৪৭তম BCS প্রিলি

Progressive Batch

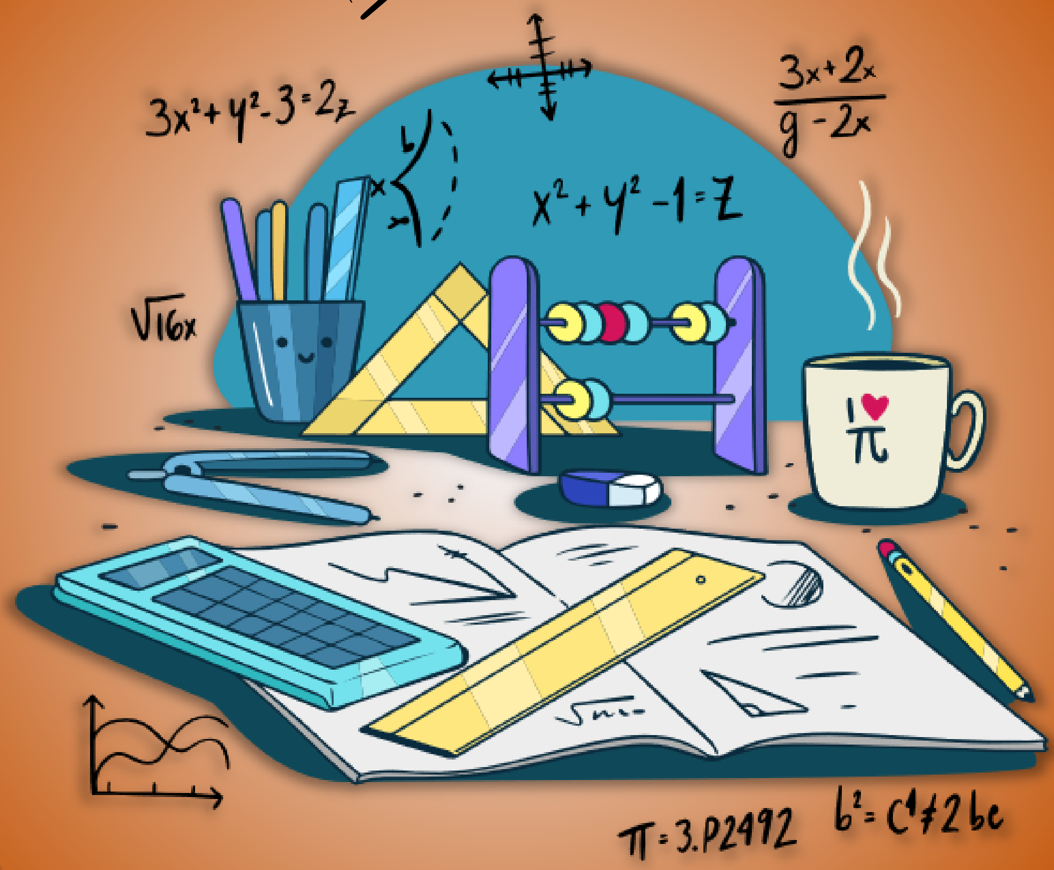
গাণিতিক যুক্তি

~~9-10 Math~~ +H math

লেকচার: ০১

টপিক:

বীজগাণিতিক সূত্রাবলি, বহুপদী উৎপাদক।



বীজগাণিতিক সূত্রাবলি

বর্গের সূত্রাবলি:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$
- $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$
- $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
- $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ $= (a-b)^2 + 2ab$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

- $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$
- $ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$

$\Rightarrow ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$* \; (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

$* \; (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$

ঘনের সূত্রাবলি:

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\Rightarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

* $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

* $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

* $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

* $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

* $ab+bc+ca = \frac{1}{2}\left\{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\right\}$

➲ $p + q = 5$ এবং $p - q = 3$ হলে $p^2 + q^2$ এর মান কত? [৪৫তম বিসিএস]

$q^2 + 1^2 = 17$

(ক) 8 (খ) 17 (গ) 19 (ঘ) 34

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{2}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\{5^2 + 3^2\}$$

$$= 17$$

Alt:

$p + q = 5$

$p - q = 3$

$2p = 8$ $\therefore p = 4$

$q = 1$

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

* $p+q=5$
$p-q=3$ হলে $p^2+q^2=?$

$\boxed{\text{Solution 1:}}$

$$p^2+q^2=\frac{1}{2}\left\{(p+q)^2+(p-q)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(5^2+3^2\right)=17$$

$$(a+b)^2+(a-b)^2$$
$$=a^2+\cancel{2ab}+b^2+a^2-\cancel{2ab}+b^2$$
$$=2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2+(a-b)^2\right\}$$

