac{১০৪}{১০০} \times ২০০০০০০$ জন

সুতরাং, তৃতীয় বছর শেষে জনসংখ্যা হবে $\left(\frac{১০৪}{১০০}\right)^৩ \times ২০০০০০০$ জন
$= ১.১২৪৮৬৪ \times ২০০০০০০$ জন
$= ২২৪৯৭২৮$ জন

অতএব, নির্ণেয় জনসংখ্যা ২২৪৯৭২৮জন।
উত্তর: ২২,৪৯,৭২৮জন।

03. ঢাকা শহরের লোকসংখ্যা ৩৫ লক্ষ। এ শহরে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতি হাজারে ৩০ হলে ২ বছর পরে ঢাকা শহরের লোকসংখ্যা কত হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol" আমরা জানি, কোন বছরের জনসংখ্যা P এবং প্রতি বছর জনসংখ্যা শতকরা r হারে বৃদ্ধি পেলে n বছরের শেষে জনসংখ্যা হবে $P\left(১ + \frac{r}{১০০}\right)^n$
এখানে, জনসংখ্যা $P = ৩৫, ০০, ০০০$
বৃদ্ধির হার $r = \frac{৩০}{১০০০} = \frac{৩}{১০০} = ৩\%$
বছরের সংখ্যা $n = ২$

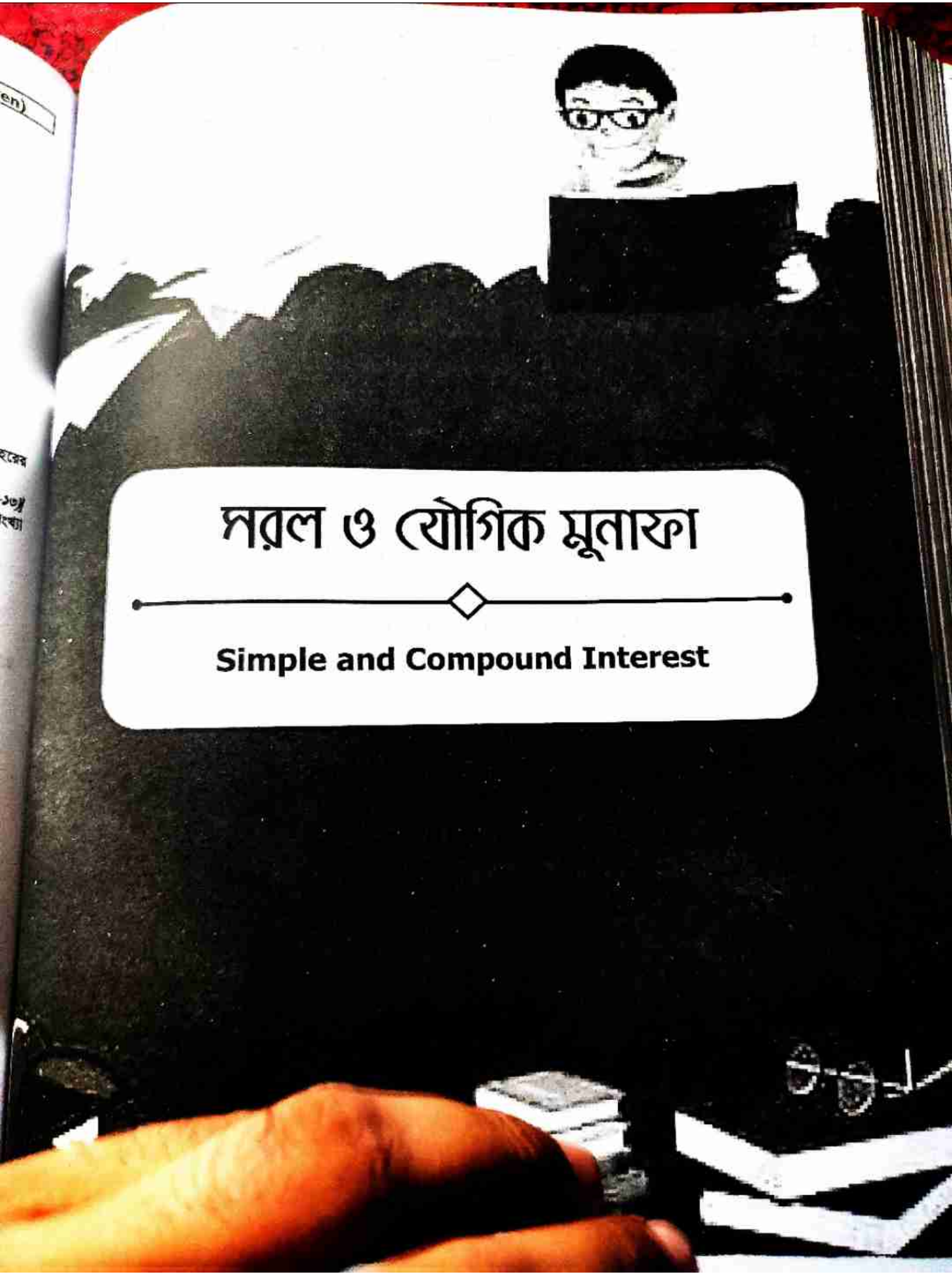
২ বছর পর জনসংখ্যা হবে $= ৩৫,০০,০০০\left(১ + \frac{৩}{১০০}\right)^২$ জন
$= ৩৫,০০,০০০\left(\frac{১০০ + ৩}{১০০}\right)^২$ জন
$= \frac{৩৫,০০,০০০ \times ১০৩ \times ১০৩}{১০০ \times ১০০}$ জন
$= ৩৫০ \times ১০৩ \times ১০৩$ জন
$= ৩৭,১৩,১৫০$

উত্তর: ৩৭,১৩,১৫০ জন।

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 02, 03
Type-02	01, 02, 04
Type-03	03, 06
Type-04	02, 04, 05, 06
Type-05	01, 02
Type-06	01
Type-07	02



সরল ও যৌগিক মুনাফা

Simple and Compound Interest

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: সুদ বা মুনাফা নির্ণয়

01. ১ টাকা প্রতি মাসিক সুদের হার ৩ পয়সা হলে ৫০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০১)]

Sol" ১ টাকার ১ মাসের সুদ = ০.০৩ টাকা
১ " ১২ " " = ০.০৩×১২ টাকা
∴ ৫০০ " ১২ " " = ০.০৩×১২×৫০০ = ১৮০ টাকা
∴ নির্ণেয় সুদ = ১৮০ টাকা

02. ১ টাকা প্রতি মাসিক ৫ পয়সা সুদ হলে ৩৫০ টাকার ৪ বছর ৩ মাসের সুদ কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০২)]

Sol" ৪ বছর ৩ মাস = ৪ × ১২ + ৩ = ৫১ মাস
১ টাকার ১ মাসের সুদ = ০.০৫ টাকা
১ " ১২ " " = ০.০৫×১২ টাকা
∴ ৩৫০ " ৫১ " " = ০.০৫×৫১×৩৫০ = ৮৯২.৫০ টাকা
∴ নির্ণেয় সুদ = ৮৯২.৫০ টাকা

03. শতকরা বার্ষিক সুদের হার ৭ টাকা হলে ৬৫০ টাকার ৬ বছরের সুদ কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol" ১০০ টাকার ১ বছরের সুদ = ৭ টাকা
১ " ১ " " = $\frac{৭}{১০০}$ টাকা
৬৫০ " ১ " " = $\frac{৭ \times ৬৫০}{১০০}$ টাকা
∴ ৬৫০ " ৬ " " = $\frac{৭ \times ৬৫০ \times ৬}{১০০}$
= ২৭৩ টাকা
∴ নির্ণেয় সুদ = ২৭৩ টাকা

বিকল্প:
সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,
$I = pnr$
$= ৬৫০ \times ৬ \times \frac{৭}{১০০} = ২৭৩$
∴ I = ২৭৩ টাকা (উত্তর)

এখানে, আসল p = ৬৫০ টাকা
n = ৬ বছর
$r = ৭\% = \frac{৭}{১০০}$

04. শতকরা বার্ষিক ৫ টাকা হার সুদে ৬৪০ টাকার ২ বছর ৬ মাসের সুদ কত?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol" ২ বছর ৬ মাস = ২ × ১২ + ৬ = ৩০ মাস
= ২.৫ বছর
১০০ টাকার ১ বছরের সুদ = ৫ টাকা
১ " ১ " " = $\frac{৫}{১০০}$ টাকা
৬৪০ " ১ " " = $\frac{৫ \times ৬৪০}{১০০}$ টাকা
∴ ৬৪০ " ২.৫ " " = $\frac{৫ \times ৬৪০ \times ২.৫}{১০০}$
= ৮০ টাকা
∴ নির্ণেয় সুদ = ৮০ টাকা

বিকল্প:
সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,
$I = pnr$
$= ৬৪০ \times ২.৫ \times \frac{৫}{১০০}$
$= ৮০$
∴ I = ৮০ টাকা (উত্তর)

এখানে, আসল p = ৬৪০ টাকা
n = ২ বছর ৬ মাস = ২.৫ বছর
$r = ৫\% = \frac{৫}{১০০}$

শতকরা বার্ষিক $6\frac{১}{৪}$ টাকা হার সুদে ১৮০০ টাকার ৩ বৎসর ৪ মাসের সুদ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol: ৩ বৎসর ৪ মাস $= 3\frac{৪}{১২}$ বৎসর

$= \frac{৪০}{১২}$ বৎসর $= \frac{১০}{৩}$ বৎসর।

$6\frac{১}{৪}$ টাকা বা $\frac{২৫}{৪}$ টাকা হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $= \frac{২৫}{৪}$ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{২৫}{৪ \times ১০০}$ "

$\therefore$ ১ " $\frac{১০}{৩}$ " " $= \frac{২৫ \times ১০}{৪ \times ১০০ \times ৩}$ "

$\therefore$ ১৮০০ " $\frac{১০}{৩}$ " " $= \frac{২৫ \times ১৮০০ \times ১০}{৪ \times ১০০ \times ৩}$

$= ৩৭৫$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদ ৩৭৫ টাকা।

বিকল্প:

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$I = pnr$

$= ১৮০০ \times \frac{১০}{৩} \times \frac{১}{১৬}$

$= ৩৭৫$

$\therefore$ $I = ৩৭৫$ টাকা (উত্তর)

এখানে, আসল $p = ১৮০০$ টাকা

$n = ৩$ বছর ৪ মাস

$= \frac{৪০}{১২}$ বৎসর $= \frac{১০}{৩}$ বৎসর

$r = 6\frac{১}{৪}\% = \frac{২৫}{৪}\%$

$= \frac{২৫}{৪ \times ১০০} = \frac{১}{১৬}$

16. শতকরা বার্ষিক 7 টাকা হার সরল মুনাফায় 650 টাকার 6 বছরের মুনাফা কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৪০)]

Sol: আমরা জানি, $I = Pnr$

এখানে, $P = 650$ টাকা, $n = 6$ বছর, শতকরা মুনাফার হার $s = 7$ টাকা

$\therefore r = \frac{s}{100} = \frac{7}{100}$

$\therefore I = 650 \times 6 \times \frac{7}{100} = 273$

সুতরাং, মুনাফা 273 টাকা।

17. কোন মূলধন ৩ বছরের জন্য বিনিয়োগ করা হলো। সুদের হার $6\frac{১}{৪}$ টাকা হলে সুদ আসলের কত অংশ?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৪০)]

Sol: $6\frac{১}{৪}\% = \frac{২৫}{৪}\%$ হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $\frac{২৫}{৪}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ৩ " " $\frac{২৫ \times ৩}{৪} = \frac{৭৫}{৪}$ টাকা

$\therefore \frac{\text{সুদ}}{\text{আসল}} = \frac{\frac{৭৫}{৪}}{১০০} = \frac{৭৫}{৪ \times ১০০} = \frac{৩}{১৬}$

সুতরাং সুদ আসলের $\frac{৩}{১৬}$ অংশ

08. এক ব্যক্তি ২০% সরল সুদে ৭০০ টাকা এবং ১০% সুদে ৫০০ টাকা বিনিয়োগ করলে এক বছর পর তিনি কত সুদ পাবেন?

Sol ২০% সুদে,
১০০ টাকার ১ বছরের সুদ ২০ টাকা
∴ ১ " ১ " " $\frac{২০}{১০০}$ "
∴ ৭০০ " ১ " " $\frac{২০ \times ৭০০}{১০০}$
= ১৪০ টাকা

আবার, ১০% সুদে,
১০০ টাকার ১ বছরের সুদ ১০ টাকা
∴ ১ " ১ " " $\frac{১০}{১০০}$ "
∴ ৫০০ " ১ " " $\frac{১০ \times ৫০০}{১০০}$ = ৫০ টাকা

সুতরাং, ১ বছরে মোট সুদ (১৪০ + ৫০) বা ১৯০ টাকা।

বিকল্প সমাধান:

$I_1 = p_1n_1r_1 = \frac{৭০০ \times ১ \times ২০}{১০০}$ = ১৪০ টাকা

$I_2 = p_2n_2r_2 = \frac{৫০০ \times ১ \times ১০}{১০০}$ = ৫০ টাকা

∴ মোট মুনাফা (১৪০ + ৫০) = ১৯০ টাকা

09. বার্ষিক মুনাফা শতকরা ১০ টাকা থেকে কমে ৮ টাকা হলে, ৩০০০ টাকার ৩ বছরের মুনাফা কত কম হবে?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol বার্ষিক শতকরা মুনাফার হার কমে (১০ − ৮) টাকা বা, ২ টাকা
অর্থাৎ ১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা কমে ২ টাকা
∴ ১ " ১ " " " $\frac{২}{১০০}$ "
∴ ৩০০০ " ৩ " " " $\frac{২ \times ৩০০০ \times ৩}{১০০}$ = ১৮০ টাকা
∴ মুনাফা কমে হবে ১৮০ টাকা। (উত্তর)

10. জামিল সাহেব পেনশনের টাকা পেয়ে ১০ লাখ টাকার তিন মাস অন্তর মুনাফা ভিত্তিক ৫ বছর মেয়াদি পেনশনের সঞ্চয়পত্র কিনলেন। বার্ষিক মুনাফা ১২% হলে, তিনি ১ম কিস্তিতে, অর্থাৎ প্রথম ৩ মাস পর কত মুনাফা পাবেন?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol জামিল সাহেবের পেনশনের পরিমাণ বা আসল, P = ১০০০০০০ টাকা
মুনাফার হার, r = ১২% = $\frac{১২}{১০০}$; n = $\frac{৩}{১২}$ বছর = $\frac{১}{৪}$ বছর
মুনাফা, I = ?
আমরা জানি, I = Pnr = $\left(১০০০০০০ \times \frac{১}{৪} \times \frac{১২}{১০০}\right)$ টাকা = ৩০০০০
∴ নির্ণেয় মুনাফা ৩০০০০ টাকা। (উত্তর)

TYPE 02: সুদের হার নির্ণয়

01. শতকরা মাসিক ২ টাকা সুদ, শতকরা বার্ষিক কত টাকা হার সুদের সমান?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]

Sol আমরা জানি, ১ বছর = ১২ মাস
এখন,
১০০ টাকার ১ মাসের সুদ ২ টাকা
∴ ১০০ " ১২ " " = (২ × ১২) = ২৪ টাকা
অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ২৪%।

৬০. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে ৭০০ টাকার ৫ বছরের সুদ ১০৫ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol"

৭০০ টাকার ৫ বৎসরের সুদ ১০৫ টাকা

$\therefore$ ৭০০ " ১ " " $= \frac{১০৫}{৫}$ "

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{১০৫}{৭০০ \times ৫}$ "

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{১০৫ \times ১০০}{৭০০ \times ৫}$

$= ৩$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৩%।

বিকল্প সমাধান:

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$r = \frac{I \times ১০০}{pn}\%$

$= \frac{১০৫ \times ১০০}{৭০০ \times ৫}\%$

$\therefore r = ৩\%$

এখানে,
p = আসল = ৭০০ টাকা
n = সময় = ৫ বছর
I = সুদ = ১০৫ টাকা
r = সুদের হার = ?

৬১. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে ১২০০ টাকার ৩ বৎসরের সুদ ২১৬ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol"

১২০০ টাকার ৩ বৎসরের সুদ ২১৬ টাকা

$\therefore$ ১২০০ " ১ " " $= \frac{২১৬}{৩}$ "

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{২১৬}{১২০০ \times ৩}$ "

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{২১৬ \times ১০০}{১২০০ \times ৩}$

$= ৬$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৬%।

বিকল্প সমাধান:

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

$r = \frac{I \times ১০০}{pn}\%$

$= \frac{২১৬ \times ১০০}{১২০০ \times ৩}\%$

$\therefore r = ৬\%$

এখানে,
p = আসল = ১২০০ টাকা
n = সময় = ৩ বছর
I = সুদ = ২১৬ টাকা
r = সুদের হার = ?

৬২. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে যে কোন মূলধন ৫ বৎসরের সুদে-মূলে দ্বিগুণ হয়? একই হার সুদে কত বৎসরে উহা তিনগুণ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol" মনে করি, আসল = ১০০ টাকা।

সুদে মূলে আসলের দ্বিগুণ হলে সুদমূল = (১০০ × ২) টাকা = ২০০ টাকা

সুদ = সুদমূল − মূল

বা, সুদ = (২০০ − ১০০) টাকা = ১০০ টাকা

১০০ টাকার ৫ বৎসরের সুদ = ১০০ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{১০০}{৫}$ " = ২০ টাকা

অতএব, সুদের হার = ২০%

আবার, সুদে মূলে আসলের তিনগুণ হলে সুদমূল = (১০০ × ৩) টাকা = ৩০০ টাকা

সুদ = সুদমূল − মূল = (৩০০ − ১০০) টাকা = ২০০ টাকা

আমরা পাই,

২০ টাকা সুদ হয় ১ বছরে

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১}{২০}$ "

২০০ " " " $= \frac{১ \times ২০০}{২০}$ " = ১০ বছরে

অতএব, নির্ণেয় সময় ১০ বছর। সুদের হার ২০%।

05. একই হার সুদে ৩০০ টাকার ৪ বছরের সুদ এবং ৫০০ টাকার ৫ বছরের সুদ একত্রে ১৪৮ টাকা হলে, শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত? [৩৪তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২৬)]

Sol" ৩০০ টাকার ৪ বছরের সুদ = (৩০০ × ৪) = ১২০০ টাকার ১ বছরের সুদ

৫০০ " ৫ " " = (৫০০ × ৫) = ২৫০০ " ১ " "

∴ বার্ষিক হিসেবে মোট টাকা = (১২০০ + ২৫০০) টাকা = ৩৭০০ টাকা

প্রশ্নমতে, ৩৭০০ টাকার ১ বছরের সুদ = ১৪৮ টাকা

∴ ১ " ১ " " = $\frac{১৪৮}{৩৭০০}$ "

∴ ১০০ " ১ " " = $\frac{১৪৮ \times ১০০}{৩৭০০} = ৪$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৪%।

বিকল্প সমাধান:

Sol" আমরা জানি, I = Pnr

P = 300 টাকা, n = 4 বছর এবং মুনাফার হার r% হলে, $I_1 = \frac{300 \times 4r}{100}$ টাকা = 12r টাকা

আবার, P = 500 টাকা এবং n = 5 বছর হলে, $I_2 = \frac{500 \times 5r}{100}$ টাকা = 25r টাকা

প্রশ্নানুসারে, $12r + 25r = 148 \quad \Rightarrow 37r = 148 \quad \Rightarrow r = \frac{148}{37} = 4$

∴ নির্ণেয় মুনাফার হার 4%।

06. একই হার সুদে ৬৫০ টাকার ৩ বছরের সুদ এবং ৪০০ টাকার ৮ বছরের সুদ একত্রে ৩৬০.৫০ টাকা হলে শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]*

Sol" ৬৫০ টাকার ৩ বছরের সুদ = (৬৫০ × ৩) = ১৯৫০ টাকার ১ বছরের সুদ

৪০০ " ৮ " " = (৪০০ × ৮) = ৩২০০ " ১ " "

∴ বার্ষিক হিসেবে মোট টাকা = (১৯৫০ + ৩২০০) টাকা = ৫১৫০ টাকা

প্রশ্নমতে, ৫১৫০ টাকার ১ বছরের সুদ = ৩৬০.৫০ টাকা

∴ ১ " ১ " " = $\frac{৩৬০.৫০}{৫১৫০}$ "

∴ ১০০ " ১ " " = $\frac{৩৬০.৫০ \times ১০০}{৫১৫০} = ৭$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৭%।

বিকল্প সমাধান:

Sol" আমরা জানি, I = Pnr

P = 650 টাকা, n = 3 বছর এবং মুনাফার হার r% হলে, $I_1 = \frac{650 \times 3r}{100}$ টাকা = 19.5 r টাকা

আবার, P = 400 টাকা এবং n = 8 বছর হলে, $I_2 = \frac{400 \times 8r}{100}$ টাকা = 32r টাকা

প্রশ্নানুসারে, $19.5r + 32r = 360.5 \quad \Rightarrow 51.5r = 360.5 \quad \Rightarrow r = \frac{360.5}{51.5} = 7$

∴ নির্ণেয় মুনাফার হার 7%।

07. কোনো আসল ৩ বছরে মুনাফা-আসলে ১৫৭৮ টাকা এবং ৫ বছরে মুনাফা-আসলে ১৮৩০ টাকা হয়। আসল ও মুনাফার হার নির্ণয় কর।

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol আসল + ৫ বছরের মুনাফা = ১৮৩০ টাকা
আসল + ৩ বছরের মুনাফা = ১৫৭৮ টাকা
বিয়োগ করে, ২ বছরের মুনাফা = ২৫২ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{২৫২}{২}$ "

$\therefore$ ৩ " " $= \frac{২৫২ \times ৩}{২} = ৩৭৮$ টাকা

মুনাফা-আসল = ১৫৭৮ টাকা
মুনাফা = ৩৭৮ টাকা
$\therefore$ (বিয়োগ করে) আসল = ১২০০ টাকা
$\therefore$ নির্ণেয় আসল = ১২০০ টাকা

আবার, ১২০০ টাকার ৩ বছরের মুনাফা ৩৭৮ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৩৭৮}{১২০০ \times ৩}$ "

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{৩৭৮ \times ১০০}{১২০০ \times ৩}$

$= \frac{২১}{২}$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মুনাফার হার = $১০\frac{১}{২}$ টাকা

উত্তর : আসল ১২০০ টাকা এবং মুনাফার হার $১০\frac{১}{২}$ টাকা

08. কোনো আসল 3 বছরে সরল মুনাফাসহ 460 টাকা এবং 5 বছরে সরল মুনাফাসহ 600 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২৮)]

Sol আমরা জানি, $A = P(1 + nr)$
$n = 3$ বছর হলে, $A = 460$ টাকা

$\therefore \quad 460 = P\left(1 + 3 \times \frac{r}{100}\right) = \frac{P(100 + 3r)}{100}$ ..... (i)

আবার, $n = 5$ বছর হলে, $A = 600$ টাকা

$\therefore \quad 600 = P\left(1 + 5 \times \frac{r}{100}\right) = \frac{P(100 + 5r)}{100}$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{600}{460} = \frac{P(100 + 5r)}{100} \times \frac{100}{P(100 + 3r)}$

$\Rightarrow \quad \frac{30}{23} = \frac{100 + 5r}{100 + 3r} \quad \Rightarrow 2300 + 115r = 3000 + 90r \quad \Rightarrow 25r = 700 \quad \therefore r = 28$

$\therefore$ নির্ণেয় মুনাফার হার 28%.

09. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে ৫ বৎসরের সুদ, আসলের $\frac{১}{৫}$ অংশ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

Sol মনে করি, আসল = ৫ টাকা

$\therefore$ ৫ বৎসরে সুদ = ৫ টাকা এর $\frac{১}{৫} = ১$ টাকা

$\therefore$ ৫ টাকার ৫ বৎসরে সুদ ১ টাকা

৫ " ১ " " $= \frac{১}{৫}$ "

১ " ১ " " $= \frac{১}{৫ \times ৫}$ "

১০০ " ১ " " $= \frac{১ \times ১০০}{৫ \times ৫} = ৪$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৪% টাকা।

10. বার্ষিক ৪% হার সুদে ৫৫০ টাকা এবং বার্ষিক ৮% হার সুদে ৭০০ টাকা বিনিয়োগ করলে মোট মূলধনের উপর গড়ে শতকরা বার্ষিক কত সুদ পাওয়া যাবে? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]*

Sol" ৪% হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৪ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{৪}{১০০}$ "

∴ ৫৫০ " ১ " " $= \frac{৪ \times ৫৫০}{১০০} = ২২$ টাকা

আবার, ৮% হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৮ টাকা

∴ ১ " ১ " " $= \frac{৮}{১০০}$ "

∴ ৭০০ " ১ " " $= \frac{৮ \times ৭০০}{১০০} = ৫৬$ টাকা

মোট মূলধন = (৫৫০ + ৭০০) টাকা = ১২৫০ টাকা

মোট সুদ = (২২ + ৫৬) টাকা = ৭৮ টাকা

১২৫০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৭৮ টাকা

∴ ১ " ১ " " $= \frac{৭৮}{১২৫০}$ "

∴ ১০০ " ১ " " $= \frac{৭৮ \times ১০০}{১২৫০}$

$= \frac{১৫৬}{২৫}$ টাকা $= ৬\frac{৬}{২৫}$ টাকা।

অতএব, নির্ণেয় গড় সুদের হার $৬\frac{৬}{২৫}$ %

বিকল্প সমাধান:

$I_1 = p_1 n_1 r_1 = \frac{550 \times 1 \times 4}{100} = 22$ টাকা

$I_2 = p_2 n_2 r_2 = \frac{700 \times 1 \times 8}{100} = 56$ টাকা

মোট মুনাফা = (22 + 56) = 78 টাকা

মোট মূলধন = (550 + 700) = 1250 টাকা

∴ মোট মূলধনের উপর মুনাফার হার

$= \left(\frac{78 \times 100}{1250}\right)\%$

$= 6\frac{6}{25}$ % **Ans.**

11. ৮% হার সুদে ৭৫০ টাকা এবং ৬% হার সুদে ১২৫০ টাকা বিনিয়োগ করলে মোট মূলধনের উপর গড়ে শতকরা কত হারে সুদ পাওয়া যায়? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৫)]*

Sol" ৮% হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৮ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{৮}{১০০}$ "

∴ ৭৫০ " ১ " " $= \frac{৮ \times ৭৫০}{১০০} = ৬০$ টাকা

আবার, ৬% হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৬ টাকা

∴ ১ " ১ " " $= \frac{৬}{১০০}$ "

∴ ১২৫০ " ১ " " $= \frac{৬ \times ১২৫০}{১০০} = ৭৫$ টাকা

মোট মূলধন = (৭৫০ + ১২৫০) টাকা = ২০০০ টাকা

মোট সুদ = (৬০ + ৭৫) টাকা = ১৩৫ টাকা

২০০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ১৩৫ টাকা

∴ ১ " ১ " " $= \frac{১৩৫}{২০০০}$ "

∴ ১০০ " ১ " " $= \frac{১৩৫ \times ১০০}{২০০০} = \frac{২৭}{৪}$ টাকা $= ৬\frac{৩}{৪}$ টাকা।

অতএব, নির্ণেয় গড় সুদের হার $৬\frac{৩}{৪}$ %

বিকল্প সমাধান: $I_1 = p_1n_1r_1 = \frac{750 \times 1 \times 8}{100} = 60$ টাকা

$I_2 = p_2n_2r_2 = \frac{1250 \times 1 \times 6}{100} = 75$ টাকা

মোট মুনাফা $= (60 + 75) = 135$ টাকা

মোট মূলধন $= (750 + 1250) = 2000$ টাকা

∴ মোট মূলধনের উপর মুনাফার হার $= \left(\frac{135 \times 100}{2000}\right)\% = 6\frac{3}{4}\%$ **Ans.**

12. বার্ষিক ১০% মুনাফায় ৩০০০ টাকা এবং ৮% মুনাফায় ২০০০ টাকা বিনিয়োগ করলে মোট মূলধনের ওপর গড়ে শতকরা কত টাকা হারে মুনাফা পাওয়া যাবে? *[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]*

Sol"

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ১০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{১০}{১০০}$ "

∴ ৩০০০" ১ " " $\frac{১০ \times ৩০০০}{১০০} = ৩০০$ টাকা

আবার, ১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ৮ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{৮}{১০০}$ "

∴ ২০০০ " ১ " " $\frac{৮ \times ২০০০}{১০০} = ১৬০$ টাকা

মোট মুনাফা $= (৩০০ + ১৬০)$ টাকা $= ৪৬০$ টাকা

মোট মূলধন $= (৩০০০ + ২০০০)$ টাকা $= ৫০০০$ টাকা

অর্থাৎ, ৫০০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ৪৬০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $= \frac{৪৬০}{৫০০০}$

∴ ১০০ " ১ " " $= \frac{৪৬০ \times ১০০}{৫০০০} = \frac{৪৬}{৫}$ টাকা বা ৯.২ টাকা

∴ নির্ণেয় গড় মুনাফার হার = ৯.২ টাকা। (উত্তর)

বিকল্প সমাধান: $I_1 = p_1n_1r_1 = \frac{3000 \times 1 \times 10}{100} = 300$ টাকা

$I_2 = p_2n_2r_2 = \frac{2000 \times 1 \times 8}{100} = 160$ টাকা

মোট মুনাফা $= (300 + 160) = 460$ টাকা

মোট মূলধন $= (3000 + 2000) = 5000$ টাকা

∴ মোট মূলধনের উপর মুনাফার হার $= \left(\frac{460 \times 100}{5000}\right)\% = 9.2\%$ **Ans.**

13. কোন আসল ৫ বৎসরের সুদসহ ৩০৬ টাকা এবং সুদ আসলের $\frac{৯}{২৫}$ অংশ। আসল এবং শতকরা সুদের হার নির্ণয় করুন।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৬)]

Sol" মনে করি, আসল ২৫ টাকা

$\therefore$ সুদ = (২৫ এর $\frac{৯}{২৫}$) টাকা = ৯ টাকা

সুদাসল = সুদ + আসল = (৯ + ২৫) টাকা = ৩৪ টাকা

সুদাসল ৩৪ টাকা হলে আসল ২৫ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{২৫}{৩৪}$ "

$\therefore$ " ৩০৬ " " " $= \frac{২৫ \times ৩০৬}{৩৪} = ২২৫$ টাকা

$\therefore$ সুদ = সুদাসল − আসল = (৩০৬ − ২২৫) টাকা = ৮১ টাকা

২২৫ টাকার ৫ বছরের সুদ ৮১ টাকা

$\therefore$ ১ " ৫ " " $= \frac{৮১}{২২৫}$ "

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৮১}{২২৫ \times ৫}$ "

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{৮১ \times ১০০}{২২৫ \times ৫} = \frac{৩৬}{৫} = ৭\frac{১}{৫}$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় আসল ২২৫ টাকা এবং সুদের হার $৭\frac{১}{৫}$ %

14. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা ৩ বছরে ৫৬০ টাকা এবং ৫ বছরে ৬০০ টাকায় পরিণত হবে?

[১৫তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৭)]

Sol" আসল + ৫ বৎসরের সুদ = ৬০০ টাকা

আসল + ৩ বৎসরের সুদ = ৫৬০ টাকা

(বিয়োগ করে) ২ বৎসরের সুদ = ৪০ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{৪০}{২}$ "

$\therefore$ ৩ " " $= \frac{৪০ \times ৩}{২}$ টাকা = ৬০ টাকা

সুতরাং, আসল + ৩ বছরের সুদ = ৫৬০ টাকা

$\Rightarrow$ আসল = (৫৬০ − ৬০) টাকা

$\therefore$ আসল = ৫০০ টাকা

আমরা পাই,

৫০০ টাকার ৩ বছরের সুদ = ৬০ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৬০}{৫০০ \times ৩}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{৬০ \times ১০০}{৫০০ \times ৩}$ টাকা = ৪ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৪%।

উত্তর: ৪%।

15. কোন আসল ৩ বছরে সুদে-আসলে ৪৬০ টাকা এবং ৫ বছরে সুদে আসলে ৫০০ টাকা হয়। শতকরা হার নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৮)]

Solⁿ আসল + ৫ বৎসরের সুদ = ৫০০ টাকা
আসল + ৩ বৎসরের সুদ = ৪৬০ টাকা
(বিয়োগ করে) ২ বৎসরের সুদ = ৪০ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{৪০}{২}$ "

$\therefore$ ৩ " " $= \frac{৪০ \times ৩}{২}$ টাকা = ৬০ টাকা

সুতরাং, আসল + ৩ বছরের সুদ = ৪৬০ টাকা
$\Rightarrow$ আসল = (৪৬০ − ৬০) টাকা
$\therefore$ আসল = ৪০০ টাকা

আমরা পাই,
৪০০ টাকার ৩ বছরের সুদ = ৬০ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৬০}{৪০০ \times ৩}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{৬০ \times ১০০}{৪০০ \times ৩}$ টাকা = ৫ টাকা

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৫%।
উত্তর: ৫%।

16. কোনো আসল ৩ বছরে মুনাফা-আসলে ১৫৭৮ টাকা এবং ৫ বছরে মুনাফা-আসলে ১৮৩০ টাকা হয়। আসল ও মুনাফার হার নির্ণয় কর।
[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Solⁿ
আসল + ৫ বছরের মুনাফা = ১৮৩০ টাকা
আসল + ৩ বছরের মুনাফা = ১৫৭৮ টাকা
বিয়োগ করে, ২ বছরের মুনাফা = ২৫২ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{২৫২}{২}$ "

$\therefore$ ৩ " " $= \frac{২৫২ \times ৩}{২} = ৩৭৮$ টাকা

মুনাফা-আসল = ১৫৭৮ টাকা
মুনাফা = ৩৭৮ টাকা
$\therefore$ (বিয়োগ করে) আসল = ১২০০ টাকা
$\therefore$ নির্ণেয় আসল = ১২০০ টাকা
আবার, ১২০০ টাকার ৩ বছরের মুনাফা ৩৭৮ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৩৭৮}{১২০০ \times ৩}$ "

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{৩৭৮ \times ১০০}{১২০০ \times ৩} = \frac{২১}{২}$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মুনাফার হার = $১০\frac{১}{২}$ টাকা

উত্তর : আসল ১২০০ টাকা এবং মুনাফার হার $১০\frac{১}{২}$ টাকা

17. কোন মূলধন ৩ বছরে সরল সুদে-আসলে ১১,০০০ টাকা হয়। সুদ-আসলের তিন অষ্টমাংশ হলে, আসল ও সুদের হার নির্ণয় করুন। [২১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৮)]

Sol" মনে করি, আসল ৮ টাকা

$\therefore$ সুদ $= \left(৮ \text{ এর } \frac{৩}{৮}\right)$ টাকা $= ৩$ টাকা

$\therefore$ সুদাসল = সুদ + আসল = ৩ + ৮ = ১১ টাকা

সুদাসল ১১ টাকা হলে আসল = ৮ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{৮}{১১}$ "

$\therefore$ " ১১০০০ " " " $= \frac{৮ \times ১১০০০}{১১} = ৮০০০$ টাকা

আবার, সুদ = সুদাসল − আসল = ১১০০০ − ৮০০০ = ৩০০০ টাকা

৮০০০ টাকার ৩ বছরের সুদ = ৩০০০ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৩০০০}{৮০০০ \times ৩}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{৩০০০ \times ১০০}{৮০০০ \times ৩} = ১২.৫$ টাকা

উত্তর: আসল ৮০০০ টাকা ও সুদের হার ১২.৫%।

18. কোন আসল টাকার ৩ বছরের সুদ আসলের $\frac{৩}{৮}$ অংশ হলে, সুদের হার কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৯)]

Sol" সুদ আসলের $\frac{৩}{৮}$ অংশ হলে ধরি, আসল $P = ৮x$

এবং সুদ $I = ৮x \times \frac{৩}{৮} = ৩x$

$\therefore \quad I = \frac{prn}{১০০} \Rightarrow ৩x = \frac{৮x \times r \times ৩}{১০০} \Rightarrow r = \frac{৩x \times ১০০}{৮x \times ৩} = ১২.৫\%$ **Ans.**

19. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে $৬\frac{১}{৪}$ বৎসরের সুদ, আসলের $\frac{৫}{১৬}$ অংশ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৪১)]

Sol" মনে করি, আসল = ১৬ টাকা

সুতরাং, সুদ = ১৬ এর $\frac{৫}{১৬}$ টাকা = ৫ টাকা

$৬\frac{১}{৪}$ বছর $= \frac{২৫}{৪}$ বছর

১৬ টাকার $\frac{২৫}{৪}$ বছরের সুদ ৫ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৫ \times ৪}{১৬ \times ২৫}$ "

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $= \frac{৫ \times ৪ \times ১০০}{১৬ \times ২৫}$ " = ৫ টাকা।

অতএব, নির্ণেয় সুদের হার ৫%।

ii. রফিক গোমেজ ৩ বছরের জন্য ১০০০০ টাকা এবং ৪ বছরের জন্য ১৫০০০ টাকা ব্যাংক থেকে ঋণ নিয়ে ব্যাংককে মোট ৯৯০০ টাকা মুনাফা দেন। উভয়ক্ষেত্রে মুনাফার হার সমান হলে, মুনাফার হার নির্ণয় কর।

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" যেহেতু উভয়ক্ষেত্রে মুনাফার হার সমান

যেহেতু, ১০০০০ টাকার ৩ বছরের মুনাফা = (১০০০০ × ৩) বা, ৩০০০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা

১৫০০০ টাকার ৪ বছরের মুনাফা = (১৫০০০ × ৪) বা, ৬০০০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা

যোগ করে, (৩০০০০ + ৬০০০০) বা, ৯০০০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা

এখানে, ৯০০০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ৯৯০০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{৯৯০০}{৯০০০০}$ "

∴ ১০০ " ১ " " $\frac{৯৯০০ \times ১০০}{৯০০০০} = ১১$ টাকা

∴ নির্ণেয় মুনাফার হার ১১%। (উত্তর)

বিকল্প সমাধান:

Sol" আমরা জানি, $I = Pnr$

$P = 10000$ টাকা, $n = 3$ বছর এবং মুনাফার হার $r\%$ হলে, $I_1 = \frac{10000 \times 3r}{100}$ টাকা $= 300r$ টাকা

আবার, $P = 15000$ টাকা এবং $n = 4$ বছর হলে, $I_2 = \frac{15000 \times 4r}{100}$ টাকা $= 600r$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $300r + 600r = 9900$

$\Rightarrow 900r = 9900$

$\Rightarrow r = \frac{9900}{900} = 11$

∴ নির্ণেয় মুনাফার হার 11%।

TYPE 03: মূলধন/ আসল নির্ণয়

ii. শুকরা বার্ষিক ৪ টাকা হার সুদে কত টাকার ৬ বৎসরের সুদ ৮৪ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol" ১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ = ৪ টাকা

∴ ১০০ " ৬ " " = ৪ × ৬ টাকা

= ২৪ টাকা

২৪ টাকা সুদ হলে আসল ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " = $\frac{১০০}{২৪}$ "

∴ ৮৪ " " " " = $\frac{১০০ \times ৮৪}{২৪}$ "

= ৩৫০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় টাকার পরিমাণ ৩৫০ টাকা।

বিকল্প

আমরা জানি,

$I = Pnr$ [যেখানে, P = মূলধন,

n = বছর/সময় = ৬ বছর,

r = সুদের হার = $৪\% = \frac{৪}{১০০}$,

I = সুদ = ৮৪ টাকা]

$\Rightarrow P = \frac{I}{nr} = \frac{৮৪}{৬ \times \frac{৪}{১০০}} = \frac{৮৪}{\frac{২৪}{১০০}} = \frac{৮৪ \times ১০০}{২৪} = ৩৫০$

অতএব, মূলধন ৩৫০ টাকা।

02. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সরল মুনাফার কত টাকা 13 বছরের সবৃদ্ধিমূল 990 টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২৯)]

Sol" আমরা জানি, $S = P(1 + nr)$

এখানে, P(টাকা) = মূলধন, n (বছর) = 13;

$\therefore r = \frac{5}{100}$

দেওয়া আছে, S (টাকা) = 990

প্রশ্নমতে, $990 = P\left(1 + 13 \times \frac{5}{100}\right)$

$\Rightarrow 990 = P(1 + 0.65)$

$\Rightarrow 990 = P \times 1.65$

$\Rightarrow P = \frac{990}{1.65} = 600$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন 600 টাকা।

03. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার মুনাফায় কত টাকা 12 বছরের সবৃদ্ধিমূল 1280 টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-৩০)]

Sol" আমরা জানি, $S = P(1 + nr)$

এখানে, P = মূলধন, n = 12 বছর $\quad \therefore r = \frac{5}{100}$ টাকা

দেওয়া আছে, সবৃদ্ধিমূল, S = 1280 টাকা

প্রশ্নমতে, $1280 = P\left(1 + 12 \times \frac{5}{100}\right)$

$\Rightarrow 1280 = P\left(1 + \frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow 1280 = P\left(\frac{5+3}{5}\right) \Rightarrow 1280 = P\frac{8}{5}$

$\Rightarrow P = \frac{1280 \times 5}{8} = 800$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন 800 টাকা।

04. শতকরা বার্ষিক ৩.২০ টাকা হার সুদে কত টাকার ৩ বছর ৩ মাসের সুদ ৫২ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" ৩ বছর ৩ মাস $= ৩\frac{৩}{১২} = \frac{৩৯}{১২} = \frac{১৩}{৪}$ বছর

১০০ টাকার ১ বছরের সুদ = ৩.২০ টাকা

$\therefore$ ১০০ " $\frac{১৩}{৪}$ " " $= \frac{৩.২০ \times ১৩}{৪}$ টাকা = ১০.৪০ টাকা

১০.৪০ টাকা সুদ হলে আসল = ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $= \frac{১০০}{১০.৪০}$ "

$\therefore$ ৫২ " " " " $= \frac{১০০ \times ৫২ \times ১০০}{১০৪০}$ বা, ৫০০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় টাকার পরিমাণ = ৫০০ টাকা।

৫. শতকরা বার্ষিক $১২\frac{১}{২}$ টাকা হার সুদে কত টাকার ৫ বৎসরের সুদ ৫০০ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol: $১২\frac{১}{২}$ টাকা বা $\frac{২৫}{২}$ টাকা হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $= \frac{২৫}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ৫ " " $= \frac{২৫ \times ৫}{২}$ " $= \frac{১২৫}{২}$ টাকা

অতএব,

$\frac{১২৫}{২}$ টাকা সুদ হলে আসল ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $= \frac{১০০ \times ২}{১২৫}$ "

$\therefore$ ৫০০ " " " " $= \frac{১০০ \times ২ \times ৫০০}{১২৫} = ৮০০$ টাকা

বিকল্প :

আমরা জানি,

$I = Pnr$

$\Rightarrow P = \frac{I}{nr}$

$\Rightarrow P = \frac{৫০০}{৫ \times \frac{২৫}{২ \times ১০০}}$

[এখানে, P = মূলধন/আসল, I = সুদ = ৫০০ টাকা

n = বছর/সময় = ৫ বছর,

r = সুদের হার $= ১২\frac{১}{২}\% = \frac{২৫}{২}\% = \frac{২৫}{২ \times ১০০}$]

$\Rightarrow P = \frac{৫০০}{\frac{১২৫}{২০০}} = \frac{৫০০ \times ২০০}{১২৫}$

$\therefore P = ৮০০$ টাকা।

উত্তর : মূলধন ৮০০ টাকা

৬. বার্ষিক ৫% হার সুদে কত টাকার দৈনিক সুদ ২০ পয়সা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol: ১ দিনের সুদ $= ০.২০$ টাকা

১ বছর বা ৩৬৫ দিনের সুদ $= .২০ \times ৩৬৫$ টাকা $= ৭৩.০০$ টাকা

৫ টাকা সুদ হয় $= ১০০$ টাকায়

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১০০}{৫}$ "

$\therefore$ ৭৩" " " $= \frac{১০০ \times ৭৩}{৫}$ টাকা

$= ১৪৬০$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় টাকার পরিমাণ $= ১৪৬০$ টাকা।

07. বার্ষিক ৩% হার সুদে কত টাকা ৫ বৎসরের সুদে-মূলে ৮০৫ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol ৩% হারে,
১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৩ টাকা
∴ ১০০ " ৫ " " = ৩ × ৫ "
= ১৫ টাকা
সুদাসল = সুদ + আসল
বা, সুদাসল = (১৫ + ১০০) টাকা = ১১৫ টাকা
১১৫ টাকা সুদাসল হলে আসল = ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $= \frac{১০০}{১১৫}$ "

$\therefore$ ৮০৫ " " " " $= \frac{১০০ \times ৮০৫}{১১৫}$ = ৭০০ টাকা

উত্তর : ৭০০ টাকা।

08. শতকরা 5 টাকা হার সুদে 20 বৎসরে সুদে-আসলে 50,000 টাকা হলে মূলধন কত?