Solution 2:

$$\begin{cases} p + q = 5 \\ p - q = 3 \end{cases}$$

$(+)$

$$2p = 8$$

$$\boxed{p = 4}$$

$p^2 + q^2 = ?$

$4 + q = 5$ $\therefore q = 5 - 4 = 1$

$p = 4,\ q = 1$

$p^2 + q^2 = 4^2 + 1^2 = 17$

➲ $a + b = 7$ এবং $ab = 12$ হলে, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ এর মান কত? [৪১তম বিসিএস]

(ক) $\frac{3}{25}$ (খ) $\frac{25}{144}$ (গ) $\frac{31}{144}$ (ঘ) $\frac{11}{49}$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{(ab)^2}$$

$$= \frac{7^2 - 2 \times 12}{(12)^2}$$

$$= \frac{25}{144}$$

Alternate:

$a+b=7$

$ab=12$

3,4

1,6 5,2 3,4 7,0

Special

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144}$$

➲ $p + q = 9x$ এবং $pq = 18x^2$ হলে, $p - q$ এর মান কত?

(ক) $6x$ (খ) $3x$ (গ) $\pm 3x$ (ঘ) $9x^2$

p+q

pq

p−q=?

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2}$

$= 4ab$

$\therefore (p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq$

$\therefore (9x)^2 - (p-q)^2 = 4 \times 18x^2$

$\therefore 81x^2 - 72x^2 = (p-q)^2$

$\therefore (p-q)^2 = 9x^2$

$\therefore p - q = \pm 3x$

(বর্গমূল)

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

➲ $x^2 - 3x + 1 = 0$ হলে, $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ এর মান– [৩৭তম বিসিএস]

(ক) $5\sqrt{3}$ (খ) $3\sqrt{5}$ (গ) $4\sqrt{5}$ (ঘ) $6\sqrt{5}$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore x^2 + 1 = 3x$

$\therefore x + \frac{1}{x} = 3$

$x - \frac{1}{x} = ?$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$a+b, \quad a-b = ?$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 - 4 = 5$

$x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$x + \frac{1}{x} = 3$

$x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$x^2 - \frac{1}{x^2} = (x)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= \pm 3\sqrt{5}$

➲ $x^2 - 8x - 8y + 16 + y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণ বর্গ হবে? [৩২তম বিসিএস]

(ক) 4xy (খ) 2xy (গ) 6xy (ঘ) 8xy

Ans

$x^2 + y^2 + 16 - 8x - 8y$

$= x^2 + y^2 + (-4)^2 + 2.x.(-4) + 2.y.(-4) + 2xy$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc + \boxed{2ab}$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$(x+y-4)^2$

* $x^2 - 8x - 8y + 16 + y^2$

যে সূত্র দিয়ে লেখা যায়
সম্ভব সেগুলো
সূত্রটি

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$x^2+y^2+16-8x-8y$

$= x^2+y^2+(-4)^2+2.x(-4)+2y.(-4)$

$a^2+b^2+c^2+2ac+2bc$

$+2ab$

$+2xy$

সূত্রটি

$(x+y-4)^2$

➲ $x^4 + 2x^2 + 1 = 8x^2$ হলে, $x + \frac{1}{x}$ এর মান কত?

(ক) 0 (খ) 8 (গ) -8 (ঘ) $\sqrt{8}$

$x^4 + 2x^2 + 1 = 8x^2$

$\therefore x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 8$

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$= 6 + 2$

$= 8$

$x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{8}$

➲ $p^2 - \sqrt{5}\,p + 1 = 0$ হলে, $p^2 + \frac{1}{p^2}$ এর মান কত?

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) 7 ~~(গ)~~ 3 (ঘ) $\sqrt{5}-2$

$p^2 - \sqrt{5}p + 1 = 0$

$p^2 + 1 = \sqrt{5}p$

$\therefore \boxed{p + \frac{1}{p} = \sqrt{5}}$

$p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 - 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p}$

$= (\sqrt{5})^2 - 2$

$= 3$

- a,b,c এর সকল মানের জন্য,

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

- অনুসিদ্ধান্তসমূহ:

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

➲ $\mathbf{a+b+c=9}$, $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=29}$ **হলে, ab + bc + ca এর মান কত?** [১৬তম বিসিএস]

(ক) 52 (খ) 46 ~~(গ)~~ 26 (ঘ) 22

$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) = 9^2 - 29 = 52$

$\therefore (ab+bc+ca) = \frac{52}{2} = 26$

➲ $x^2+y^2+z^2=2$, $xy+yz+zx=1$ হলে, $(x+2y)^2+(y+2z)^2+(z+2x)^2$ এর মান- [৪৬তম বিসিএস]

(ক) 12 (খ) 19 (গ) 16 (ঘ) 14

$(x+2y)^2+(y+2z)^2+(z+2x)^2$

$= x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2+y^2+2\cdot y\cdot 2z+(2z)^2+z^2+2\cdot z\cdot 2x+(2x)^2$

$= x^2+4xy+4y^2+y^2+4yz+4z^2+z^2+4zx+4x^2$

$= 5(x^2+y^2+z^2)+4(xy+yz+zx)$

$= 5\times 2+4\times 1 = 14$

সূত্রসমূহ:

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

অনুসিদ্ধান্তসমূহ:

- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

➲ $x = \sqrt{4} + \sqrt{3}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান কত? [৪৩তম বিসিএস]

(ক) $5\sqrt{3}$ ~~(খ)~~ 52 (গ) $5\sqrt{2}$ (ঘ) $2\sqrt{5}$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$a^3+b^3 \rightarrow \frac{a+b}{ab}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

$x = +\sqrt{4} + \sqrt{3}$

$\frac{1}{x} = +\sqrt{4} - \sqrt{3}$

$\therefore x + \frac{1}{x} = +2\sqrt{4}$

$2\sqrt{4} = 2\times 2 = 4$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{4})^3 - 3\times 2\sqrt{4}$$

$$= 4^3 - 3\times 4$$

$$= 64 - 12$$

$$= 52$$

$\sqrt{4} \rightarrow 2$

$\sqrt{x} = 4$

$x \rightarrow 2, 2$

➲ $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6 - 1}{a^3} = ?$

(ক) $40\sqrt{6}$ (খ) $34\sqrt{5}$ (গ) $40\sqrt{5}$ (ঘ) $46\sqrt{5}$

$a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5}$

$\therefore \frac{1}{a} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

$\frac{a^6 - 1}{a^3} = \frac{a^6}{a^3} - \frac{1}{a^3}$

$= a^3 - \frac{1}{a^3} = ?$

$a - \frac{1}{a} = 2\sqrt{5}$

$\therefore \frac{a^6 - 1}{a^3} = a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3 \cdot \cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}}\left(a - \frac{1}{a}\right)$

$= (2\sqrt{5})^3 + 3 \times 2\sqrt{5}$

$= 8 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} + 6\sqrt{5}$

$= 40\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = \boxed{46\sqrt{5}}$

- সূত্র: $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$
- অনুসিদ্ধান্তসমূহ:

✓ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

✓ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

➲ $\mathbf{a+b+c=0}$ এবং $a^3 + b^3 + c^3$ এর মান কত? [১০তম বিসিএস]

(ক) 6abc (খ) 0 (গ) 3abc (ঘ) abc

$a+b+c=0$

$\therefore a+b=-c$

$(a+b)^3 = (-c)^3$

$a^3+b^3+3ab(a+b) = -c^3$

$\therefore a^3+b^3+3ab(-c) = -c^3$

$\therefore a^3+b^3+c^3 = 3abc$

➲ যদি $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ এবং $a \neq b \neq c$ হলে $ab+bc+ca$ এর মান নিচের কোনটি হবে?

(ক) 3abc (খ) 1 ~~(গ)~~ 0 (ঘ) -1

Math দুষ্টু

$$\left(\frac{1}{a}\right)^3+\left(\frac{1}{b}\right)^3+\left(\frac{1}{c}\right)^3=3\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^3+\left(\frac{1}{b}\right)^3+\left(\frac{1}{c}\right)^3-3\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)=0$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$$

হয়, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

$\therefore \frac{bc+ca+ab}{abc}=0$

$\therefore ab+bc+ca=0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$

0 0 0

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ $\therefore a=b=c$

অথবা

➲ যদি $x^4 - x^2 + 1 = 0$ হয় , তবে $x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$ [৪০তম বিসিএস]

(ক) 3 (খ) 2 (গ) 1 ~~(ঘ)~~ 0

$x^4 - x^2 + 1 = 0$

$\therefore x^4 + 1 = x^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$

$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = 1$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$

$x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\cdot\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

ক, খ

খ, গ

যদি $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ হলে,

$x^3 + \frac{1}{x^3} = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 0$

$2^{1/3}+2^{2/3}=-x$

➲ $x+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}=0$ হলে, x^3+6 এর মান কত? [৪১তম বিসিএস]

(ক) 4x (খ) ~~6x~~ (গ) 4 (ঘ) 8

$x^3+6=?$

$\therefore\ x=-(2^{1/3}+2^{2/3})$

$x^3=\{-(2^{1/3}+2^{2/3})\}^3=-\left[(2^{1/3})^3+(2^{2/3})^3+3\cdot2^{1/3}\cdot2^{2/3}(2^{1/3}+2^{2/3})\right]$