Sol এখানে, p + I
$= p + pnr = p(1 + nr) = 50,000$

$\therefore \quad p = \frac{50000}{1 + nr}$

$= \frac{50000}{1 + 20 \times \frac{5}{100}}$

$= \frac{50000}{2} = 25,000$

বিকল্প সমাধান:
100 টাকার 1 বছরের সুদ 5 টাকা
∴ 100 " 20 " " (20 × 5) = 100 টাকা
∴ সুদাসল = (100 + 100) = 200 টাকা
সুদাসল 200 টাকা হলে আসল 100 টাকা

∴ " 50000 " " " $\frac{100 \times 50000}{200}$
= 25000 টাকা

09. ৬৫০০ টাকা যে হার মুনাফায় ৪ বছরে মুনাফা-আসলে ৮৮৪০ টাকা হয়, ঐ একই হার মুনাফায় কত টাকা ৪ বছরে মুনাফা-আসলে ১০২০০ টাকা হবে?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol মুনাফা-আসল = ৮৮৪০ টাকা
আসল = ৬৫০০ টাকা
∴ মুনাফা = ৮৮৪০ − ৬৫০০ = ২৩৪০ টাকা
অর্থাৎ, ৬৫০০ টাকার ৪ বছরের মুনাফা ২৩৪০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{২৩৪০}{৬৫০০ \times ৪}$ "

∴ ১০০ " ১ " " $\frac{২৩৪০ \times ১০০}{৬৫০০ \times ৪}$ = ৯ টাকা

∴ নির্ণেয় মুনাফার হার ৯%
আবার, ১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ৯ টাকা
∴ ১০০ " ৪ " " (৯×৪) = ৩৬ টাকা
মুনাফা-আসল = (৩৬ + ১০০) টাকা বা, ১৩৬ টাকা
অর্থাৎ, মুনাফা-আসল ১৩৬ টাকা হলে আসল ১০০ টাকা

∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{১৩৬}$ "

∴ " " ১০২০০ " " " $\frac{১০০ \times ১০২০০}{১৩৬}$ " = ৭৫০০ টাকা

∴ নির্ণেয় আসল ৭৫০০ টাকা। (উত্তর)

10. শতকরা বার্ষিক যে হারে কোনো মূলধন ৬ বছরে মুনাফা-মূলধনে দ্বিগুণ হয়, সেই হারে কত টাকা ৪ বছরে মুনাফা-মূলধনে ২০৫০ টাকা হবে? *[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]*

Sol" মনে করি, মূলধন ১০০ টাকা

মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হলে হয় (১০০×২) টাকা বা, ২০০ টাকা

$\therefore$ মুনাফা হবে $= (২০০ - ১০০)$ টাকা $= ১০০$ টাকা

অর্থাৎ, ১০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা ১০০ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $\frac{১০০}{৬} = \frac{৫০}{৩}$ টাকা

$\therefore$ মুনাফার হার $= \frac{৫০}{৩}\%$

আবার, ১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা $\frac{৫০}{৩}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ৪ " " $\frac{৫০ \times ৪}{৩} = \frac{২০০}{৩}$ টাকা

মুনাফা-মূলধনে হয় $= \left(১০০ + \frac{২০০}{৩}\right) = \frac{৩০০ + ২০০}{৩}$ টাকা $= \frac{৫০০}{৩}$ টাকা

মুনাফা-মূলধনে $\frac{৫০০}{৩}$ টাকা হলে মূলধন ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $\frac{১০০ \times ৩}{৫০০}$ "

$\therefore$ " ২০৫০ " " " $\frac{১০০ \times ৩ \times ২০৫০}{৫০০} = ১২৩০$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় আসল ১২৩০ টাকা। (উত্তর)

11. বার্ষিক শতকরা ৬ টাকা মুনাফায় ৫০০ টাকার ৪ বছরের মুনাফা যত হয়, বার্ষিক শতকরা ৫ টাকা মুনাফায় কত টাকার ২ বছর ৬ মাসের মুনাফা তত হবে? *[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]*

Sol"

১০০ টাকা ১ বছরের মুনাফা ৬ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $\frac{৬}{১০০}$ "

$\therefore$ ৫০০ " ৪ " " $\frac{৬ \times ৫০০ \times ৪}{১০০} = ১২০$ টাকা

আবার, ২ বছরের ৬ মাস $= ২\frac{১}{২}$ বছর $= \frac{৫}{২}$ বছর।

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ৫ টাকা

$\therefore$ ১০০ " $\frac{৫}{২}$ " " $\frac{৫ \times ৫}{২} = \frac{২৫}{২}$ টাকা

মুনাফা $\frac{২৫}{২}$ টাকা হয় যখন আসল ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " " $\frac{১০০ \times ২}{২৫}$ "

$\therefore$ " ১২০ " " " " $\frac{১০০ \times ২ \times ১২০}{২৫} = ৯৬০$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন ৯৬০ টাকা। (উত্তর)

বিকল্প সমাধান:

১ম ক্ষেত্রে, সময়, $n = ৪$ বছর

সুদের হার, $r = ৬\% = \frac{৬}{১০০}$; আসল, $P = ৫০০$ টাকা

১ম ক্ষেত্রে সুদ, $I = Pnr$

$= ৫০০ \times ৪ \times \frac{৬}{১০০} = ১২০$ টাকা

২য় ক্ষেত্রে, সময়, $n = ২$ বছরের ৬ মাস

$= ২\frac{১}{২}$ বছর $= \frac{৫}{২}$ বছর

সুদের হার, $r = ৫\% = \frac{৫}{১০০}$

ধরি, আসল, $P = x$ টাকা

$\therefore$ ২য় ক্ষেত্রে সুদ, $I = Pnr$

$\Rightarrow ১২০ = x \times \frac{৫}{২} \times \frac{৫}{১০০}$

$\Rightarrow x = ৯৬০$ টাকা। (উত্তর)

12. বার্ষিক $১২\frac{১}{২}\%$ হার সুদে ৮০০ টাকার ৫ বৎসরে যে সুদ হয়, বার্ষিক ৪% হার সুদে কত টাকার ১০ বৎসরের সুদ তত হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol" $১২\frac{১}{২}$ বা $\frac{২৫}{২}\%$ হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $= \frac{২৫}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{২৫}{২ \times ১০০}$ "

$\therefore$ ৮০০ " ৫ " " $= \frac{২৫ \times ৮০০ \times ৫}{২ \times ১০০}$ টাকা $=$ ৫০০ টাকা

আবার, ৪% হারে,
১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৪ টাকা
$\therefore$ ১০০ " ১০ " " $= ৪ \times ১০ = ৪০$ টাকা
৪০ টাকা সুদ হলে আসল ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $= \frac{১০০}{৪০}$ "

$\therefore$ ৫০০ " " " " $= \frac{১০০ \times ৫০০}{৪০}$ টাকা $=$ ১২৫০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় টাকার পরিমাণ ১২৫০ টাকা।

13. বার্ষিক ৩% হার সুদে ২৫০ টাকার ৬ বছরে যত সুদ হবে, বার্ষিক ৫% হার সুদে কত টাকার ৪ বছরে তত সুদ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" ৩% হারে,
১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $=$ ৩ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৩}{১০০}$ "

$\therefore$ ২৫০ " ৬ " " $= \frac{৩ \times ২৫০ \times ৬}{১০০}$ টাকা
$= ৪৫$ টাকা

আবার, ৫% হারে,
১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৫ টাকা
$\therefore$ ১০০ " ৪ " " $= ৫ \times ৪$ টাকা
$= ২০$ টাকা
২০ টাকা সুদ হলে আসল ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $= \frac{১০০}{২০}$ "

$\therefore$ ৪৫ " " " " $= \frac{১০০ \times ৪৫}{২০}$ টাকা
$= ২২৫$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় টাকার পরিমাণ ২২৫ টাকা।

বিকল্প সমাধান:

১ম ক্ষেত্রে, সময়, $n = ৬$ বছর

সুদের হার, $r = ৩\% = \frac{৩}{১০০}$;

আসল, $P = ২৫০$ টাকা

১ম ক্ষেত্রে সুদ, $I = Pnr$

$= ২৫০ \times ৬ \times \frac{৩}{১০০} = ৪৫$ টাকা

২য় ক্ষেত্রে, সময়, $n = ৪$ বছর

সুদের হার, $r = ৫\% = \frac{৫}{১০০}$

ধরি, আসল, $P = x$ টাকা

$\therefore$ ২য় ক্ষেত্রে সুদ, $I = Pnr$

$\Rightarrow ৪৫ = x \times ৪ \times \frac{৫}{১০০}$

$\Rightarrow x = ২২৫$ টাকা। (উত্তর)

14. শতকরা ৬ টাকা হার সুদে ৯৫০ টাকার ৮ বৎসরে যত সুদ হয়, বার্ষিক $৭\frac{১}{২}\%$ হার সুদে কত টাকার ১৯ বৎসরে তত সুদ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" ৬% হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ = ৬ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৬}{১০০}$ "

$\therefore$ ৯৫০ " ৮ " " $= \frac{৬ \times ৯৫০ \times ৮}{১০০}$ টাকা

$= ৪৫৬$ টাকা

আবার, $৭\frac{১}{২}\%$ বা $\frac{১৫}{২}\%$ হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $\frac{১৫}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১৯ " " $= \frac{১৫ \times ১৯}{২}$

$= \frac{২৮৫}{২}$ টাকা

$\frac{২৮৫}{২}$ টাকা সুদ হলে আসল ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $= \frac{১০০ \times ২}{২৮৫}$ "

$\therefore$ ৪৫৬ " " " " $= \frac{১০০ \times ২ \times ৪৫৬}{২৮৫}$ টাকা

$= ৩২০$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় টাকার পরিমাণ ৩২০ টাকা।

15. বার্ষিক সুদের হার ৪% হতে $৩\frac{৩}{৪}\%$ এ কমে যাওয়ায় এক ব্যক্তির আয় ৬০ টাকা কমে গেল। তার মূলধন কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৪)]

Sol" সুদের হার $\left(৪\% - ৩\frac{৩}{৪}\%\right) = \frac{১}{৪}\%$ কমে যাওয়ায়,

$\frac{১}{৪}$ টাকা আয় কমে ১০০ টাকায়

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১০০ \times ৪}{১}$ "

$\therefore$ ৬০ " " " $= \frac{১০০ \times ৪ \times ৬০}{১}$ টাকায়

$= ২৪০০০$ টাকায়

উত্তর : ২৪০০০ টাকা।

16. ক, খ-কে কিছু টাকা ধার দিয়ে প্রতি বছরে মূলধনের $\frac{১}{৮}$ অংশ সুদ পায়। ৫ বছর পরে সুদে-আসলে তা আদায় করে সমস্ত টাকা গ-কে ধার দেয় এবং ১ বছর পরে গ-এর নিকট হতে ৫% হার সুদে ২০৩১.২৫ টাকা সুদ পায়। ক, খ-কে কত টাকা ধার দিয়েছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৫)]

Sol" ধরি, আসল = ৮ টাকা

$\therefore$ সুদ = ৮ এর $\frac{১}{৮}$ = ১ টাকা

৫ বছরে সুদ হয় = (১ × ৫) টাকা

সুদ + আসল = ৫ + ৮ = ১৩ টাকা

আবার, ৫% হার সুদে

১০০ টাকায় ১ বছরের সুদ = ৫ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $\frac{৫}{১০০}$ "

১৩ " ১ " " $\frac{৫\times১৩}{১০০} = \frac{১৩}{২০}$ "

এখন,

$\frac{১৩}{২০}$ টাকা সুদ হলে আসল ৮ টাকা

১ " " " " $\frac{৮\times২০}{১৩}$ "

২০৩১.২৫ " " " " $\frac{৮\times২০\times২০৩১.২৫}{১৩}$ " = ২৫০০০ টাকা

উত্তর = ২৫০০০ টাকা।

17. শতকরা বার্ষিক ৮ টাকা হার সুদে ক খ-কে ৫০০ টাকা এবং গ-কে কিছু টাকা ধার দেয়। চার বৎসর পরে ক সর্বসমেত ২১০ টাকা সুদ পেলে ক, গ-কে কত ধার দিয়েছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৭)]

Sol" ৮ টাকা হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৮ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " = $\frac{৮}{১০০}$ "

$\therefore$ ৫০০ " ৪ " " = $\frac{৮\times৪\times৫০০}{১০০}$ " = ১৬০ টাকা

ক, খ-এর নিকট হতে ১৬০ টাকা সুদ পেল।

সুতরাং, গ-এর নিকট হতে সুদ পায় = (২১০ − ১৬০) টাকা = ৫০ টাকা।

৮ টাকা হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৮ টাকা

$\therefore$ ১ " ৪ " " = ৮ × ৪ = ৩২ টাকা

৩২ টাকা সুদ পাওয়া যায় ১০০ টাকায়

$\therefore$ ১ " " " " = $\frac{১০০}{৩২}$ "

$\therefore$ ৫০ " " " " = $\frac{১০০ \times ৫০}{৩২}$ = ১৫৬.২৫ টাকায়।

উত্তর : ১৫৬.২৫ টাকা।

18. কোন মূলধন ৪ বছরের জন্য ধার দেওয়া হয় এবং সুদের হার প্রথম ২ বছরের জন্য ৫% ও শেষ ২ বছরের জন্য ৪% নির্দিষ্ট করা হয়। ৪ বছর পরে ঐ মূলধন সুদে-মূলে ১৪১৬ টাকা হলে, মূলধন কত ছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৪২)]

Sol মনে করি, মূলধন = ১০০ টাকা

১০০ টাকার ১ বছরের সুদ = ৫ টাকা

$\frac{১০০}{১}$ " ১ম ২ " " = ৫ × ২ = ১০ টাকা

আবার, $\frac{১০০}{১}$ " ১ বছরের সুদ = ৪ টাকা

$\frac{১০০}{১}$ " শেষ ২ " " = ৪ × ২ টাকা = ৮ টাকা

মোট সুদ = (১০ + ৮) টাকা = ১৮ টাকা

সুদে-মূলে (১০০ + ১৮) টাকা = ১১৮ টাকা হলে মূলধন = ১০০ টাকা

" ১ " " " $= \frac{১০০}{১১৮}$ "

" ১৪১৬ " " " $= \frac{১০০ \times ১৪১৬}{১১৮}$

= ১২০০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় মূলধন ১২০০ টাকা।

19. বার্ষিক মুনাফা ৮% থেকে বেড়ে ১০% হওয়ায় তিশা মারমার আয় ৪ বছরে ১২৮ টাকা বেড়ে গেল। তাঁর মূলধন কত ছিল?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol মুনাফার হার বাড়ে = (১০% − ৮%) = ২%

অর্থাৎ, ১০০ টাকায় ১ বছরে আয় বাড়ে ২ টাকা

∴ ১০০ " ৪ " " " (২ × ৪) = ৮ টাকা

আয় ৮ টাকা বাড়লে তার মূলধন ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " " $\frac{১০০}{৮}$ "

∴ "১২৮" " " " $\frac{১০০ \times ১২৮}{৮}$ = ১৬০০ টাকা

∴ নির্ণেয় মূলধন = ১৬০০ টাকা। (উত্তর)

20. একজন ব্যক্তি ২০,০০০ টাকা থেকে কিছু টাকা বার্ষিক ১০% মুনাফায় এবং বাকি টাকা বার্ষিক ১২% মুনাফায় বিনিয়োগ করলেন। এক বছর পর তিনি সর্বমোট বিনিয়োগের $১০\frac{৩}{৪}$% মুনাফা পেলেন। তিনি মুনাফার প্রতি হারের জন্য কত টাকা বিনিয়োগ করেছিলেন? [৪১তম বিসিএস]

Sol মনে করি, তিনি ১০% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছেন 'ক' টাকা

" ১২% " " " (২০০০০ − ক) টাকা

এখন,

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ১০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{১০}{১০০}$ "

∴ 'ক' " ১ " " $\frac{১০ ক}{১০০}$ "

আবার,

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ১২ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{১২}{১০০}$ "

∴ (২০০০০ − ক) টাকার ১ বছরের মুনাফা $\frac{১২(২০০০০ - ক)}{১০০}$ টাকা

∴ মোট মুনাফা = ২০০০০ এর $১০\frac{৩}{৪}\% = ২০০০০ \times \frac{৪৩}{৪ \times ১০০} = ২১৫০$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{১০ক}{১০০} + \frac{১২(২০০০০ - ক)}{১০০} = ২১৫০ \Rightarrow \frac{১০ক + ২৪০০০০ - ১২ক}{১০০} = ২১৫০$

$\Rightarrow -২ক + ২৪০০০০ = ২১৫০০০ \Rightarrow -২ক = -২৫০০০ \Rightarrow ক = \frac{-২৫০০০}{-২}$

∴ ক = ১২,৫০০

∴ ১০% মুনাফায় বিনিয়োগ করেছেন ১২৫০০ টাকা

১২% " " " (২০০০০ − ১২৫০০) = ৭৫০০ টাকা।

TYPE 04: সময় নির্ণয়

01. কোন টাকা ৫ বৎসরে ৬% হার সুদে সুদ-আসলে ১৩০০ টাকা হয়। কত বৎসরে ঐ টাকা সুদ-আসলে ১৩৯০ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol" ৬% হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৬ টাকা

∴ ১০০ " ৫ " " (৬ × ৫) টাকা = ৩০ টাকা

সুদাসল = সুদ + আসল

বা, সুদাসল = (৩০ + ১০০) টাকা = ১৩০ টাকা

১৩০ টাকা সুদ-আসল হলে আসল ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{১৩০}$ "

∴ ১৩০০ " " " " " $= \frac{১০০ \times ১৩০০}{১৩০}$ "

= ১০০০ টাকা

আবার, সুদ = সুদাসল − আসল = (১৩৯০ − ১০০০) টাকা = ৩৯০ টাকা

আমরা পাই, ৬% হারে

১০০ টাকার ১ বৎসরে সুদ ৬ টাকা

∴ ১ " ১ " " $= \frac{৬}{১০০}$ "

∴ ১০০০ " ১ " " $= \frac{৬ \times ১০০০}{১০০}$ " = ৬০ টাকা

৬০ টাকা সুদ হয় ১ বছরে

∴ ১ " " " $= \frac{১}{৬০}$ "

∴ ৩৯০ " " " $= \frac{১ \times ৩৯০}{৬০} = \frac{১৩}{২}$ বছর $= ৬\frac{১}{২}$ বছর

অতএব, নির্ণেয় সময় $৬\frac{১}{২}$ বছর

৪১. শতকরা বার্ষিক ৫ টাকা হার সুদে ৪০০ টাকার সুদ কত বৎসরে ১০০ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-২৯)]

Sol ৫ টাকা হারে,
১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৫ টাকা
∴ ১ " ১ " " $= \frac{৫}{১০০}$ "
∴ ৪০০ " ১ " " $= \frac{৫ \times ৪০০}{১০০}$ "
$= ২০$ টাকা

সুতরাং,
২০ টাকা সুদ হয় ১ বছরে
∴ ১ " " " $= \frac{১}{২০}$ "
∴ ১০০ " " " $= \frac{১ \times ১০০}{২০}$ " $= ৫$ বছরে

অতএব, নির্ণেয় সময় ৫ বছর।

বিকল্প সমাধান:

$I = pnr$
$\Rightarrow n = \frac{I}{pr}$
$= \frac{100 \times 100}{400 \times 5}$
$= 5$ বছর

এখানে, $I = 100$
$r = \frac{5}{100}$
$p = 400$
$n = ?$

অতএব, নির্ণেয় সময় ৫ বছর।

৪২. শতকরা বার্ষিক $৬\frac{১}{৪}$ টাকা হার সুদে কত বৎসরে ২০০ টাকা সুদে-আসলে ২৫০ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩০)]

Sol সুদ = সুদাসল − আসল
বা, সুদ = (২৫০ − ২০০) টাকা = ৫০ টাকা
$৬\frac{১}{৪}\%$ বা $\frac{২৫}{৪}\%$ হারে,
১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $\frac{২৫}{৪}$ টাকা
∴ ১ " ১ " " $= \frac{২৫}{৪ \times ১০০}$ "
∴ ২০০ " ১ " " $= \frac{২৫ \times ২০০}{৪ \times ১০০}$
$= \frac{২৫}{২}$ টাকা

সুতরাং,
$\frac{২৫}{২}$ টাকা সুদ হয় ১ বছরে
∴ ১ " " " $= \frac{১ \times ২}{২৫}$ "
∴ ৫০ " " " $= \frac{১ \times ২ \times ৫০}{২৫} = ৪$ বছরে

অতএব, নির্ণেয় সময় ৪ বছর।

বিকল্প সমাধান:

সুদ = সুদাসল − আসল
বা, সুদ, $I = (২৫০ - ২০০)$ টাকা $= ৫০$ টাকা

$I = pnr$
$\Rightarrow n = \frac{I}{pr}$
$= \frac{৫০ \times ১০০ \times ৪}{২০০ \times ২৫}$
$= ৪$ বছর

এখানে, $I = ৫০০$
$r = ৬\frac{১}{৪}\%$ বা $\frac{২৫}{৪}\%$
$p = ২০০$
$n = ?$

অতএব, নির্ণেয় সময় ৪ বছর।

04. বার্ষিক $৩\frac{১}{৩}\%$ হার সুদে ১৩৫০ টাকা কত বছরে সুদে আসলে ১৬২০ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩১)]

Sol" সুদ = সুদাসল − আসল

বা, সুদ = (১৬২০ − ১৩৫০) = ২৭০ টাকা

$৩\frac{১}{৩}\%$ বা $\frac{১০}{৩}\%$ হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ $\frac{১০}{৩}$ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{১০}{৩\times১০০}$ "

$\therefore$ ১৩৫০ " ১ " " $= \frac{১০\times১৩৫০}{৩\times১০০}$

$= ৪৫$ টাকা

সুতরাং,

৪৫ টাকা সুদ হয় ১ বছরে

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১}{৪৫}$ "

$\therefore$ ২৭০ "" " $= \frac{১\times২৭০}{৪৫} = ৬$ বছরে

অতএব, নির্ণেয় সময় ৬ বছর।

বিকল্প সমাধান:

সুদ = সুদাসল − আসল

বা, সুদ, I = (১৬২০ − ১৩৫০) টাকা = ২৭০ টাকা

$I = pnr$

$\Rightarrow n = \frac{I}{pr}$

$= \frac{২৭০\times১০০\times৩}{১৩৫০\times১০}$

$= ৬$ বছর

এখানে, I = ২৭০

$r = ৩\frac{১}{৩}\%$ বা $\frac{১০}{৩}\%$

p = ১৩৫০

n = ?

অতএব, নির্ণেয় সময় ৬ বছর।

05. সুদের হার শতকরা বার্ষিক ৪ টাকা হলে কত সময়ে ৪০০০ টাকা সুদে-আসলে ৪৪০০ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩২)]

Sol" সুদ = সুদাসল − আসল

বা, সুদ = (৪৪০০ − ৪০০০) = ৪০০ টাকা

৪% হারে,

১০০ টাকার ১ বৎসরের সুদ ৪ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৪}{১০০}$ "

$\therefore$ ৪০০০ " ১ " " $= \frac{৪\times৪০০০}{১০০}$ "

$= ১৬০$ টাকা

সুতরাং, ১৬০ টাকা সুদ হয় ১ বছরে

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১}{১৬০}$ "

$\therefore$ ৪০০ " " " $= \frac{১\times৪০০}{১৬০}$

$= \frac{৫}{২}$ বছর $= ২\frac{১}{২}$ বছর

অতএব, নির্ণেয় সময় $২\frac{১}{২}$ বছর

বিকল্প সমাধান:

সুদ = সুদাসল − আসল

বা, সুদ, I = (৪৪০০ − ৪০০০) টাকা = ৪০০ টাকা

$I = pnr$

$\Rightarrow n = \frac{I}{pr}$

$= \frac{৪০০\times১০০}{৪০০০\times৪}$

$= \frac{৫}{২}$ বছর

$= ২\frac{১}{২}$ বছর

এখানে, I = ৪০০

$r = ৪\%$ বা $\frac{৪}{১০০}$

p = ৪০০০

n = ?

অতএব, নির্ণেয় সময় $২\frac{১}{২}$ বছর।

৬১. কিছু টাকা $৪\frac{১}{২}\%$ হার সুদে ১০ বৎসরে সুদ-আসলে ২৯৭২.৫০ টাকা হয়। কত বৎসরে উহা সুদ-আসলে ৪৩৫৬.২৫ টাকা হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৩)]

Sol $৪\frac{১}{২}\%$ বা $\frac{৯}{২}\%$ হারে

১০০ টাকার ১ বৎসরে সুদ $\frac{৯}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১০ " " $= \frac{৯}{২} \times ১০$

$= ৪৫$ টাকা

সুদাসল = সুদ + আসল

বা, সুদাসল = (৪৫ + ১০০) টাকা = ১৪৫ টাকা

সুদ-আসল ১৪৫ টাকা হলে আসল = ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{১০০}{১৪৫}$ "

$\therefore$ " ২৯৭২.৫০ " " " $= \frac{১০০ \times ২৯৭২.৫০}{১৪৫}$ "

$= ২০৫০$ টাকা

আবার,

সুদ = সুদাসল − আসল

= (২৯৭২.৫০ − ২০৫০) টাকা = ৯২২.৫০ টাকা

সুদে-আসলে ৪৩৫৬.২৫ এর ক্ষেত্রে আমরা পাই,

সুদ = সুদাসল − আসল

= (৪৩৫৬.২৫ − ২০৫০) টাকা = ২৩০৬.২৫ টাকা

সুতরাং,

৯২২.৫০ টাকা সুদ হয় ১০ বছরে

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১০}{৯২২.৫০}$ "

$\therefore$ ২৩০৬.২৫ " " " $= \frac{১০ \times ২৩০৬.২৫}{৯২২.৫০}$ "

$= ২৫$ বছরে

অতএব, নির্ণেয় সময় ২৫ বছর।

৬২. একজন লোক ৫% হার সুদে ৫০০ টাকা ধার করেন এবং কিছুকাল পরে $৩\frac{১}{২}\%$ হার সুদে আরও ৪০০ টাকা ধার করেন। দ্বিতীয় ধার নেওয়ার ৬ মাস পরে তিনি উভয় ধার সুদে-মূলে ৯৯৪.৫০ টাকায় শোধ করেন। প্রথম ধার নেওয়ার কতদিন পর তিনি ঐ ধার শোধ করেন? [২৩তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.৩ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৬)]

Sol" দ্বিতীয় ধারের ক্ষেত্রে, ৬ মাস $= \frac{৬}{১২}$ বছর

$৩\frac{১}{২}\%$ বা $\frac{৭}{২}$ হারে,

১০০ টাকার ১ বছরের সুদ $= \frac{৭}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৭}{২ \times ১০০}$ টাকা

$\therefore$ ৪০০ " $\frac{৬}{১২}$ " " $= \frac{৭ \times ৬ \times ৪০০}{২ \times ১০০ \times ১২}$ টাকা = ৭ টাকা

মোট আসল = ৫০০ টাকা + ৪০০ টাকা = ৯০০ টাকা

মোট সুদ = ৯৯৪.৫০ টাকা − ৯০০ টাকা = ৯৪.৫০ টাকা

দ্বিতীয় ধারের সুদ ৭ টাকা হলে, প্রথম ধারের সুদ = ৯৪.৫০ টাকা − ৭ টাকা
= ৮৭.৫০ টাকা

প্রথম ধারের ক্ষেত্রে ৫% হারে,

১০০ টাকার ১ বছরের সুদ= ৫ টাকা

১ " ১ " " $= \frac{৫}{১০০}$ "

৫০০ " ১ " " $= \frac{৫ \times ৫০০}{১০০} = ২৫$ টাকা

$\therefore$ ২৫ টাকা সুদ হয় ১ বছরে

১ " " " $\frac{১}{২৫}$ "

৮৭.৫০ " " " $\frac{৮৭.৫০ \times ১}{২৫}$ বছর $= \frac{৭}{২}$ বছর $= ৩\frac{১}{২}$ বছর

অতএব, প্রথম ধার নেওয়ার $৩\frac{১}{২}$ বছর পর তিনি ধার শোধ করেন।

০৪. একই হার মুনাফায় কোনো আসল ৬ বছরে মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হলে, কত বছরে তা মুনাফা-আসলে তিনগুণ হবে?
[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Sol" মনে করি, আসল ১০০ টাকা

মুনাফা-আসলে দ্বিগুণে হয় (১০০ × ২) টাকা বা, ২০০ টাকা

$\therefore$ মুনাফা হবে = (২০০ − ১০০) টাকা = ১০০ টাকা

অর্থাৎ, ১০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা ১০০ টাকা

$\therefore$ ১০০ " ১ " " $\frac{১০০}{৬} = \frac{৫০}{৩}$ টাকা

আবার, মুনাফা-আসলে তিনগুণে হয় (১০০ × ৩) টাকা বা, ৩০০ টাকা

$\therefore$ মুনাফা হবে = (৩০০ − ১০০) টাকা = ২০০ টাকা

এখানে, $\frac{৫০}{৩}$ টাকা মুনাফা হয় ১ বছরে

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১ \times ৩}{৫০}$ "

$\therefore$ ২০০ " " " $= \frac{১ \times ৩ \times ২০০}{৫০} = ১২$ বছর

$\therefore$ নির্ণেয় সময় = ১২ বছর (উত্তর)

09. কোনো নির্দিষ্ট সময়ের মুনাফা-আসল ৫৬০০ টাকা এবং মুনাফা, আসলের $\frac{২}{৫}$ অংশ। মুনাফা বার্ষিক শতকরা ৮ টাকা হলে, সময় নির্ণয় কর। *[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]*

Sol" মনে করি, আসল ১০০ টাকা

তাহলে, মুনাফা $\left(১০০ \text{ এর } \frac{২}{৫}\right)$ টাকা বা, ৪০ টাকা

মুনাফা + আসল = (৪০ + ১০০) টাকা = ১৪০ টাকা

এখন, মুনাফা-আসলে ১৪০ টাকা হলে আসল ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $\frac{১০০}{১৪০}$ "

$\therefore$ " ৫৬০০ " " " $\frac{১০০ \times ৫৬০০}{১৪০} = ৪০০০$ টাকা

সুতরাং, মুনাফা = (৫৬০০ − ৪০০০) টাকা = ১৬০০ টাকা

বি:দ্র: অংকটির বাকী অংশ আপনি দুইটি পদ্ধতিতে করতে পারবেন।

১ম পদ্ধতি

আবার, ১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ৮ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $\frac{৮}{১০০}$ "

$\therefore$ ৪০০০ " ১ " " $\frac{৮ \times ৪০০০}{১০০}$

= ৩২০ টাকা

৪০০০ টাকার মুনাফা ৩২০ টাকা হয় ১ বছরে

$\therefore$ " " " ১ " " $\frac{১}{৩২০}$ "

$\therefore$ " " " ১৬০০ " " $\frac{১ \times ১৬০০}{৩২০}$ "

= ৫ বছরে

$\therefore$ নির্ণেয় সময় ৫ বছর। (উত্তর)

২য় পদ্ধতি

$I = pnr$

$\Rightarrow n = \frac{I}{pr}$

$= \frac{১৬০০ \times ১০০}{৪০০০ \times ৮}$

= ৫বছর

এখানে, I = ১৬০০

r = ৮% বা $\frac{৮}{১০০}$

p = ৪০০০

n = ?