$x^3=-\left[2+2^2+3\cdot2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\cdot(-x)\right]=-\left[2+4+3\cdot2(-x)\right]$

$\therefore\ x^3=-(6-6x)$

$x^3=-6+6x$

$x^3+6=6x$

Break upto

8:38 pm

Class 40 min চলবে।

❑ উৎপাদকে বিশ্লেষণের সাধারণ মাধ্যমসমূহ :

- ✓ সদৃশ পদ বা সংখ্যা 'Common' নেয়া
- ✓ সূত্র প্রয়োগ
- ✓ Middle term বা মধ্যরাশিকে বিশ্লেষণ করা
- ✓ ফাংশন এবং ভাগশেষ উপপাদ্যের প্রয়োগ

option check

- ➢ $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
- ➢ $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
- ➢ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- ➢ $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$
- ➢ $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$
- ➢ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- ➢ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- ➢ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a^2)\}$$

➲ $\mathbf{x^2 - y^2 + 2y - 1}$ এর একটি উৎপাদক- [৩২তম বিসিএস]

(ক) $x + y + 1$ (খ) $x - y$ (গ) $x + y - 1$ (ঘ) $x - y - 1$

$x^2 - y^2 + 2y - 1$

$= x^2 - (y^2 - 2y + 1)$

$= x^2 - (y^2 - 2.y.1 + 1^2)$

$= x^2 - (y - 1)^2$

$= x^2 - (y-1)^2$

$= \{x + (y-1)\}\{x - (y-1)\}$

$= (x + y - 1)(x - y + 1)$

➲ $a^4 + 4$ এর উৎপাদক কি কি? [১২তম বিসিএস]

option check

(ক) $(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a - 2)$

(খ) $(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$

(গ) $(a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a - 2)$

(ঘ) $(a^2 - 2a - 2)(a^2 - 2a + 2)$

$a^4 + 4 = (a^2)^2 + \underline{2 \cdot a^2 \cdot 2} + 2^2 - 4a^2$

$= (a^2+2)^2 - (2a)^2$

$a^4 + 4 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)$

alternate: Suppose $a = 1$

$a^4 + 4 = 1^4 + 4 = 5$

$(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$

$= (1^2 + 2 \cdot 1 + 2)(1^2 - 2 \times 1 + 2)$

$= 5 \times 1 = 5$

➲ $8a^3 + \frac{b^3}{27}$ এর উৎপাদক নয় কোনটি?

(ক) $6a + b$ (খ) $36a^2 - 6ab + b^2$ (গ) $\cancel{6a - b}$ (Ans) (ঘ) কোনোটিই নয়

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (2a)^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3$

$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left[(2a)^2 - 2a \cdot \frac{b}{3} + \left(\frac{b}{3}\right)^2\right]$

$= \left(2a + \frac{b}{3}\right)\left[4a^2 - \frac{2}{3}ab + \frac{b^2}{9}\right]$

$= \frac{1}{3}(6a+b) \times \frac{1}{9}(36a^2 - 6ab + b^2) = \frac{1}{27}(6a+b)(36a^2 - 6ab + b^2)$

❑ ডোমেন ও রেঞ্জ এর ধারণা :

ধরি, $y = 2x^2 + 3$ একটি ফাংশন। এক্ষেত্রে x এর ধনাত্মক, ঋণাত্মক যেকোন মানের জন্যই y এর একটি মান পাওয়া সম্ভব।

	x এর মান	$y = 2x^2 + 3$	
	$x = -1$	$y = 5$	
ডোমেন	$x = 0$	$y = 3$	রেঞ্জ
	$x = 1$	$y = 5$	
	$x = 2$	$y = 11$	

বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}(-\infty, +\infty)$ এর যেকোন মানের জন্যই y এর মান পাওয়া সম্ভব।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $=$ {সকল বাস্তব সংখ্যার সেট}

অন্যদিকে, x এর মান ইনপুট দেবার পর y এর যেকোনো মান পাবো, সেগুলো দ্বারা গঠিত সেট কে রেঞ্জ বলে।

ছক ১ এর ক্ষেত্রে রেঞ্জ $= \{5, 3, 11\}$

অর্থাৎ এ থেকে আমরা উপনীত হতে পারি, সমীকরণের যেকোনো সম্ভাব্য ইনপুটই ঐ ফাংশনের ডোমেন এবং ইনপুট দেওয়ার ফলে যে আউটপুট পাওয়া যায় তাই ঐ সমীকরণের রেঞ্জ।

~~x~~

function $\rightarrow$ machine

input $\rightarrow$ process $\rightarrow$ output

$$f(x) = 2x$$

$x \rightarrow$ machine $\rightarrow 2x$

input output

$x=1$ $\quad f(1) = 2 \times 1 = 2$

$1 \rightarrow \boxed{} \rightarrow 2$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) + 1$$

* **Domain** $\to$ input

Domain = ?

([illegible])

$f(x) = x^2$

$f(1) = 1$

$f(2) = 4$

$f(-1) = 1$

$f(0) = 0$

$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$

$\text{dom} = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Domain কত?

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$f(0) = ?\ \frac{1}{0} \longrightarrow$$ অসংজ্ঞায়িত

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

dom কত?

x এর মান কি বসালে বাস্তব result হবে?

$\sqrt{-9}$ = অবাস্তব

$\sqrt{\text{non negative}}$

বাস্তব সংখ্যা হয়, $x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$x = 1$

$f(1) \rightarrow \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$ অবাস্তব

dom $= \{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x \geq 2\}$

$= [2, \infty)$

Range → output

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

এর ডোমেন, রেঞ্জ = ?

ডোমেন:

$x+1 \neq 0 \to x \neq -1$

domain = $\{x \in \mathbb{R}$ এবং $x \neq -1\}$

মূল function এর range = বিপরীত ফাংশনের domain

output … input

Range:

$$f^{-1}(x) = -\frac{x+2}{x-1}$$

$f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $\to R-\{1\}$

মূল ফাংশন এর রেঞ্জ = $R-\{1\}$

* $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ এর বিপরীত ফাংশন = ?

* $f(x) = y$

$f^{-1} f(x) = f^{-1}(y)$

$\boxed{x = f^{-1}(y)}$

$$y = \frac{x-2}{x+1}$$

$$xy + y = x - 2$$

$$\therefore \quad xy - x = -y - 2$$

$$x(y-1) = -(y+2)$$

$$x = -\frac{y+2}{y-1}$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = -\frac{y+2}{y-1}}$$

$$f^{-1}(z) = -\frac{z+2}{z-1}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{x+2}{x-1}$$

* বিপরীত অনুপাত :

মূল অনুপাতের range কে কোণের ফেরত দেয় ম্যাপ ____

অর্থাৎ যে function inverse / বিপরীত অনুপাতের

* Domain = input

range = output

* Domain → x এর মান সমূহ দিলে output পাওয়া
হবে না

* Range → সেগুলো পাওয়া যাবে domain হতে দিলে
পাওয়া যাবে range

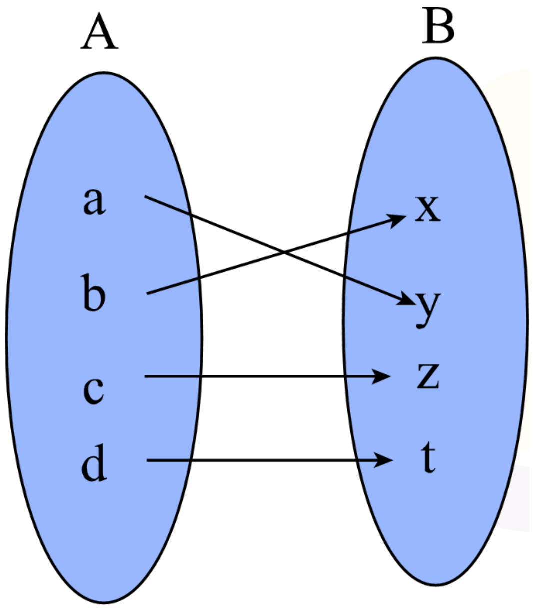
* ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বের করা

* ধরি, $f(x) = y$ হয়ে দিয়ে x এর মান বের করা, সেটাই হবে বিপরীত ফাংশন

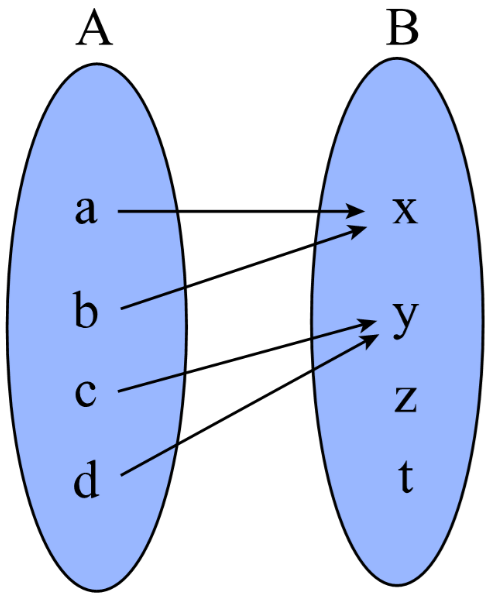
ফাংশন

- **এক-এক ফাংশন (One One Function):** ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানগুলোর জন্য যদি কোডোমেনে ভিন্ন ভিন্ন প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায় তাহলে ফাংশনটিকে এক-এক ফাংশন বলা হয়।