অতএব, নির্ণেয় সময় ৫ বছর।

TYPE 05: চক্রবৃদ্ধি সুদ সংক্রান্ত সমস্যা

01. বার্ষিক ১০% মুনাফায় ৮০০০ টাকার ৩ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন নির্ণয় কর। *[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৭)]*

Sol" আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি মূলধন $C = P(১ + r)^n$

দেওয়া আছে, প্রারম্ভিক মূলধন P = ৮০০০

বার্ষিক মুনাফার হার, r = ১০% এবং সময় n = ৩ বছর

$\therefore C = ৮০০০ \times \left(১ + \frac{১০}{১০০}\right)^৩$ টাকা $= ৮০০০ \times (১ + ০.১)^৩$ টাকা

$= ৮০০০ \times (১.১)^৩$ টাকা $= ৮০০০ \times ১.৩৩১$ টাকা $= ১০৬৪৮$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মূলধন ১০৬৪৮ টাকা। (উত্তর)

02. বার্ষিক শতকরা ৮.৫০ টাকা চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় ১০০০০ টাকার ২ বছরের সবৃদ্ধিমূল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর।

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি মূলধন $C = P(1+r)^n$

এখানে, $P = ১০০০০$, $r = ৮.৫০\%$ এবং $n = ২$

$\therefore C = ১০০০০ \times \left(১ + \frac{৮.৫০}{১০০}\right)^২$ টাকা $= ১০০০০ \times (১ + .০৮৫)^২$ টাকা

$= ১০০০০ \times ১.১৭৭২২৫$ টাকা $= ১১৭৭২.২৫$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল ১১৭৭২.২৫ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = (১১৭৭২.২৫ − ১০০০০) টাকা = ১৭৭২.২৫ টাকা

উত্তর : সবৃদ্ধিমূল ১১৭৭২.২৫ টাকা এবং ১৭৭২.২৫ টাকা

03. বার্ষিক শতকরা 6 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 15000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৪১)]

Sol" আমরা জানি, $C = P(1+r)^n$ [যেখানে C চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধিমূল]

দেওয়া আছে, $P = 15000$ টাকা, $r = 6\% = \frac{6}{100}$, $n = 3$ বছর

$\therefore C = 15000\left(1+\frac{6}{100}\right)^3 = 15000\left(1+\frac{3}{50}\right)^3 = 15000\left(\frac{53}{50}\right)^3$

$= 15000 \times \frac{53}{50} \times \frac{53}{50} \times \frac{53}{50} = \frac{446631}{25} = 17865.24$

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল = 17865.24 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = (17865.24 − 15000) টাকা = 2865.24 টাকা।

04. যদি চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরে বার্ষিক সুদের হার যথাক্রমে $r_1\%$, $r_2\%$ এবং $r_3\%$ হয়, তবে তিন বছর শেষে P টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করুন। **[৩৮তম বিসিএস]**

Sol" দেওয়া আছে, মূলধন P

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধির সুদের ক্ষেত্রে,

$C = P(1+r)^n$ [P = মূলধন, r = সুদের হার, n = সময়]

প্রথম বছরে $r_1\%$ হারে সুদাসল $C_1 = P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)^1 = P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)$

দ্বিতীয় বছরে $r_2\%$ হারে সুদাসল $C_2 = C_1\left(1+\frac{r_2}{100}\right)^1$

$= P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)$

আবার, তৃতীয় বছরে $r_3\%$ হারে সুদাসল $C_3 = C_2\left(1+\frac{r_3}{100}\right)^1$

$= P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)$

$\therefore$ তিন বছর শেষে সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে- $P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)$ **(উত্তর)**

05. একই হার মুনাফায় কোনো মূলধনের এক বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন ৬৫০০ টাকা ও দুই বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন ৬৭৬০ টাকা হলে, মূলধন কত?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol মূলধন P এবং r মুনাফার হার হলে, এক বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধন C = ৬৫০০ হলে,

$৬৫০০ = P(১ + r)$ ..... (i)

২ বছরে চক্রবৃদ্ধি মূলধন $৬৭৬০ = P(১ + r)^২$ ..... (ii)

এখন, (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{P(1+r)^2}{P(1+r)} = \frac{৬৭৬০}{৬৫০০}$ বা, $\frac{P(1+r)(1+r)}{P(1+r)} = \frac{২৬}{২৫}$ বা, $1 + r = \frac{২৬}{২৫}$

এখন, $P(1 + r) = ৬৫০০$ বা, $p \times \frac{২৬}{২৫} = ৬৫০০$

বা, $২৬p = ৬৫০০ \times ২৫$ বা, $p = \frac{৬৫০০ \times ২৫}{২৬}$

$\therefore P = ৬২৫০$ $\therefore$ নির্ণেয় মূলধন ৬২৫০ টাকা (উত্তর)

06. কোনো শহরের বর্তমান জনসংখ্যা ৬৪ লক্ষ। শহরটির জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার প্রতি হাজারে ২৫ জন হলে, ২ বছর পর ঐ শহরের জনসংখ্যা কত হবে?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১১)]

Sol শহরটির বর্তমান জনসংখ্যা P = ৬৪০০০০০

জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার, $r = \frac{২৫}{১০০০} \times ১০০\% = ২.৫\%$

সময়, n = ২ বছর

এখানে জনসংখ্যা বৃদ্ধির ক্ষেত্রে চক্রবৃদ্ধি মূলধনের সূত্র প্রযোজ্য।

$\therefore C = P(১ + r)^n$

$= ৬৪০০০০০ \times \left(১ + \frac{২.৫}{১০০}\right)^২ = ৬৪০০০০০ \times (১ + .০২৫)^২$

$= ৬৪০০০০০ \times (১.০২৫)^২ = ৬৪০০০০০ \times ১.০৫০৬২৫ = ৬৭২৪০০০$

$\therefore$ ২ বছর পর শহরটির জনসংখ্যা হবে ৬৭২৪০০০ জন। (উত্তর)

07. এক ব্যক্তি একটি ঋণদান সংস্থা থেকে বার্ষিক ৮% চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় ৫০০০ টাকা ঋণ নিলেন। প্রতিবছর শেষে তিনি ২০০০ টাকা করে পরিশোধ করেন। ২য় কিস্তি পরিশোধের পর তাঁর আর কত টাকা ঋণ থাকবে?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol এখানে, P = ৫০০০ এবং r = ৮%

১ম বছরান্তে চক্রবৃদ্ধি মূলধন $= P(১ + r)^১ = ৫০০০ \times \left(১ + \frac{৮}{১০০}\right)$ টাকা

$= ৫০০০ \times (১ + .০৮)$ টাকা

$= ৫০০০ \times ১.০৮$ টাকা $= ৫৪০০$ টাকা

প্রথম বছর ২০০০ টাকা কিস্তি পরিশোধ করায় তার ঋণ থাকে

$= (৫৪০০ - ২০০০)$ টাকা $= ৩৪০০$ টাকা।

আবার, চক্রবৃদ্ধি মূলধন $= P(১ + r) = ৩৪০০ \times \left(১ + \frac{৮}{১০০}\right)$ টাকা

$= ৩৪০০ \times (১ + .০৮)$ টাকা $= ৩৪০০ \times ১.০৮$ টাকা $= ৩৬৭২$ টাকা

দ্বিতীয় বছর ২০০০ টাকা কিস্তি পরিশোধ করায় তার ঋণ থাকবে

$= (৩৬৭২ - ২০০০)$ টাকা $= ১৬৭২$ টাকা (উত্তর)

08. বার্ষিক ৫% হার সুদে ষান্মাসিক চক্রবৃদ্ধিতে ১০,০০০ টাকা একটি সঞ্চয়ী হিসাবে জমা রাখা হলো। বছর শেষে সুদে-আসলে কত টাকা পাওয়া যাবে? [৪৪তম বিসিএস]

Sol" এখানে, সুদের হার, $r = ৫\% = \frac{৫}{১০০} = \frac{১}{২০}$

সময়, $n = ১$ বছর

আসল, $p = ১০,০০০$ টাকা

বছরে চক্রবৃদ্ধি সংখ্যা, $t = ২$ (ষান্মাসিক চক্রবৃদ্ধিতে বছরে চক্রবৃদ্ধি সংখ্যা ২ হয়)

∴ ষান্মাসিক চক্রবৃদ্ধিতে সুদাসল, $C = p\left(১ + \frac{r}{t}\right)^{n \times t}$

$= ১০,০০০\left(১ + \frac{১}{২০ \times ২}\right)^{১ \times ২}$

$= ১০,০০০\left(১ + \frac{১}{৪০}\right)^{২}$

$= ১০,০০০\left(\frac{৪০ + ১}{৪০}\right)^{২}$

$= ১০,০০০ \times \frac{৪১}{৪০} \times \frac{৪১}{৪০}$

$= ১০৫০৬.২৫$ টাকা (উত্তর)

09. ২০% যৌগিক মুনাফায় মূলধন ১০০০০ টাকা ২ বছরের জন্য বিনিয়োগ করা হলো। যদি যৌগিক মুনাফা অর্ধ বছর হিসেবে ধরা হয়, তাহলে চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত?

Sol" আমরা জানি,

চক্রবৃদ্ধিমূলধন, $C = P(১ + r)^{n \times t}$

$\Rightarrow C = ১০০০০\left(১ + \frac{১}{৫ \times ২}\right)^{২ \times ২}$

$= ১০০০০\left(\frac{১১}{১০}\right)^{৪}$

$= ১০০০০ \times \frac{১১}{১০} \times \frac{১১}{১০} \times \frac{১১}{১০} \times \frac{১১}{১০}$

$= ১১^{৪} = ১৪৬৪১$ টাকা **(Ans.)**

এখানে, মূলধন, $P = ১০০০০$ টাকা

সময়, $n = ২$ বছর

বছরে চক্রবৃদ্ধি সংখ্যা, $t = ২$

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $C = ?$

সুদের হার, $r = ২০\% = \frac{২০}{১০০} = \frac{১}{৫}$

যেহেতু ষান্মাসিক সুদ, তাই, $r = \frac{১}{৫ \times ২}$ হবে

10. লাবনী বার্ষিক 8% হারে ষাণ্মাসিক চক্রবৃদ্ধি সুদে 1 বছর মেয়াদী 10000 টাকা মূল্যমানের সঞ্চয়পত্র ক্রয় করে। সঞ্চয়পত্রের মেয়াদান্তে লাবনী কত টাকা সুদ পাবে?

Sol" এখানে, মূলধন, $P = 10000$ টাকা, সময়, $t = 1$ বছর, বছরে চক্রবৃদ্ধির সংখ্যা, $n = 2$,

বার্ষিক সুদের হার, $r = 8\% = \frac{8}{100}$, চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $C = ?$

$C = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \times t}$ টাকা

$= 10000\left(1 + \frac{8}{100 \times 2}\right)^{2 \times 1}$ টাকা

$= 10000 \times (1.04)^2$ টাকা $= 10816$ টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি সুদ $= (10816 - 10000)$ টাকা $= 816$ টাকা।

TYPE06: সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয়

Ex আলী স্কুল থেকে উপবৃত্তি বাবদ ৬৪০০ টাকা এবং তার ভাই রাকিন বৃত্তি বাবদ কিছু টাকা পেল। তারা উভয়েই ৫% হার মুনাফায় তাদের প্রাপ্ত টাকা একই ব্যাংকে ২ বছরের জন্য জমা রাখল। রাকিনের টাকার সরল মুনাফা ও চক্রবৃত্তি মুনাফার পার্থক্য ৫ টাকা হলে রাকিন কত টাকা বৃত্তি পেয়েছিল? [৪৩তম বিসিএস]

Sol দেওয়া আছে, $n = 2, r = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

ধরি, রাকিনের মূলধন, P এবং প্রাপ্ত মুনাফা $= I$

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

আমরা জানি, $I = Pnr$

$$= P \times 2 \times \frac{1}{20} = \frac{P}{10}$$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে,

দেওয়া আছে, $r = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, $n = 2$, চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $C = ?$

আমরা জানি, $C = P(1 + r)^n$

$$= P\left(1 + \frac{1}{20}\right)^2$$

$$= P\left(\frac{20 + 1}{20}\right)^2$$

$$= P\left(\frac{21}{20}\right)^2$$

$$= \frac{441\,P}{400}$$

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $= \frac{441\,P}{400} - P$

$$= \frac{441P - 400P}{400}$$

$$= \frac{41\,P}{400}$$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{41\,P}{400} - \frac{P}{10} = 5$

$$\Rightarrow \frac{41\,P - 40\,P}{400} = 5$$

$\therefore P = 2000$ [400 দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

$\therefore$ মূলধন 2000 টাকা।

02. 4% হার মুনাফায় কোনো টাকার 2 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হলে, মূলধন কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২৭)]

Sol" দেওয়া আছে, $n = 2, r = \frac{4}{100}, P = ?, I = ?$

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

আমরা জানি, $I = Pnr = P \times \frac{4}{100} \times 2 = \frac{2P}{25}$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে,

দেওয়া আছে, $r = \frac{4}{100}, n = 2, C = ?$

আমরা জানি, $C = P(1+r)^n = P\left(1+\frac{4}{100}\right)^2 = P\left(1+\frac{1}{25}\right)^2 = P\left(\frac{25+1}{25}\right)^2$

$$= P\left(\frac{26}{25}\right)^2 = \frac{676\,P}{625}$$

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $= \frac{676\,P}{625} - P = \frac{676P - 625P}{625} = \frac{51\,P}{625}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{51\,P}{625} - \frac{2P}{25} = 1 \quad \Rightarrow \frac{51\,P - 50\,P}{625} = 1$

$\therefore$ $P = 625$ [625 দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

$\therefore$ মূলধন 625 টাকা।

03. 5% হার মুনাফায় 8000 টাকার 3 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-৩১)]

Sol" দেওয়া আছে, $P = 8000, r = \frac{5}{100}, n = 3$ বছর, $I = ?$

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে,

আমরা জানি, $I = Pnr = 8000 \times 3 \times \frac{5}{100} = 1200$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে,

দেওয়া আছে, $P = 8000, r = \frac{5}{100}, n = 3, C = ?$

আমরা জানি, $C = P(1+r)^n = 8000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 8000\left(1+\frac{1}{20}\right)^3$

$$= 8000 \times \frac{(20+1)^3}{(20)^3} = 8000 \times \frac{(21)^3}{8000} = 9261 \text{ টাকা}$$

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা-আসল = 9261 টাকা

" মুনাফা = (9261 − 8000) টাকা = 1261 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ও সরল মুনাফার পার্থক্য = (1261 − 1200) = 61 টাকা।

ঘ. বার্ষিক শতকরা ১০ টাকা মুনাফায় ৫০০০ টাকার ৩ বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য কত হবে?
[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংকে নং-০৮)]

Sol" আমরা জানি, সরল মুনাফা $I = prn$

এখানে, $p = ৫০০০$, $r = ১০\%$ এবং $n = ৩$

$\therefore I = \left(৫০০০ \times \frac{১০}{১০০} \times ৩\right)$ টাকা $= ১৫০০$ টাকা

$\therefore$ সরল মুনাফা ১৫০০ টাকা

আবার, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $= P(১ + r)^n - P$

এখানে, $P = ৫০০০$, $r = ১০\%$ এবং $n = ৩$

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $= ৫০০০ \times \left(১ + \frac{১০}{১০০}\right)^৩ - ৫০০০$ টাকা

$= ৫০০০ \times (১ + ০.১)^৩ - ৫০০০$ টাকা

$= ৫০০০ \times (১.১)^৩ - ৫০০০$ টাকা

$= (৫০০০ \times ১.৩৩১) - ৫০০০$ টাকা

$= ৬৬৫৫ - ৫০০০$ টাকা $= ১৬৫৫$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ১৬৫৫ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ও সরল মুনাফার পার্থক্য $= (১৬৫৫ - ১৫০০)$ টাকা

$= ১৫৫$ টাকা (উত্তর)

TYPE 07 সৃজনশীল প্রশ্ন

০১. কোন আসল ৩ বছরের সরল মুনাফাসহ ২৮০০০ টাকা এবং ৫ বছরের সরল মুনাফাসহ ৩০০০০ টাকা।

(ক) প্রতীকগুলোর বর্ণনাসহ মূলধন নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।

(খ) মুনাফার হার নির্ণয় কর।

(গ) একই হারে ব্যাংকে কত টাকা জমা রাখলে ৫ বছরের মুনাফা-আসলে ৪৮০০ টাকা হবে।
[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.১ (অনুশীলনীর অংক নং-২০)]

Sol" (ক) আমরা জানি, $I = Pnr$ বা, $P = \frac{I}{nr}$

[এখানে, P = মূলধন, I = সরল মুনাফা, n = সময়, r = মুনাফার হার]

এটিই মূলধন নির্ণয়ের সূত্র।

(খ) আসল + ৫ বছরের মুনাফা = ৩০০০০ টাকা

আসল + ৩ বছরের মুনাফা = ২৮০০০ টাকা

(বিয়োগ করে) ২ বছরের মুনাফা = ২০০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " $\frac{২০০০}{২}$ "

$\therefore$ ৩ " " $\frac{২০০০ \times ৩}{২} = ৩০০০$ টাকা

$\therefore$ আসল + ৩০০০ টাকা = ২৮০০০ টাকা

বা, আসল = $(২৮০০০ - ৩০০০)$ টাকা $= ২৫০০০$ টাকা

আমরা জানি,

মুনাফার হার, $r = \frac{I \times ১০০}{Pn}$

$= \frac{৩০০০ \times ১০০}{২৫০০০ \times ৩}$

$= ৪\%$

অর্থাৎ মুনাফার হার ৪%

এখানে,

আসল, P = ২৫০০০ টাকা

মুনাফা, I = ৩০০০ টাকা

সময়, n = ৩ বছর

(গ) মুনাফার হার ৪% হলে,

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ৪ টাকা

∴ ১০০ " ৫ " " (৪×৫) টাকা = ২০ টাকা

∴ মুনাফা-আসল = $(২০ + ১০০)$ টাকা = ১২০ টাকা

মুনাফা-আসল ১২০ টাকা হলে আসল ১০০ টাকা

∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{১২০}$ "

∴ " " ৪৮০০০ " " $\frac{১০০ \times ৪৮০০০}{১২০} = ৪০০০০$ টাকা

∴ একই হারে ব্যাংকে ৪০০০০ টাকা জমা রাখতে হবে।

02. একই হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় কোনো মূলধন এক বছরান্তে সবৃদ্ধিমূল ১৯৫০০ টাকা এবং দুই বছরান্তে সবৃদ্ধিমূল ২০২৮০ টাকা হল।

(ক) মুনাফা নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

(খ) মূলধন নির্ণয় কর।

(গ) একই হারে উক্ত মূলধনের জন্য ৩ বছর পর সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৩)]

Sol (ক) আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = $C - P = P(1 + r)^n - P$

এখানে, P = আসল; r = মুনাফার হার এবং n = সময়

(খ) চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় এক বছরান্তে সবৃদ্ধিমূল, C = ১৯৫০০ টাকা

" " দুই " " C = ২০২৮০ টাকা

$C = P(১ + r)^n$ সূত্র হতে পাই, $১৯৫০০ = P(১ + r)^১$ (সময়, n = ১ বছর)

∴ $P(১ + r)^১ = ১৯৫০০$ ..... (১)

আবার, $২০২৮০ = P(১ + r)^২$ (সময়, n = ২ বছর)

∴ $P(১ + r)^২ = ২০২৮০$ ..... (২)

(২) নং সমীকরণকে (১) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$১ + r = \frac{২০২৮০}{১৯৫০০}$ বা, $১৯৫০০ + ১৯৫০০r = ২০২৮০$

বা, $১৯৫০০r = ২০২৮০ - ১৯৫০০$ বা, $r = \frac{৭৮০}{১৯৫০০} = \frac{১}{২৫}$

r এর মান (১) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$P\left(১ + \frac{১}{২৫}\right) = ১৯৫০০$ বা, $P\left(\frac{২৬}{২৫}\right) = ১৯৫০০$

বা, $P = \frac{১৯৫০০ \times ২৫}{২৬} = ১৮৭৫০$

∴ মূলধন ১৮৭৫০ টাকা

(গ) 'খ' হতে প্রাপ্ত মূলধন, P = ১৮৭৫০ টাকা এবং মুনাফার হার, $r = \frac{১}{২৫}$

এখানে, সময়, n = ৩ বছর

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $C = P(১ + r)^n = ১৮৭৫০\left(১ + \frac{১}{২৫}\right)^৩$ টাকা

$= ১৮৭৫০ \times \left(\frac{২৬}{২৫}\right)^৩$ টাকা = ২১০৯১.২

∴ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = C − P = (২১০৯১.২ − ১৮৭৫০) টাকা = ২৩৪১.২ টাকা

সরল মুনাফা, $I = Prn = \left(১৮৭৫০ \times \frac{১}{২৫} \times ৩\right) = ২২৫০$ টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ও সরল মুনাফার পার্থক্য = (২৩৪১.২ − ২২৫০) টাকা

= ৯১.২ টাকা (উত্তর)

১৩. শিপ্রা বড়ুয়া কোনো ব্যাংকে ৩০০০ টাকা জমা রেখে ২ বছর পর মুনাফাসহ ৩৬০০ টাকা পেয়েছেন।

(ক) সরল মুনাফার হার নির্ণয় কর।

(খ) আরও ৩ বছর পর মুনাফা-আসল কত হবে?

(গ) ৩০০০ টাকা একই হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় জমা রাখলে ২ বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত হতো?

[অষ্টম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৪)]

Sol (ক) মুনাফা = মুনাফা-আসল − আসল = (৩৬০০ − ৩০০০) টাকা

= ৬০০ টাকা

৩০০০ টাকার ২ বছরের মুনাফা ৬০০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{৬০০}{৩০০০ \times ২}$ "

∴ ১০০ " ১ " " $\frac{৬০০ \times ১০০}{৩০০০ \times ২} = ১০$ টাকা

∴ সরল-মুনাফার হার ১০%

(খ) ক-হতে প্রাপ্ত,

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা ১০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{১০}{১০০}$ "

∴ ৩০০০ " ৩ " " $\frac{১০ \times ৩০০০ \times ৩}{১০০} = ৯০০$ টাকা

এখানে, শিপ্রা বড়ুয়া ২ বছর পর মুনাফাসহ পান ৩৬০০ টাকা

∴ আরও ৩ বছর পর মুনাফা-আসল হবে = (৩৬০০ + ৯০০) টাকা

= ৪৫০০ টাকা

∴ আরও ৩ বছর পর মুনাফা-আসল হবে ৪৫০০ টাকা

(গ) এখানে, মূলধন, P = ৩০০০ টাকা

সময়, n = ২ বছর

ক-হতে প্রাপ্ত, মুনাফার হার, $r = ১০\% = \frac{১০}{১০০}$

আমরা জানি,

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $C = P(১ + r)^n$

$\therefore C = ৩০০০ \times \left(১ + \frac{১০}{১০০}\right)^২$ টাকা

$= ৩০০০ \times \left(\frac{১০০ + ১০}{১০০}\right)^২$ টাকা

$= ৩০০০ \times \left(\frac{১১০}{১০০}\right)^২$ টাকা

$= ৩০০০ \times \left(\frac{১১}{১০}\right)^২$ টাকা

$= ৩০০০ \times \frac{১২১}{১০০} = ৩৬৩০$ টাকা

∴ ২ বছর চক্রবৃদ্ধি মূলধন হতো ৩৬৩০ টাকা

TYPE 08: Miscellaneous

01. একজন বিনিয়োগকারী 80,000 টাকার কিছু প্রতি 6 মাস অন্তর 5% হার সুদে এবং অবশিষ্ট বাৎসরিক 12% হারে একটি সেভিংস ব্যাংকে জমা করল। বছর শেষে তিনি 9000 টাকা সুদ পেলেন। তাহলে তিনি 12% হার সুদে কত টাকা বিনিয়োগ করেন? [৩৫তম বিসিএস]

Sol 6 মাস অন্তর 5% হারে সুদ হলে 1 বছরে সুদের হার হবে 10%

মনে করি, বার্ষিক 10% হারে বিনিয়োগ করেন x টাকা

∴ " 12% " " " (80000 − x) টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{10x}{100} + \frac{12\,(80000 - x)}{100} = 9000$

$\Rightarrow \frac{10x + 960000 - 12x}{100} = 9000$

$\Rightarrow -2x + 960000 = 900000$

$\Rightarrow 2x = 60000$

$\Rightarrow x = 30000$

∴ 12% হারে বিনিয়োগ করেন (80000 − 30000) টাকা = 50000 টাকা

Ans: 50000 টাকা

১৫. এক ব্যক্তি x টাকা ৪% সরল মুনাফা ও y টাকা ৫% সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করে বার্ষিক মুনাফা পান ৯২০ টাকা। যদি তিনি x টাকা ৫% সরল মুনাফা ও y টাকা ৪% সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করতেন তবে তাঁর বার্ষিক মুনাফা হত ৪৪০ টাকা। x ও y এর মান নির্ণয় করুন।

[৩৩তম বিসিএস]

Sol: ৪% সরল মুনাফায়,

১০০ টাকার ১ বছরের সুদ = ৪ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৪}{১০০}$ "

$\therefore$ x " ১ " " $= \frac{৪ \times x}{১০০}$ টাকা $= \frac{x}{২৫}$ টাকা

আবার, ৫% সরল মুনাফায়,

১০০ টাকার ১ বছরের সুদ = ৫ টাকা

$\therefore$ ১ " ১ " " $= \frac{৫}{১০০}$ "

$\therefore$ y " ১ " " $= \frac{৫ \times y}{১০০}$ টাকা $= \frac{y}{২০}$ টাকা

প্রথম শর্তানুসারে, $\frac{x}{২৫} + \frac{y}{২০} = ৯২০ \Rightarrow \frac{৪x + ৫y}{১০০} = ৯২০$

$\Rightarrow ৪x + ৫y = ৯২০০০$ ..... (i)

অতএব, দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $\frac{x}{২০} + \frac{y}{২৫} = ৪৪০ \Rightarrow \frac{৫x + ৪y}{১০০} = ৪৪০$

$\Rightarrow ৫x + ৪y = ৪৪০০০$ ..... (ii)

(i) × ৫ হতে পাই, $২০x + ২৫y = ৪৬০০০০$

(ii) × ৪ হতে পাই, $২০x + ১৬y = ১৭৬০০০$

(–) (–) (–)

(বিয়োগ করে) $৯y = ২৮৪০০০$

$\Rightarrow y = ৩১৫৫৫.৫৬$ (প্রায়)

(ii) নং এ y এর মান বসাই, $৫x + ৪y = ৪৪০০০$

$\Rightarrow ৫x = ৪৪০০০ - ৪y$

$\Rightarrow ৫x = ৪৪০০০ - ১২৬২২২.২২২$

$\Rightarrow ৫x = -৮২২২২.২২২$

$\Rightarrow x = -১৬৪৪৪.৪৪$ (প্রায়)

উত্তর: $x = -১৬৪৪৪.৪৪$ (প্রায়) এবং $y = ৩১৫৫৫.৫৬$ (প্রায়)

$\therefore$ প্রশ্নটিতে মান ধরায় ভুল আছে।]

03. দুই ব্যক্তি 'ক' এবং 'খ' একই ব্যাংক থেকে একই দিনে ১০% হার সরলসুদে পৃথক পৃথক পরিমাণ ঋণ গ্রহণ করে। 'ক' দুই বছর পর সুদে-আসলে যে অর্থ শোধ করে 'খ' ৩ বছর পর সুদে-আসলে সমপরিমাণ অর্থ শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত নির্ণয় করুন। [২৮তম বিসিএস]

Sol মনে করি, ক নেয় x টাকা এবং খ নেয় y টাকা

∴ তাদের ঋণের টাকার অনুপাত x : y

১০% সুদে, ক-এর

১০০ টাকার ১ বছরের সুদ ১০ টাকা

∴ ১ " ১ " " $\frac{১০}{১০০}$ টাকা

∴ x " ১ " " $\frac{১০ \times x}{১০০}$ টাকা

∴ x " ২ " " $\frac{১০ \times x \times ২}{১০০}$ টাকা

$= \frac{২০x}{১০০}$ টাকা $= \frac{x}{৫}$ টাকা

∴ ক এর ব্যাংকে পরিশোধ $= \left(x + \frac{x}{৫}\right)$ টাকা $= \left(\frac{৫x + x}{৫}\right)$ টাকা $= \frac{৬x}{৫}$ টাকা

অনুরূপে, খ-এর

y টাকার ৩ বছরের সুদ $\frac{১০ \times y \times ৩}{১০০}$ টাকা $= \frac{৩০y}{১০০}$ টাকা $= \frac{৩y}{১০}$ টাকা

∴ খ এর ব্যাংকে পরিশোধ $= \left(y + \frac{৩y}{১০}\right)$ টাকা $= \left(\frac{১০y + ৩y}{১০}\right)$ টাকা $= \frac{১৩y}{১০}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{৬x}{৫} = \frac{১৩y}{১০} \Rightarrow \frac{৬x}{১৩y} = \frac{৫}{১০} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{৫ \times ১৩}{৬ \times ১০}$

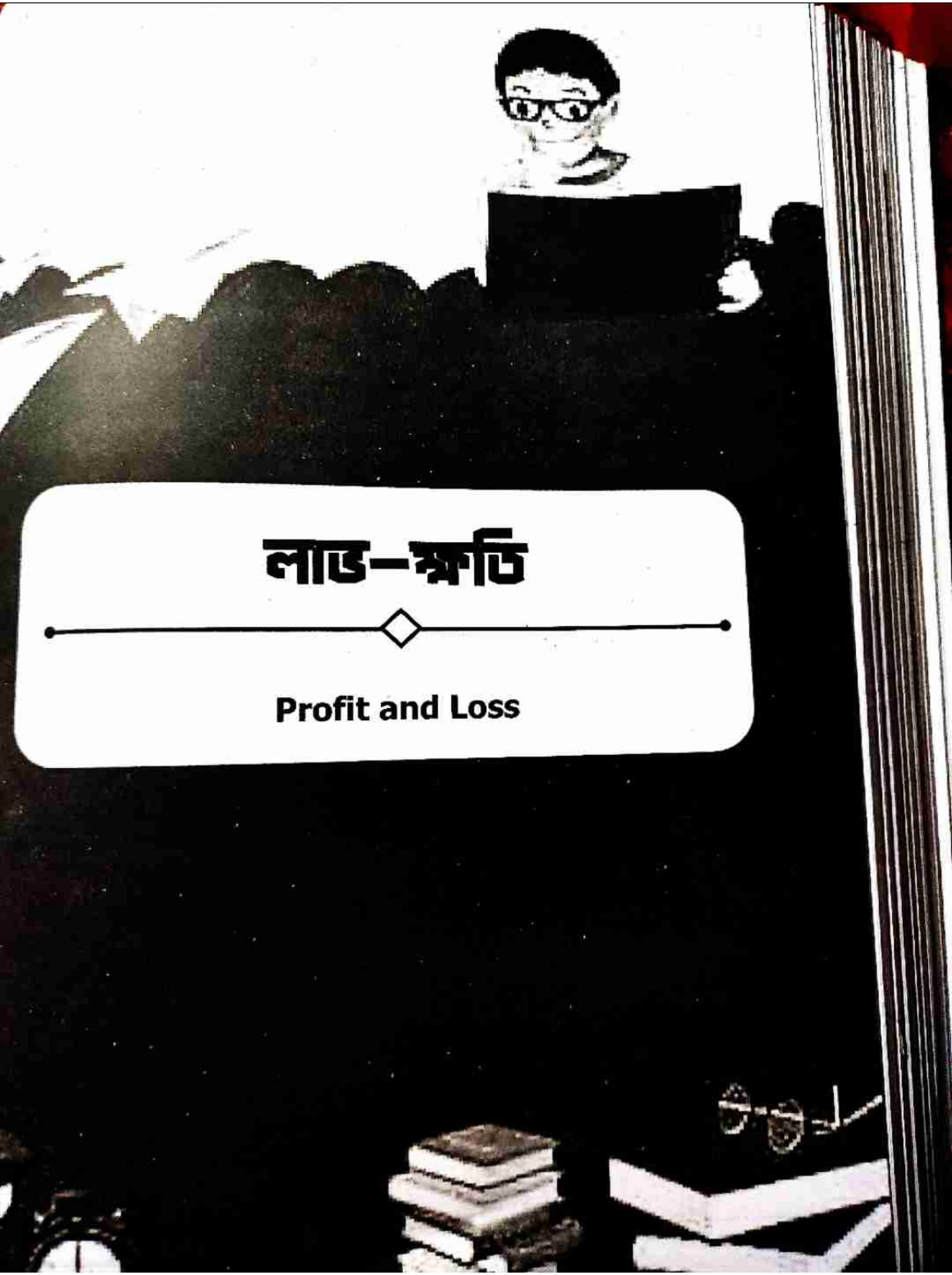
$\Rightarrow x : y = ৬৫ : ৬০ = ১৩ : ১২$

উত্তর: ১৩ : ১২

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	08, 09
Type-02	04, 05, 07, 10, 13, 14, 16, 17, 20
Type-03	03, 09, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20
Type-04	01, 06, 07, 09
Type-05	02, 04, 05, 09
Type-06	01, 02, 03
Type-07	02
Type-08	01



লাভ–ক্ষতি

Profit and Loss

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: ক্রয়মূল্য নির্ণয়-১

Q1. একটি দ্রব্য ১০% লাভে বিক্রয় করলে ১০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য অপেক্ষা ২৫ টাকা বেশি পাওয়া যায়। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত? [৪৪তম বিসিএস]

Sol: মনে করি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

১০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (১০০ − ১০) = ৯০ টাকা

১০% লাভে " = (১০০ + ১০) = ১১০ "

বেশি বিক্রয়মূল্য = ১১০ টাকা − ৯০ টাকা = ২০ টাকা

২০ টাকা বেশি বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{২০}$ "

∴ ২৫ " " " " " $= \frac{১০০ \times ২৫}{২০}$ টাকা = ১২৫ টাকা

অতএব, নির্ণেয় ক্রয়মূল্য ১২৫ টাকা **(উত্তর)**

Q2. একটি খাসি ১০% ক্ষতিতে বিক্রি করলে যে মূল্য পাওয়া যায়, ২০% লাভে বিক্রি করলে তার চেয়ে ১৩৫ টাকা বেশি পাওয়া যায়। খাসিটির ক্রয়মূল্য কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৮)]

Sol: মনে করি, খাসিটির ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

১০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (১০০ − ১০) = ৯০ টাকা

২০% লাভে " = (১০০ + ২০) = ১২০ "

বেশি বিক্রয়মূল্য = ১২০ টাকা − ৯০ টাকা = ৩০ টাকা

৩০ টাকা বেশি বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{৩০}$ "

∴ ১৩৫ " " " " " $= \frac{১০০ \times ১৩৫}{৩০}$ টাকা = ৪৫০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় ক্রয়মূল্য ৪৫০ টাকা

উত্তর : ক্রয়মূল্য ৪৫০ টাকা।

Q3. একটি ঘড়ি ১০% ক্ষতিতে বিক্রয় হলো। বিক্রয় মূল্য ৪৫ টাকা বেশি হলে ৫% লাভ হতো। ঘড়িটির ক্রয়মূল্য কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol: ১০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ − ১০) বা ৯০ টাকা

৫% লাভে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ৫) বা ১০৫ টাকা

বিক্রয়মূল্য বেশি (১০৫ − ৯০) টাকা বা ১৫ টাকা

বিক্রয়মূল্য ১৫ টাকা বেশি হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " " $\frac{১০০}{১৫}$ "

∴ " ৪৫ " " " " $\frac{১০০ \times ৪৫}{১৫} = ৩০০$ টাকা।

∴ জিনিসটির ক্রয়মূল্য ৩০০ টাকা।

উত্তর: ৩০০ টাকা।

04. একটি মটর সাইকেল ১২% ক্ষতিতে বিক্রি করা হলো। যদি বিক্রয়মূল্য ১২০০ টাকা বেশি হতো, তাহলে ৮% লাভ হতো। মটর সাইকেলের ক্রয়মূল্য-

Sol" ধরি, ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ ১২% ক্ষতিতে, বিক্রয়মূল্য = ১০০ − ১২ = ৮৮ টাকা

∴ ৮% লাভে, বিক্রয়মূল্য = ১০০ + ৮ = ১০৮ টাকা

সুতরাং, উভয় বিক্রয়মূল্যের পার্থক্য = ১০৮ − ৮৮ = ২০ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্যের পার্থক্য ২০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{২০}$ "

∴ " " ১২০০ " " " $\frac{১০০ \times ১২০০}{২০}$

= ৬০০০ টাকা। (উত্তর)

05. একটি দ্রব্য x% ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায়, 3x% লাভে বিক্রয় করলে তার চেয়ে 18x টাকা বেশি পাওয়া যায়। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ছিল?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

Sol" আমরা জানি, $S = C(1 \pm r)$

x% ক্ষতিতে, $S = C\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ টাকা

$= \frac{C(100 - x)}{100}$ টাকা

3x% লাভে, $S = C\left(1 + \frac{3x}{100}\right) = \frac{C(100 + 3x)}{100}$ টাকা

যেখানে,
C = ক্রয়মূল্য
S = বিক্রয়মূল্য
r = লাভ/ক্ষতির হার

প্রশ্নানুসারে, $\frac{C(100 + 3x)}{100} - \frac{C(100 - x)}{100} = 18x$

$\Rightarrow C\left(\frac{100 + 3x - 100 + x}{100}\right) = 18x$

$\Rightarrow C \times \frac{4x}{100} = 18x$

$\Rightarrow C = \frac{18x \times 100}{4x} = 450$

∴ দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 450 টাকা।

06. একটি দ্রব্য ৩০% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ৮০ টাকা বেশি হলে ২০% ক্ষতি হতো। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত?

Sol" দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে,

৩০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = ১০০ − ৩০ = ৭০ টাকা

২০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = ১০০ − ২০ = ৮০ টাকা

বিক্রয় পার্থক্য = ৮০ − ৭০ = ১০ টাকা

বিক্রয় পার্থক্য ১০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " " ১ " " " $\frac{১০০}{১০}$ "

∴ " " ৮০ " " " $\frac{১০০ \times ৮০}{১০} = ৮০০$ টাকা।

∴ দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য ৮০০ টাকা।

TYPE 02: বিক্রয়মূল্য ও শতকরা লাভ/ক্ষতি দেয়া থাকলে ক্রয়মূল্য নির্ণয়-০২

Q1. ৫ টাকায় ৯ টা দরে কমলা বিক্রয় করায় ২০% ক্ষতি হলো। প্রতি ডজন কমলা কি দরে ক্রয় করেছিল? [২৮তম বিসিএস]

Sol ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে,

২০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ − ২০) টাকা = ৮০ টাকা

বিক্রয়মূল্য ৮০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " $\frac{১০০}{৮০}$ "

∴ " ৫ " " " $\frac{১০০ \times ৫}{৮০}$ টাকা = ৬.২৫ টাকা।

আবার, ৯ টি কমলার বিক্রয় মূল্য ৫ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ৬.২৫ টাকা

৯ টি কমলার ক্রয়মূল্য = ৬.২৫ টাকা

∴ ১ " " " $= \frac{৬.২৫}{৯}$ "

∴ ১২ " " " $= \frac{৬.২৫ \times ১২}{৯}$ টাকা = ৮.৩৩ টাকা

উত্তর: ৮.৩৩ টাকা।

Q2. ৫ টাকায় ৮টি করে কলা বিক্রয় করলে ২৫% ক্ষতি হয়। প্রতি ডজন কলার ক্রয়মূল্য কত?

Sol ২৫% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ − ২৫) টাকা = ৭৫ টাকা

বিক্রয়মূল্য ৭৫ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " $\frac{১০০}{৭৫}$ "

∴ " ৫ " " " $\frac{১০০ \times ৫}{৭৫} = \frac{২০}{৩}$ টাকা

এখন, ৮টির ক্রয়মূল্য $\frac{২০}{৩}$ টাকা

∴ ১ " " $\frac{২০}{৩ \times ৮}$ টাকা

∴ ১ ডজন বা ১২ টির ক্রয়মূল্য $\frac{২০ \times ১২}{৩ \times ৮} = ১০$ টাকা

Q3. ৫০ টাকায় ৮টি ডিম বিক্রি করায় ২৫% ক্ষতি হলো। প্রতি ডজন ডিমের ক্রয়মূল্য কত ছিল?

Sol ৮টির বিক্রয়মূল্য = ৫০ টাকা

∴ ১ টির বিক্রয়মূল্য = $\frac{৫০}{৮}$ টাকা

∴ ১২টির বিক্রয়মূল্য = $\frac{৫০ \times ১২}{৮} = ৭৫$ টাকা

২৫% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ − ২৫) টাকা = ৭৫ টাকা

বিক্রয়মূল্য ৭৫ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " $\frac{১০০}{৭৫}$ "

∴ " ৭৫ " " " $\frac{১০০ \times ৭৫}{৭৫} = ১০০$ টাকা।

TYPE 03: নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকায় ক্রয়সংখ্যা-বিক্রয়সংখ্যা সাপেক্ষে শতকরা লাভ-ক্ষতি নির্ণয়

01. টাকায় ৩টি করে লেবু কিনে টাকায় ২টি করে বিক্রি করলে শতকরা কত লাভ হবে?

Sol প্রতিটির ক্রয়মূল্য $\frac{১}{৩}$ টাকা ও বিক্রয়মূল্য $\frac{১}{২}$ টাকা

$\therefore$ লাভ হয় $= \frac{১}{২} - \frac{১}{৩} = \frac{৩-২}{৬} = \frac{১}{৬}$ টাকা

$\frac{১}{৩}$ টাকায় লাভ হয় $\frac{১}{৬}$ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{\frac{১}{৬}}{\frac{১}{৩}} = \frac{১}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $\frac{১ \times ১০০}{২} = ৫০$ টাকা।

02. 100 টাকায় 10 টি ডিম কিনে 100 টাকায় 8 টি ডিম বিক্রয় করলে শতকরা লাভ কত হবে?

Sol ১টি ডিমের ক্রয়মূল্য $\left(\frac{100}{10}\right)$ টাকা $= 10$ টাকা

১টি ডিমের বিক্রয়মূল্য $\left(\frac{100}{8}\right)$ টাকা $= \frac{25}{2}$ টাকা

লাভের পরিমাণ $= \left(\frac{25}{2} - 10\right)$ টাকা $= \frac{5}{2}$ টাকা

$\therefore$ লাভের হার $= \left(\frac{\frac{5}{2}}{10} \times 100\right)\% = \left(\frac{5}{20} \times 100\right)\% = 25\%$ **Ans.**

TYPE 04: ক্রয়মূল্য ও শতকরা লাভ/ক্ষতি দেয়া থাকলে বিক্রয়মূল্য নির্ণয়-১

01. ৫৬০ টাকায় একটি চেয়ার কিনে কত টাকায় বিক্রয় করলে ২৫% লাভ হবে?

Sol ২৫% লাভে বিক্রয়মূল্য $= (১০০ + ২৫)$ টাকা $= ১২৫$ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ১২৫ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $\frac{১২৫}{১০০}$ "

$\therefore$ " ৫৬০ " " " $\frac{১২৫ \times ৫৬০}{১০০} = ৭০০$ টাকা

02. সাকিব ১৫০০ টাকা দিয়ে একটি ঘড়ি কিনে ২০% ক্ষতিতে বিক্রয় করলো। ঘড়িটিটি সে কত দামে বিক্রয় করলো?

Sol ২০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য ৮০ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ৮০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $\frac{৮০}{১০০}$ "

$\therefore$ " ১৫০০ " " " $\frac{৮০ \times ১৫০০}{১০০}$ টাকা $= ১২০০$ টাকা।

৩৬ টাকা ডজন দরে ক্রয় করে ২০% লাভে বিক্রয় করা হয়, এক কুড়ি কলার বিক্রয়মূল্য কত হবে?

Sol" ৩৬ টাকায় ক্রয় করে = ১২ টি কলা

∴ ১ " " " $= \frac{১২}{৩৬}$ " "

∴ ১০০ " " " $= \frac{১২ \times ১০০}{৩৬} = \frac{১০০}{৩}$ টি কলা

আবার, ২০% লাভে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ২০) = ১২০ টাকা

$\frac{১০০}{৩}$ টি কলার বিক্রয়মূল্য = ১২০ টাকা

∴ ১ " " " $= \frac{১২০ \times ৩}{১০০}$ টাকা

২০ " " " $= \frac{১২০ \times ৩ \times ২০}{১০০} = ৭২$ টাকা।

৮টি দ্রব্য ৫ টাকায় ক্রয় করে ১৬টি দ্রব্য কত টাকায় বিক্রয় করলে ১০% লাভ হবে?

Sol" ৮টি দ্রব্যের ক্রয়মূল্য ৫ টাকা

∴ ১৬ " " $\frac{৫ \times ১৬}{৮} = ১০$ টাকা

১০% লাভে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ১০) টাকা = ১১০ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য হবে ১১০ টাকা

∴ " ১ " " " " $\frac{১১০}{১০০}$ "

∴ " ১০ " " " " $\frac{১১০ \times ১০}{১০০} = ১১$ টাকা।

Self Practice

এক ডজন আম ৬০ টাকায় ক্রয় করে হালি কত টাকায় বিক্রয় করলে ১০% লাভ হবে? **Ans:** ২২ টাকা

প্রতি ডজন কমলা ৭৫ টাকায় কিনে প্রতি হালি কত টাকায় বিক্রি করলে ২০% লাভ হবে? **Ans:** ৩০ টাকা

এক ডজন কলা ২৪ টাকায় ক্রয় করে কুড়িটি কত টাকায় বিক্রয় করলে ২৫% লাভ হবে? **Ans:** ৫০ টাকা

TYPE 05: বিক্রয়মূল্য নির্ণয়-২

৫৩৫ টাকায় একটি জামা বিক্রি করে শতকরা ৭ ভাগ লাভ হয়। জামাটি কত টাকায় বিক্রি করলে শতকরা ২০ ভাগ ক্ষতি হবে?

Sol" ধরি, ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ ৭% লাভে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ৭) টাকা = ১০৭ টাকা

বিক্রয়মূল্য ১০৭ টাকা হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " $= \frac{১০০}{১০৭}$ "

∴ " ৫৩৫ " " " $= \frac{১০০ \times ৫৩৫}{১০৭}$ টাকা = ৫০০ টাকা

সুতরাং ২০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $= \left(৫০০ - ৫০০ \text{ এর } \frac{২০}{১০০}\right)$ টাকা = (৫০০ − ১০০) টাকা = ৪০০ টাকা

02. একটি ঘড়ি ৬২৫ টাকায় বিক্রয় করলে ১০% ক্ষতি হয়। কত টাকায় বিক্রয় করলে ১০% লাভ হবে?

[সপ্তম শ্রেণীর বোর্ড বই(গণিত), অধ্যায়-২.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১২)]

Sol" ১০% ক্ষতিতে,

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = (১০০ − ১০) টাকা
= ৯০ টাকা

এখন, বিক্রয়মূল্য ৯০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " $\frac{১০০}{৯০}$ "

∴ " ৬২৫ " " " $\frac{১০০ \times ৬২৫}{৯০}$ টাকা

$= \frac{৬২৫০}{৯}$ টাকা

আবার, ১০% লাভে,

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ১০) টাকা
= ১১০ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = ১১০ টাকা

" ১ " " " $= \frac{১১০}{১০০}$ "

" $\frac{৬২৫০}{৯}$ " " " $= \frac{১১০ \times ৬২৫০}{১০০ \times ৯}$ টাকা

$= \frac{৬৮৭৫}{৯}$ টাকা $= ৭৬৩\frac{৮}{৯}$ টাকা **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি:

মনে করি, ঘড়িটির ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

১০% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ − ১০) টাকা
= ৯০ টাকা

১০% লাভে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ১০) টাকা
= ১১০ টাকা

এখন, ৯০ টাকার ঘড়ি বিক্রয় করতে হবে ১১০ টাকা

∴ ১ " " " " " $\frac{১১০}{৯০}$ "

∴ ৬২৫ " " " " " $\frac{১১০ \times ৬২৫}{৯০}$

$= \frac{৬৮৭৫}{৯}$ টাকা

$= ৭৬৩\frac{৮}{৯}$ টাকা

অতএব, $৭৬৩\frac{৮}{৯}$ টাকায় বিক্রয় করলে ১০% লাভ হবে।

03. একটি টেবিল ৬১২.৫০ টাকায় বিক্রি করলে ১২.৫০% ক্ষতি হয়। টেবিলটি কত মূল্যে বিক্রি করলে ৮% লাভ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৯)]

Sol" ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে,

১২.৫% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য (১০০ − ১২.৫) টাকা = ৮৭.৫০ টাকা

৮৭.৫০ টাকা বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " $= \frac{১০০}{৮৭.৫০}$ "

∴ ৬১২.৫০ " " " " $= \frac{১০০ \times ৬১২.৫০}{৮৭.৫০}$ " = ৭০০ টাকা

আবার, ৮% লাভে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ৮) = ১০৮ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = ১০৮ টাকা

∴ " ১ " " " $= \frac{১০৮}{১০০}$ "

∴ " ৭০০ " " " $= \frac{১০৮ \times ৭০০}{১০০}$ "

$= ৭৫৬$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য ৭৫৬ টাকা

১৫. একটি ঘড়ি ৫৬৮.৭৫ টাকায় বিক্রয় করলে $১২\frac{১}{২}\%$ ক্ষতি হয়। ঘড়িটি কত মূল্যে বিক্রয় করলে ৫% লাভ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol" ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে,

$\frac{১}{২}\%$ ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $= \left(১০০ - \frac{২৫}{২}\right)$ টাকা $= \frac{২০০ - ২৫}{২}$ টাকা $= \frac{১৭৫}{২}$ টাকা

$\frac{১৭৫}{২}$ টাকা বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

$\therefore ১$ " " " " $= \frac{১০০ \times ২}{১৭৫}$ "

৫৬৮.৭৫ " " " " $= \frac{১০০ \times ২ \times ৫৬৮.৭৫}{১৭৫} = ৬৫০$ টাকা

আবার, ৫% লাভে,

১০০ টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ৫) টাকা = ১০৫ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ১০৫ টাকা

" ১ " " " $= \frac{১০৫}{১০০}$ "

" ৬৫০ " " " $= \frac{১০৫ \times ৬৫০}{১০০} = \frac{১৩৬৫}{২}$ টাকা $= ৬৮২.৫০$ টাকা

সুতরাং, নির্ণেয় ক্রয়মূল্য ৬৮২.৫০ টাকা।

TYPE 06: দুটি জিনিসের একটিতে লাভ ও অন্যটিতে ক্ষতি হলে শতকরা মোট লাভ/ক্ষতি নির্ণয়

০১. একজন দোকানী একই মূল্যে দুইটি জামা বিক্রয় করেন। একটি জামায় তিনি 10% লাভ করেন এবং অন্যটিতে 10% লোকসান দেন। তবে শতকরা লাভ বা ক্ষতি কত? **[৩৮তম বিসিএস]**

Sol" ধরি, প্রত্যেকের বিক্রয়মূল্য ২০০ টাকা

$\therefore$ মোট বিক্রয়মূল্য $= (২০০ \times ২) = ৪০০$ টাকা

১০% লাভে বিক্রয়মূল্য ১১০ টাকা

বিক্রয়মূল্য ১১০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

" ১ " " " $\frac{১০০}{১১০}$ "

" ২০০ " " " $\frac{২০০ \times ১০০}{১১০} = \frac{২০০০}{১১}$ টাকা

আবার, ১০% ক্ষতিতে, বিক্রয়মূল্য = ৯০ টাকা

বিক্রয়মূল্য ৯০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

" ১ " " " $\frac{১০০}{৯০}$ "

" ২০০ " " " $\frac{২০০ \times ১০০}{৯০} = \frac{২০০০}{৯}$ টাকা

মোট ক্রয়মূল্য $= \left(\frac{২০০০}{১১} + \frac{২০০০}{৯}\right) = \frac{১৮০০০ + ২২০০০}{৯৯} = \frac{৪০০০০}{৯৯} = ৪০৪.০৪$

$\therefore$ ক্ষতি $= ৪০৪.০৪ - ৪০০ = ৪.০৪$ টাকা

$\therefore$ শতকরা ক্ষতি $= \frac{৪.০৪}{৪০৪.০৪} \times ১০০ = ১\%$ (প্রায়) **(উত্তর)**

02. একজন ব্যবসায়ী একই দামে দুইটি কম্পিউটার বিক্রি করল। একটির উপর সে ১৫% লাভ করল কিন্তু অপরটিতে তার ১৫% ক্ষতি হলো। তার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো? [৩১তম বিসিএস]

Sol" ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে,

১৫% লাভে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ১৫) টাকা = ১১৫ টাকা

বিক্রয়মূল্য ১১৫ টাকা হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{১০০}{১১৫}$ "

$\therefore$ " ১০০ " " " $= \frac{১০০ \times ১০০}{১১৫}$ " = ৮৬.৯৬ টাকা।

আবার, ১৫% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (১০০ − ১৫) টাকা = ৮৫ টাকা

বিক্রয়মূল্য ৮৫ টাকা হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{১০০}{৮৫}$ "

$\therefore$ " ১০০ " " " $= \frac{১০০ \times ১০০}{৮৫}$ টাকা = ১১৭.৬৫ টাকা

$\therefore$ কম্পিউটার দুটির- মোট বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ১০০) টাকা = ২০০ টাকা

এবং মোট ক্রয়মূল্য = (৮৬.৯৬ + ১১৭.৬৫) টাকা = ২০৪.৬১ টাকা

$\therefore$ ক্ষতি = (২০৪.৬১ − ২০০) টাকা = ৪.৬১ টাকা

এখন, ২০৪.৬১ টাকায় ক্ষতি হয় ৪.৬১ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{৪.৬১}{২০৪.৬১}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $\frac{৪.৬১ \times ১০০}{২০৪.৬১}$ টাকা = ২.২৫ টাকা

উত্তর: ২.২৫% বা $২\frac{১}{৪}$% ক্ষতি হয়।

TYPE 07: ভিন্ন দরে দ্রব্য কিনে নির্দিষ্ট দরে বিক্রয় করলে শতকরা মোট লাভ/ক্ষতি নির্ণয়

01. ১০ টাকায় ১২টি হিসেবে কিনে ১২ টাকায় ১০টি হিসেবে বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ হয়?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৩)]

Sol" ১২টির ক্রয়মূল্য ১০ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{১০}{১২} = \frac{৫}{৬}$ টাকা

আবার, ১০টির বিক্রয়মূল্য ১২ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{১২}{১০} = \frac{৬}{৫}$ টাকা

$\therefore$ ১টিতে লাভ হয় $= \left(\frac{৬}{৫} - \frac{৫}{৬}\right) = \left(\frac{৩৬ - ২৫}{৩০}\right) = \frac{১১}{৩০}$ টাকা

$\frac{৫}{৬}$ টাকায় লাভ হয় $\frac{১১}{৩০}$ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১১ \times ৬}{৩০ \times ৫}$ "

$\therefore$ ১০০ " " " $= \frac{১১ \times ৬ \times ১০০}{৩০ \times ৫}$ " = ৪৪ টাকা

অতএব, নির্ণেয় লাভ ৪৪%।

৫২. ১০ টাকায় ১০টি ও ৮টি দরে সমান সংখ্যক আম খরিদ করে ১০ টাকায় ৯টি দরে বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে? [২৭তম বিসিএস]

Sol: ১০ টি আমের ক্রয়মূল্য = ১০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১০}{১০} = ১$ টাকা

আবার, ৮ টি আমের ক্রয়মূল্য = ১০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১০}{৮}$ টাকা $= \frac{৫}{৪}$ টাকা

$\therefore$ ২টি আমের ক্রয়মূল্য $= \left(১ + \frac{৫}{৪}\right)$ টাকা $= \frac{৯}{৪}$ টাকা

এখন, ৯ টি আমের বিক্রয়মূল্য = ১০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১০}{৯}$ "

$\therefore$ ২ " " " $= \frac{১০ \times ২}{৯}$ টাকা $= \frac{২০}{৯}$ টাকা

$\therefore$ ক্ষতি $= \left(\frac{৯}{৪} - \frac{২০}{৯}\right)$ টাকা $= \frac{৮১ - ৮০}{৩৬}$ টাকা $= \frac{১}{৩৬}$ টাকা

$\frac{৯}{৪}$ টাকায় ক্ষতি হয় $= \frac{১}{৩৬}$ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১}{৩৬} \times \frac{৪}{৯}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $= \frac{১}{৩৬} \times \frac{৪ \times ১০০}{৯}$ টাকা

$= \frac{১০০}{৮১}$ টাকা $= ১\frac{১৯}{৮১}$ টাকা

উত্তর: $১\frac{১৯}{৮১}$ %

৫৩. ৪টি ও ৬টি দরে সমান সংখ্যক পেয়ারা কিনে ৫টি করে বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৪)]

Sol: ১ম ক্ষেত্রে,

৪টির ক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{১}{৪}$ "

২য় ক্ষেত্রে,

৬টির ক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{১}{৬}$ "

উভয় প্রকার ২টির ক্রয়মূল্য $= \left(\frac{১}{৪} + \frac{১}{৬}\right)$ টাকা

$= \frac{৩ + ২}{১২}$ টাকা $= \frac{৫}{১২}$ টাকা

আবার,
৫টির বিক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{১}{৫}$ "

$\therefore$ ২ " " $= \frac{২}{৫}$ "

$\therefore$ ক্ষতি $= \left(\frac{৫}{১২} - \frac{২}{৫}\right)$ টাকা $= \left(\frac{২৫ - ২৪}{৬০}\right)$ টাকা $= \frac{১}{৬০}$ টাকা

$\frac{৫}{১২}$ টাকায় ক্ষতি হয় $\frac{১}{৬০}$ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১ \times ১২}{৬০ \times ৫}$ "

$\therefore$ ১০০" " " $= \frac{১ \times ১২ \times ১০০}{৬০ \times ৫} = ৪$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় ক্ষতি ৪%।

04. টাকায় ৫টি ও টাকায় ৭টি করে সমান সংখ্যক জামরুল কিনে টাকায় ৬টি দরে বিক্রয় করলে, শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৬)]

Sol" ১ম ক্ষেত্রে,
৫টির ক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১টির " $= \frac{১}{৫}$ "

২য় ক্ষেত্রে,
৭টির ক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১টির " $= \frac{১}{৭}$ "

$\therefore$ উভয় প্রকারের ২টির ক্রয়মূল্য $\left(\frac{১}{৫} + \frac{১}{৭}\right)$ টাকা $= \frac{৭ + ৫}{৩৫}$ টাকা $= \frac{১২}{৩৫}$ টাকা

৬টির বিক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১টির " $= \frac{১}{৬}$ "

$\therefore$ ২টির " $= \frac{২ \times ১}{৬} = \frac{১}{৩}$ টাকা

$\therefore$ ক্ষতি $\left(\frac{১২}{৩৫} - \frac{১}{৩}\right)$ টাকা $= \left(\frac{৩৬ - ৩৫}{১০৫}\right)$ টাকা $= \frac{১}{১০৫}$ টাকা

$\frac{১২}{৩৫}$ টাকায় ক্ষতি হয় $\frac{১}{১০৫}$ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১ \times ৩৫}{১০৫ \times ১২}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $\frac{১ \times ৩৫ \times ১০০}{১০৫ \times ১২}$ " $= \frac{২৫}{৯}$ টাকা $= ২\frac{৭}{৯}$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় ক্ষতি $২\frac{৭}{৯}$ %

15. একজন ব্যবসায়ী ১০ টাকায় ৪টি এবং ১৫ টাকায় ৬টি করে কলা কিনে প্রতিটি ৩ টাকা দরে বিক্রয় করল। ইহাতে তার ২০০ টাকা লাভ হলো। তাহলে সে কতগুলো কলা ক্রয় করেছিল? [৩২তম বিসিএস]

Sol" ৪টির ক্রয়মূল্য ১০ টাকা

$\therefore$ ১ " " $\frac{১০}{৪}$ টাকা $= \frac{৫}{২}$ টাকা

আবার, ৬টির ক্রয়মূল্য ১৫ টাকা

$\therefore$ ১ " " $\frac{১৫}{৬}$ টাকা $= \frac{৫}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১ + ১ = ২ টির ক্রয়মূল্য $= \left(\frac{৫}{২} + \frac{৫}{২}\right)$ টাকা $= \frac{১০}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১ " " $= \frac{১০}{২ \times ২} = \frac{৫}{২}$ টাকা

$\therefore$ ১ টিতে লাভ হয় $\left(৩ - \frac{৫}{২}\right)$ টাকা $= \frac{৬ - ৫}{২} = \frac{১}{২}$ টাকা

$\therefore$ $\frac{১}{২}$ টাকা লাভ হয় ১ টিতে

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১ \times ২}{১}$ টিতে

$\therefore$ ২০০ " " " $\frac{১ \times ২ \times ২০০}{১} = ৪০০$ টিতে (উত্তর)

TYPE 08: বিক্রয়সংখ্যা নির্ণয়-১

01. ৪ টাকায় ১টি করে কমলা কিনে ২৪ টাকায় কয়টি কমলা বিক্রয় করলে ২০% লাভ হবে?

Sol" ২০% লাভে, ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ১২০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $\frac{১২০}{১০০}$ "

$\therefore$ " ৪ " " " $\frac{১২০ \times ৪}{১০০} = \frac{২৪}{৫}$ টাকা

$\frac{২৪}{৫}$ টাকায় বিক্রয় করতে হবে ১টি কমলা

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{৫}{২৪}$ "

$\therefore$ ২৪ " " " " $\frac{৫ \times ২৪}{২৪} = ৫$ টি কমলা (উত্তর)

02. টাকায় ৬টা ক্রয় করে টাকায় কয়টা বিক্রয় করলে ২০% লাভ হবে?

Sol" ২০% লাভে,

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয় মূল্য ১২০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $\frac{১২০}{১০০}$ " $= ১.২$ টাকা

১.২ টাকায় বিক্রয় করতে হবে ৬টি

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{৬}{১.২} = ৫$টি (উত্তর)

03. ৫ টাকায় ২টি দরে কমলা ক্রয় করে ৩৫ টাকায় কয়টি করে কমলা বিক্রয় করলে শতকরা ৪০ টাকা লাভ হবে?

Sol" ৪০% লাভে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ৪০) টাকা বা ১৪০ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ১৪০ টাকা

∴ " ৫ " " " $\frac{১৪০ \times ৫}{১০০} = ৭$ টাকা

৭ টাকায় বিক্রয় করতে হবে ২টি কমলা

∴ ১ " " " " $\frac{২}{৭}$ " "

∴ ৩৫ " " " " $\frac{২ \times ৩৫}{৭} = ১০$টি কমলা

04. 5 টাকায় 2টি করে কমলা কিনে 35 টাকায় কয়টি কমলা বিক্রয় করলে x% লাভ হবে?

Sol" x% লাভে, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (100 + x) টাকা

∴ " 5 " " " $\frac{(100 + x) \times 5}{100} = \frac{100 + x}{20}$ টাকা

$\frac{100 + x}{20}$ টাকায় বিক্রি করতে হবে 2 টি কমলা

∴ 35 " " " " $\frac{20 \times 35 \times 2}{100 + x} = \frac{1400}{100 + x}$ টি কমলা।

Self Practice

05. প্রতি ডজন কলা ৪৮ টাকায় কিনে ৫০ টাকায় কয়টি কলা বিক্রি করলে ২৫% লাভ হয়? **Ans:** ১০টি

06. টাকায় ৫টি দরে লেবু ক্রয় করে টাকায় কয়টা দরে লেবু বিক্রয় করলে ২৫% লাভ হবে? **Ans:** ৪টি

TYPE 09: বিক্রয়সংখ্যা নির্ণয়-২

01. টাকায় ৪টি চকলেট বিক্রয় করায় ১০% ক্ষতি হয়। ২০% লাভ করতে হলে টাকায় কয়টি চকলেট বিক্রয় করতে হবে? [৪০তম বিসিএস]

Sol" ৪টি চকলেটের বিক্রয়মূল্য = ১ টাকা

১০% ক্ষতিতে, ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (১০০ − ১০) = ৯০ টাকা

বিক্রয়মূল্য ৯০ " " ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " $= \frac{১০০}{৯০} = \frac{১০}{৯}$ টাকা

আবার, ২০% লাভে, বিক্রয়মূল্য (১০০ + ২০) = ১২০ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = ১২০ টাকা

∴ " ১ " " " $= \frac{১২০}{১০০}$ "

∴ " $\frac{১০}{৯}$ " " " $= \frac{১২০}{১০০} \times \frac{১০}{৯} = \frac{৪}{৩}$ টাকা

এখন,

$\frac{৪}{৩}$ টাকায় বিক্রয় করতে হবে = ৪ টি চকলেট

∴ ১ " " " " = $৪ \times \frac{৩}{৪}$ টি চকলেট = ৩ টি চকলেট

উত্তর: ৩টি

১৫. ১ টাকায় ১২টি লেবু বিক্রয় করায় ৪% ক্ষতি হয়। ৪৪% লাভ করতে হলে টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করতে হবে?
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৮)]

Sol" ১২টি লেবুর বিক্রয়মূল্য = ১ টাকা

৪% ক্ষতিতে, ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(১০০ - ৪) = ৯৬$ টাকা

বিক্রয়মূল্য ৯৬ " " ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " $= \frac{১০০}{৯৬} = \frac{২৫}{২৪}$ টাকা

আবার, ৪৪% লাভে, বিক্রয়মূল্য $(১০০ + ৪৪) = ১৪৪$ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = ১৪৪ টাকা

∴ " ১ " " " $= \frac{১৪৪}{১০০}$ "

∴ " $\frac{২৫}{২৪}$ " " " $= \frac{১৪৪}{১০০} \times \frac{২৫}{২৪} = ১.৫$ টাকা

এখন,

১.৫ টাকায় বিক্রয় করতে হবে = ১২ টি লেবু

∴ ১ " " " " $= \frac{১২}{১.৫}$ টি লেবু = ৮ টি লেবু

উত্তর: ৮টি

16. **টাকায় 5 টি মার্বেল বিক্রয় করায় 12% ক্ষতি হয়। 10% লাভ করতে হলে টাকায় কয়টি বিক্রয় করতে হবে?**

Sol" 12% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $(100 - 12) = 88$ টাকা

বিক্রয়মূল্য 88 টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা

∴ " 1 " " " $\frac{100}{88}$ "

10% লাভে বিক্রয়মূল্য $(100 + 10) = 110$ টাকা

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য 110 টাকা

∴ " 1 " " " $\frac{110}{100}$ "

∴ " $\frac{100}{88}$ " " " $\frac{110}{100} \times \frac{100}{88} = \frac{110}{88}$ টাকা

$\frac{110}{88}$ টাকায় বিক্রয় করতে হবে 5 টি মার্বেল

∴ 1 " " " " $\frac{5 \times 88}{110} = 4$ টি **(Ans.)**

17. **টাকায় n সংখ্যক কমলা বিক্রয় করায় r% ক্ষতি হয়। s% লাভ করতে হলে, টাকায় কয়টি কমলা বিক্রয় করতে হবে?**
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৩৯)]

Sol" ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে, r% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $(100 - r)$ টাকা

অতএব, যখন বিক্রয়মূল্য $(100 - r)$ টাকা, তখন ক্রয়মূল্য 100 টাকা

∴ যখন বিক্রয়মূল্য 1 টাকা, তখন ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100 - r}$ টাকা।

আবার, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে, s% লাভে বিক্রয়মূল্য $(100 + s)$

" 1 " " s% " " $\frac{100 + s}{100}$

∴ " $\frac{100}{100 - r}$ " " s% " " $\left(\frac{100 + s}{100} \times \frac{100}{100 - r}\right)$ টাকা $= \frac{100 + s}{100 - r}$ টাকা

সুতরাং, $\frac{100+s}{100-r}$ টাকায় বিক্রয় করতে হবে n সংখ্যক কমলা

$\therefore$ 1 টাকায় বিক্রয় করতে হবে $n \times \left(\frac{100-r}{100+s}\right)$ সংখ্যক কমলা

সুতরাং, টাকায় $\frac{n(100-r)}{100+s}$ সংখ্যক কমলা বিক্রয় করতে হবে।

05. টাকায় 10টি আইসক্রিম বিক্রয় করলে x% ক্ষতি হয়। টাকায় কয়টি বিক্রয় করলে z% লাভ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৪২)]

Sol" ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে x% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $= (100 - x)$

বিক্রয়মূল্য $(100 - x)$ টাকা হলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে ক্রয়মূল্য $\frac{100}{100-x}$ টাকা

অর্থাৎ 10টি আইসক্রিমের ক্রয়মল্য $\frac{100}{100-x}$ টাকা

$\therefore$ 1টি আইসক্রিমের ক্রয়মূল্য $\frac{100}{(100-x)\times 10}$ টাকা

আবার ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে z% লাভে বিক্রয়মূল্য $(100 + z)$ টাকা

ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(100 + z)$

" 1 " " " $\frac{100+z}{100}$

$\therefore$ " $\frac{100}{(100-x)\times 10}$ " " " $\frac{100+z}{100} \times \frac{100}{(100-x)\times 10}$

$= \frac{(100+z)}{(100-x)\times 10}$

1টি আইসক্রিমের বিক্রয়মূল্য $\frac{(100+z)}{(100-x)\times 10} = \frac{100+z}{1000-10x}$ টাকা

অর্থাৎ টাকায় $\frac{1000-10x}{100+z}$ টি আইসক্রিম কাঠি বিক্রয় করতে হবে।

06. ৫ টাকায় ২টি দরে কমলা ক্রয় করে ৩৫ টাকায় কয়টি করে কমলা বিক্রয় করলে ৪০% লাভ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-০৫)]

Sol" ৪০% লাভে বিক্রয়মূল্য (১০০ + ৪০) টাকা বা ১৪০ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য ১৪০ টাকা

$\therefore$ " ৫ " " " $\frac{১৪০ \times ৫}{১০০} = ৭$ টাকা

৭ টাকায় বিক্রয় করতে হবে ২টি কমলা

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{২}{৭}$ " "

$\therefore$ ৩৫ " " " " $\frac{২ \times ৩৫}{৭} = ১০$টি কমলা

উত্তর: ১০টি

একটি দ্রব্য ২৫৭৬ টাকায় বিক্রয় করতে বিক্রেতার ১২% লাভ হল। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা কম হলে তার শতকরা কত লাভ হত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অঙ্কে নং-২৭)]

Sol বিক্রেতার ১২% লাভে,
ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য (১০০+১২) টাকা = ১১২ টাকা
বিক্রয়মূল্য ১১২ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{১০০}{১১২}$ "

$\therefore$ " ২৫৭৬ " " " $= \frac{১০০ \times ২৫৭৬}{১১২} = ২৩০০$ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা কম হলে ক্রয়মূল্য হত = (২৩০০ − ১০০) টাকা = ২২০০ টাকা

আবার, লাভ = (২৫৭৬ − ২২০০) = ৩৭৬
২২০০ টাকায় লাভ হয় ৩৭৬ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{৩৭৬}{২২০০}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $= \frac{৩৭৬ \times ১০০}{২২০০}$ " $= \frac{১৮৮}{১১}$ টাকা $= ১৭\frac{১}{১১}$ টাকা

সুতরাং, নির্ণেয় লাভ $১৭\frac{১}{১১}$ %

TYPE 10: খুচরা বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য থেকে পাইকারী বিক্রেতা/উৎপাদনকারীর ক্রয়মূল্য নির্ণয়-৩

একটি দ্রব্যের খুচরা বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য ৩০,০৩০ টাকা। দ্রব্যটি উৎপাদনকারী ৪% পাইকারী বিক্রেতা ৫% এবং খুচরা বিক্রেতা ১০% লাভে বিক্রি করে।
(ক) পাইকারী বিক্রেতার ক্রয়মূল্য নির্ণয় করুন। **[৩৬তম বিসিএস]**

Sol ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে,
১০% লাভে বিক্রয় মূল্য = (১০০ + ১০) = ১১০ টাকা
বিক্রয়মূল্য ১১০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $\frac{১০০}{১১০}$ "

$\therefore$ " ৩০০৩০ " " " $\frac{১০০ \times ৩০০৩০}{১১০}$
$= ২৭৩০০$ টাকা

$\therefore$ পাইকারি বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য = ২৭৩০০ টাকা
৫% লাভে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ৫) = ১০৫ টাকা

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য ১০৫ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

" ১ " " " $\frac{১০০}{১০৫}$ "

" ২৭৩০০ " " " $\frac{১০০ \times ২৭৩০০}{১০৫}$
$= ২৬০০০$ টাকা

$\therefore$ পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য = ২৬০০০ টাকা।

(খ) উৎপাদন খরচ অপেক্ষা খুচরা বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য শতকরা কত বেশি তা নির্ণয় করুন।

Sol উৎপাদনকারীর বিক্রয়মূল্য = ২৬০০০ টাকা

৪% লাভে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ৪) = ১০৪ টাকা

বিক্রয়মূল্য ১০৪ টাকা হলে উৎপাদন খরচ ১০০ টাকা

∴ " ১ " " " " $\frac{১০০}{১০৪}$ "

∴ " ২৬০০০ " " " " $\frac{১০০ \times ২৬০০০}{১০৪}$ = ২৫০০০ টাকা

উৎপাদন খরচ ও খুচরা বিক্রেতার বিক্রয়মূল্যের পার্থক্য (৩০০৩০ − ২৫০০০) = ৫০৩০ টাকা

২৫০০০ টাকায় বেশি হয় ৫০৩০ টাকা

১ " " " $\frac{৫০৩০}{২৫০০০}$ "

∴ ১০০ " " " $\frac{৫০৩০ \times ১০০}{২৫০০০}$ = ২০.১২ টাকা।

উত্তর: ২০.১২%

02. একটি দ্রব্য বিক্রয় করে উৎপাদনকারী, পাইকারী বিক্রেতা ও খুচরা বিক্রেতা প্রত্যেকে ২০% লাভ করে। যদি একটি দ্রব্যের খুচরা বিক্রয় মূল্য ২১.৬০ টাকা হয়, তাহলে দ্রব্যটির উৎপাদন খরচ কত? [৩৩তম, ৩২তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২১)]

Sol ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে,

খুচরা বিক্রেতার ২০% লাভে, বিক্রয়মূল্য (১০০ + ২০) = ১২০ টাকা

১২০ টাকা খুচরা বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " = $\frac{১০০}{১২০}$ "

∴ ২১.৬০ " " " " " = $\frac{১০০ \times ২১.৬০}{১২০}$ টাকা

= ১৮ টাকা

∴ খুচরা বিক্রেতার ক্রয়মূল্য = পাইকারী বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য = ১৮ টাকা

আবার, পাইকারী বিক্রেতার ২০% লাভে,

১২০ টাকা পাইকারী বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " = $\frac{১০০}{১২০}$ "

∴ ১৮ " " " " " = $\frac{১০০ \times ১৮}{১২০}$ "

= ১৫ টাকা

∴ পাইকারী বিক্রেতার ক্রয়মূল্য = উৎপাদনকারীর বিক্রয়মূল্য = ১৫ টাকা

আবার, উৎপাদনকারীর ২০% লাভে,

১২০ টাকা উৎপাদনকারীর বিক্রয়মূল্য হলে উৎপাদন খরচ = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " " = $\frac{১০০}{১২০}$ "

∴ ১৫ " " " " " " = $\frac{১০০ \times ১৫}{১২০}$ "

= $\frac{২৫}{২}$ টাকা = ১২.৫০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় উৎপাদন খরচ ১২.৫০ টাকা।

বিকল্প:

ধরি, দ্রব্যটির উৎপাদন খরচ x টাকা

২০% লাভে উৎপাদনকারীর বিক্রয়মূল্য ১.২x টাকা

∴ পাইকারী বিক্রেতার ক্রয়মূল্য ১.২x টাকা

আবার, ২০% লাভে পাইকারী বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য $= \left(১.২x + \frac{২০}{১০০} \times ১.২x\right)$ টাকা

$= ১.৪৪x$ টাকা

∴ খুচরা বিক্রেতার ক্রয়মূল্য ১.৪৪x টাকা

আবার, ২০% লাভে খুচরা বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য $= \left(১.৪৪x + \frac{২০}{১০০} \times ১.৪৪x\right)$ টাকা

$= ১.৭২৮x$ টাকা

প্রশ্নমতে, $১.৭২৮x = ২১.৬০$

$\Rightarrow x = \frac{২১.৬০}{১.৭২৮}$

$\therefore x = ১২.৫$ টাকা

∴ উৎপাদন খরচ = ১২.৫ টাকা **(উত্তর)**

13. এক ব্যক্তি ২৫,০০০ টাকা মূলধন নিয়ে মশলার পাইকারী ব্যবসা শুরু করল। সে প্রথমে ঐ টাকায় হলুদ কিনল এবং ১৫% লাভে বিক্রয় করল। বিক্রয়লব্ধ অর্থ দ্বারা সে মরিচ কিনল, কিন্তু হঠাৎ মরিচের চাহিদা কমে যাওয়ায় তা ১২% ক্ষতিতে বিক্রয় করতে বাধ্য হল। ঐ ব্যক্তির মোটের উপর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হল? [১১তম বিসিএস]

Sol ১৫% লাভে বিক্রয় মূল্য (১০০ + ১৫) = ১১৫ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয় মূল্য = ১১৫ টাকা

∴ ১ " " " " $\frac{১১৫}{১০০}$

∴ ২৫০০০ " " " " $\frac{১১৫ \times ২৫০০০}{১০০} = ২৮৭৫০$ টাকা

আবার, ১২% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (১০০ − ১২) = ৮৮ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = ৮৮ টাকা

∴ ১ " " " " $\frac{৮৮}{১০০}$ টাকা

∴ ২৮৭৫০ " " " " $\frac{৮৮ \times ২৮৭৫০}{১০০} = ২৫৩০০$ টাকা

∴ লাভ = (২৫৩০০ − ২৫০০০) = ৩০০ টাকা

২৫০০০ টাকায় লাভ হয় = ৩০০

∴ ১ " " " $\frac{৩০০}{২৫০০০}$ টাকা

∴ ১০০ " " " $\frac{৩০০ \times ১০০}{২৫০০০} = \frac{৬}{৫} = ১.২$ টাকা

উত্তর : ১.২% লাভ।

04. উৎপাদনকারী, পাইকারি বিক্রেতা এবং খুচরা বিক্রেতা প্রত্যেকেই ২৫% লাভ রেখে চিনি বিক্রয় করে। খুচরা বিক্রেতা যদি ৪ কে.জি. চিনি ৫০ টাকায় বিক্রয় করে, তবে ১ কুইন্টাল চিনি তৈরি করতে উৎপাদনকারীর কত খরচ পড়ে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-২০)]

Sol" ১ কুইন্টাল = ১০০ কেজি

খুচরা বিক্রেতার,

৪ কেজির বিক্রয়মূল্য ৫০ টাকা

$\therefore$ ১ " " $\frac{৫০}{৪}$ "

$\therefore$ ১০০ " " $\frac{৫০\times১০০}{৪}$ " = ১২৫০ টাকা

খুচরা বিক্রেতার ২৫% লাভে,

১২৫ টাকা খুচরা বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{১২৫}$ টাকা

$\therefore$ ১২৫০ " " " " " $= \frac{১০০\times১২৫০}{১২৫}$

$= ১০০০$ টাকা

$\therefore$ খুচরা বিক্রেতার ক্রয়মূল্য = পাইকারি বিক্রেতার বিক্রয়মূল্য = ১০০০ টাকা

আবার,

পাইকারি বিক্রেতার ২৫% লাভে,

১২৫ টাকা পাইকারি বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{১২৫}$ "

$\therefore$ ১০০০ " " " " " $= \frac{১০০\times১০০০}{১২৫} = ৮০০$ টাকা

$\therefore$ পাইকারি বিক্রেতার ক্রয়মূল্য = উৎপাদনকারীর বিক্রয়মূল্য = ৮০০ টাকা

এবং উৎপাদনকারির ২৫% লাভে,

১২৫ টাকা উৎপাদনকারীর বিক্রয়মূল্য হলে উৎপাদন খরচ = ১০০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{১২৫}$ "

$\therefore$ ৮০০" " " " " " $= \frac{১০০\times৮০০}{১২৫} = ৬৪০$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় উৎপাদন খরচ ৬৪০ টাকা

উত্তর : ৬৪০ টাকা

05. এক ঘড়ি নির্মাতা ২০% লাভে দোকানদারের নিকট ঘড়ি বিক্রয় করেন এবং দোকানদারের ১০% লাভে ক্রেতার নিকট ঘড়ি বিক্রয় করেন। ক্রেতা যে ঘড়িটি ৩৯৬ টাকায় ক্রয় করলেন, সেই ঘড়িটির নির্মাণ খরচ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৬)]

Sol" ক্রেতার ক্রয়মূল্য = দোকানদারের বিক্রয়মূল্য = ৩৯৬ টাকা

দোকানদারের ১০% লাভে

বিক্রয়মূল্য ১১০ টাকা হলে ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{১০০}{১১০}$ "

$\therefore$ " ৩৯৬ " " " $= \frac{১০০ \times ৩৯৬}{১১০}$ "

$= ৩৬০$ টাকা

$\therefore$ দোকানদারের ক্রয়মূল্য = নির্মাতার বিক্রয়মূল্য = ৩৬০ টাকা

নির্মাতার ২০% লাভে,

বিক্রয়মূল্য ১২০ টাকা হলে নির্মাণ খরচ ১০০ টাকা

$\therefore$ " ১ " " " $= \frac{১০০}{১২০}$ "

$\therefore$ " ৩৬০ " " " $= \frac{১০০ \times ৩৬০}{১২০} = ৩০০$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় নির্মাণ খরচ ৩০০ টাকা।

উত্তর : ৩০০ টাকা।

06. **এক ব্যক্তি ৭৬ মিটার কাপড় কিনে ২০ মিটার ১৫% লাভে, ৪০ মিটার ১৯% লাভে, অবশিষ্ট ২৫% লাভে বিক্রয় করে, এতে তার মোট ৬৫৭ টাকা লাভ হয়। এক মিটার কাপড়ের ক্রয়মূল্য কত?**

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৯)]

Sol" ধরি,

প্রতি মিটার কাপড়ের ক্রয়মূল্য x টাকা

$\therefore$ ২০ " " " $= (২০ \times x)$ বা, ২০x টাকা

৪০ " " " $= (৪০ \times x)$ বা, ৪০x "

অবশিষ্ট (৭৬ − ২০ − ৪০) বা ১৬ মিটার কাপড়ের ক্রয়মূল্য $= (১৬ \times x) = ১৬x$ টাকা।

প্রশ্নমতে,

২০x এর ১৫% + ৪০x এর ১৯% + ১৬x এর ২৫% = ৬৫৭

বা, $\frac{২০x \times ১৫}{১০০} + \frac{৪০x \times ১৯}{১০০} + \frac{১৬x \times ২৫}{১০০} = ৬৫৭$

বা, $\frac{৩০০x + ৭৬০x + ৪০০x}{১০০} = ৬৫৭$

বা, ১৪৬০x = ৬৫৭০০

বা, x = ৪৫

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতি মিটার কাপড়ের ক্রয়মূল্য ৪৫ টাকা।

উত্তর : ৪৫ টাকা।

TYPE 11: ক্রয়মূল্য নির্ণয়-৪

01. এক ব্যক্তি একটি দ্রব্য ৪০০০ টাকায় বিক্রয় করায় তার কিছু ক্ষতি হলো। যদি সে ঐ দ্রব্য ৫০০০ টাকায় বিক্রয় করতো তাহলে তার যতো টাকা ক্ষতি হয়েছিল তার $৬৬\frac{২}{৩}\%$ লাভ হতো। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত?