সকল $x_1, x_2 \in$ ডোমেন f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ হলে ফাংশনটি এক-এক।

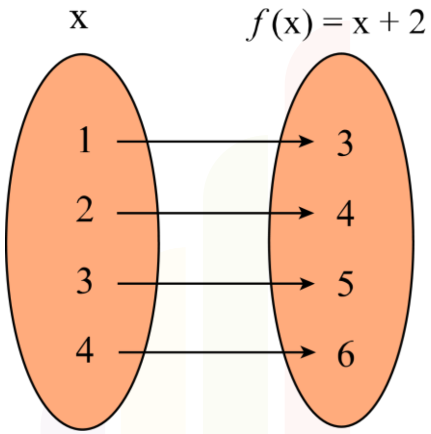


এক-এক ফাংশন



এক-এক ফাংশন নয়

উদাহরণ: (i) $f : A \to B$ এর জন্য $f(x) = x + 2$ এক-এক ফাংশন।
যেখানে, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{3, 4, 5, 6\}$
কেননা,



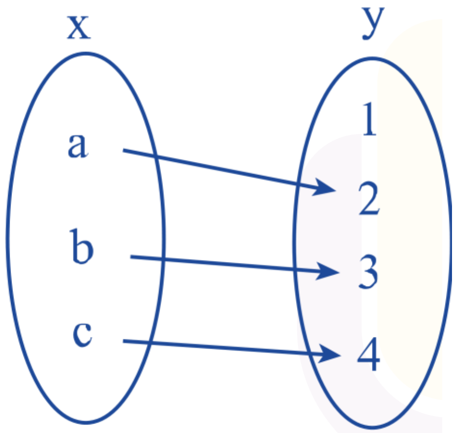
এখানে, x একটি মানের জন্য $f(x)$ -এর একটি মান পাওয়া যায়।
(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন এক-এক নয়।
কেননা, $f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
এখানে x এর দুইটি মানের জন্য $f(x)$ এর একটি মান পাওয়া যায়।
সুতরাং, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক নয়।

❑ **কো-ডোমেন (Codomain):** কোনো অন্বয়ের y সেটের বিদ্যমান সকল উপাদানগুলোকে কো-ডোমেন বলে।

❖ অন্বয়ের x সেটের সাথে y সেটের সম্পর্কযুক্ত উপাদানকে রেঞ্জ বলে।

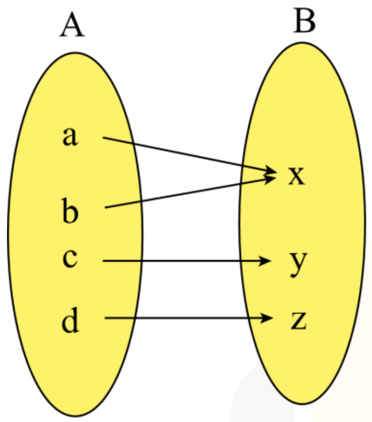
❖ x সেটের উপাদানের সাথে y সেটের উপাদানের সম্পর্কযুক্ত বা সম্পর্কযুক্ত নয় এরূপ সকল উপাদানকে কো-ডোমেন বলে।

উদাহরণ:

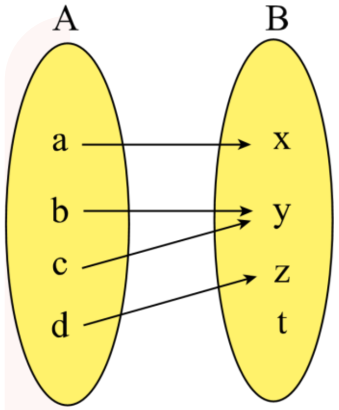


এখানে, y সেটে বিদ্যমান মান {1, 2, 3, 4}
এবং x সেটের সাথে সম্পর্কযুক্ত মান {2, 3, 4}
সুতরাং অন্বয়টির রেঞ্জ = {2, 3, 4} এবং কো-ডোমেন = {1, 2, 3, 4}

সার্বিক ফাংশন (Universal Function): ফাংশনের সবগুলো উপাদান সম্পর্কে অংশগ্রহণ করলে তাকে সার্বিক ফাংশন বলে। অর্থাৎ ফাংশনের রেঞ্জ যদি কো-ডোমেনের সমান হয় তাকে সার্বিক সেট বলে।