[৩২তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২২)]

Sol মনে করি, ক্ষতি = x টাকা

সুতরাং ক্রয়মূল্য = (৪০০০ + x) টাকা

আমরা পাই,

$$\text{ক্ষতি} + \text{ক্ষতির } ৬৬\frac{২}{৩}\% = x + x \text{ এর } ৬৬\frac{২}{৩}\% = x + x \text{ এর } \frac{২০০}{৩}\%$$

$$= x + x \text{ এর } \frac{২০০}{৩} \times \frac{১}{১০০} = x + x \text{ এর } \frac{২}{৩}$$

$$= x + \frac{২x}{৩} = \frac{৫x}{৩}$$

শর্তানুসারে, $\frac{৫x}{৩} = ৫০০০ - ৪০০০$

$$\Rightarrow \frac{৫x}{৩} = ১০০০$$

$$\Rightarrow ৫x = ১০০০ \times ৩$$

অতএব, $x = \frac{১০০০ \times ৩}{৫} = ৬০০$

অর্থাৎ, ক্ষতি ৬০০ টাকা

সুতরাং ক্রয়মূল্য = (৪০০০ + ৬০০) = ৪৬০০ টাকা

উত্তর: ক্রয়মূল্য ৪৬০০ টাকা।

02. এক ব্যক্তি ১,৫০০ টাকার কিছু জিনিস কিনে $\frac{১}{৩}$ অংশ ৪% ক্ষতিতে বিক্রয় করল। এখন বিক্রয় মূল্য শতকরা কত বৃদ্ধি করলে অবশিষ্ট জিনিস বিক্রি করে তার মোটের উপর ৪% লাভ হবে?

[১১তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩০)]

Sol ১৫০০ টাকার $\frac{১}{৩}$ = ৫০০ টাকা

∴ অবশিষ্ট থাকে = (১৫০০ − ৫০০) টাকা = ১০০০ টাকা

∴ ৫০০ টাকায় ক্ষতি = ৫০০ টাকার ৪% = $\frac{৫০০ \times ৪}{১০০}$ টাকা = ২০ টাকা

আবার, ৪% লাভে

১০০ টাকায় লাভ হয় ৪ টাকা

∴ ১ " " " $\frac{৪}{১০০}$ "

∴ ১৫০০ " " " $\frac{৪ \times ১৫০০}{১০০}$ " = ৬০ টাকা

মোটের উপর ৪% লাভ করতে হলে অবশিষ্ট ১০০০ টাকার দ্রব্য বিক্রয় করতে হবে
= ১০০০ টাকা + ৬০ টাকা + ২০ টাকা = ১০৮০ টাকা

সুতরাং, লাভ = ১০৮০ টাকা − ১০০০ টাকা = ৮০ টাকা

১০০০ টাকায় লাভ হয় ৮০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{৮০}{১০০০}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $= \frac{৮০ \times ১০০}{১০০০}$ টাকা = ৮ টাকা

সুতরাং, অবশিষ্ট দ্রব্যগুলো ৮% লাভে বিক্রয় করতে হবে।

উত্তর : ৮% লাভে বিক্রয় করতে হবে।

(১২. একজন ব্যবসায়ী ৭৫০০ টাকার পাট ক্রয় করল। কিছুদিন পরে পাটের মূল্য কমে যাওয়ায় সে উহার $\frac{১}{৩}$ অংশ ২০% ক্ষতিতে বিক্রয় করল। অবশিষ্ট পাট কত টাকায় বিক্রয় করলে মোটের উপর তার ৩০% লাভ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৯)]

Sol ৭৫০০ টাকার $\frac{১}{৩}$ অংশ = ২৫০০ টাকা

ব্যবসায়ী ২৫০০ টাকার পাট ২০% ক্ষতিতে বিক্রয় করে।

$\therefore$ ক্ষতি = ২৫০০ টাকার ২০% = ২৫০০ টাকার $\frac{২০}{১০০}$ = ৫০০ টাকা

অবশিষ্ট পাট = (৭৫০০ − ২৫০০) টাকার = ৫০০০ টাকার

মোটের উপর ৩০% লাভ হলে,

১০০ টাকায় লাভ হয় ৩০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{৩০}{১০০}$ "

$\therefore$ ৭৫০০ " " " $= \frac{৩০ \times ৭৫০০}{১০০}$ " = ২২৫০ টাকা

সুতরাং, অবশিষ্ট পাট বিক্রয় করতে হবে = ৫০০০ + ২২৫০ + ৫০০ = ৭৭৫০ টাকা।

উত্তর : ৭৭৫০ টাকা।

14. কোন এক ফল ব্যবসায়ীর 6% ফল পচে যায় এবং আরও 4% ফল পরিবহনের সময় নষ্ট হয়। বাকি ফল শতকরা কত লাভে বিক্রয় করলে মোটের উপর তার 20% লাভ হবে? **[১৭তম বিসিএস]**

Sol মোট ফল নষ্ট হয় = (6 + 4)% = 10%

বাকি থাকে (100 − 10)% = 90%

20% লাভে বিক্রয় মূল্য (100 + 20) টাকা = 120 টাকা

শর্তমতে, (120 − 90) = 30 টাকা

90 টাকায় লাভ করতে হবে 30 টাকা

$\therefore$ 1 " " " " $\frac{30}{90}$ "

$\therefore$ 100 " " " " $\frac{30 \times 100}{90}$ টাকা $= 33\frac{1}{3}$ টাকা

$\therefore$ শতকরা $33\frac{1}{3}$ টাকা লাভে বিক্রয় করতে হবে

উত্তর: $33\frac{1}{3}$ টাকা

05. কোন এক ফল ব্যবসায়ীর ৫% ফল পচে যায় এবং আরও ৫% ফল পরিবহনের সময় নষ্ট হয়। বাকি ফল শতকরা কত লাভে বিক্রয় করলে মোটের উপর তার ২০% লাভ হবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১০)]

Sol" মনে করি, ফল ক্রয় করে ১০০ টাকার

মোট ফল নষ্ট হয় = (৫ + ৫)% = ১০%

বাকি থাকে (১০০ − ১০)% = ৯০%

২০% লাভে বিক্রয় মূল্য (১০০ + ২০) টাকা = ১২০ টাকা

শর্তমতে, (১২০ − ৯০) = ৩০ টাকা

৯০ টাকায় লাভ করতে হবে ৩০ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " $\frac{৩০}{৯০}$ "

$\therefore$ ১০০ " " " " $\frac{৩০ \times ১০০}{৯০}$ টাকা = $৩৩\frac{১}{৩}$ টাকা

$\therefore$ শতকরা $৩৩\frac{১}{৩}$ টাকা লাভে বিক্রয় করতে হবে

উত্তর: $৩৩\frac{১}{৩}$ %

06. একজন ব্যবসায়ী ৪০০ টাকায় ১০০ টি কমলালেবু কিনে। ৪টি কমলালেবু বিক্রয় করতে অসমর্থ হইলেও সে অবশিষ্ট লেবুগুলো ডজন ৭২ টাকা দরে বিক্রি করে। তার শতকরা কত লাভ হলো? অতিরিক্ত ৮% লাভ করতে হলে তাকে ডজন প্রতি কত টাকায় লেবুগুলো বিক্রয় করতে হবে?

[১৩তম বিসিএস]

Sol" ৪টি কমলা বিক্রয় করতে অসমর্থ হওয়ায় বিক্রয় করল (১০০ − ৪)টি বা ৯৬টি

১২ টি বিক্রয় করে ৭২ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{৭২}{১২}$ টাকা

$\therefore$ ৯৬ " " " $\frac{৭২ \times ৯৬}{১২}$ = ৫৭৬ টাকা

$\therefore$ লাভ = (৫৭৬ − ৪০০) টাকা = ১৭৬ টাকা

অতএব,

৪০০ টাকায় লাভ হয় = ১৭৬ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $= \frac{১৭৬}{৪০০}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $= \frac{১৭৬ \times ১০০}{৪০০}$ = ৪৪ টাকা

অতিরিক্ত ৮% লাভ করলে লাভের হার দাঁড়ায় = ৪৪% + ৮% = ৫২% লাভ

৫২% লাভে,

১০০ টাকা ক্রয় মূল্য হলে বিক্রয় মূল্য = ১৫২ টাকা

$\therefore$ ১ " " " " " " $= \frac{১৫২}{১০০}$ টাকা

$\therefore$ ৪০০ " " " " " " $= \frac{১৫২ \times ৪০০}{১০০}$ = ৬০৮ টাকা

অর্থাৎ ৯৬ টির বিক্রয় মূল্য = ৬০৮ টাকা

∴ ১ " " " $= \frac{৬০৮}{৯৬}$ টাকা

∴ ১২ " " " $= \frac{১২ \times ৬০৮}{৯৬} = ৭৬$ টাকা

উত্তর: ৪৪%, ৭৬ টাকা

01. এক ব্যবসায়ী ১৪৭ কেজি চা ক্রয় করে তার $\frac{৫}{৭}$ অংশ প্রতি কেজি ৭৮$\frac{১}{৩}$ পেনি দরে বিক্রয় করে এবং অবশিষ্ট চা মোট ৪০ পাউন্ড ২৫ পেনিতে বিক্রয় করে মোটের উপর ২৫% লাভ করল। প্রতি কেজি চা -এর ক্রয়মূল্য কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-২৪)]

Sol" ১৪৭ কে.জি এর $\frac{৫}{৭}$ = ১০৫ কে.জি

১ কে.জি এর বিক্রয়মূল্য = ৭৮$\frac{১}{৩}$ পেনি $= \frac{২৩৫}{৩}$ পেনি

∴ ১০৫ " " " $= \frac{২৩৫}{৩} \times ১০৫ = ৮২২৫$ পেনি

অবশিষ্ট (১৪৭ − ১০৫) কেজি বা ৪২ কেজির বিক্রয়মূল্য = ৪০ পাঃ ২৫ পেনি
= ৪০২৫ পেনি।

১৪৭ কেজির বিক্রয়মূল্য = (৮২২৫ + ৪০২৫) পেনি = ১২২৫০ পেনি।

∴ ১ কেজির বিক্রয়মূল্য $= \frac{১২২৫০}{১৪৭}$ পেনি $= \frac{২৫০}{৩}$ পেনি

২৫% লাভে,
(১০০ + ২৫) পেনি বা ১২৫ পেনি বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ পেনি

∴ ১ " " " " $= \frac{১০০}{১২৫}$ "

∴ $\frac{২৫০}{৩}$ " " " " $= \frac{১০০ \times ২৫০}{৩ \times ১২৫}$ "

$= \frac{২০০}{৩}$ পেনি = ৬৬$\frac{২}{৩}$ পেনি।

অতএব, নির্ণেয় ১ কেজির ক্রয়মূল্য = ৬৬$\frac{২}{৩}$ পেনি (উত্তর)

TYPE 12: বিক্রয়মূল্য নির্ণয়-৩

01. একটি স্টিল মিলে মাসে ১৮০ টন রড উৎপাদন করে। প্রতি টন রডের কাঁচামাল বাবদ খরিদ মূল্য ১২,০০০ টাকা। ঐ মিলের মাসিক আনুষঙ্গিক খরচ ৯০,০০০ টাকা। প্রতি টন উৎপাদিত রড কত দামে বিক্রয় করলে শতকরা ১০ টাকা লাভ থাকবে? [৩৪তম বিসিএস]

Sol" প্রতি টন রডের কাঁচামাল বাবদ খরচ ১২০০০ টাকা
" " " মাসিক আনুষঙ্গিক খরচ ৯০০০০ ÷ ১৮০ বা ৫০০ টাকা

∴ প্রতি টন রডের মোট উৎপাদন খরচ ১২৫০০ টাকা

১০% লাভে,
উৎপাদন খরচ ১০০ টাকা হলে বিক্রয় মূল্য ১১০ টাকা

∴ " " ১২৫০০ " " " " $\frac{১১০ \times ১২৫০০}{১০০}$ টাকা = ১৩,৭৫০ টাকা

উত্তর: ১৩,৭৫০ টাকা

02. একটি মিলে মাসে ৫০,০০০ ব্যাগ সিমেন্ট উৎপাদন হয়। ঐ মিলে আনুষঙ্গিক খরচ বাবদ মাসে ৮০,০০০ টাকা এবং কাঁচামাল ক্রয় বাবদ ৭৫,০০,০০০ টাকা মাসে খরচ হয়। ২০% হারে লাভ করতে হলে প্রতি ব্যাগ সিমেন্টের দাম কত টাকা ধার্য করতে হবে। [২৭তম বিসিএস]

Solⁿ মোট খরচ = (৭৫,০০,০০০ + ৮০,০০০) টাকা
= ৭৫,৮০,০০০ টাকা

২০% লাভে বিক্রয়মূল্য হবে (১০০ + ২০) = ১২০ টাকা

এখন, উৎপাদন খরচ ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য = ১২০ টাকা

" " ১ " " " $= \frac{১২০}{১০০}$ "

" " ৭৫,৮০,০০০ " " " $= \frac{১২০ \times ৭৫,৮০,০০০}{১০০}$ "

= ৯০, ৯৬,০০০ টাকা

অতএব, ৫০,০০০ ব্যাগ বিক্রয় করতে হবে ৯০,৯৬,০০০ টাকা

১ (প্রতি) " " " $\frac{৯০,৯৬,০০০}{৫০,০০০}$ টাকা

= ১৮১.৯২ টাকায়

∴ নির্ণেয় প্রতি ব্যাগ সিমেন্টের বিক্রয় করতে হবে ১৮১.৯২ টাকায়

উত্তর: ১৮১.৯২ টাকায়

TYPE 13: দোকানদারের কমিশন সংক্রান্ত সমস্যা

01. কোন দোকানদার ২৫% লাভ ধরে মূল্য তালিকা প্রস্তুত করে। কিন্তু বিক্রয় করার সময় সে ক্রেতাকে তালিকায় লিখিত মূল্যের উপর ১০% কমিশন দেয়। এতে তার শতকরা কত লাভ হয়?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৬)]

Solⁿ মনে করি, ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

২৫% লাভে তালিকা মূল্য (১০০ + ২৫) টাকা = ১২৫ টাকা

যেহেতু, তালিকায় লিখিত মূল্যের উপর ১০% কমিশন দেয়,

সুতরাং কমিশন = ১২৫ এর ১০%

$= \frac{১২৫ \times ১০}{১০০}$

= ১২.৫ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্য = (১২৫ − ১২.৫)

= ১১২.৫ টাকা

∴ ১০০ টাকায় লাভ হয় = (১১২.৫ − ১০০) টাকা

= ১২.৫ টাকা

অতএব, নির্ণেয় লাভ = ১২.৫%

১৫. একটি দ্রব্য তালিকায় লিখিত মূল্যের উপর ১০% কমিশন দিয়ে বিক্রয় করায় ২০% লাভ হয়। ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত টাকা বেশি মূল্য তালিকার ধার্য ছিল? *[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-৩১)]*

Sol^n মনে করি, ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

২০% লাভে বিক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা + ২০ টাকা = ১২০ টাকা

তালিকার লিখিত মূল্যের উপর ১০% কমিশন দিয়ে বিক্রয় করায়
বিক্রয়মূল্য ৯০ টাকা হলে ধার্য তালিকামূল্য = ১০০ টাকা

" ১ " " " " $= \frac{১০০}{৯০}$ "

" ১২০ " " " " $= \frac{১০০ \times ১২০}{৯০}$ " $= \frac{৪০০}{৩}$ টাকা

∴ ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে তালিকামূল্য $\frac{৪০০}{৩}$ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে তালিকামূল্য বৃদ্ধি $= \left(\frac{৪০০}{৩} - ১০০\right) = \frac{১০০}{৩}$ টাকা।

অতএব, নির্ণেয় তালিকা মূল্য বৃদ্ধির হার $= \frac{১০০}{৩}\% = ৩৩\frac{১}{৩}\%$ ।

উত্তর : $৩৩\frac{১}{৩}\%$ ।

১৬. একজন দোকানদার তালিকাবদ্ধ মূল্যের উপর ৫% কমিশন দেয়। যে দ্রব্যের ক্রয়মূল্য ৭১২.৫০ টাকা তালিকাতে তার মূল্য কত লিখিত হলে দোকানদার $৩৩\frac{১}{৩}$ % লাভ করবে?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-২৩)]

Sol^n $৩৩\frac{১}{৩}\% = \frac{১০০}{৩}\%$

$৩৩\frac{১}{৩}\%$ লাভে,

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $= ১০০ + ৩৩\frac{১}{৩} = ১০০ + \frac{১০০}{৩}$

$= \frac{৩০০ + ১০০}{৩} = \frac{৪০০}{৩}$ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{৪০০}{৩}$ টাকা

∴ " ১ " " " $= \frac{৪০০}{৩ \times ১০০}$ "

∴ " ৭১২.৫০ " " " $= \frac{৪০০ \times ৭১২.৫০}{৩ \times ১০০}$ "

$= ২ \times ৪৭৫$ " = ৯৫০ টাকা

তালিকামূল্যের উপর ৫% কমিশনে,
তালিকামূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মল্য (১০০ − ৫) টাকা = ৯৫ টাকা
৯৫ টাকা বিক্রয়মূল্য হলে তালিকা মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{৯৫}$ "

∴ ৯৫০ " " " " " $= \frac{১০০ \times ৯৫০}{৯৫}$ " = ১০০০ টাকা

অতএব, নির্ণেয় তালিকামূল্য ১০০০ টাকা

TYPE 14: ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের শতকরা হ্রাস-বৃদ্ধির সাপেক্ষে মূল্য নির্ণয়

01. একটি ঘড়ি ও চেইনের মূল্য ৮৫০.০০ টাকা। যদি ঘড়ির মূল্য ১২% এবং চেইনের মূল্য ৫% বৃদ্ধি পায় তবে বর্ধিত মূল্য ৯৩৪.৫০ টাকা হয়। ঘড়ি ও চেইনের মূল্য পৃথকভাবে কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৫)]

Sol" ধরি, ঘড়ির মূল্য = x টাকা
চেইনের মূল্য = y টাকা

$\therefore x + y = ৮৫০$ ..... (i)

১২% বৃদ্ধিতে ঘড়ির মূল্য $= \left(x + \frac{১২x}{১০০}\right)$ টাকা

$= \left(x + \frac{৩x}{২৫}\right)$ "

$= \frac{২৮x}{২৫}$ টাকা

এবং ৫% বৃদ্ধিতে চেইনের মূল্য $= \left(y + \frac{৫y}{১০০}\right)$ টাকা

$= \left(y + \frac{y}{২০}\right)$ টাকা

$= \frac{২১y}{২০}$ টাকা

$\therefore \frac{২৮x}{২৫} + \frac{২১y}{২০} = ৯৩৪.৫০$

বা, $\frac{১১২x + ১০৫y}{১০০} = ৯৩৪.৫০$

বা, ১১২x + ১০৫y = ৯৩৪৫০ ..... (ii)

(i) নং কে ১০৫ দ্বারা গুণ করে (ii) নং থেকে বিয়োগ করে পাই,

১১২x + ১০৫y = ৯৩৪৫০
১০৫x + ১০৫y = ৮৯২৫০
− − −
৭x = ৪২০০

বা, x = ৬০০

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, ৬০০ + y = ৮৫০

বা, y = ৮৫০ − ৬০০ বা, y = 250

∴ ঘড়ির মূল্য = ৬০০ টাকা
এবং চেইনের মূল্য = ২৫০ " (উত্তর)

02. একটি দ্রব্য ৬% লাভে বিক্রয় করা হলো। যদি ক্রয়মূল্য ৪% কম এবং বিক্রয় মূল্য ৪ টাকা বেশি হতো, তাহলে ১২ $\frac{১}{২}$% লাভ হতো। কত মূল্যে দ্রব্যটি ক্রয় করা হয়েছিল?

[২৩তম, ২২তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৭)]

Sol" মনে করি, ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা
৬% লাভে বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ৬) = ১০৬ টাকা
ক্রয়মূল্য ৪% কম হলে, ক্রয়মূল্য = (১০০ − ৪) = ৯৬ টাকা

আবার, $১২\frac{১}{২}\%$ লাভে,

ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $= \left(১০০ + ১২\frac{১}{২}\right) = ১০০ + \frac{২৫}{২}$

$= \frac{২০০ + ২৫}{২}$ টাকা $= \frac{২২৫}{২}$ টাকা

∴ ১০০ টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য $= \frac{২২৫}{২}$ টাকা

∴ ১ " " " " $= \frac{২২৫}{২ \times ১০০}$ "

∴ ৯৬ " " " " $= \frac{২২৫ \times ৯৬}{২ \times ১০০}$ টাকা = ১০৮ টাকা

বিক্রয়মূল্য বেশি = ১০৮ টাকা − ১০৬ টাকা = ২ টাকা

∴ ২ টাকা বেশি বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ১ " " " " " $= \frac{১০০}{২}$ "

∴ ৪ " " " " " $= \frac{১০০ \times ৪}{২} = ২০০$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় ক্রয়মূল্য ২০০ টাকা

উত্তর: ২০০ টাকা।

কোন লোক $৭\frac{১}{২}\%$ ক্ষতিতে একটি দ্রব্য বিক্রয় করল। যদি দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য ১০% কম হত এবং বিক্রয়মূল্য ৩১ টাকা অধিক হত তাহলে তার ২০% লাভ হত। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অংক নং-১৮)]

Sol মনে করি, ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

$৭\frac{১}{২}\%$ ক্ষতিতে, ক্রয়মূল্য ১০০ টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $= \left(১০০ - \frac{১৫}{২}\right)$ টাকা

$= \frac{২০০ - ১৫}{২}$ টাকা $= \frac{১৮৫}{২}$ টাকা

১০% কমে ক্রয়মূল্য (১০০ − ১০) টাকা = ৯০ টাকা

২০% লাভে, বিক্রয়মূল্য = (১০০ + ২০) টাকা = ১২০ টাকা

১০০ টাকা ক্রয়মূল্য হলে বিক্রয়মূল্য ১২০ টাকা

∴ ৯০ " " " " $= \frac{১২০ \times ৯০}{১০০}$ টাকা = ১০৮ টাকা

∴ অধিক বিক্রয়মূল্য $= \left(১০৮ - \frac{১৮৫}{২}\right)$ টাকা $= \frac{২১৬ - ১৮৫}{২}$ টাকা $= \frac{৩১}{২}$ টাকা।

$\frac{৩১}{২}$ টাকা অধিক বিক্রয়মূল্য হলে ক্রয়মূল্য = ১০০ টাকা

∴ ৩১ " " " " " $= \frac{১০০ \times ২ \times ৩১}{৩১} = ২০০$ টাকা

অতএব, নির্ণেয় ক্রয়মূল্য ২০০ টাকা।

04. ঘোড়াসমেত একখানা গাড়ির মূল্য ১৩০০ টাকা। যদি ঘোড়ার মূল্য ২৫% এবং গাড়ির মূল্য ১৫% বৃদ্ধি পেত, তাহলে ১৫৬৫ টাকার প্রয়োজন হত। ঘোড়া ও গাড়ির মূল্য কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত-১৯৮৩ সংস্করণ), অধ্যায়-৪.২ (অনুশীলনীর অঙ্ক নং-২৫)]

Sol" মনে করি, ঘোড়ার মূল্য x টাকা

∴ গাড়ির " (১৩০০ − x) টাকা

২৫% বৃদ্ধিতে, ঘোড়ার মূল্য = x + x এর ২৫% = x + x এর $\frac{২৫}{১০০}$ = x + x এর $\frac{১}{৪}$

$= \frac{৪x+x}{৪} = \frac{৫x}{৪}$ টাকা

১৫% বৃদ্ধিতে,

গাড়ির মূল্য = {(১৩০০ − x) + (১৩০০ − x) এর ১৫%} টাকা

$= \left\{(১৩০০ - x) + (১৩০০ - x) \text{ এর } \frac{১৫}{১০০}\right\}$ টাকা

$= (১৩০০ - x)\left(১ + \frac{৩}{২০}\right)$ টাকা $= \frac{২৩(১৩০০ - x)}{২০}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{৫x}{৪} + \frac{২৩(১৩০০-x)}{২০} = ১৫৬৫$

বা, $\frac{২৫x + (২৩\times১৩০০) - ২৩x}{২০} = ১৫৬৫$

বা, 2x + (২৩ × ১৩০০) = ১৫৬৫ × ২০

বা, 2x + ২৯৯০০ = ৩১৩০০

বা, 2x = ৩১৩০০ − ২৯৯০০

∴ $x = \frac{১৪০০}{২} = ৭০০$

∴ ঘোড়ার মূল্য ৭০০ টাকা এবং

গাড়ির মূল্য (১৩০০ − ৭০০) টাকা = ৬০০ টাকা।

উত্তর : ঘোড়ার মূল্য ৭০০ টাকা এবং গাড়ির মূল্য ৬০০ টাকা।

বিকল্প সমাধান :

মনে করি, ঘোড়ার মূল্য x টাকা

∴ গাড়ির মূল্য (১৩০০ − x) "

প্রশ্নমতে, x-এর ২৫% + (১৩০০ − x)-এর ১৫% = ১৫৬৫ − ১৩০০

বা, $\frac{x \times ২৫}{১০০} + \frac{(১৩০০ - x)১৫}{১০০} = ২৬৫$

বা, $\frac{২৫x + ১৯৫০০ - ১৫x}{১০০} = ২৬৫$

বা, 10x + ১৯৫০০ = ২৬৫০০

বা, 10x = ২৬৫০০ − ১৯৫০০

বা, $x = \frac{৭০০০}{১০}$

∴ x = ৭০০

∴ নির্ণেয় ঘোড়ার মূল্য ৭০০ টাকা এবং গাড়ির মূল্য (১৩০০ − ৭০০) বা ৬০০ টাকা

উত্তর : ঘোড়ার মূল্য ৭০০ টাকা এবং ৬০০ টাকা

TYPE 15: Miscellaneous

11. একটি খাতা ৩৬ টাকায় বিক্রয় করায় যত ক্ষতি হলো, ৭২ টাকায় বিক্রয় করলে তার দ্বিগুণ লাভ হতো, খাতাটির ক্রয়মূল্য কত? [৩৬তম বিসিএস]

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২৫)]

Sol ধরি, খাতাটির ক্রয়মূল্য = x টাকা

∴ ৩৬ টাকায় বিক্রয় করলে ক্ষতি হয় = x − ৩৬ টাকা

আবার, ৭২ টাকায় বিক্রয় করলে লাভ হয় = (৭২ − x) টাকা

প্রশ্নমতে, $৭২ - x = ২(x - ৩৬)$

$\Rightarrow ৭২ - x = ২x - ৭২$

$\Rightarrow ২x + x = ৭২ + ৭২$

$\Rightarrow ৩x = ১৪৪$

$\Rightarrow x = \frac{১৪৪}{৩}$

$\Rightarrow x = ৪৮$

∴ ক্রয়মূল্য ৪৮ টাকা। **(উত্তর)**

12. প্রতি ডজন কলা 24 টাকায় ক্রয় করে প্রতি কুড়ি কি দরে বিক্রয় করলে 25% লাভ হবে? [১৫তম বিসিএস]

Sol এক ডজন বা 12 টি কলার ক্রয় মূল্য = 24 টাকা

∴ 1 " " " " $= \frac{24}{12}$ টাকা

∴ 20 " " " " $= \frac{24 \times 20}{12}$ টাকা

$= 40$ টাকা

25% লাভে বিক্রয় মূল্য (100 + 25) = 125

ক্রয়মূল্য,

100 টাকা হলে বিক্রয় মূল্য = 125 টাকা

∴ 1 " " " " $= \frac{125}{100}$ টাকা

∴ 40 " " " " $= \frac{125 \times 40}{100}$

$= 50$ টাকা

উত্তর: 50 টাকা

13. একজন মিষ্টি প্রস্তুতকারক y টাকা কিলোগ্রাম দরের x কিলোগ্রাম ছানার সাথে z টাকা কিলোগ্রাম দরের w কিলোগ্রাম চিনি মিশ্রিত করলেন। এবার কত টাকা মূল্যে প্রতি কিলোগ্রাম ছানা বিক্রি করলে প্রতি 200 (দুইশত) গ্রামে 2 টাকা 50 পয়সা করে লাভ করতে পারবেন। [১৮তম বিসিএস]

Sol y টাকা কেজি ছানার দরে x কেজির মূল্য xy টাকা

এবং z টাকা কেজি চিনির দরে w কেজির মূল্য wz টাকা।

মোট (x + w) কেজি চিনি মিশ্রিত ছানার মোট মূল্য = (xy + wz) টাকা

∴ " 1 " " " " " " $= \frac{xy + wz}{x + w}$ "

প্রতি 200 গ্রাম ছানায় লাভ হবে 2 টাকা 50 পয়সা

অথবা, প্রতি কেজিতে লাভ হবে $= \frac{2.50 \times 1000 \text{ gm}}{200 \text{ gm}} = 12.50$ টাকা

∴ প্রতি কেজি ছানা বিক্রি করতে হবে $= \left(\frac{xy + wz}{x + w} + 12.50\right)$

$= \frac{xy + wz}{x + w} + \frac{1250}{100}$

$= \frac{xy + wz}{x + w} + \frac{25}{2}$

$= \frac{2(xy + wz) + 25(x + w)}{2(x + w)}$

উত্তর: $\frac{2(xy + wz) + 25(x + w)}{2(x + w)}$

04. একটি কলম 11 টাকায় বিক্রয় করলে 10% লাভ হয়। কলমটির ক্রয়মূল্য কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-২৪)]

Sol" 10% লাভে বিক্রয় মূল্য $(100 + 10) = 110$

বিক্রয় মূল্য,

110 টাকা হলে ক্রয় মূল্য = 100 টাকা

∴ 1 " " " " $= \frac{100}{110}$ টাকা

∴ 11 " " " " $= \frac{100 \times 11}{110} = 10$ টাকা

উত্তর: 10 টাকা

বিকল্প সমাধান :

মনে করি, কলমটির ক্রয়মূল্য x টাকা

∴ 10% লাভে কলমটির বিক্রয়মূল্য $= x + x$ এর 10%

$= \left(x + x \times \frac{10}{100}\right)$

$= \left(x + \frac{10x}{100}\right)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $x + \frac{10x}{100} = 11$

$\Rightarrow x\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 11$

$\Rightarrow x\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$

$\Rightarrow x \times \frac{11}{10} = 11$

$\Rightarrow 11x = 110$

$\Rightarrow x = \frac{110}{11}$

$\therefore x = 10$

∴ কলমটির ক্রয়মূল্য 10 টাকা।

৫. ১ টাকায় ৩টি এবং ১ টাকায় ৫টি দরে সমান সংখ্যক আমলকি ক্রয় করে এক ব্যক্তি ১ টাকায় ৪টি করে বিক্রি করলেন। ঐ ব্যক্তির শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হলো তা নির্ণয় করুন।

Sol ৩টি আমলকির ক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১}{৩}$ "

আবার, ৫ টি আমলকির ক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১}{৫}$ "

১+১ = ২ টি আমলকির ক্রয়মূল্য $= \frac{১}{৩} + \frac{১}{৫} = \frac{৮}{১৫}$ টাকা

৪ টি আমলকির বিক্রয়মূল্য ১ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১}{৪}$ "

$\therefore$ ২ " " " $\frac{২}{৪} = \frac{১}{২}$ টাকা

$\therefore$ ক্ষতি $= \frac{৮}{১৫} - \frac{১}{২} = \frac{১}{৩০}$ টাকা

$\frac{৮}{১৫}$ টাকায় ক্ষতি হয় $\frac{১}{৩০}$ টাকা

$\therefore$ ১ " " " $\frac{১৫}{৩০ \times ৮}$ টাকা

$\therefore$ ১০০ " " " $\frac{১৫ \times ১০০}{৩০ \times ৮}$ টাকা

$= ৬.২৫$ টাকা

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষতি = ৬.২৫%।

৬. একটি দ্রব্য ৫০০ টাকায় ক্রয় করে ১০% লাভে বিক্রয় করা হলো। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য ১০% কম হলে কত লাভ হতো?

Sol ১০% লাভে বিক্রয়মূল্য $= ৫০০ + ৫০০ \times \frac{১০}{১০০} = ৫৫০$ টাকা

ক্রয়মূল্য ১০% কম হলে, ক্রয়মূল্য $= ৫০০ - ৫০০ \times \frac{১০}{১০০} = ৪৫০$ টাকা

$\therefore$ লাভ হতো = (৫৫০ − ৪৫০) টাকা = ১০০ টাকা

৭. সোহেল একটি ঘড়ি ৬১২ টাকায় বিক্রয় করায় ১৫% ক্ষতি হলো। তার উদ্দেশ্য ছিল ১০% লাভে ঘড়িটি বিক্রয় করা। ২০% লাভ করতে হলে ঘড়িটির বিক্রয়মূল্য কত বাড়াতে হতো?

Sol ধরি, ঘড়িটির ক্রয়মূল্য x টাকা

$\therefore$ ১৫% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = x − x এর $\frac{১৫}{১০০}$

$\therefore$ শর্তমতে, x − x এর $\frac{১৫}{১০০} = ৬১২ \Rightarrow \frac{৮৫x}{১০০} = ৬১২ \Rightarrow x = \frac{৬১২ \times ১০০}{৮৫}$ $\therefore x = ৭২০$

$\therefore$ ২০% লাভে বিক্রয়মূল্য $= \left(৭২০ + ৭২০ \text{ এর } \frac{২০}{১০০}\right)$ টাকা = ৮৬৪ টাকা

$\therefore$ ক্রয়মূল্য থেকে বাড়াতে হবে = (৮৬৪ − ৭২০) টাকা = ১৪৪ টাকা

08. মিষ্টির উপর মূল্য সংযোজন কর (VAT) x% । একজন বিক্রেতা ভ্যাটসহ P টাকার মিষ্টি বিক্রয় করলে তাকে কত ভ্যাট দিতে হবে? x = 15, P = 2300 হলে, ভ্যাটের পরিমাণ কত?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-৩২)]

Sol" আমরা জানি, $S = C(1 + r)$

x% ভ্যাটসহ বিক্রয়মূল্য, $C\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{C(100 + x)}{100}$

প্রশ্নমতে, $\frac{C(100 + x)}{100} = P$

$\Rightarrow C(100 + x) = 100P$

$\therefore C = \frac{100\,P}{100 + x}$

$\therefore$ ভ্যাটের পরিমাণ $= P - C$ টাকা

$$= P - \frac{100\,P}{100 + x} = \frac{100P + Px - 100P}{100 + x} = \frac{Px}{100 + x}$$

দেওয়া আছে, $x = 15$ এবং $P = 2300$

সুতরাং ভ্যাটের পরিমাণ $= \frac{2300 \times 15}{100 + 15} = \frac{2300 \times 15}{115} = 300$ টাকা

সুতরাং ভ্যাট দিতে হবে $\frac{Px}{100 + x}$ টাকা এবং ভ্যাটের পরিমাণ 300 টাকা।

09. একটি বইয়ের মূল্য 24 টাকা। এই মূল্য বই তৈরির ব্যয়ের 80%। বাকি মূল্য সরকার ভর্তুকি দিয়ে থাকেন। সরকার প্রতি বইয়ে কত টাকা ভর্তুকি দেন?

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (উদাহরণের অংক নং-৩৮)]

Sol" বাজার মূল্য = বই তৈরির ব্যয়ের 80%

ধরি, বই তৈরির ব্যয় x টাকা

এখানে, $p = 24$ টাকা এবং $r = 80\% = \frac{80}{100}$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $24 = x$ এর 80%

$\therefore 24 = x \times \frac{80}{100}$ বা, $x = \frac{24 \times 100}{80}$ $\therefore x = 30$ টাকা

সুতরাং বই তৈরির ব্যয় 30 টাকা।

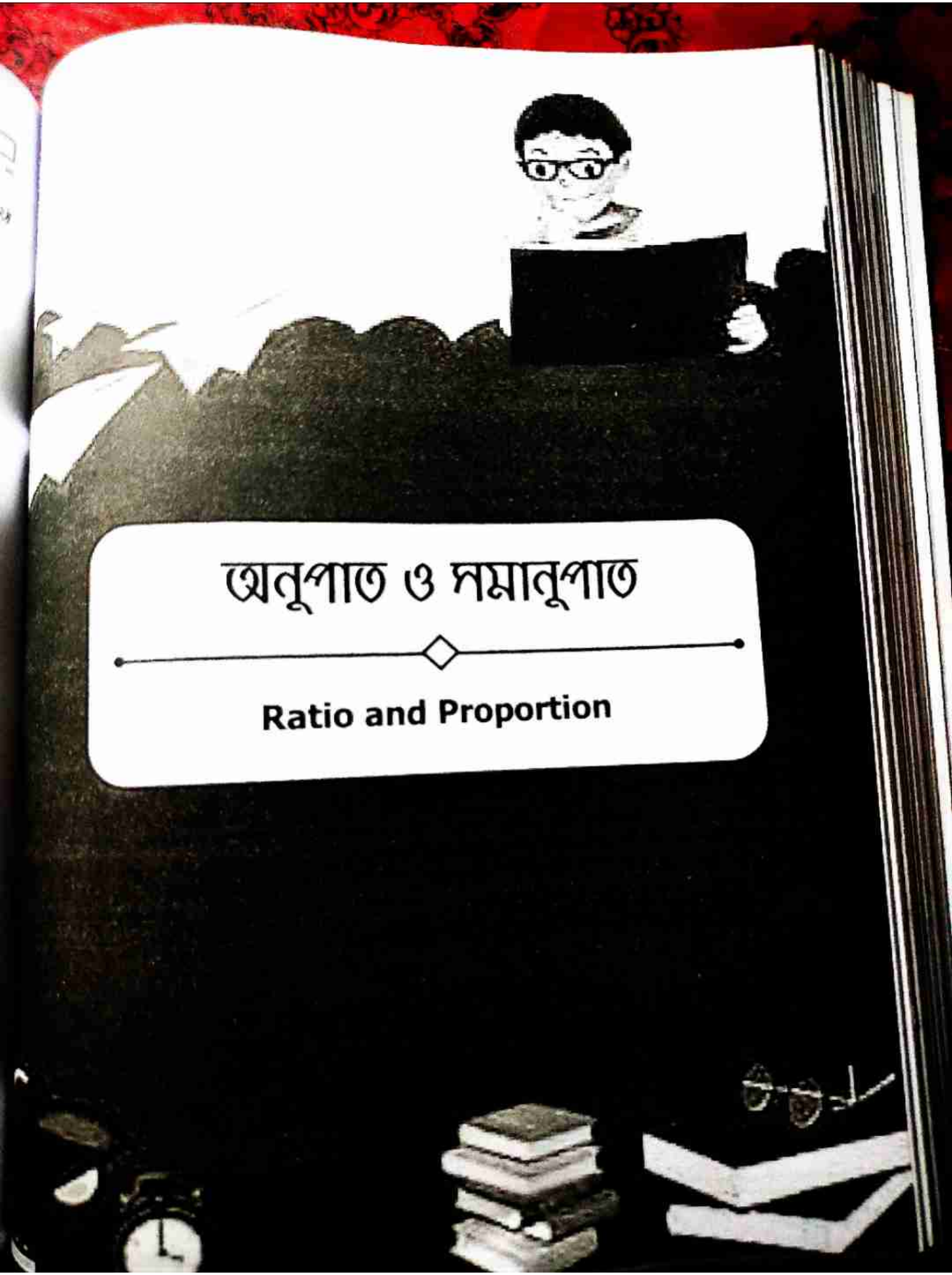
$\therefore$ ভর্তুকি $= (30 - 24)$ টাকা $= 6$ টাকা

সুতরাং সরকার প্রতি বইয়ে 6 টাকা ভর্তুকি দেন।

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.	Type	Question No.
Type-01	01, 04, 05, 06	Type-09	01, 04, 05, 07
Type-02	01	Type-10	01, 02, 05
Type-03	02	Type-11	01, 04, 06
Type-04	03, 04	Type-12	01
Type-05	02, 04	Type-13	03
Type-06	01, 02	Type-14	02, 03
Type-07	01, 02, 05	Type-15	01, 05, 07
Type-08	01, 03		



অনুপাত ও সমানুপাত

Ratio and Proportion

দ্বিগুণানপাত (Duplicate ratio): কোন সরল অনুপাতের পূর্ব রাশির বর্গকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির বর্গকে উত্তর রাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতের দ্বিগুণানুপাতিক বলা হয়। যেমন- $3 : 2$ এর দ্বিগুণানুপাত $3^2 : 2^2 = 9 : 4$।

দ্বিভাজিত অনুপাত (Sub-duplicate ratio): কোন সরল অনুপাতের পূর্ব রাশির বর্গমূলকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির বর্গমূলকে উত্তর রাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতের দ্বিভাজিত অনুপাত বলা হয়। যেমন- $16 : 9$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত $\sqrt{16} : \sqrt{9} = 4 : 3$

ধারাবাহিক অনুপাত (Successive ratio): দুইটি অনুপাত $x : y$ এবং $y : z$ হলে, তাদের সাধারণত $x : y : z$ আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়।

সমানুপাত (Proportion): ৪টি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত এবং তৃতীয় ও চতুর্থটির অনুপাত পরস্পর সমান হলে, ঐ চারটি রাশি একটি সমানুপাত উৎপন্ন করে। যেমন- ৫ টাকা, ১৫ টাকা, ৬ কি.মি. এবং ১৮ কি.মি. রাশি চারটি একটি সমানুপাত তৈরি করে। কেননা, প্রথম দুইটি রাশির অনুপাত $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ এবং দ্বিতীয় দুইটি রাশির অনুপাত $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$। এই সমানুপাতকে $5 : 15 = 6 : 18$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

- ☑ সমানুপাতের চারটি রাশিকে সমানুপাতী বলা হয়।
- ☑ সমানুপাতের চতুর্থ রাশিকে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির চতুর্থ সমানুপাতী বলে।
- ☑ সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে প্রান্তীয় রাশি বলে।
- ☑ সমানুপাতের দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে মধ্য রাশি বলে।
- ☑ সমানুপাতের ১ম রাশি × ৪র্থ রাশি = ২য় রাশি × ৩য় রাশি।
- ☑ সমানুপাতে চারটি রাশি এক জাতীয় হওয়ার দরকার নেই। প্রত্যেক অনুপাতের রাশি দুইটি একজাতীয় হলেই চলবে।

ক্রমিক সমানুপাত (Continued proportion): তিনটি প্রদত্ত রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির অনুপাত পরস্পর সমান হলে, সমানুপাতটিকে ক্রমিক সমানুপাত বলে। যেমন- মনে করি, তিনটি রাশি যথাক্রমে ৪ কেজি, ৮ কেজি ও ১৬ কেজি। এ রাশিগুলো দ্বারা দুইটি অনুপাত ৪ : ৮ এবং ৮ : ১৬ গঠন করা যায়। এখানে, ৪ : ৮ = ৮ : ১৬। এরকমের সমানুপাতকে ক্রমিক সমানুপাত বলে।

- ☑ ক্রমিক সমানুপাতের, প্রথম রাশি × তৃতীয় রাশি = (দ্বিতীয় রাশি)^2।
- ☑ ক্রমিক সমানুপাতের দ্বিতীয় রাশিটিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির মধ্য সমানুপাতী বা মধ্য রাশি বলা হয়।
- ☑ ক্রমিক সমানুপাতের তিনটি রাশিই এক জাতীয়।

মিশ্রণ (Mixture)

একাধিক জিনিস মিশিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা হয়। যে জিনিসগুলো দিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা হয়, তাদেরকে মিশ্রণের উপাদান বলে। যে কোনো আনুপাতিক হারে উপাদান মিশিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা যেতে পারে। যেমন- ১০ লিটার দুধের সাথে ৪ লিটার পানি মিশিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা যায়। এই মিশ্রণে দুধ ও পানির অনুপাত = ১০ লিটার : ৪ লিটার = ১০ : ৪ = ৫ : ২।

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: মিশ্রণ সংক্রান্ত সমস্যা

01. ৪০ কিলোগ্রাম দ্রবণে পানি এবং চিনির অনুপাত ৮ : ১। ঐ দ্রবণে কি পরিমাণ চিনি মিশ্রিত করলে পানি ও চিনির অনুপাত ৮০ : ১৯ হবে?

Sol" পানি এবং চিনির অনুপাত = ৮ : ১ [২৯তম বিসিএস]

অনুপাতদ্বয়ের যোগফল = ৮ + ১ = ৯

∴ পানির পরিমাণ = $\left(৪০ \text{ এর } \frac{৮}{৯}\right)$ কিলোগ্রাম = $\frac{৩২০}{৯}$ কিলোগ্রাম

∴ চিনির পরিমাণ = $\left(৪০ \text{ এর } \frac{১}{৯}\right)$ কিলোগ্রাম = $\frac{৪০}{৯}$ কিলোগ্রাম

ধরি, x কিলোগ্রাম চিনি মিশাতে হবে

প্রশ্নমতে, $\frac{৩২০}{৯} : \left(x + \frac{৪০}{৯}\right) = ৮০ : ১৯$

$\therefore \Rightarrow \frac{৩২০}{৯x + ৪০} = \frac{৮০}{১৯}$

$\Rightarrow \frac{৪}{৯x + ৪০} = \frac{১}{১৯} \Rightarrow ৯x + ৪০ = ৭৬ \Rightarrow ৯x = ৩৬$

$\therefore x = ৪$

উত্তর: ৪ কিলোগ্রাম চিনি মিশাতে হবে।

02. 40 লিটার মিশ্রণে সিরাপ এবং পানির অনুপাত 5 : 3। ঐ মিশ্রণে কি পরিমাণ পানি মিশ্রিত করলে সিরাপ ও পানির অনুপাত 3 : 5 হবে?

[১৭তম বিসিএস]

Sol" সিরাপ : পানি = 5 : 3

অনুপাতদ্বয়ের যোগফল = 8

40 লিটার মিশ্রণে সিরাপের পরিমাণ 40 এর $\frac{5}{8} = 25$ লিটার

40 " " পানির " 40 " $\frac{3}{8} = 15$ লিটার

ধরা যাক, ঐ মিশ্রণে x লিটার পানি মিশ্রিত করলে সিরাপ ও পানির অনুপাত 3 : 5 হবে।

তাহলে, মোট পানি হবে (15 + x) লিটার

প্রশ্নমতে, 25: (15 + x) = 3 : 5

$\Rightarrow \frac{25}{15 + x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 45 + 3x = 125 \Rightarrow 3x = 80$

$\Rightarrow x = \frac{80}{3} \Rightarrow 26\frac{2}{3}$ লিটার

উত্তর: $26\frac{2}{3}$ লিটার

03. ৩০ লিটার পরিমাণ মিশ্রণে এসিড ও পানির অনুপাত ৭ ঃ ৩। ঐ মিশ্রণে কি পরিমাণ পানি মিশ্রিত করলে এসিড ও পানির অনুপাত ৩ ঃ ৭ হবে?

Sol" এসিড ঃ পানি = ৭ ঃ ৩

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = (৭ + ৩) = ১০

∴ এসিডের পরিমাণ = ৩০ এর $\frac{৭}{১০} = ২১$ লিটার

এবং পানির " = ৩০ এর $\frac{৩}{১০} = ৯$ লিটার

ধরি, নতুন মিশ্রণে x লিটার পানি মিশাতে হবে।

প্রশ্নমতে, ২১ : ৯ + x = ৩ : ৭

বা, $\frac{২১}{৯ + x} = \frac{৩}{৭}$ বা, ২৭ + ৩x = ১৪৭ বা, ৩x = ১৪৭ − ২৭ বা, $x = \frac{১২০}{৩}$

∴ x = ৪০

উত্তর : ৪০ লিটার।

04. একটি সোনার গয়নার ওজন ১৬ গ্রাম। এতে সোনার পরিমাণ ঃ তামার পরিমাণ = ৩ঃ১। এতে আর কি পরিমাণ সোনা মেশালে অনুপাত ৪ঃ১ হইবে?

Sol" সোনার অনুপাত : তামার অনুপাত = ৩ : ১

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = ৩ + ১ = ৪

∴ সোনার পরিমাণ = ১৬ এর $\frac{৩}{৪}$ = ১২ গ্রাম

এবং তামার পরিমাণ = ১৬ এর $\frac{১}{৪}$ = ৪ গ্রাম

ধরি, নতুন মিশ্রণে x গ্রাম সোনা মিশাতে হবে।

∴ প্রশ্নমতে, $\frac{১২ + x}{৪} = \frac{৪}{১}$ বা, ১২ + x = ১৬ বা, x = ১৬ − ১২ = ৪

∴ x = ৪

উত্তর : ৪ গ্রাম।

TYPE 02: নির্দিষ্ট অনুপাতে সম্পদ ভাগজনিত সমস্যা

01. কোন একজন মহিলার 24075 টাকা ছিল। তিনি নিজের জন্য 675 টাকা রেখে অবশিষ্ট টাকা স্বামী, মা এবং কন্যাদ্বয়ের মধ্যে $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$ অনুপাতে ভাগ করে দিলেন। প্রত্যেক কন্যা কত পেল?

[২৯তম বিসিএস]

Sol" মহিলার অবশিষ্ট টাকা = (24075 − 675) টাকা = 23,400 টাকা

স্বামী : মা : কন্যাদ্বয় = $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3+2+8}{12} = \frac{13}{12}$

∴ কন্যাদ্বয় পায় = 23,400 এর $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{13}{12}}$ = 23,400 এর $\frac{2}{3} \times \frac{12}{13}$

= 23,400 এর $\frac{8}{13}$ = 14,400 টাকা।

∴ প্রত্যেক কন্যা পায় = 14,400 ÷ 2 = 7,200 টাকা।

উত্তর: 7200 টাকা

02. কিছু টাকা ক, খ এবং গ-এর মধ্যে এমনভাবে ভাগ করে দেওয়া হলো যেন, ক, খ-এর চাইতে 3.5 গুণ পায়; খ, গ-এর চাইতে 4 গুণ পায় এবং খ, ক অপেক্ষা 503 টাকা কম পায়। মোট কত টাকা ভাগ করে দেওয়া হয়েছিল?

[১৮তম বিসিএস]

Sol" মনে করি,

গ পায় x টাকা

∴ খ " 4x "

∴ ক পায় = 4x × 3.5 = 14x টাকা

প্রশ্নমতে, 14x − 4x = 503 ⇒ 10x = 503 ∴ x = 50.3

∴ মোট টাকা = x + 4x + 14x = 19x = 19 ×50.3 = 955.70 টাকা

উত্তর: 955.70 টাকা।

১২৬০ টাকা ক, খ ও গ- এর মধ্যে এভাবে ভাগ করে দিন যেন ক-এর টাকা হতে ১০ টাকা, খ-এর টাকা হতে ২০ টাকা, গ-এর টাকা হতে ৩০ টাকা কমানো হলে তাদের অবশিষ্ট টাকার অনুপাত ৩ ঃ ৪ ঃ ৫ হয়।

Sol ক এর টাকা হতে ১০ টাকা
খ " " " ২০ "
গ " " " ৩০ "

ক, খ ও গ এর টাকা হতে মোট ৬০ টাকা কমানো হলো।
অবশিষ্ট টাকা = (১২৬০ − ৬০) টাকা = ১২০০ টাকা
ক, খ ও গ এর অবশিষ্ট টাকার অনুপাত = ৩ : ৪ : ৫
অনুপাতদ্বয়ের যোগফল = ৩ + ৪ + ৫ = ১২

∴ ক এর অবশিষ্ট টাকা = $১২০০ \times \frac{৩}{১২} = ৩০০$ টাকা

∴ খ " " " = $১২০০ \times \frac{৪}{১২} = ৪০০$ "

∴ গ " " " = $১২০০ \times \frac{৫}{১২} = ৫০০$ "

ক পায় মোট ৩০০ + ১০ = ৩১০ টাকা
খ " " ৪০০ + ২০ = ৪২০ "
গ " " ৫০০ + ৩০ = ৫৩০ "

উত্তর : ৩১০ টাকা, ৪২০ টাকা, ৫৩০ টাকা।

এক ব্যক্তি ৬৪০০ টাকা ৩ কন্যা ৪ পুত্র ও ৩ ভাইপোর মধ্যে এমনভাবে ভাগ করে দিলেন যেন প্রত্যেক কন্যা ভাইপোর ৩ গুণ এবং প্রত্যেক পুত্র প্রত্যেক কন্যার $\frac{৫}{৩}$ গুণ পায়। প্রত্যেক ভাইপো কত পেল?

Sol ধরি, প্রত্যেক ভাইপো পায় x টাকা
∴ " কন্যা " x × ৩ টাকা বা ৩x টাকা
এবং " পুত্র " ৩x এর $\frac{৫}{৩}$ টাকা বা ৫x টাকা

প্রশ্নমতে, ৩ × x + ৩x × ৩ + ৫x × ৪ = ৬৪০০
বা, ৩x + ৯x + ২০x = ৬৪০০ বা, ৩২x = ৬৪০০ বা, $x = \frac{৬৪০০}{৩২}$ ∴ x = ২০০

∴ প্রত্যেক ভাইপো পেল ২০০ টাকা। **(উত্তর)**

ক, খ, গ ও ঘ এর মধ্যে ১৮১০০ টাকা এভাবে ভাগ করে দিন যেন ক-এর অংশ খ-এর অংশের $\frac{৪}{৫}$, গ-এর অংশ ক-এর অংশের $\frac{৮}{৯}$ এবং ঘ-এর অংশ ক ও গ-এর অংশের সমান হয়।

Sol ক এর অংশ = খ এর অংশের $\frac{৪}{৫}$

∴ খ এর অংশ = ক এর অংশের $\frac{৫}{৪}$

আবার, গ এর অংশ = ক এর অংশের $\frac{৮}{৯}$;

সুতরাং ঘ এর অংশ = ক এর অংশ + গ এর অংশ।

= ক এর অংশ + ক এর অংশের $\frac{৮}{৯}$ = ক এর অংশের $\left(১ + \frac{৮}{৯}\right)$ = ক এর অংশের $\frac{১৭}{৯}$।

অতএব, ক এর অংশ ঃ খ এর অংশ ঃ গ এর অংশ ঃ ঘ এর অংশ

$= ১ ঃ \frac{৫}{৪} ঃ \frac{৮}{৯} ঃ \frac{১৭}{৯} = ১ \times ৩৬ ঃ \frac{৫}{৪} \times ৩৬ ঃ \frac{৮}{৯} \times ৩৬ ঃ \frac{১৭}{৯} \times ৩৬$ = ৩৬ ঃ ৪৫ ঃ ৩২ ঃ ৬৮

এখন, অনুপাতগুলোর যোগফল = ৩৬ + ৪৫ + ৩২ + ৬৮ = ১৮১

সুতরাং ক-এর অংশ = ১৮১০০ টাকার $\frac{৩৬}{১৮১}$ = ৩৬০০ টাকা

খ এর অংশ = ১৮১০০ টাকার $\frac{৪৫}{১৮১}$ = ৪৫০০ টাকা

গ এর অংশ = ১৮১০০ টাকার $\frac{৩২}{১৮১}$ = ৩২০০ টাকা

ঘ এর অংশ = ১৮১০০ টাকার $\frac{৬৮}{১৮১}$ = ৬৮০০ টাকা

উত্তর : ক-এর অংশ ৩৬০০ টাকা, খ-এর ৪৫০০ টাকা, গ এর অংশ ৩২০০ টাকা, ঘ এর অংশ ৬৮০০ টাকা

06. ক, খ ও গ এর মধ্যে ২৬০ টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশের ২ গুণ, খ এর অংশের ৩ গুণ এবং গ এর অংশের ৪ গুণ পরস্পর সমান হয়।

Sol" মনে করি, ক এর অংশের ২ গুণ = খ এর অংশের ৩ গুণ = গ এর অংশের ৪ গুণ = x টাকা।

∴ ক এর অংশ = $\frac{x}{২}$ টাকা; খ এর অংশ = $\frac{x}{৩}$ টাকা; গ এর অংশ = $\frac{x}{৪}$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{২}+\frac{x}{৩}+\frac{x}{৪}$ = ২৬০ বা, $\frac{৬x+৪x+৩x}{১২}$ = ২৬০ বা, $\frac{১৩x}{১২}$ = ২৬০

বা, ১৩x = ২৬০ × ১২ বা, x = $\frac{২৬০ \times ১২}{১৩}$ বা, x = ২৪০

∴ ক এর অংশ = $\frac{২৪০}{২}$ টাকা = ১২০ টাকা; খ এর অংশ = $\frac{২৪০}{৩}$ টাকা = ৮০ টাকা

গ এর অংশ = $\frac{২৪০}{৪}$ টাকা = ৬০ টাকা

∴ ক, খ ও গ পাবে যথাক্রমে ১২০ টাকা, ৮০ টাকা ও ৬০ টাকা। (Ans.)

07. ক, খ ও গ ৭০০০ টাকা দিয়ে কারবার শুরু করল। এতে গ-এর যত টাকা আছে, খ-এর তার থেকে ৩০০ টাকা বেশি আছে এবং ক-এর খ অপেক্ষা ৪০০ টাকা বেশি আছে। ঐ কারবারে ৫২৫ টাকা লাভ হলে লাভের অংশ কে কত পাবে?

Sol" মনে করি, গ এর আছে = ম টাকা

∴ খ এর আছে = ম + ৩০০ টাকা

∴ ক এর আছে = (ম + ৩০০) + ৪০০ = ম + ৭০০

প্রশ্নমতে, ম + ম + ৩০০ + ম + ৭০০ = ৭০০০ বা, ৩ম + ১০০০ = ৭০০০ বা, ৩ম = ৬০০০ ∴ ম = ২০০০

সুতরাং গ-এর টাকা = ২০০০ টাকা ; খ-এর টাকা = ২০০০ + ৩০০ = ২৩০০ টাকা

ক-এর টাকা = ২০০০ + ৭০০ = ২৭০০ টাকা

ক, খ, গ-এর মূলধনের অনুপাত = ২৭০০ : ২৩০০ : ২০০০ = ২৭ : ২৩ : ২০

এখান, ২৭ + ২৩ + ২০ = ৭০

ক-এর লভ্যাংশ = ৫২৫ টাকার $\frac{২৭}{৭০}$ = ২০২.৫০ টাকা

খ-এর লভ্যাংশ = ৫২৫ টাকার $\frac{২৩}{৭০}$ = ১৭২.৫০ টাকা

গ-এর লভ্যাংশ = ৫২৫ টাকার $\frac{২০}{৭০}$ = ১৫০.০০ টাকা

উত্তর: ক ২০২.৫০ টাকা, খ ১৭২.৫০ টাকা, গ ১৫০.০০ টাকা।

৯৩৬ টাকা ১৫ জন পুরুষ, ১৩ জন স্ত্রীলোক এবং ১২ জন বালকের মধ্যে এভাবে ভাগ করে দিন যেন প্রত্যেক স্ত্রীলোক ৩ জন বালকের সমান পায় এবং প্রত্যেক পুরুষ ২ জন স্ত্রীলোক ও ১ জন বালকের সমান পায়। প্রত্যেক পুরুষ কত পায়?

Sol" ১ জন স্ত্রীলোক ≡ ৩ জন বালক ..... (১)

১৩ জন স্ত্রীলোক ≡ ১৩ × ৩ জন বালক = ৩৯ জন বালক

∴ ১ জন পুরুষ ≡ ২ জন স্ত্রীলোক + ১ জন বালক

≡ ৬ জন বালক + ১ জন বালক (১ নং হতে)

≡ ৭ জন বালক

∴ ১৫ জন পুরুষ ≡ ১৫ × ৭ জন বালক = ১০৫ জন বালক

সুতরাং, ১৫ জন পুরুষ : ১৩ জন স্ত্রীলোক : ১২ জন বালক = ১০৫ জন বালক : ৩৯ জন বালক : ১২ জন বালক

= ১০৫ : ৩৯ : ১২ = ৩৫ : ১৩ : ৪

এখানে, ৩৫ + ১৩ + ৪ = ৫২

∴ ১৫ জন পুরুষ বা, ৩৫ জন বালক পায় = ৯৩৬ টাকার $\frac{৩৫}{৫২}$ = ৬৩০ টাকা

সুতরাং, একজন পুরুষ পায় = $\frac{৬৩০}{১৫}$ টাকা = ৪২ টাকা (উত্তর)

TYPE 03: যৌথ কারবার থেকে লভ্যাংশ নির্ণয়-১

১. একটি যৌথ কারবারে ক ও খ এর মূলধনের অনুপাত ১৫ : ১৭। ব্যবস্থাপনা অংশীদার বলে লাভের $\frac{১}{২০}$ অংশ খ এর প্রাপ্য। লাভের বাকী টাকা মূলধনের সমানুপাতে ভাগ হয়। কারবারে ৬০৮০০ টাকা নীট লাভ হলে খ কত টাকা লাভ পাবে? [২১তম বিসিএস]

Sol" ব্যবস্থাপনা অংশীদার হিসাবে খ-এর প্রাপ্য = ৬০৮০০ টাকার $\frac{১}{২০}$ = ৩০৪০ টাকা

বাকী লভ্যাংশ (৬০৮০০ − ৩০৪০) টাকা = ৫৭৭৬০ টাকা

ক ও খ এর মূলধনের অনুপাত = ১৫ : ১৭

অনুপাতের যোগফল = (১৫ + ১৭) = ৩২

সুতরাং, খ-এর লভ্যাংশ = ৫৭৭৬০ টাকার × $\frac{১৭}{৩২}$ = ৩০৬৮৫ টাকা

∴ খ-এর মোট প্রাপ্য = (৩০৬৮৫ + ৩০৪০) টাকা = ৩৩৭২৫ টাকা।

উত্তর: ৩৩৭২৫ টাকা।

২. যৌথ কারবারের ক, খ ও গ এর মূলধনের অনুপাত $\frac{১}{৩} : \frac{১}{৪} : \frac{১}{৫}$। বছর শেষে দেখা গেল ক, খ অপেক্ষা ৫০০ টাকা বেশি লাভ পেয়েছে। খ ও গ এর লাভের পরিমাণ নির্ধারণ করুন।

Sol" ক, খ ও গ এর মূলধনের অনুপাত = $\frac{১}{৩} : \frac{১}{৪} : \frac{১}{৫} = \frac{১\times৬০}{৩} : \frac{১\times৬০}{৪} : \frac{১\times৬০}{৫}$ = ২০ : ১৫ : ১২

এখন, অনুপাতগুলোর যোগফল = ২০ + ১৫ + ১২ = ৪৭

ক এর লভ্যাংশ = মোট লাভ এর $\frac{২০}{৪৭} = \frac{\text{মোট লাভ} \times ২০}{৪৭}$

খ এর লভ্যাংশ = মোট লাভ এর $\frac{১৫}{৪৭} = \frac{\text{মোট লাভ} \times ১৫}{৪৭}$

শর্তানুসারে, মোট লাভ $\times \left(\frac{২০}{৪৭} - \frac{১৫}{৪৭}\right) = ৫০০$ টাকা বা, মোট লাভ $\times \frac{৫}{৪৭} = ৫০০$ টাকা

অতএব, মোট লাভ $= \frac{৫০০ \times ৪৭}{৫} = ৪৭০০$ টাকা

খ এর লভ্যাংশ $= ৪৭০০$ টাকার $\frac{১৫}{৪৭} = ১৫০০$ টাকা

গ এর লভ্যাংশ $= ৪৭০০$ টাকার $\frac{১২}{৪৭} = ১২০০$ টাকা

উত্তর : খ পায় ১৫০০ টাকা, গ পায় ১২০০ টাকা।

03. ক, খ, গ ও ঘ একটি যৌথ কারবারের অংশীদার। ক, খ ও গ মোট মূলধনের যথাক্রমে $\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{১}{৫}$ অংশ দিয়েছে এবং বাকি অংশ ঘ দিয়েছে। কারবারে লাভ ৩৩০০ টাকা হলে কে কত টাকা পাবে?

Sol ঘ দেয় $= ১ - \left(\frac{১}{৩} + \frac{১}{৪} + \frac{১}{৫}\right) = \left(১ - \frac{৪৭}{৬০}\right) = \frac{৬০ - ৪৭}{৬০} = \frac{১৩}{৬০}$ অংশ

ক, খ, গ ও ঘ এর মূলধনের অংশের অনুপাত $= \frac{১}{৩} : \frac{১}{৪} : \frac{১}{৫} : \frac{১৩}{৬০}$

$= \frac{১ \times ৬০}{৩} : \frac{১ \times ৬০}{৪} : \frac{১ \times ৬০}{৫} : \frac{১৩ \times ৬০}{৬০} = ২০ : ১৫ : ১২ : ১৩$

$\therefore$ অনুপাতগুলোর যোগফল $= (২০ + ১৫ + ১২ + ১৩) = ৬০$

$\therefore$ ক-এর লভ্যাংশ $= ৩৩০০$ টাকার $\frac{২০}{৬০} = ১১০০$ টাকা

এবং খ " " $= ৩৩০০$ " $\frac{১৫}{৬০} = ৮২৫$ "

এবং গ " " $= ৩৩০০$ " $\frac{১২}{৬০} = ৬৬০$ "

এবং ঘ " " $= ৩৩০০$ " $\frac{১৩}{৬০} = ৭১৫$ "

অতএব, ক ১১০০ টাকা, খ ৮২৫, গ ৬৬০ টাকা ও ঘ ৭১৫ টাকা পায়।

04. ক, খ ও গ ৫৬০ টাকা নিয়ে কারবার শুরু করল। ক, খ এর চেয়ে ৯০ টাকা বেশি দিয়েছে এবং খ, গ এর চেয়ে ১৪০ টাকা কম দিয়েছে। কারবারে ১১২ টাকা লাভ হলে কে কত লাভ পাবে?

Sol ধরি, খ এর মূলধন $= x$ টাকা

$\therefore$ ক এর " $= (x + ৯০)$ "

এবং গ এর " $= (x + ১৪০)$ "

প্রশ্নমতে, $x + ৯০ + x + x + ১৪০ = ৫৬০$

বা, $৩x = ৫৬০ - ২৩০$ বা, $x = \frac{৩৩০}{৩}$

$\therefore x = ১১০$

$\therefore$ ক, খ ও গ এর মূলধনের অনুপাত $= (১১০ + ৯০) : ১১০ : (১১০ + ১৪০)$

$= ২০০ : ১১০ : ২৫০ = ২০ : ১১ : ২৫$

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = (২০ + ১১ + ২৫) = ৫৬

∴ ক এর লভ্যাংশ = ১১২ এর $\frac{২০}{৫৬}$ = ৪০ টাকা

খ " " = ১১২ এর $\frac{১১}{৫৬}$ = ২২ টাকা

গ " " = ১১২ এর $\frac{২৫}{৫৬}$ = ৫০ টাকা

উত্তর: ক ৪০ টাকা, খ ২২ টাকা এবং গ ৫০ টাকা পাবে।

TYPE 04: যৌথ কারবার থেকে লভ্যাংশ নির্ণয়-২

11. ক ও খ যথাক্রমে ৪,০০০ টাকা ও ৬,০০০ টাকা দিয়ে একত্রে কারবার শুরু করল। ৪ মাস পরে ক তার মূলধনের $\frac{১}{৪}$ অংশ উঠিয়ে নিয়ে গেল এবং খ আরও ৫০০ টাকা বিনিয়োগ করল। এর ২ মাস পরে গ ঐ কারবারে ১০,০০০ টাকা দিয়ে অংশীদার হলো। এর ৬ মাস পরে দেখা গেল তাদের কারবারে লাভ হয়েছে ২২০০০ টাকা। লাভের অংশ কে কত পাবে?

[২০তম, ১১তম বিসিএস]

Sol ক-এর ৪০০০ টাকা খাটে ৪ মাস

ক-এর $\left(৪০০০ - \frac{১}{৪} \times ৪০০০\right)$ বা, ৪০০০ − ১০০০

বা, ৩০০০ টাকা খাটে (১২ − ৪) মাস বা, ৮ মাস

∴ ক এর বার্ষিক সমতুল্য মূলধন = (৪০০০ × ৪ + ৩০০০ × ৮) টাকা
= ১৬০০০ + ২৪০০০ টাকা
= ৪০০০০ টাকা।

৪ মাস পরে খ-এর মূলধন = (৬০০০ + ৫০০) টাকা বা, ৬৫০০ টাকা

∴ খ-এর বার্ষিক সমতুল্য মূলধন = (৪ × ৬০০০ + ৮ × ৬৫০০) টাকা
= (২৪০০০ + ৫২০০০) টাকা
= ৭৬০০০ টাকা

গ-এর বার্ষিক সমতুল্য মূলধন = (৬ × ১০০০০) টাকা বা, ৬০০০০ টাকা

∴ ক, খ ও গ-এর মূলধনের অনুপাত = ৪০০০০ : ৭৬০০০ : ৬০০০০
= ৪০ : ৭৬ : ৬০
= ১০ : ১৯ : ১৫

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = ১০ + ১৯ + ১৫ = ৪৪

ক-এর লভ্যাংশ = ২২০০০ এর $\frac{১০}{৪৪}$ = ৫০০০ টাকা

খ-এর লভ্যাংশ = ২২০০০ এর $\frac{১৯}{৪৪}$ = ৯৫০০ টাকা

এবং গ-এর লভ্যাংশ = ২২০০০ এর $\frac{১৫}{৪৪}$ = ৭৫০০ টাকা

উত্তর: ক পায় ৫০০০ টাকা, খ পায় ৯৫০০ টাকা এবং গ পায় ৭৫০০ টাকা।

বিকল্প সমাধান:

Sol" ১ম ৪ মাস ক এর ৪০০০ টাকা খাটে অর্থাৎ ১৬০০০ টাকা ১ মাসে খাটে

১ম ৪ " খ " ৬০০০ " " " ২৪০০০ " ১ " "

৪ মাস পর ক এর মূলধন = ৪০০০ − ৪০০০ এর $\frac{১}{৪}$ = ৩০০০ টাকা

৪ " " খ " " = ৬০০০ + ৫০০ = ৬৫০০ টাকা

এবার ক এর ৩০০০ টাকা (১২ − ৪) বা ৮ মাস খাটে অর্থাৎ ২৪,০০০ টাকা ১ মাস খাটে

∴ খ এর ৬৫০০ টাকা (১২ − ৪) বা ৮ মাস খাটে অর্থাৎ ৫২,০০০ টাকা ১ মাস খাটে

ক এর মোট মূলধন = ১৬০০০ + ২৪০০০ = ৪০,০০০ টাকা

খ " " " = ২৪০০০ + ৫২০০০ = ৭৬০০০ টাকা

গ এর ১০০০০ টাকা (১২ − ৬) বা ৬ মাস খাটে = ৬০০০০ টাকা ১ মাস খাটে

∴ ক : খ : গ = ৪০০০০ : ৭৬০০০ : ৬০০০০ = ৪০ : ৭৬ : ৬০ = ১০ : ১৯ : ১৫

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = ১০ + ১৯ + ১৫ = ৪৪

ক এর লভ্যাংশ = ২২০০০ এর $\frac{১০}{৪৪}$ = ৫০০০ টাকা

খ " " = ২২০০০ এর $\frac{১৯}{৪৪}$ = ৯৫০০ টাকা

গ " " = ২২০০ এর $\frac{১৫}{৪৪}$ = ৭৫০০ টাকা

উত্তর : ক পায় ৫০০০ টাকা, খ পায় ৯৫০০ টাকা, গ পায় ৭৫০০ টাকা

02. যৌথ কারবারে ক ও খ এর মূলধনের অনুপাত 4 : 5। 3 মাস পরে ক ও খ যথাক্রমে তাদের মূলধনের $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{5}$ অংশ তুলে নিল। 10 মাস পরে লাভের 760 টাকা ভাগ করে দিলে কে কত পাবে? [১৫তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, প্রথম 3 মাসে 4 : 5 অনুপাতে ক ও খ মোট x টাকা লাভ পায়। 3 মাস পর ক ও খ তাদের মূলধন আংশিক তুলে নেয়ায় তাদের মূলধনের অনুপাত দাঁড়ায় যথাক্রমে- $\left(4-4 \text{ এর } \frac{1}{4}\right) : \left(5-5 \text{ এর } \frac{1}{5}\right) = (4-1) : (5-1) = 3 : 4$

প্রথম অনুপাতের যোগফল = 4 + 5 = 9

পরের অনুপাতের যোগফল = 3 + 4 = 7

যদি প্রথম 3 মাস মূলধন 9y হয় পরের 7 মাসে মূলধন 7y হবে।

9y এর 3 মাসের লাভ x টাকা

∴ 1 " 1 " " $\frac{x}{9y \times 3}$ টাকা

∴ 7y " 7 " " $\frac{x \times 7y \times 7}{9y \times 3} = \frac{49}{27}x$

শর্তানুসারে, $x + \frac{49}{27}x = 760$ টাকা

⇒ $76x = 760 \times 27$ টাকা ⇒ $x = \frac{760 \times 27}{76} = 270$ টাকা

∴ পরের 7 মাসের লাভ = 760 − 270 = 490 টাকা

∴ ক পাবে = 270 এর $\frac{4}{9}$ + 490 এর $\frac{3}{7}$ = 120 + 210 = 330 টাকা

∴ খ পাবে = 270 এর $\frac{5}{9}$ + 490 এর $\frac{4}{7}$ = 150 + 280 = 430 টাকা

উত্তর: ক = 330 টাকা এবং খ = 430 টাকা।

বিকল্প:
ধরি, ক ও খ এর মূলধন যথাক্রমে 4x ও 5x

3 মাস পর ক-এর মূলধন $= 4x - \frac{4x}{4} = 3x$

3 " " খ-এর " $= 5x - \frac{5x}{5} = 4x$

∴ ক-এর মাসিক সমতুল্য মূলধন $= 4x \times 3 + 3x \times 7 = 12x + 21x = 33x$

এবং খ-এর মাসিক সমতুল্য মূলধন $= 5x \times 3 + 4x \times 7 = 15x + 28x = 43x$

∴ ক-এর মূলধন : খ-এর মূলধন $= 33x : 43x = 33 : 43$

অনুপাতদ্বয়ের যোগফল $= 33 + 43 = 76$

∴ ক-এর লভ্যাংশ $= 760 \times \frac{33}{76} = 330$ টাকা

এবং খ-এর লভ্যাংশ $= 760 \times \frac{43}{76} = 430$ টাকা

উত্তর: ক $= 330$ টাকা এবং খ $= 430$ টাকা।

৫. যৌথ কারবারে ক, খ ও গ এর মূলধনের অনুপাত $\frac{১}{২} : \frac{১}{৩} : \frac{১}{৪}$। ৪ মাস পরে ক তার মূলধনের অর্ধেক তুলে নিল। আরও ৮ মাস পরে দেখা গেল মোট লাভ হয়েছে ২০২৪ টাকা। ক কত টাকা লাভ পেল?

Sol ক, খ ও গ -এর মূলধনের অনুপাত $= \frac{১}{২} : \frac{১}{৩} : \frac{১}{৪} = \frac{১\times১২}{২} : \frac{১\times১২}{৩} : \frac{১\times১২}{৪} = ৬ : ৪ : ৩$

ক ৪ মাস পরে অর্ধেক মূলধন তুলে নেয়। অতএব, ক-এর বাকি অর্ধেক মূলধন ৮ মাস খাটে অর্থাৎ পুরো মূলধন হিসেবে ৪ মাস খাটে।

∴ ক এর মূলধন খাটে = (৪ মাস + ৪ মাস) = ৮ মাস

সুতরাং, আমরা পাই, ক-এর মূলধন ৮ মাস, খ ও গ -এর মূলধন ১২ মাস খাটে।

সময়ের অনুপাত = ৮ মাস : ১২ মাস : ১২ মাস = ২ : ৩ : ৩

মূলধন ও সময়ের মিশ্র অনুপাত $= ৬ \times ২ : ৪ \times ৩ : ৩ \times ৩ = ১২ : ১২ : ৯$

$= ৪ : ৪ : ৩$

অনুপাতের সংখ্যাগুলির যোগফল $(৪ + ৪ + ৩) = ১১$

সুতরাং, ক-এর লভ্যাংশ = ২০২৪ টাকার $\frac{৪}{১১} = ৭৩৬$ টাকা

উত্তর : ৭৩৬ টাকা।

৬. ক ও খ যথাক্রমে ৩০০০ টাকা ও ৫০০০ টাকা নিয়ে কারবার শুরু করেন। এর ৬ মাস পর গ ৭৫০০ টাকা নিয়ে কারবারে যোগ দিল। বছর শেষে মোট ২০৫০ টাকা লাভ হলে কে কত টাকা লাভ পাবে?