সার্বিক ফাংশন

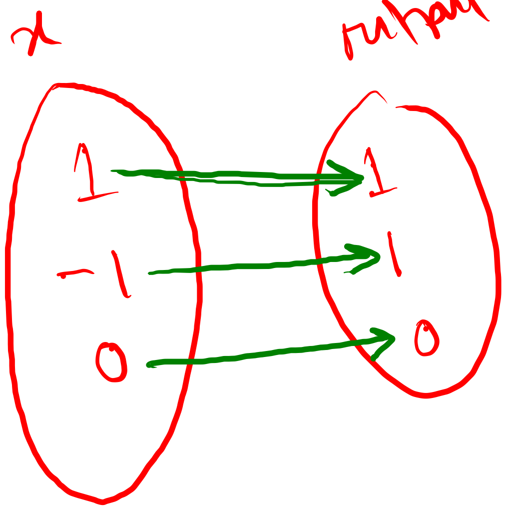


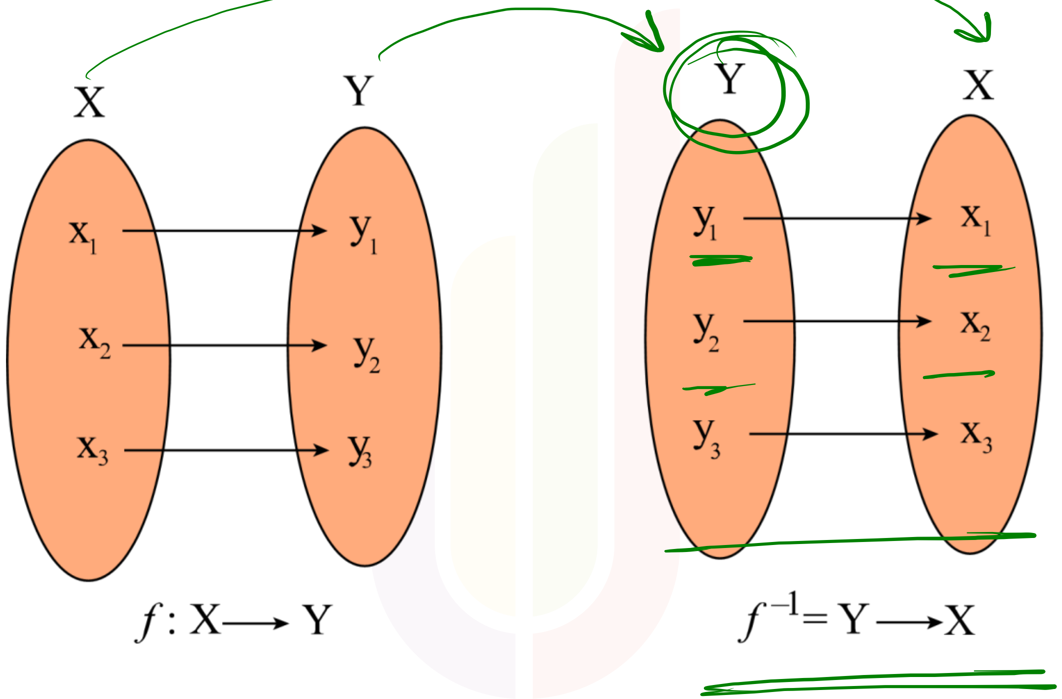
সার্বিক ফাংশন নয়

উদাহরণ: (i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$; $A \rightarrow B$ এবং $f(x) = x + 2$ একটি সার্বিক ফাংশন।
কেননা, এখানে কো-ডোমেন $= \{3, 4, 5, 6\}$ এবং রেঞ্জ $= \{3, 4, 5, 6\}$
কো-ডোমেন ও রেঞ্জ সমান হওয়ায় ফাংশনটি সার্বিক।
(ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$; $A \rightarrow B$ এবং $f(x) = x + 2$ সার্বিক ফাংশন নয়।
কেননা, এখানে কো-ডোমেন $= \{3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং রেঞ্জ $= \{3, 4, 5, 6\}$
কো-ডোমেন ও রেঞ্জ সমান না হওয়ায় ফাংশনটি সার্বিক নয়।

- **বিপরীত ফাংশন:** $f: X \rightarrow Y$ দ্বারা সূচিত ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক হলে f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} কে $f^{-1}: Y \rightarrow X$ দ্বারা সূচিত করা হয়, যেখানে সকল $y \in Y$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(y) = x \in X$ বিদ্যমান থাকে।

$f(x) = x^2$





➲ $f(x) = x^4 + 5\mathbf{x} - 3$ হলে $f(-1), f(2)$ এর মান কত ?