Sol মূলধন বিনিয়োগ

ক -এর ৩০০০ টাকার ১২ মাস = ৩৬০০০ টাকার ১ মাস

খ এর ৫০০০ টাকার ১২ মাস = ৬০০০০ টাকার ১ মাস

গ এর ৭৫০০ টাকার ৬ মাস = ৪৫০০০ টাকার ১ মাস

সুতরাং, ক, খ, গ এর মাসিক সমতুল্য মূলধনের অনুপাত $= ৩৬০০০ : ৬০০০০ : ৪৫০০০ = ১২ : ২০ : ১৫$

এখন, অনুপাতগুলোর যোগফল $= (১২ + ২০ + ১৫) = ৪৭$

∴ ক-এর লভ্যাংশ ২৩৫০ টাকার $\frac{১২}{৪৭} = ৬০০$ টাকা

খ " " ২৩৫০ " $\frac{২০}{৪৭} = ১০০০$ "

গ " " ২৩৫০ " $\frac{১৫}{৪৭} = ৭৫০$ "

অতএব, ক পায় ৬০০ টাকা, খ পায় ১০০০ টাকা এবং গ পায় ৭৫০ টাকা।

05. ক ও খ একটি যৌথ কারবারের অংশীদার। মূলধনের $\frac{১}{৩}$ অংশ ক দিল এবং উহা ৯ মাসের জন্যে নিয়োজিত থাকল। খ লাভের $\frac{৩}{৫}$ অংশ পেল। খ-এর টাকা কত মাসে নিয়োজিত ছিল?

Sol মনে করি, মূলধন = ৩০০ টাকা

ক-এর মূলধন = $\left(৩০০ \text{ টাকার } \frac{১}{৩}\right)$ টাকা

= ১০০ টাকা যা ৯ মাস খাটে

অর্থাৎ ক-এর সমতূল্য মূলধন = ১০০ × ৯ = ৯০০ টাকা

খ-এর মূলধন $\left(৩০০ \text{ টাকার } \frac{২}{৩}\right)$ টাকা বা ২০০ টাকা

এখন, ২০০ টাকা যদি k মাস খাটে তবে খ-এর সমতূল্য মূলধন = ২০০ × k = ২০০k টাকা

ক-এর লভ্যাংশ = $\left(১ - \frac{৩}{৫}\right)$ অংশ বা, $\frac{২}{৫}$ অংশ

ক-এর লভ্যাংশের $\frac{২}{৫}$ অংশ হয় = ৯০০ টাকায়

ক-এর লভ্যাংশের ১ অংশ হয় = $\frac{৯০০ \times ৫}{২}$ (মোট মূলধন)

খ-এর লভ্যাংশের $\frac{৩}{৫}$ অংশ হয় = $\frac{৯০০ \times ৫ \times ৩}{২ \times ৫}$

= ১৩৫০ টাকা

শর্তানুসারে, ২০০k = ১৩৫০

অতএব, k = $\frac{১৩৫০}{২০০}$ মাস = $\frac{২৭}{৪} = ৬\frac{৩}{৪}$ মাস

খ-এর টাকা খাটে $৬\frac{৩}{৪}$ মাস **(উত্তর)**

বিকল্প সমাধান: মনে করি, মোট লভ্যাংশ = z টাকা

∴ খ এর লভ্যাংশ = $\frac{৩z}{৫}$

ক এর লভ্যাংশ = $z - \frac{৩z}{৫} = \frac{২z}{৫}$

∴ ক : খ = $\frac{২z}{৫} : \frac{৩z}{৫} = ২ : ৩$

মনে করি, মোট মূলধন x টাকা এবং B এর টাকা y মাস নিয়োজিত ছিল।

সুতরাং ক এর মূলধন = $\frac{x}{৩}$

খ এর মূলধন = $x - \frac{x}{৩} = \frac{২x}{৩}$

এখন, $\frac{x}{৩} \times ৯ : \frac{২x}{৩} \times y = ২ : ৩$

$\Rightarrow ৩x : \frac{২xy}{৩} = ২ : ৩$

$\Rightarrow ৯x : ২xy = ২ : ৩ \quad \Rightarrow \frac{৯}{২y} = \frac{২}{৩}$

$\Rightarrow ৪y = ২৭ \quad \Rightarrow y = \frac{২৭}{৪} = ৬\frac{৩}{৪}$ মাস

∴ খ-এর টাকা খাটে $৬\frac{৩}{৪}$ মাস **(উত্তর)**

06. যৌথ কারবারে ক ও খ এর মূলধনের অনুপাত ৫ : ৭। ৪ মাস পরে তাদের মূলধনের যথাক্রমে $\frac{২}{৩}$ এবং $\frac{৩}{৪}$ অংশ তুলে নিল। বছর শেষে ২২৬০ টাকা লাভ হলে ক কত লাভ পাবে?

Sol ক ও খ-এর মূলধনের অনুপাত = ৫ : ৭; মনে করি, ক-এর মূলধন ৫০০ টাকা এবং খ-এর মূলধন ৭০০ টাকা

এখন, ক এর প্রাথমিক মূলধন ৫০০ টাকা ৪ মাসের জন্য বিনিয়োগ করার পর ৫০০ এর $\frac{২}{৩}$ অংশ তুলে নেয়।

অর্থাৎ বছরের বাকি ৮ মাসের জন্য $\left(৫০০ \text{ এর } \frac{১}{৩}\right)$ টাকা বা $\frac{৫০০}{৩}$ টাকা বিনিয়োগ ছিল।

∴ ক এর সমতুল্য মূলধন = $(৫০০ \times ৪) + \left(\frac{৫০০}{৩} \times ৮\right) = ২০০০ + \frac{৪০০০}{৩} = \frac{১০০০০}{৩}$ টাকা

এখন, খ এর প্রাথমিক মূলধন ৭০০ টাকা ৪ মাসের জন্য বিনিয়োগ করার পর ৭০০ এর $\frac{৩}{৪}$ অংশ তুলে নেয়।

অর্থাৎ বছরের বাকি ৮ মাসের জন্য $\left(৭০০ \text{ এর } \frac{১}{৪}\right)$ টাকা বা $\frac{৭০০}{৪}$ টাকা বিনিয়োগ ছিল।

∴ খ এর সমতুল্য মূলধন = $(৭০০ \times ৪) + \left(\frac{৭০০}{৪} \times ৮\right) = ২৮০০ + ১৪০০ = ৪২০০$ টাকা

∴ ক এর মূলধন : খ এর মূলধন = $\frac{১০০০০}{৩} : ৪২০০ = ১০০০০ : ১২৬০০ = ৫০ : ৬৩$

অনুপাতদ্বয়ের যোগফল = ৫০ + ৬৩ = ১১৩ ∴ ক-এর লভ্যাংশ = ২২৬০ এর $\frac{৫০}{১১৩}$ = ১০০০ টাকা **(উত্তর)**

TYPE 05: পিতা পুত্রের বয়স সংক্রান্ত সমস্যা

01. পিতা এবং পুত্রের বয়সের সমষ্টি ৭৪ বৎসর এবং তাদের বয়সের অনুপাত ১০ বৎসর পূর্বে ৭ ঃ ২ ছিল। ১০ বৎসর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

Sol" ১০ বৎসর পূর্বে পিতা ও পুত্রের বয়স ছিল = ৭৪ − (১০ + ১০) বছর
= ৭৪ − ২০ = ৫৪ বছর

১০ বছর পূর্বে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত ৭ ঃ ২

∴ অনুপাত রাশিগুলোর যোগফল = (৭ + ২) = ৯

১০ বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল = $\left(\frac{৫৪}{৯}\right) \times ৭$ বছর = ৪২ বৎসর

১০ " " পুত্রের " " = $\left(\frac{৫৪}{৯}\right) \times ২$ বছর = ১২ বছর

বর্তমানে পিতার বয়স = (৪২ + ১০) বছর = ৫২ বছর।

" পুত্রের " = (১২ + ১০) বছর = ২২ বছর

১০ বৎসর পরে পিতার বয়স হবে = (৫২ + ১০) বছর = ৬২ বছর

১০ " " পুত্রের " " = (২২ + ১০) বছর = ৩২ "

সুতরাং, ১০ বছর পর পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত হবে = ৬২ ঃ ৩২ = ৩১ ঃ ১৬

উত্তর : পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত = ৩১ ঃ ১৬

02. পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত ৭ ঃ ৩। চার বৎসর পূর্বে তাদের বয়সের অনুপাত ছিল ১৩ ঃ ৫। বর্তমানে কার বয়স কত?

Sol" মনে করি, পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স ৭x ও ৩x বৎসর

∴ চার বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল = (৭x − ৪) বৎসর

" " " পুত্রের " " = (৩x − ৪) "

আমরা পাই, (৭x − ৪) ঃ (৩x − ৪) = ১৩ ঃ ৫ বা, $\frac{(৭x - ৪)}{(৩x - ৪)} = \frac{১৩}{৫}$

বা, ৩৯x − ৫২ = ৩৫x − ২০ বা, ৩৯x − ৩৫x = ৫২ − ২০ বা, ৪x = ৩২

∴ $x = \frac{৩২}{৪} = ৮$

পিতার বর্তমান বয়স = ৭ × ৮ = ৫৬ বৎসর এবং

পুত্রের " " = ৩ × ৮ = ২৪ বৎসর

উত্তর : পিতার বয়স ৫৬ বছর এবং পুত্রের ২৪ বছর।

03. 10 বছর পূর্বে পিতা-পুত্রের বয়সের অনুপাত ছিল 4:1। 10 বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 2:1। তাদের বর্তমান বয়স কত?

Sol" ধরি, 10 বছর পূর্বে পিতার বয়স = 4x বছর

10 " " পুত্রের " = x "

∴ পিতার বর্তমান বয়স = (4x + 10) বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স = (x + 10) বছর

∴ ১০ বছর পর পিতার বয়স = (4x + 20) বছর এবং ১০ বছর পর পুত্রের বয়স = (x + 20) বছর

প্রশ্নমতে, (4x + 20):(x + 20) = 2:1

$\Rightarrow \frac{4x + 20}{x + 20} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow 4x + 20 = 2x + 40 \quad \Rightarrow 2x = 20 \quad \Rightarrow x = 10$

∴ পিতার বর্তমান বয়স (4 × 10) + 10 = 50 বছর

পুত্রের " " (10 + 10) = 20 বছর

TYPE 06: সমানুপাতিক রাশি নির্ণয়

01. চারটি সমানুপাতিক রাশির প্রান্তীয় রাশি দুইটির গুণফল ২০০। ১ম রাশি ঃ ২য় রাশি = ১ ঃ ২, ২য় রাশি ঃ ৪র্থ রাশি = ১ ঃ ৪ হলে সংখ্যা চারটি নির্ণয় করুন। [৩৩তম বিসিএস]

Sol" ১ম রাশি : ২য় রাশি = ১ : ২

২য় রাশি : ৪র্থ রাশি = ১ : ৪

$= ১ \times ২ : ৪ \times ২ = ২ : ৮$

$\therefore$ ১ম রাশি : ২য় রাশি : ৪র্থ রাশি

$= ১ : ২ : ৮$

মনে করি, ১ম রাশি x

২য় রাশি $২x$ এবং

৪র্থ রাশি $৮x$।

প্রান্তীক রাশিদ্বয়ের গুণফল ২০০ হওয়ায়

$x \times ৮x = ২০০$

$\Rightarrow ৮x^2 = ২০০ \Rightarrow x^2 = ২৫ \quad \therefore x = ৫$

সুতরাং, ১ম রাশি $= ৫$

২য় রাশি $= ২ \times ৫ = ১০$

৪র্থ রাশি $= ৮ \times ৫ = ৪০$

যেহেতু, রাশিগুলি সমানুপাতিক,

সুতরাং, $\frac{\text{২য় রাশি}}{\text{১ম রাশি}} = \frac{\text{৪র্থ রাশি}}{\text{৩য় রাশি}}$

$\Rightarrow \frac{১০}{৫} = \frac{৪০}{\text{৩য় রাশি}}$

$\therefore$ ৩য় রাশি $= \frac{৪০ \times ৫}{১০} = ২০$

$\therefore$ নির্ণেয় রাশি চারটি- ৫, ১০, ২০ এবং ৪০। **(উত্তর)**

বিকল্প:

১ম রাশি : ২য় রাশি = ১ : ২

২য় রাশি : ৪র্থ রাশি = ১ : ৪ = ২ : ৮

[উভয়কে ২ দ্বারা গুণ]

আমরা জানি, ২য় রাশি × ৩য় রাশি = ১ম রাশি × ৪র্থ রাশি

$\Rightarrow$ ২ × ৩য় রাশি = ১ × ৮ [মান বসাই]

$\Rightarrow$ ৩য় রাশি $= \frac{৮}{২}$

$\therefore$ ৩য় রাশি = ৪

মনে করি, ১ম রাশি $= x$

২য় রাশি $= ২x$

৩য় রাশি $= ৪x$

৪র্থ রাশি $= ৮x$

প্রশ্নমতে, $x \times ৮x = ২০০$

$\Rightarrow ৮x^2 = ২০০ \quad \Rightarrow x^2 = \frac{২০০}{৮}$

$\Rightarrow x = ৫$

$\therefore$ ১ম রাশি $x = ৫$

২য় রাশি $২x = ১০$

৩য় রাশি $৪x = ২০$

৪র্থ রাশি $৮x = ৪০$

$\therefore$ নির্ণেয় রাশি চারটি- ৫, ১০, ২০ এবং ৪০। **(উত্তর)**

02. একটি ক্রমিক সমানুপাতের ১ম ও ৩য় রাশি যথাক্রমে ৪ ও ১৬ হলে, মধ্য সমানুপাতী ও ক্রমিক সমানুপাত নির্ণয় কর।

[সপ্তম শ্রেণীর বোর্ড বই(গণিত), অধ্যায়-২.১ (উদাহরণের অংক নং-০৪)]

Sol" আমরা জানি, ১ম রাশি × ৩য় রাশি = (২য় রাশি)^2

এখানে, ১ম রাশি = ৪ এবং ৩য় রাশি = ১৬

$\therefore$ ৪ × ১৬ = (মধ্য রাশি)^2

অথবা, (মধ্য রাশি)^2 = ৬৪

$\therefore$ মধ্য রাশি $= \sqrt{৬৪} = ৮$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্রমিক সমানুপাত ৪ : ৮ :: ৮ : ১৬ এবং নির্ণেয় মধ্য সমানুপাতী ৮

TYPE 07: Miscelleneous

01. করিম ও রহিমের আয়ের অনুপাত ৩:৪। তাদের ব্যয়ের অনুপাত ৪:৫। যদি করিমের সঞ্চয় তার আয়ের $\frac{১}{৪}$ অংশ হয়, তাদের সঞ্চয়ের অনুপাত নির্ণয় করুন। [৪৪তম বিসিএস]

Sol" ধরি, করিমের আয় = ৩ ক

রহিমের আয় = ৪ ক

এবং করিমের ব্যয় = ৪ খ

রহিমের ব্যয় = ৫ খ

সুতরাং করিমের সঞ্চয় = ৩ ক – ৪ খ
রহিমের সঞ্চয় = ৪ ক – ৫ খ

∴ প্রশ্নমতে, ৩ ক – ৪ খ = ৩ ক এর $\frac{১}{৪}$

$\Rightarrow$ ১২ ক – ১৬ খ = ৩ ক
$\Rightarrow$ ১২ ক – ৩ ক = ১৬ খ
$\Rightarrow$ ৯ ক = ১৬ খ

∴ ক = $\frac{১৬\ খ}{৯}$

∴ তাদের সঞ্চয়ের অনুপাত = (৩ ক – ৪ খ) : (৪ ক – ৫ খ)

$= \left(৩ \times \frac{১৬\ খ}{৯} - ৪\ খ\right) : \left(৪ \times \frac{১৬\ খ}{৯} - ৫\ খ\right)$

$= \frac{৪৮\ খ - ৩৬\ খ}{৯} : \frac{৬৪\ খ - ৪৫\ খ}{৯}$

$= \frac{১২\ খ}{৯} : \frac{১৯\ খ}{৯}$

= ১২ : ১৯ (উত্তর:)

৫. একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, এদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় করুন।

Sol ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r এবং বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য, a
বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল πr^2 [π একটি ধ্রুব সংখ্যা]
বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, a^2
বৃত্তক্ষেত্রের পরিসীমা, $2\pi r$
বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা, $4a$

প্রশ্নমতে, $\pi r^2 = a^2 \Rightarrow \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{\pi}$ $\therefore \frac{r}{a} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ [বর্গমূল করে]

বৃত্তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রের পরিসীমার অনুপাত $= 2\pi r : 4a = \frac{2\pi r}{4a} = \frac{\pi r}{2a} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

∴ বৃত্তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্রের পরিসীমার অনুপাত $\sqrt{\pi} : 2$

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মুহূর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজেশন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 04
Type-02	01, 02, 05, 06, 08
Type-03	01, 03
Type-04	01, 02, 04
Type-05	01, 03
Type-06	01
Type-07	01

ল.সা.গু ও গ.সা.গু
L.C.M and H.C.F

এক নজরে এই অধ্যায় থেকে বিগত বিসিএস গুলোতে আসা প্রশ্নসমূহ

01. দুইটি সংখ্যার ল. সা. গু ও গ. সা. গু যথাক্রমে ৪৬৪১ এবং ২১। একটি সংখ্যা ২০০ ও ৩০০ এর মধ্যে অবস্থিত হলে সংখ্যাটি কত? [৩৪তম, ২০তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: Type-01, Question No.- 01]

02. দুইটি সংখ্যার গ.সা.গু, অন্তর ও ল.সা.গু যথাক্রমে 12, 60, 2448। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন। [৩৩ তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: Type-01, Question No.- 02]

03. ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি নির্ণয় করুন যাহা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য কিন্তু ৪, ৫, ৬ ও ৯ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ১ অবশিষ্ট থাকে। [২৯তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: Type-04, Question No.- 01]

04. ছয় অংকের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় করুন যাকে ৫, ৭, ১২, ১৫ দ্বারা ভাগ করলে অবশিষ্ট যথাক্রমে ২, ৪, ৯, ১২ থাকবে। [২৫তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: Type-03, Question No.- 01]

05. কোন সৈন্য দলের সৈন্যকে 8, 10 বা 12 সারিতে এবং বর্গাকারেও সাজানো যায়। সেই সৈন্যদলের ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি নির্ণয় করুন যা চার অঙ্কবিশিষ্ট। [১৫তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: Type-056Question No.- 01]

06. মোটামুটি এক হাজার লিচু থাকার কথা, এমন এক ঝুড়ি লিচু ৮০ জন বালকের মধ্যে ভাগ করতে গিয়ে দেখা গেল যে ৩০টি লিচু উদ্বৃত্ত থাকে, কিন্তু বালকের সংখ্যা ৯০ হলে লিচুগুলে সমান ভাগে ভাগ করা যেত। ঝুড়িটিতে প্রকৃতপক্ষে কতটি লিচু ছিল? [১১তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: Type-06, Question No.- 02]

07. পাঁচ অংকের বৃহত্তম সংখ্যার সঙ্গে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল ৬, ৮, ১০ ও ১৪ দ্বারা বিভাজ্য হবে? [১০তম বিসিএস]
[সমাধান দেখুন: Type-05, Question No.- 01]

এই অধ্যায়ের Analysis

ল. সা.গু ও গ. সা. গু অধ্যায়টি বিসিএস সিলেবাসে থাকলেও এখান থেকে নতুন সিলেবাসে কোন প্রশ্নই আসে নি। সুতরাং এই অধ্যায়টি তেমন গুরুত্বপূর্ণ নয়।

তাই আপনারা শুধু সাজেশনে উল্লিখিত অংকগুলো করে যেতে পারেন। আশা করি এতে চিন্তার কিছু নেই ইনশাআল্লাহ্।

মৌলিক এবং তথ্যমূলক প্রয়োজনীয় আলোচনা

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (Highest Common Factor): প্রদত্ত রাশিগুলোর কয়েকটি সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক থাকলে, তার মধ্যে সবচেয়ে বড় গুণনীয়কটিকে প্রদত্ত রাশিগুলোর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বলা হয়। গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ককে সংক্ষেপে গ.সা.গু(H.C.F) লেখা হয়।

গ.সা.গু নির্ণয়ের পদ্ধতি:

০১. মৌলিক উৎপাদকের সাহায্যে: প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর গ.সা.গু হবে সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলোর ধারাবাহিক গুণফলের সমান।

$144 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times \underline{3}$

$96 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times \underline{2}$

144 ও 96 এর সাধারণ মৌলিক উৎপাদক হলো 2, 2, 2, 2, 3

$\therefore$ 144 ও 96 এর গ.সা.গু $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$

ইউক্লিডীয় প্রক্রিয়া:

$96)144(1$
$\quad 96$
$\quad 48)96(2$
$\quad\quad 96$
$\quad\quad \times$

∴ 144 ও 96 এর গ.সা.গু = শেষ ভাজক = 48

ল.সা.গু নির্ণয়ের পদ্ধতি:

ক. মৌলিক উৎপাদকের সাহায্যে:

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর মৌলিক উৎপাদকে 2 আছে সর্বাধিক চারবার, 3 দুইবার, 5 একবার। কাজেই 2 চারবার, 3 দুইবার ও 5 একবার নিয়ে ধারাবাহিক গুণফল বের করলে ল.সা.গু পাওয়া যায়।

∴ 72, 48 এবং 60 এর ল.সা.গু = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 720$

খ. সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি:

$2|72, 48, 60$
$2|36, 24, 30$
$2|18, 12, 15$
$3|9, 6, 15$
$\quad 3, 2, 5$

∴ 72, 48 এবং 60 এর ল.সা.গু = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 720$

Important Problem & Solutions:

Type-01

11. দুইটি সংখ্যার ল. সা. গু ও গ. সা. গু যথাক্রমে ৪৬৪১ এবং ২১। একটি সংখ্যা ২০০ ও ৩০০ এর মধ্যে অবস্থিত হলে অপর সংখ্যাটি কত? **[৩৪তম, ২০তম বিসিএস]**

Sol সংখ্যাদ্বয়ের গ. সা. গু. ২১ হওয়ায়

মনে করি, একটি সংখ্যা ২১x

অপর সংখ্যা ২১y (এখানে, x ও y সহমৌলিক)

∴ সংখ্যাদ্বয়ের ল. সা. গু = ২১xy

শর্তমতে, $২১xy = ৪৬৪১ \Rightarrow xy = \frac{৪৬৪১}{২১} = ২২১$

x ও y সহমৌলিক হওয়ায় আমরা পাই, $xy = ২২১ = ১ \times ২২১ = ১৩ \times ১৭$

পর্যবেক্ষণ হতে, x = ১ হলে y = ২২১ এবং x = ১৩ হলে y = ১৭

সুতরাং x = ১ এবং y = ২২১ হলে সংখ্যাদ্বয়

২১x = ২১ × ১ = ২১ এবং ২১y = ২১ × ২২১ = ৪৬৪১

আবার, x = ১৩ এবং y = ১৭ হলে সংখ্যাদ্বয়-

২১x = ২১ × ১৩ = ২৭৩ এবং ২১y = ২১ × ১৭ = ৩৫৭

প্রশ্ন হতে আমরা পাই, একটি সংখ্যা ২০০ এবং ৩০০ এর মাঝামাঝি।

সুতরাং, ২১ ও ৪৬৪১ সংখ্যাদ্বয় গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা ২৭৩ ও ৩৫৭।

02. দুইটি সংখ্যার গ.সা.গু, অন্তর ও ল.সা.গু যথাক্রমে 12, 60, 2448। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন। [৩৩ তম বিসিএস]

Sol" মনে করি, সংখ্যা দুইটি 12x এবং 12y

শর্তমতে, $12x - 12y = 60$

$\Rightarrow x - y = \frac{60}{12}$

$\therefore \quad x - y = 5$ ..... (i)

আবার, $12xy = 2448$

$\Rightarrow xy = \frac{2448}{12}$

$\therefore \quad xy = 204$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x - y = 5$

$\Rightarrow \quad (x-y)^2 = 5^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

$\Rightarrow \quad (x+y)^2 - 4xy = 25$

$\Rightarrow \quad (x+y)^2 - 4 \times 204 = 25$

$\Rightarrow \quad (x+y)^2 = 25 + 816$

$\Rightarrow \quad (x+y)^2 = 841$

$\therefore \quad x + y = 29$ ..... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করি,

$$\begin{array}{r} x - y = 5 \\ x + y = 29 \\ \hline 2x = 34 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 17$

(i) নং এ x-এর মান বসিয়ে পাই,

$x - y = 5 \quad \Rightarrow 17 - y = 5 \quad \Rightarrow -y = 5 - 17 \quad \Rightarrow -y = -12 \quad \therefore y = 12$

$\therefore$ সংখ্যা দুইটি, $12 \times 12 = 144$

$12 \times 17 = 204$

উত্তর: 204 ও 144

বিকল্প:

যেহেতু, সংখ্যাগুলি গ. সা. গু এর গুণিতক হয়ে থাকে, সুতরাং মনে করি সংখ্যা দুটি 12x ও 12y যেখানে $x > y$ এবং x, y সহমৌলিক।

প্রশ্নমতে, $12x - 12y = 60 \Rightarrow 12(x - y) = 60$

$\therefore \quad x - y = \frac{60}{12} = 5$

আবার, 12x ও 12y এর ল. সা. গু = 12xy

$\therefore \quad 12xy = 2448$

$\therefore \quad xy = \frac{2448}{12} = 204$

এখন, $2\overline{)204}$

$2\overline{)102}$

$3\overline{)51}$

17

$\therefore \quad 204 = 12 \times 17$

x, y সহমৌলিক এবং $x > y$ হওয়ায়-

$x = 17, y = 12$ পর্যবেক্ষণ দ্বারা নির্ণীত হলো। এ দুটি সহমৌলিক।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $12 \times 17 = 204$ এবং $12 \times 12 = 144$।

উত্তর: 204 এবং 144।

ঘ. দুইটি সংখ্যার গ.সা.গু, সমষ্টি ও ল.সা.গু যথাক্রমে ৩৬, ২৫২ ও ৪৩২। সংখ্যা দুটি নির্ণয় করুন।

Sol" সংখ্যা দুটির গ.সা.গু ৩৬ হওয়ায়

মনে করি,

একটি সংখ্যা ৩৬x এবং অপর সংখ্যা ৩৬y [এখানে x ও y সহমৌলিক]

প্রথম শর্তানুসারে,

$$৩৬x + ৩৬y = ২৫২$$

$$\text{বা, } ৩৬(x + y) = ২৫২$$

$$\text{বা, } x + y = \frac{২৫২}{৩৬}$$

$$\therefore x + y = ৭ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

আবার ৩৬x ও ৩৬y এর ল.সা.গু = ৩৬xy

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, ৩৬xy = ৪৩২

$$\text{বা, } xy = \frac{৪৩২}{৩৬}$$

$$\therefore xy = ১২ \quad \ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $x + y = ৭$

বা, $(x+y)^2 = (৭)^2$

বা, $(x-y)^2 + ৪xy = ৪৯$

বা, $(x-y)^2 = ৪৯ - ৪ \times ১২$ [(ii) নং এর মান বসিয়ে]

বা, $(x-y)^2 = ১$

বা, $x - y = ১$ ..... (iii)

এখন, (i) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$\begin{array}{r} x+y=৭ \\ x-y=১ \\ \hline 2x=৮ \end{array}$$

$\therefore x = ৪$

x-এর মান (i) নং এর বসাই $৪ + y = ৭$ বা, $y = ৩$

অতএব, নির্ণেয় একটি সংখ্যা $৩৬x = ৩৬ \times ৪ = ১৪৪$

এবং অপর সংখ্যা $৩৬y = ৩৬ \times ৩ = ১০৮$

উত্তর : ১৪৪ ও ১০৮।

Type-02

01. কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে ২, ৩, ৪, ৫, ৬ দিয়ে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ১ অবশিষ্ট থাকে, কিন্তু ৭ দিয়ে ভাগ করলে কোন অবশিষ্ট থাকে না।

Sol" ২, ৩, ৪, ৫, ৬ এর ল.সা.গু = ৬০।

৭ দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার শর্ত না থাকলে ৬০ + ১ = ৬১ নির্ণেয় সংখ্যা হত। ৬০ + ১ ছাড়াও ৬০x + ১ আকারের প্রত্যেক সংখ্যা (x স্বাভাবিক সংখ্যা) প্রথম শর্ত পূর্ণ করে। সুতরাং আমাদের দেখতে হবে ৬০x + ১ আকারের কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা ৭ দ্বারা বিভাজ্য।

যেহেতু ৬০x + ১ = ৫৬x + (৪x + ১) এবং ৫৬x/৭, সেহেতু x-এর ক্ষুদ্রতম কোন মানের জন্য ৪x + ১, ৭ দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাই নির্ণেয় x = ১, ২, ৩, ৪, ৫ বসিয়ে দেখি যে, x = ৫ নির্ণেয় মান। সুতরাং অভীষ্ট ক্ষুদ্রতম সংখ্যা হচ্ছে ৬০ × ৫ + ১ = ৩০১।

উত্তর : ৩০১।

02. কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে ৩, ৪, ৫, ৬ ও ৭ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ১ অবশিষ্ট থাকে কিন্তু ১১ দ্বারা ভাগ দিলে কোন অবশিষ্ট থাকে না?

Sol" ৩, ৪, ৫, ৬ ও ৭ এর ল.সা.গু

২|৩, ৪, ৫, ৬, ৭

৩|৩, ২, ৫, ৩, ৭

১, ২, ৫, ১, ৭

∴ ল.সা.গু = ২ × ৩ × ২ × ৫ × ৭ = ৪২০

সংখ্যাটি ৪২০x + ১ হবে যা ১১ দ্বারা বিভাজ্য। এখন x এর মান ১, ২, ৩, ৪, ৫ ... বসিয়ে ১১ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা বের করতে হবে।

x = ১ হলে (৪২০ × ১) + ১ = ৪২১, ১১ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

x = ২ " (৪২০ × ২) + ১ = ৮৪১, ১১ " " "

x = ৩ " (৪২০ × ৩) + ১ = ১২৬১, ১১ " " "

x = ৪ " (৪২০ × ৪) + ১ = ১৬৮১, ১১ " " "

x = ৫ " (৪২০ × ৫) + ১ = ২১০১, ১১ দ্বারা বিভাজ্য।

উত্তর : ২১০১।

Type-03

01. ছয় অংকের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় করুন যাকে ৫, ৭, ১২, ১৫ দ্বারা ভাগ করলে অবশিষ্ট যথাক্রমে ২, ৪, ৯, ১২ থাকবে। [২৫তম বিসিএস]

Sol" ৫ − ২ = ৩

৭ − ৪ = ৩

১২ − ৯ = ৩

১৫ − ১২ = ৩

প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর সাধারণ অবশিষ্ট ৩

৫, ৭, ১২, ১৫ এর ল. সা. গু

৫|৫, ৭, ১২, ১৫

৩|১, ৭, ১২, ৩

১, ৭, ৪, ১

ল. সা. গু = ৫ × ৩ × ৭ × ৪ = ৪২০

ছয় অংকের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = ১০০০০০

৪২০) ১০০০০০ (২৩৮

৮৪০

১৬০০

১২৬০

৩৪০০

৩৩৬০

৪০

৪২০ − ৪০ = ৩৮০

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = ১০০০০০ + ৩৮০ − ৩ = ১০০৩৭৭ (উত্তর)

১. ছয় অঙ্কের কোন বৃহত্তম সংখ্যাকে ৫, ৭, ১২ ও ১৫ দ্বারা ভাগ করলে যথাক্রমে ৩, ৫, ১০ ও ১৩ অবশিষ্ট থাকবে?

Sol: $৫ - ৩ = ২;\ ৭ - ৫ = ২;\ ১২ - ১০ = ২;\ ১৫ - ১৩ = ২$

প্রতিক্ষেত্রে বিয়োগফল = ২

৩|৫, ৭, ১২, ১৫

৫|৫, ৭, ৪, ৫

১, ৭, ৪, ১

ল.সা.গু = ৩ × ৫ × ৭ × ৪ = ৪২০

ছয় অংকের বৃহত্তম সংখ্যা = ৯৯৯৯৯৯

৪২০) ৯৯৯৯৯৯ (২৩৮০

৮৪০

১৫৯৯

১২৬০

৩৩৯৯

৩৩৬০

৩৯৯

ল.সা.গু. দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা = ৯৯৯৯৯৯ − ৩৯৯ = ৯৯৯৬০০

অতএব নির্ণেয় সংখ্যা = ৯৯৯৬০০ − ২ = ৯৯৯৫৯৮

উত্তর : ৯৯৯৫৯৮

২. সাত অংকের বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় করুন যাকে ৫, ৭, ১২ ও ১৫ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ যথাক্রমে ৩, ৫, ১০ ও ১৩ হয়।

Sol: $৫ - ৩ = ২$

$৭ - ৫ = ২$

$১২ - ১০ = ২$

$১৫ - ১৩ = ২$

৫, ৭, ১২ ও ১৫ হতে যথাক্রমে ৩, ৫, ১০ ও ১৩ বিয়োগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ২ অবশিষ্ট থাকে।

৫, ৭, ১২ ও ১৫ এর ল.সা.গু

৩|৫, ৭, ১২, ১৫

৫|৫, ৭, ৪, ৫

১, ৭, ৪, ১

∴ ল.সা.গু = ৩ × ৫ × ৭ × ৪ = ৪২০

সাত অংকের বৃহত্তম সংখ্যা = ৯৯৯৯৯৯৯

৪২০)৯৯৯৯৯৯৯(২৩৮০৯

৮৪০

১৫৯৯

১২৬০

৩৩৯৯

৩৩৬০

৩৯৯৯

৩৭৮০

২১৯

∴ ল.সা.গু দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা = ৯৯৯৯৯৯৯ − ২১৯ = ৯৯৯৯৭৮০

যেহেতু প্রতিক্ষেত্রে ২ অবশিষ্ট থাকে অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা ৯৯৯৯৭৮০ − ২ = ৯৯৯৯৭৭৮।

উত্তর : ৯৯৯৯৭৭৮।

Type-04

01. ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি নির্ণয় করুন যাহা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য কিন্তু ৪, ৫, ৬ ও ৯ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ১ অবশিষ্ট থাকে। [২৯তম বিসিএস]

Sol" ২ | ৪, ৫, ৬, ৯

৩ | ২, ৫, ৩, ৯

২, ৫, ১, ৩

∴ ৪, ৫, ৬, ৯ এর ল. সা. গু = ১৮০

১৮০ × ১ + ১ = ১৮১ যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়

১৮০ × ২ + ১ = ৩৬১ যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়

১৮০ × ৩ + ১ = ৫৪১ যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়

১৮০ × ৪ + ১ = ৭২১ যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়

১৮০ × ৫ + ১ = ৯০১ যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়

১৮০ × ৬ + ১ = ১০৮১ যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়

১৮০ × ৭ + ১ = ১২৬১ যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য

উত্তর: ১২৬১

02. ১৩ দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম কোন সংখ্যাকে ৩, ৪, ৫, ৬ ও ৭ দ্বারা ভাগ করলে যথাক্রমে ১, ২, ৩, ৪ ও ৫ অবশিষ্ট থাকে?

Sol" ৩ − ১ = ২; ৪ − ২ = ২; ৫ − ৩ = ২

৬ − ৪ = ২; ৭ − ৫ = ২

৩, ৪, ৫, ৬ ও ৭ হতে যথাক্রমে ১, ২, ৩, ৪ ও ৫ বিয়োগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ২ অবশিষ্ট থাকে।

৩, ৪, ৫, ৬ ও ৭ এর ল.সা.গু-

২ | ৩, ৪, ৫, ৬, ৭

৩ | ৩, ২, ৫, ৩, ৭

১, ২, ৫, ১, ৭

∴ ল.সা.গু = ২ × ৩ × ২ × ৫ × ৭ = ৪২০

সংখ্যাটি ৪২০k − ২ হবে যা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য। এখন k এর মান ১, ২, ৩ .... ৬, ৭ বসিয়ে পাই।

k = ১ হলে (৪২০ × ১) − ২ = ৪১৮, ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

k = ২ " (৪২০ × ২) − ২ = ৮৩৮, ১৩ " " "

....

....

....

k = ৬ হলে (৪২০ × ৬) − ২ = ২৫১৮, ১৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়

k = ৭ " (৪২০ × ৭) − ২ = ২৯৩৮, ১৩ দ্বারা বিভাজ্য

সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা ২৯৩৮।

উত্তর : ২৯৩৮

03. ৪০০ ও ৫০০– এর মধ্যবর্তী কোন কোন সংখ্যাকে ১২, ১৫ ও ২০ দ্বারা ভাগ করলে প্রতি ক্ষেত্রে ১০ অবশিষ্ট থাকে?

Sol" ১২, ১৫ ও ২০ এর ল.সা.গু

২ | ১২, ১৫, ২০

২ | ৬, ১৫, ১০

৩ | ৩, ১৫, ৫

৫ | ১, ৫, ৫

১, ১, ১

∴ ল.সা.গু = ২ × ২ × ৩ × ৫ = ৬০

এখন ৬০ দ্বারা ৪০০ ও ৫০০ সংখ্যাদ্বয়কে ভাগ করে পাই

৬০) ৪০০ (৬
৩৬০
৪০

৬০ − ৪০ = ২০

সুতরাং ৪০০ এর পরবর্তী ৬০ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা = ৪০০ + ২০ = ৪২০

আবার,

৬০) ৫০০ (৮
৪৮০
২০

সুতরাং ৫০০ এর পূর্ববর্তী ৬০ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা = ৫০০ − ২০ = ৪৮০

প্রশ্ন অনুসারে, প্রতিক্ষেত্রে ১০ অবশিষ্ট থাকে।

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয়, ৪২০ + ১০ = ৪৩০ এবং ৪৮০ + ১০ = ৪৯০

উত্তর : ৪৩০ ও ৪৯০।

৬. কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে ৩৫, ৪৫, ৫৫ দ্বারা ভাগ করলে যথাক্রমে ২৫, ৩৫ ও ৪৫ অবশিষ্ট থাকে?

Sol" ৩৫ − ২৫ = ১০; ৪৫ − ৩৫ = ১০; ৫৫ − ৪৫ = ১০

৩৫, ৪৫, ৫৫ হতে যথাক্রমে ২৫, ৩৫ ও ৪৫ বিয়োগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ১০ অবশিষ্ট থাকে।

৩৫, ৪৫ ও ৫৫ এর ল.সা.গু

৫ | ৩৫, ৪৫, ৫৫
৭, ৯, ১১

∴ ল.সা.গু = ৫ × ৭ × ৯ × ১১ = ৩৪৬৫।

যেহেতু প্রতিক্ষেত্রে ১০ অবশিষ্ট থাকে।

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা = ৩৪৬৫ − ১০ = ৩৪৫৫

উত্তর : ৩৪৫৫

Type-05

৭. পাঁচ অংকের বৃহত্তম সংখ্যার সঙ্গে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল ৬, ৮, ১০ ও ১৪ দ্বারা বিভাজ্য হবে?
[১০তম বিসিএস]

Sol"

২ | ৬, ৮, ১০, ১৪
৩, ৪, ৫, ৭

ল. সা.গু = ২ × ৩ × ৪ × ৫ × ৭ = ৮৪০

পাঁচ অংকের বৃহত্তম সংখ্যা = ৯৯৯৯৯

৮৪০ | ৯৯৯৯৯ | ১১৯
৮৪০
১৫৯৯
৮৪০
৭৫৯৯
৭৫৬০
৩৯

এখন, ৮৪০ − ৩৯ = ৮০১

উত্তর : পাঁচ অংকের বৃহত্তম সংখ্যার সাথে ৮০১ যোগ করতে হবে।

02. ৯৯৯৯৯৯ এর সঙ্গে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল এবং কোন বৃহত্তম সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফল ২, ৩, ৪, ৫ এবং ৬ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে?