(ক) $-7, 23$ (খ) $-7, 26$ (গ) $-7, 3$ (ঘ) $3, 15$

$f(-1) = (-1)^4 + 5(-1) - 3 = 1 - 5 - 3 = -7$

$f(2) = 2^4 + 5 \times 2 - 3 = 16 + 10 - 3 = 23$

১ একটি ফাংশনে $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(2)$ এর মান কত? [৪৪তম বিসিএস]

(ক) 0 ~~(খ)~~ $\frac{1}{2}$ (গ) 5 (ঘ) 1

$f(x) = 2x+1$

input output

1, $\frac{1}{2}$ → 3, 2

$f(x) = 2x + 1$

ধরি, $2x+1 = y$

$\boxed{f(x) = y}$

$\therefore f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(y)$

$\therefore \boxed{x = f^{-1}(y)}$

$2x+1 = y$

$\therefore 2x = y - 1$

$\therefore x = \frac{y-1}{2}$

$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$

$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$

$\therefore f^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$f^{-1}(3) = \frac{3-1}{2} = 1$

input output

3, 2 → 1, $\frac{1}{2}$

➲ $f(x) = x^3 - 2x + 10$ হলে $f(0)$ কত? [৩১তম বিসিএস]

(ক) 1 (খ) 5 (গ) 8 ~~(ঘ)~~ 10

$f(0) = 0^3 - 2 \times 0 + 10 = 10$

➲ যদি $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 5x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $f^{-1}(6)$ এর মান কত?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 26 (ঘ) 34

$f(x) = 5x - 4$

ধরি, $y = f(x)$

$f^{-1}(y) = x$

$y = 5x - 4$

$5x = y + 4$

$x = \frac{y+4}{5}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+4}{5}$

$f^{-1}(6) = \frac{6+4}{5}$

$= \frac{10}{5}$

$= 2$

$f^{-1}(x) = ?$

$f^{-1}(y) = \frac{y+4}{5}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{5}$

* $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ হলে, $f^{-1}(5) = ?$

$f^{-1}(x) = ?$

ধরি, $f(x) = y = \dfrac{x+2}{x-3}$

$x = f^{-1}(y)$

$$y = \frac{x+2}{x-3}$$

$$xy - 3y = x + 2$$

$$xy - x = 3y + 2$$

$$x(y-1) = 3y + 2$$

$$x = \frac{3y+2}{y-1}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+2}{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$f^{-1}(5) = \frac{3 \times 5 + 2}{5-1} = \frac{17}{4}$$

* $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$; domain = ? Range = ?

Domain: $x \neq 3$ $x-3 \neq 0$ $\boxed{R - \{3\}}$ → ডোমেন

Range: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ এর ক্ষেত্রে নিয়মানুসার

$f(x)$ এর range = $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন = $R - \{1\}$

➲ $x^2y + xy^2$ এবং $x^2 + xy$ রাশিদ্বয়ের ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. এর গুণফল কত? [৪৫তম বিসিএস]

(ক) $x^2y^2(x+y)$ (খ) $xy(x^2+y^2)$ ~~(গ)~~ $x^2y(x+y)^2$ (ঘ) $xy^2(x^2+y)$

$x^2y + xy^2$
$= xy(x+y)$

$x^2 + xy$
$= x(x+y)$

Common

গসাগু $= x(x+y)$

ল.সা.গু. $= xy(x+y)$

গুণফল $= x^2y(x+y)^2$

➲ $6a^2bc$ এবং $4a^3b^2c^2$ এর সংখ্যা সহগের গ.সা.গু. নিচের কোনটি? **[৪৪তম বিসিএস]**

(ক) a^2bc (খ) $2a^2bc$ (গ) $2a^2b^2c^2$ (ঘ) ~~কোনটিই নয়~~

6, 4 এর গ.সা.গু. = 2

6, 4 এর ল.সা.গু. = 2 × 3 × 2 = 12

$6 = 2 \times 3$

$4 = 2 \times 2$

শুধু পদ সংখ্যা সহগ লসাগু এর মতো,

গ.সা.গু. = $2a^2bc$

ল.সা.গু. = $12a^3b^2c^2$

ছোট power এর ... বড় power নেব

➲ $(4x^2 - 16)$ এবং $6x^2 + 24x + 24$ এর গ.সা.গু.– [৩১তম বিসিএস]

(ক) $x + 2$ (খ) $x + 4$ (গ) $x + 2$ (ঘ) $2(x + 2)$

BCS কঠিন নয়;
প্রস্তুতি যদি গোছানো হয়