Sol" ২, ৩, ৪, ৫, ৬ এর ল.সা.গু = ৬০।

৬০) ৯৯৯৯৯৯ (১৬৬৬৬
৬০
৩৯৯
৩৬০
৩৯৯
৩৬০
৩৯৯
৩৬০
৩৯৯
৩৬০
৩৯

সুতরাং ৯৯৯৯৯৯ এর সঙ্গে কমপক্ষে (৬০ - ৩৯) বা ২১ যোগ করলে যোগফল ৬০ দ্বারা বিভাজ্য হবে।
৯৯৯৯৯৯ - ৬০ = ৯৯৯৯৩৯; সুতরাং ৯৯৯৯৯৯ হতে সর্বাধিক ৯৯৯৯৩৯ বিয়োগ করলে বিয়োগফল ৬০ দ্বারা বিভাজ্য হবে।
অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় যথাক্রমে ২১ ও ৯৯৯৯৩৯
উত্তর : ২১ ও ৯৯৯৯৩৯।

Type-06 (Miscellaneous)

01. কোন সৈন্য দলের সৈন্যকে 8, 10 বা 12 সারিতে এবং বর্গাকারেও সাজানো যায়। সেই সৈন্যদলের ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি নির্ণয় করুন যা চার অঙ্কবিশিষ্ট। [১৫তম বিসিএস]

Sol" 8, 10, 12 এর ল. সা. গু

2 | 8, 10, 12
2 | 4, 5, 6
2, 5, 3

∴ ল. সা. গু = $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 120$

সৈন্যদেরকে বর্গাকারে সাজাতে হলে তাদের মোট সংখ্যা অবশ্যই পূর্ণ বর্গ সংখ্যা হবে। কিন্তু 120 পূর্ণ বর্গ নয় এমনকি চার অংকবিশিষ্টও নয়। কিন্তু 120 কে 2, 5 ও 3 এর গুণফল দিয়ে গুণ করলে এটা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে যা চার অংক বিশিষ্ট।

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি = $120 \times 2 \times 5 \times 3 = 3600$

উত্তর: 3600

02. মোটামুটি এক হাজার লিচু থাকার কথা, এমন এক ঝুড়ি লিচু ৮০ জন বালকের মধ্যে ভাগ করতে গিয়ে দেখা গেল যে ৩০টি লিচু উদ্বৃত্ত থাকে, কিন্তু বালকের সংখ্যা ৯০ হলে লিচুগুলে সমান ভাগে ভাগ করা যেত। ঝুড়িটিতে প্রকৃতপক্ষে কতটি লিচু ছিল?

Sol"

৮০ | ১০০০ | ১২
৮০
২০০
১৬০
৪০

৯০ | ১০০০ | ১১
৯০
১০০
৯০
১০

∴ ১ম ক্ষেত্রে, লিচুর সংখ্যা হতে পারে = ১০০০ - ৪০ + ৩০ = ৯৯০টি
২য় ক্ষেত্রে, লিচুর সংখ্যা হতে পারে = ১০০০ − ১০ = ৯৯০টি
∴ নির্ণেয় লিচুর সংখ্যা = ৯৯০টি

উত্তর : ৯৯০টি।

14. দুটি আয়তাকার গুদাম ঘরের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ২৮ ও ২০ মিটার এবং প্রস্থ যথাক্রমে ১২ মিটার ও ১৪ মিটার। সবচেয়ে বড় কোন আয়তনের আয়তাকার পাথর দিয়ে ঘরের মেঝে পুরোপুরি ঢেকে ফেলা যাবে এবং কোন পাথর অপচয় হবে না?

Sol" ১ম ও ২য় ঘরের দৈর্ঘ্যের গ.সা.গু

২০)২৮(১
২০
৮)২০(২
১৬
৪)৮(২
৮
০

১ম ও ২য় ঘরের প্রস্থের গ.সা.গু

১২)১৪(১
১২
২)১২(৬
১২
০

প্রয়োজনীয় পাথরের দৈর্ঘ্য = ৪ মি.
" " প্রস্থ = ২ মি.

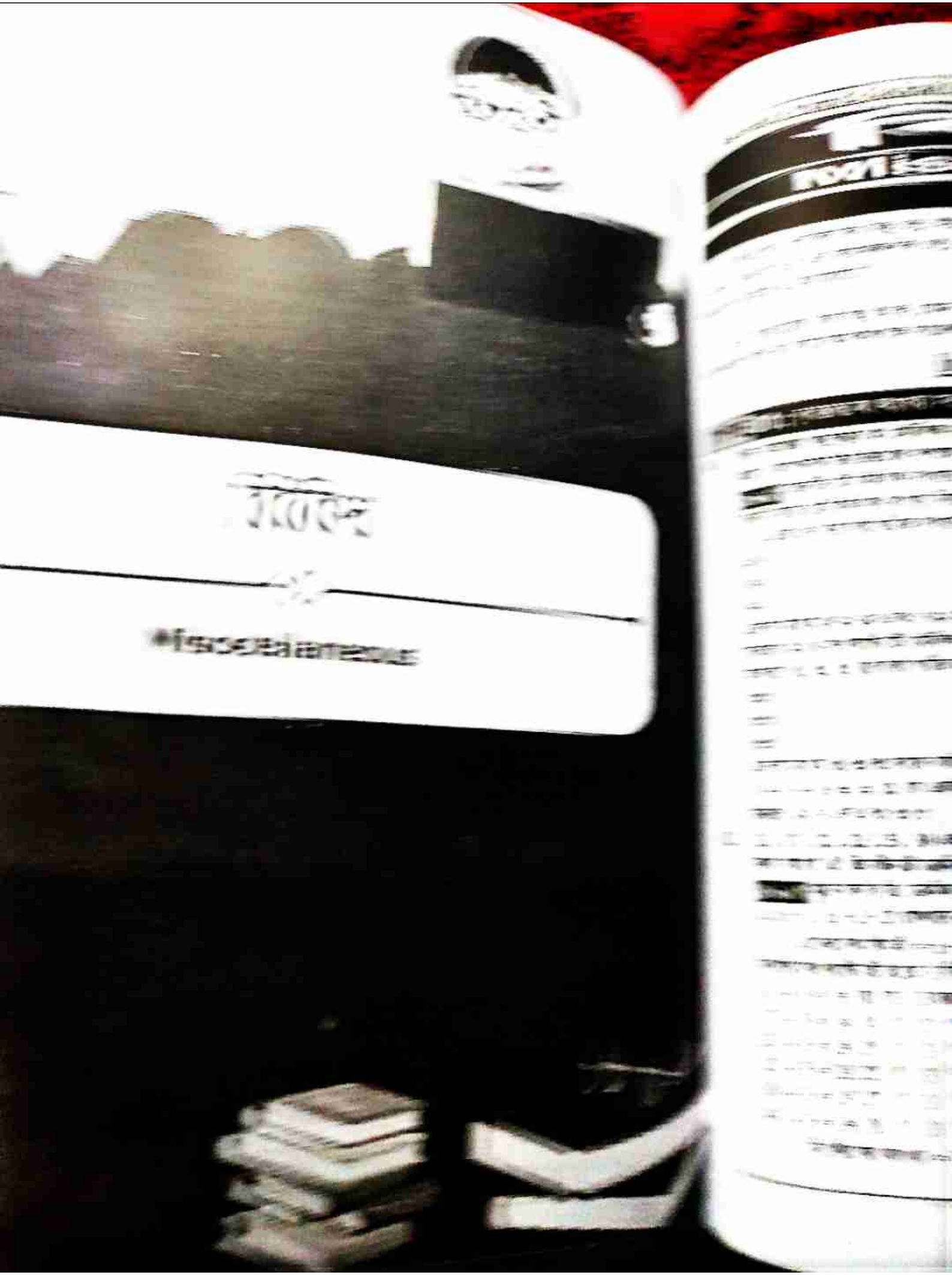
∴ পাথরের ক্ষেত্রফল = ৪ × ২ = ৮ ব.মি.
প্রথম ঘরের ক্ষেত্রফল = (২৮ × ১২) ব.মি. = ৩৩৬ ব.মি.
এবং দ্বিতীয় ঘরের ক্ষেত্রফল = (২০ × ১৪) ব.মি. = ২৮০ ব.মি.
∴ ১ম ঘরের জন্য পাথর লাগবে ৩৩৬ ÷ ৮ = ৪২টি
২য় " " " " ২৮০ ÷ ৮ = ৩৫টি

উত্তর : ৮ বর্গমিটার।

এই অধ্যায়ের Suggestion

শেষ মূহুর্তের প্রস্তুতির জন্য এই সাজশেন। তবে মনে রাখবেন সকল সাজেশনেই কিছু ঝুঁকি থাকবেই।

Type	Question No.
Type-01	01, 02
Type-02	01
Type-03	01, 03
Type-04	01
Type-05	01
Type-06	01



বিবিধ
Miscellaneous

এই অধ্যায়ের Analysis

বিসিএসের পুরাতন কিছু প্রশ্ন আছে যেগুলো বর্তমান সিলেবাসের কোন টপিকে নেই। আবার বর্তমান পাঠ্যবইয়ের কিছু অংক (যেমন- অধ্যায় ৩.৫ এর সৃজনশীল প্রশ্ন) আছে যা সমাধান করতে একাধিক অধ্যায়ের জ্ঞান থাকা জরুরী। এরকম পাঁচমিশালী প্রশ্ন নিয়েই গঠিত হয়েছে এ অধ্যায়টি।

এই অধ্যায়ের কিছু অংক যেমন বর্তমানে গুরুত্বপূর্ণ নয়, আবার কিছু অংক আছে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। তাই আপনারা অধ্যায়টি একেবারে বাদ না দিয়ে কমপক্ষে সাজেশনে উল্লিখিত অংকগুলো করতে চেষ্টা করবেন।

Important Problem & Solutions:

TYPE 01: বাস্তব সংখ্যা সংক্রান্ত সমস্যা

01. তিন অঙ্কের ক্ষুদ্রতম মৌলিক সংখ্যাটি নির্ণয় করুন যার অঙ্কগুলোর যোগফল 11 এবং প্রতিটি অঙ্ক মৌলিক সংখ্যা নির্দেশ করে। আপনার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন। [৩৮তম বিসিএস]

Sol তিনটি মৌলিক সংখ্যার যোগফল ১১ হবে এরূপ মৌলিক সংখ্যা ২, ৩, ৫, ৭
তিনটি করে মৌলিক সংখ্যা নিয়ে গঠিত সংখ্যা ২, ২, ৭ এবং ৩, ৩, ৫
২, ২ এবং ৭ দ্বারা গঠিত সংখ্যা হচ্ছে-
২২৭
২৭২
৭২২
এদের মধ্যে ২৭২ এবং ৭২২ সংখ্যাটি ২ দ্বারা বিভাজ্য বিধায় এ দুটি মৌলিক নয়।
সুতরাং ২২৭ সংখ্যাটি মৌলিক সংখ্যা যার যোগফল ২ + ২ + ৭ = ১১ যা একটি মৌলিক সংখ্যা।
আবার, ৩, ৩, ৫ দ্বারা গঠিত সংখ্যা হচ্ছে-
৩৩৫
৩৫৩
৫৩৩
এদের মধ্যে ৩৫৩ বাদে বাকি দুটি মৌলিক সংখ্যা নয়।
৩ + ৫ + ৩ = ১১ যা একটি মৌলিক সংখ্যা।
উত্তর: ২২৭ এবং ৩৫৩

02. 13, 17, 23, 25, 30 এবং 41 এই সংখ্যাগুলোর মধ্যে কোন সংখ্যাটিকে তিনটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যার যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়? ঐ তিনটি ক্রমিক সংখ্যাগুলো কী কী এবং সংখ্যা তিনটির মধ্যে কোনটি মৌলিক সংখ্যা? [১৮তম বিসিএস]

Sol মনে করি, ক্রমিক সংখ্যা তিনটি যথাক্রমে-
$n, n+1, n+2$ যেখানে $n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$
$\therefore$ এদের সমষ্টি $= n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$
নির্ণেয় সংখ্যাটি হতে 3 বিয়োগ করলে বিয়োগফল 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।
$13 - 3 = 10$ যা 3 দ্বারা বিভাজ্য নয়
$17 - 3 = 14$ " 3 " " "
$23 - 3 = 20$ " 3 " " "
$25 - 3 = 22$ " 3 " " "
$30 - 3 = 27$ " 3 " বিভাজ্য
$41 - 3 = 38$ " 3 " " "
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা = 30

$\therefore \quad 3n + 3 = 30$
$\Rightarrow \quad 3n = 30 - 3$
$\Rightarrow \quad 3n = 27$
$\therefore \quad n = 9$
$\therefore n + 1 = 9 + 1 = 10$ এবং $n + 2 = 9 + 2 = 11$
ক্রমিক সংখ্যা তিনটি যথাক্রমে 9, 10 ও 11। মৌলিক সংখ্যাটি 11
উত্তর: সংখ্যাত্রয় 9, 10 ও 11। মৌলিক সংখ্যাটি 11

03. মৌলিক সংখ্যা কাকে বলে? প্রমাণ করুন যে ২ এবং ৭ ভিন্ন $n^3 \pm 1$ আকারে অন্য কোন সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা নহে? [১১তম বিসিএস]

Sol যে সংখ্যা ১ এবং সেই সংখ্যা ভিন্ন অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নয় তাকে মৌলিক সংখ্যা বলে।
$n = 1$ হলে $n^3 \pm 1 = 1 \pm 1 = 2$ অথবা 0 (2 মৌলিক সংখ্যা)
$n = 2$ হলে $n^3 \pm 1 = 2^3 \pm 1 = 9$ অথবা 7 (7 মৌলিক সংখ্যা)
$n = 3$ হলে $n^3 \pm 1 = 3^3 \pm 1 = 28$ অথবা 26
$n = 4$ হলে $n^3 \pm 1 = 4^3 \pm 1 = 65$ অথবা 63
এভাবে দেখানো যায় যে, 2 এবং 7 ভিন্ন $n^3 \pm 1$ এর যে কোন মানের জন্য ইহা মৌলিক সংখ্যা নহে।

04. যুক্তিসহ মানের অধঃক্রমে সাজান : $\frac{২৭}{৫১}, \frac{২৩}{৪৩}, \frac{১৯}{৩১}, \frac{৬}{৭}, \frac{১৩}{১৫}$ [১০তম বিসিএস]

Sol $\frac{২৭}{৫১} = ০.৫২৯$ $\quad \frac{১৯}{৩১} = ০.৬১৩$ $\quad \frac{১৩}{১৫} = ০.৮৬৭$

$\frac{২৩}{৪৩} = ০.৫৩৪$ $\quad \frac{৬}{৭} = ০.৮৫৭$

সুতরাং, $০.৮৬৭ > ০.৮৫৭ > .০৬১৩ > ০.৫৩৪ > ০.৫২৯$

$\therefore \frac{১৩}{১৫}, \frac{৬}{৭}, \frac{১৯}{৩১}, \frac{২৩}{৪৩}, \frac{২৭}{৫১}$

উত্তর : $\frac{১৩}{১৫}, \frac{৬}{৭}, \frac{১৯}{৩১}, \frac{২৩}{৪৩}, \frac{২৭}{৫১}$

05. প্রমাণ করুন $\sqrt{৩}$ মূলদ সংখ্যা নয়। অথবা, প্রমাণ করুন, $\sqrt{৩}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

Sol মনে করি, $\sqrt{৩}$ একটি মূলদ সংখ্যা এবং কল্পনা করি $\frac{a}{b} = \sqrt{৩}$। এখানে a এবং b পূর্ণ ধনাত্মক সংখ্যা এবং ১ ভিন্ন a ও b এর অন্য কোন সাধারণ উৎপাদক নেই।
এখন, $\frac{a^2}{b^2} = ৩$
বা, $a^2 = ৩b^2$
এখানে, ডানপক্ষে একটি উৎপাদক ৩ আছে। সুতরাং বামপক্ষেও একটি সাধারণ উৎপাদক ৩ থাকবে। কেননা যদি a অযুগ্ম সংখ্যা হতো তবে উহার বর্গও অযুগ্ম হতো।
সুতরাং $a = 3c$ ধরলে $a^2 = ৯c^2$ [এখানে c একটি পূর্ণ ধনাত্মক সংখ্যা]
তাহলে $৯c^2 = ৩b^2$ $\quad$ বা, $৩c^2 = b^2$
এখন, বামপক্ষেও ৩ উৎপাদক পাওয়া গেল। কিন্তু কল্পনা করা হয়েছিল a ও b এর মধ্যে ১ ভিন্ন কোন সাধারণ উৎপাদক নেই।
অতএব, $\sqrt{৩}$ মূলদ সংখ্যা হতে পারে না।
অথবা, $\sqrt{৩}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

TYPE 02: পাঁচমিশালী বিগত প্রশ্ন

৪১. একজন ছাত্রের প্রথম পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর ৮৫। তৃতীয় পরীক্ষার পর তার নম্বরের গড় ৮৭ থেকে ৮২ হলো। ২য় ও ৩য় পরীক্ষার ফলাফলের গড় কত? [৪১তম বিসিএস]

Sol মনে করি, ২য় ও ৩য় পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর x ও y

প্রশ্নমতে, $\frac{৮৫ + x}{২} = ৮৭ \Rightarrow ৮৫ + x = ১৭৪ \Rightarrow x = ১৭৪ - ৮৫$

$\therefore x = ৮৯$

আবার, $\frac{৮৫ + x + y}{৩} = ৮২ \Rightarrow ৮৫ + ৮৯ + y = ২৪৬ \Rightarrow y = ২৪৬ - ১৭৪$

$\therefore y = ৭২$

$\therefore$ ২য় ও ৩য় পরীক্ষার ফলাফলের গড় $= \frac{৮৯ + ৭২}{২} = ৮০.৫$

৪২. একটি পুকুরের এক স্থানে পানির ২ ফুট উপরে লম্বভাবে দন্ডায়মান ডাঁটার উপর একটি পদ্মফুল ফুটে আছে। হঠাৎ তীব্রবেগে বাতাস আসলে ডাঁটাটি এক পাশে ৫ ফুট তাড়িত হয়ে পানিতে ডুবে যায়। পুকুরের ঐ স্থানে পানির গভীরতা কত? [৩২তম বিসিএস]

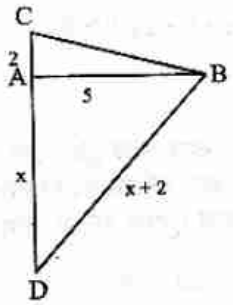
Sol ধরি, পুকুরের গভীরতা AD = x ফুট

পানির উপরে পদ্মফুলের অবস্থান AC = 2 ফুট

পদ্মফুলটি C বিন্দু হতে তাড়িত হয়ে 5 ফুট দূরত্বে B বিন্দুতে ডুবে যায়।

$\therefore$ AB = 5 ফুট

$\therefore$ BD = AC = x + 2 ফুট



আমরা পাই,

$BD^2 = AD^2 + AB^2$

$\Rightarrow (x+2)^2 = x^2 + 5^2$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 25$

$\Rightarrow 4x = 25 - 4$

$\Rightarrow x = \frac{21}{4} = 5.25$

সুতরাং, পুকুরের গভীরতা 5.25 ফুট। **(উত্তর)**

৪৩. 20 জন ছাত্র গণিত পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করল। তাদের মধ্যে দুই জন গড়ে 60 নম্বর, তের জন গড়ে 65 নম্বর ও অবশিষ্ট সকলে গড়ে 55 নম্বর পেল। ছাত্ররা গড়ে কত নম্বর পেল? [২৪তম বিসিএস]

Sol

2 জন মোট পায় (60 × 2)	= 120
13 জন মোট পায় (65 × 13)	= 845
অবশিষ্ট (20 − 2 − 13)	
5 জন মোট পায় (55 × 5)	= 275
$\therefore$ 20 জনে মোট পায় (120 + 845 + 275)	= 1240

$\therefore$ গড় $= \frac{1240}{20} = 62$

উত্তর: 62

04. $y = ax + b$ হলে $x = 4$ এর জন্য y এর মান নির্ণয় করুন যেখানে $x = 1$ এর জন্য y এর মান 4 এবং $x = 2$ এর জন্য y এর মান 7। [১৩তম বিসিএস]

Sol" দেওয়া আছে, $y = ax + b$

$\Rightarrow 4 = a.1 + b$ [$x = 1$ এবং $y = 4$ বসিয়ে]

$\Rightarrow a + b = 4$ ..... (i)

আবার, $y = ax + b$ $\Rightarrow 7 = a.2 + b$ [$x = 2$ এবং $y = 7$ বসিয়ে]

$\Rightarrow 2a + b = 7$ ..... (ii)

(ii) নং – (i) নং করে, $a = 3$

a এর মান (i) নং এ বসাই, $3 + b = 4$ $\Rightarrow b = 1$

এখন প্রদত্ত সমীকরণে $x = 4$, $a = 3$ এবং $b = 1$ বসিয়ে

$y = 3.4 + 1$ $\Rightarrow y = 12 + 1$ $\Rightarrow y = 13$

অতএব, $x = 4$ এর জন্য y এর মান হবে 13

Ans.: $x = 4$ এর জন্য y এর মান হবে 13

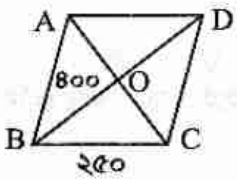
05. একটি রম্বসের প্রত্যেকটি বাহু ২৫০ ফুট এবং একটি কর্ণ ৪০০ ফুট। রম্বসটির ক্ষেত্রফল কত? [১৩তম বিসিএস]

Sol" ABCD রম্বসের $AB = BC = CD = DA = ২৫০$ ফুট

এবং একটি কর্ণ $BD = ৪০০$ ফুট

আমরা জানি, AOB সমকোণী ত্রিভুজে,

$AB^2 = AO^2 + BO^2$



বা, $AO^2 = AB^2 - BO^2 = (২৫০)^২ - \left(\frac{৪০০}{২}\right)^২$

$= ৬২৫০০ - ৪০০০০ = ২২৫০০$

$\therefore AO = ১৫০$

$\therefore AC = 2AO = ২ \times ১৫০ = ৩০০$ ফুট

$\therefore$ রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{১}{২} \times ৩০০ \times ৪০০ = ৬০,০০০$ বর্গফুট

উত্তর : ৬০,০০০ বর্গফুট।

06. ৬০,০০০ বর্গমিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি জলাধারে দুইটি স্লুইস গেট সংযুক্ত আছে, যারা একত্রে প্রতি মিনিটে ৫,০০০ লিটার পানি নিষ্কাশন করতে পারে। দুই দিন দুই রাত্রি অবিশ্রান্ত বর্ষণের ফলে জলাধারের পানির উচ্চতা ১৫০ মিলিমিটার বৃদ্ধি পেল। স্লুইস গেট দুটি খুলে দিলে কতক্ষণে জলাধারে পানির উচ্চতা পূর্বতর পর্যায়ে নেমে আসবে? [১১তম বিসিএস]

Sol" ১৫০ মিলিমিটার $= \frac{১৫০}{১০০০}$ মিটার $= ০.১৫$ মিটার

বর্ধিত পানির আয়তন $= ৬০,০০০ \times ০.১৫$ ঘন মিটার

$= ৯,০০০$ ঘনমিটার

$= ৯০০০ \times ১০০ \times ১০০ \times ১০০$ ঘন সে.মি.

$= ৯০০০০০০০০০$ ঘন সে.মি.

$= \frac{৯০০০০০০০০০}{১০০০}$ লিটার

$= ৯০০০০০০$ লিটার

৫০০০ লিটার নিষ্কাশিত হয় ১ মিনিটে

$\therefore ১$ " " " $\frac{১}{৫০০০}$ মিনিটে

$\therefore ৯০০০০০০$ " " $\frac{৯০০০০০০ \times ১}{৫০০০} = ১৮০০$ মিনিট $= \frac{১৮০০}{৬০} = ৩০$ ঘন্টা

উত্তর : ৩০ ঘণ্টা।

৫. প্রতি হেক্টর জমির বাৎসরিক খাজনা ২৪৬ টাকা হলে ১২ হেক্টর ৩৫ একর জমির সাড়ে তিন বৎসরের খাজনা (কোন সুদ ধরা না হলে কত হবে? [১০তম বিসিএস]

Sol" আমরা জানি, ১ হেক্টর = ১০০ একর

∴ ১২ হেক্টর ৩৫ একর = (১২ × ১০০ + ৩৫) একর
= (১২০০ + ৩৫) একর
= ১২৩৫ একর

সাড়ে ৩ বছর = $৩\frac{১}{২}$ বছর = $\frac{৭}{২}$ বছর।

১০০ একর জমির ১ বছরের খাজনা ২৪৬ টাকা

∴ ১ " " ১ " " $\frac{২৪৬}{১০০}$ "

∴ ১২৩৫ " " $\frac{৭}{২}$ " " $\frac{২৪৬ \times ১২৩৫ \times ৭}{১০০ \times ২}$ " = ১০,৬৩৩.৩৫ টাকা

উত্তর : ১০,৬৩৩.৩৫ টাকা

৬. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ কে $x + 3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? [১০তম বিসিএস]

Sol"

$$
\begin{array}{r}
x^3 - x^2 + 6x - 14 \\
x+3 \overline{)\, x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5} \\
x^4 + 3x^3 \\
\hline
-x^3 + 3x^2 \\
-x^3 - 3x^2 \\
\hline
6x^2 + 4x \\
6x^2 + 18x \\
\hline
-14x + 5 \\
-14x - 42 \\
\hline
47
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় ভাগশেষ, 47

উত্তর : 47

বিকল্প :

ধরি, $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

তাহলে $f(-3) = (-3)^4 + 2(-3)^3 + 3(-3)^2 + 4(-3) + 5$

[$(x + 3)$ দ্বারা $f(x)$- কে ভাগ করলে ভাগশেষ = $f(-3)$]

$= 81 - 54 + 27 - 12 + 5 = 47$

TYPE 03: বিভিন্ন টপিকের মিশ্রিত প্রশ্ন

১. কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 3.

(ক) সংখ্যাটিকে x চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$.

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৩)]

Sol"

(ক) মনে করি, সংখ্যাটি x

∴ x এর গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যা $\frac{1}{x}$

প্রশ্নমতে, $x+\frac{1}{x}=3$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $x+\frac{1}{x}=3$

(খ) ক-হতে প্রাপ্ত, $x+\frac{1}{x}=3$

এখন, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4.x.\frac{1}{x}=3^2-4.1=9-4=5$

∴ $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$

প্রদত্ত রাশি $=x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3.x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{5})^3+3.\sqrt{5}=5\sqrt{5}+3\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

∴ নির্ণেয় মান $8\sqrt{5}$

(গ) ক-হতে প্রাপ্ত, $x+\frac{1}{x}=3$

এখন, $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3.3=27-9=18$

এবং, $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.x.\frac{1}{x}=3^2-2=9-2=7$

এখন, $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=18\times 7$

$\Rightarrow x^5+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=126$

$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^3}+x+\frac{1}{x}=126$

$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^3}+3=126$

$\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^3}=126-3$

∴ $x^5+\frac{1}{x^3}=123$ (প্রমাণিত)

02. কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার 100 গুণ চাঁদা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু 4 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 500 টাকা বেড়ে গেল।

(ক) সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং মোট চাঁদার পরিমাণ A হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(খ) সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর।

(গ) মোট চাঁদার $\frac{1}{4}$ অংশ 5% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা 4% হারে 2 বছরের জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৪)]

Sol

(ক) দেওয়া আছে, সমিতির সদস্য সংখ্যা x
∴ জন প্রতি দেয়া চাঁদার পরিমাণ = 100x
সুতরাং মোট চাঁদার পরিমাণ, $A = x \times 100x$ ∴ $A = 100x^2$
এটাই নির্ণেয় সম্পর্ক।

(খ) চাঁদা দেয় এমন সদস্য সংখ্যা ছিল $(x - 4)$ জন
এবং প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ হলো $(100x + 500)$ টাকা
সুতরাং মোট চাঁদা হলো $(x - 4)(100x + 500)$ টাকা
প্রশ্নানুসারে, $100x^2 = (x - 4)(100x + 500)$
$\Rightarrow 100x^2 = 100x^2 + 500x - 400x - 2000$
$\Rightarrow 100x^2 - 100x^2 = 100x - 2000$
$\Rightarrow 100x - 2000 = 0$
$\Rightarrow 100x = 2000$
$\Rightarrow x = \frac{2000}{100} = 20$
∴ সমিতির সদস্য সংখ্যা 20 জন।
মোট চাঁদার পরিমাণ, $A = 100 \times (20)^2$ টাকা = 40000 টাকা।

(গ) আমরা জানি, সরল মুনাফার ক্ষেত্রে, $I_1 = P_1 n r_1$
এখানে, $P_1 = \left(40000 \text{ এর } \frac{1}{4}\right)$ টাকা = 10000 টাকা
$n = 2$ বছর
$r_1 = \frac{5}{100}$
∴ $I_1 = 10000 \times 2 \times \frac{5}{100} = 1000$ টাকা
আবার, $I_2 = P_2 n r_2$
এখানে, $P_2 = (40000 - 10000)$ টাকা = 30000 টাকা
$n = 2$ বছর
$r_2 = \frac{4}{100}$
∴ $I_2 = 30000 \times 2 \times \frac{4}{100} = 2400$ টাকা
∴ মোট মুনাফা, $I = I_1 + I_2 = 1000 + 2400 = 3400$
∴ মোট মুনাফা 3400 টাকা।

03. বনভোজনে যাওয়ার জন্য একটি বাস 2400 টাকায় ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 10 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া 8 (আট) টাকা বৃদ্ধি পেল।
(ক) মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমাণ, না আসা যাত্রী সংখ্যার শতকরা কত তা নির্ণয় কর।
(খ) বাসে যাওয়া যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া নির্ণয় কর।
(গ) বাসাভাড়ার সমপরিমাণ টাকার 5% হার মুনাফায় 13 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।
[নবম-দশম শ্রেণীর বোর্ড বই(সা. গণিত), অধ্যায়-৩.৫ (অনুশীলনীর অংক নং-৩৫)]

Sol

(ক) মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমাণ, না আসা যাত্রী সংখ্যার $\frac{8 \times 100}{10} \times \frac{1}{100} = 80\%$
∴ মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমাণ, না আসা যাত্রী সংখ্যার 80%।

(খ) মনে করি, আগ্রহী যাত্রীসংখ্যা x জন এবং মাথাপিছু বাস ভাড়া q টাকা

∴ মোট ভাড়া = qx টাকা

প্রকৃতপক্ষে বাসে যাত্রী যায় = (x – 10) জন

এবং মাথাপিছু বাস ভাড়া = (q + 8) টাকা

∴ মোট ভাড়া = (q + 8) (x – 10) টাকা

শর্তমতে, $qx = (q + 8)(x - 10)$ ..... (i)

এবং $qx = 2400$ ..... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $qx = qx - 10q + 8x - 80$

$\Rightarrow qx + 8x - qx = 10q + 80$

$\Rightarrow 8x = 10(q + 8)$

$\Rightarrow x = \frac{10(q+8)}{8}$

$\Rightarrow x = \frac{5(q+8)}{4}$

(ii) নং সমীকরণে $x = \frac{5(q+8)}{4}$ বসিয়ে পাই, $q \cdot \frac{5(q+8)}{4} = 2400$

$\Rightarrow q^2 + 8q = \frac{2400 \times 4}{5}$

$\Rightarrow q^2 + 8q = 1920$

$\Rightarrow q^2 + 8q - 1920 = 0$

$\Rightarrow q^2 - 40q + 48q - 1920 = 0$

$\Rightarrow q(q - 40) + 48(q - 40) = 0$

$\Rightarrow (q - 40)(q + 48) = 0$

হয়, $q - 40 = 0$ অথবা, $q + 48 = 0$

$\Rightarrow q = 40$ $\Rightarrow q = -48$; যা গ্রহণযোগ্য নয়।

∴ বাসে যাওয়া যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া = (40 + 8) = 48 টাকা

∴ বাসে যাওয়া যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া 48 টাকা।

(গ) এখানে,

মূলধন, P = 2400 টাকা

সময়, n = 13 বছর

মুনাফার হার, $r = 5\% = \frac{5}{100}$ টাকা

সরল মুনাফা, $I = Pnr = 2400 \times 13 \times \frac{5}{100} = 1560$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $C = P(1 + r)^n = 2400 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{13}$ টাকা

$= 2400 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{13}$ টাকা

$= 2400 \times \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^{13}$ টাকা

$= 2400 \times \left(\frac{105}{100}\right)^{13}$ টাকা = 4525.56 টাকা (প্রায়)

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = C – P = (4525.56 – 2400) = 2125.56 টাকা

∴ সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য

= (2125.56 – 1560) টাকা = 565.56 টাকা (প্রায়)

∴ সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 565.56 টাকা (প্রায়)।

৮. একটি স্টিমারে যাত্রী সংখ্যা 376 জন। ডেকের যাত্রীর সংখ্যা কেবিনের যাত্রীর সংখ্যার তিনগুণ। ডেকের যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া 60 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 33840 টাকা।

(ক) ডেকের যাত্রী সংখ্যাকে x ধরে সমীকরণ তৈরি কর।

(খ) ডেকের যাত্রী ও কেবিনের যাত্রীর সংখ্যা কত?

(গ) কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া কত?

Sol"

(ক) মনে করি, ডেকের যাত্রী সংখ্যা = x জন

∴ কেবিনের যাত্রী সংখ্যা = (376 – x) জন

প্রশ্নমতে, $x = 3(376 - x)$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x = 3(376 - x)$

(খ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, $x = 3(376 - x)$

$\Rightarrow x = 1128 - 3x \Rightarrow x + 3x = 1128 \Rightarrow 4x = 1128 \Rightarrow x = \frac{1128}{4}$

∴ ডেকের যাত্রী সংখ্যা 282 জন

এবং কেবিনের যাত্রী সংখ্যা = (376 – 282) জন = 94 জন

অতএব, ডেকের যাত্রী সংখ্যা 282 জন এবং কেবিনের যাত্রী সংখ্যা 94 জন।

(গ) 'খ' হতে প্রাপ্ত,

ডেকের যাত্রী সংখ্যা 282 জন এবং কেবিনের সংখ্যা 94 জন

ডেকের যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া 60 টাকা।

মনে করি, কেবিনের যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া y টাকা

∴ ডেকের মোট ভাড়া = 60 × 282 টাকা = 16920 টাকা

এবং কেবিনের মোট ভাড়া = y × 94 টাকা = 94y টাকা

প্রশ্নমতে, $16920 + 94y = 33840 \Rightarrow 94y = 33840 - 16920 \Rightarrow y = \frac{16920}{94}$

∴ $y = 180$

অতএব, কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া 180 টাকা।

৯. একটি জমির ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। জমিটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে এবং প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে।

(ক) জমিটির দৈর্ঘ্যকে x এবং প্রস্থকে y ধরে তথ্যগুলোকে সমীকরণে প্রকাশ কর।

(খ) জমিটির পরিসীমা নির্ণয় কর।

Sol"

(ক) ধরি, আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য = x মিটার এবং প্রস্থ = y মিটার

শর্তমতে, $xy = 192$ এবং $(x - 4)(y + 4) = 192$

নির্ণেয় সমীকরণ $xy = 192$ এবং $(x - 4)(y + 4) = 192$

(খ) 'ক' হতে প্রাপ্ত, $xy = 192$ ..... (i)

এবং $(x - 4)(y + 4) = 192$ ..... (ii)

(i) নং হতে পাই, $y = \frac{192}{x}$ ..... (iii)

(ii) নং এ $y = \frac{192}{x}$ বসিয়ে পাই, $(x - 4)\left(\frac{192}{x} + 4\right) = 192$

$\Rightarrow (x-4)\left(\frac{192+4x}{x}\right) = 192 \quad \Rightarrow 192x + 4x^2 - 768 - 16x = 192x$

$\Rightarrow 4x^2 + 176x - 768 = 192x \quad \Rightarrow 4x^2 + 176x - 176 - 192x = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 16x - 768 = 0 \quad \Rightarrow 4(x^2 - 4x - 192) = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 4x - 192 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 16x + 12x - 192 = 0 \quad \Rightarrow x(x-16) + 12(x-16) = 0$

$\Rightarrow (x-16)(x+12) = 0$

হয়, $x - 16 = 0$ অথবা, $x + 12 = 0$

$\Rightarrow x = 16$ $\Rightarrow x = -12$ যা গ্রহণযোগ্য নয়।

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y = \frac{192}{16} = 12$

∴ জমি দৈর্ঘ্য = 16 মিটার এবং প্রস্থ = 12 মিটার।

∴ জমির পরিসীমা = $2 \times (16 + 12)$ মিটার = (2×28) মিটার = 56 মিটার

∴ জমিটির পরিসীমা 56 মিটার

06. বাসে উঠার লাইনে সোহাগের পিছনে যতজন দাঁড়িয়ে আছে সামনে তার থেকে দুইজন বেশি দাঁড়িয়ে আছে। তার পিছনে যতজন দাঁড়িয়ে আছে সম্পূর্ণ লাইনে তার তিনগুণ যাত্রী। লাইনে কতজন যাত্রী দাঁড়িয়ে আছে?

Sol" ধরি, সোহাগের পেছনে x জন দাঁড়ানো

∴ সোহাগের সামনে $(x + 2)$ জন দাঁড়ানো

সোহাগসহ সম্পূর্ণ লাইনে $= (x + x + 2 + 1)$ জন দাঁড়ানো $= (2x + 3)$ জন দাঁড়ানো

শর্তানুসারে, $2x + 3 = 3x$

$\Rightarrow 3x - 2x = 3$

∴ $x = 3$

∴ লাইনে যাত্রী সংখ্যা $= (2 \times 3 + 3)$ জন $= (6 + 3)$ জন $= 9$ জন

∴ লাইনে 9 জন যাত্রী দাঁড়িয়ে আছে।

07. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g: \mathbb{R}$ ফাংশন দুইটি যথাক্রমে $f(x) = 3x + 3$ এবং $g(x) = \frac{x-3}{3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

(ক) $g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) দেখান যে, $g = f^{-1}$

Sol"

(ক) দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x-3}{3}$

ধরি, $y = g(x) = \frac{x-3}{3}$

$\Rightarrow 3y = x - 3 \quad \Rightarrow x = 3y + 3 \quad \Rightarrow g^{-1}(y) = 3y + 3 \quad [\because y = g(x) \quad \because x = g^{-1}(y)]$

$\therefore g^{-1}(x) = 3x + 3$

$\therefore g^{-1}(-3) = 3(-3) + 3 = -9 + 3 = -6$ **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, $f(x) = 3x + 3$

ধরি, $y = f(x) = 3x + 3$

$\Rightarrow \quad 3x = y - 3 \quad \Rightarrow x = \frac{y-3}{3} \quad \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-3}{3} \quad [\because y = f(x)]$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x-3}{3} \quad \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$

$\therefore f^{-1} = g$ **(দেখানো হলো)**