



৪৫তম বিমিএম মিথিত ফুল কোর্স

গাণিতিক যুক্তি

লেকচার: ০৩

টপিক:

ল.সা.ও ও গ.সা.ও, অনুপাত ও সমানুপাত।

Happy Twilight
😊

Class - 7 15pm





বীজগাণিতীয় রাশির ল.সা.গু. নির্ণয়

⇒ $a^3 + b^3, (a + b)^3, (a^2 - b^2)^2$ এবং $(a^2 - ab + b^2)^2$ রাশিগুলোর ল.সা.গু. নির্ণয় করুন।

Sol:

$$১ম রাশি = a^3 + b^3 = \underline{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$২য় " = (a+b)^3 = \underline{(a+b)(a+b)(a+b)}$$

$$৩য় " = (a^2-b^2)^2 = \underline{(a+b)(a+b)(a-b)(a-b)}$$

$$৪য় " = (a^2-ab+b^2)^2 = \underline{(a^2-ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\therefore \text{ল.সা.গু} = \underline{(a+b)^2(a-b)^2(a^2-ab+b^2)^2} \quad \underline{\underline{\text{Ans:}}}$$



ল.সা.গু.'র সাহায্যে সংখ্যা নির্ণয় সম্পর্কিত

□ দুইটি সংখ্যার যোগফল ৫৬ ও ল.সা.গু. ৯৬। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন।

Sol. ধরি, সংখ্যা দুটি m ও n ; m ও n পরস্পর সম্পূর্ণসংখ্যিক

সংখ্যা,

$$m + n = 56$$

$$\text{অ. } m(2+n) = 56$$

— (i)

$$m \times n = 96$$

— (ii)

$$(i) - (ii)$$

$$\frac{m(2+n)}{m \times n} = \frac{56}{96} = \frac{7 \times 8}{12 \times 8} \therefore m = 8$$

অতঃপর (i) -এ

$$8(2+n) = 56$$

$$\text{অ. } 2+n = 7$$

— (iii)

$$\text{অতঃপর, } \boxed{x=3, y=4}$$

সংখ্যা দুটি

$$m = 8 \cdot 3 = 24$$

$$\text{ও } n = 8 \cdot 4 = 32 \quad \underline{\underline{ans}}$$



ল.সা.গু.'র সাহায্যে সংখ্যা নির্ণয় সম্পর্কিত

□ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি নির্ণয় করুন যাহা ১৩ দ্বারা বিভাজ্য কিন্তু ৪, ৫, ৬ ও ৯ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ১ অবশিষ্ট থাকে।

[২৯তম বিসিএস লিখিত]
১৩ এর গুণিতক

সে।

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 4, 5, 6, 9} \\ 2 \overline{) 1, 5, 2, 3} \\ \underline{2, 5, 1, 3} \end{array}$$

$$\text{ল.সা.গু} = 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \\ = 180$$

$$\text{ইচ্ছা নির্ণয় সংখ্যাটি} = 180k + 1 ; k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

k=1 হলে	180k+1 = 181	এ	১৩	হয়	বিলম্ব	না
k=2 "	180k+1 = 361	এ	১৩	"	"	"
k=3 "	180k+1 = 541	"	১৩	"	"	"
k=4 "	180k+1 = 721	"	১৩	"	"	"
k=5 "	180k+1 = 901	"	১৩	"	"	"
k=6 "	180k+1 = 1081	"	১৩	"	"	"

- ① 132 + 4(6) = 156
- ② 15 + 4(6) = 39 এ ১৩ হয় বিলম্ব অন্য ১৩২৬ সংখ্যাটি ১৩ হয় বিলম্ব

k=7 হলে 180k+1 = 1261 এ ১৩ হয় বিলম্ব

↓

1261



বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যা সম্পর্কিত

□ এই অংকের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় করুন যাকে ৫, ৭, ১২, ১৫ দ্বারা ভাগ করলে অবশিষ্ট
যথাক্রমে ২, ৪, ৯, ১২ থাকবে। ২৪তম বিসিএস লিখিত

Sol: $5-2=3$
 $7-4=3$
 $12-9=3$
 $15-12=3$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 15 \\ \hline 1 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 3 \\ \hline 1 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \end{array}$$

L.C.M. = $5 \times 3 \times 7 \times 4$
 $= 420$

দূর্ব্যস্ত ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = 100000

$$\begin{array}{r} 420 \overline{) 100000} \\ \underline{9960} \\ 40 \end{array}$$

- (i) $100000 - 40 = 99960$ (৫ জন)
(ii) $99960 + 420 = 100380$ (৬ জন)
(iii) নির্ণে সংখ্যা = $100380 - 3$
 $= \boxed{100377}$ Ans.



- একটি সিনেমা দলকে ৬, ৭, ৮ সজ্জা দিয়ে সাজানো যাবে কিনা তা নির্ণয় করতে হবে।
কমপক্ষে কতজন সৈন্য যোগ দিলে সৈন্য দলকে বর্গাকারে সাজানো যাবে?

Solⁿ:

$$2 \overline{) 6.7.8} \\ 3.7.4$$

$$\text{ল.সা.গু.} = 2 \times 3 \times 7 \times 4 \\ = 168$$

$$\text{তখন, } 13^n = 169 > 168$$

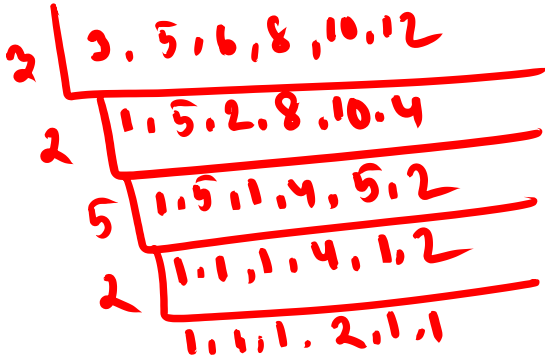
$$\leftarrow 12^n = 144 < 168$$

$$\text{নতুন সজ্জা যোগ দিলে } 28 = 169 - 144 \\ = 25$$



- কতগুলো চিরাগাছ পঙ্ক সিরি়াতি ৩ে, ৫, ৬, ৮, ১০ ও ১২ট কির লে গাভ গে ষি দে ষা গে যে পঙ্ক ষিরা হেট চিরা ষ ক থি ক কে নিতুপঙ্ক সিরি়াতি ১৯ট কির লে গাল একট চিরাগাছ অবশ ষ্ট থাকে না। ন্যূনতম কতগুলো চারাগাছ ছিল?

সল:



$$\begin{aligned}
 4 \cdot 3 \cdot 3 &= 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2 \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

$$120k + 2$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$k = 6$$

$$\text{ন্যূনতম } 120k + 2 = 722 \text{ টি}$$



বীজগাণিতীয় রাশির গ.সা.গু. নির্ণয়

☞ $a^3 - 3a^2 - 10a$, $a^3 + 6a^2 + 8a$ এবং $a^4 - 5a^3 - 14a^2$ রাশিগুলোর গ.সা.গু. নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned} ১ম \text{ রাশি} &= a^3 - 3a^2 - 10a \\ &= a(a^2 - 3a - 10) \\ &= a(a^2 - 5a + 2a - 10) \\ &= a\{a(a-5) + 2(a-5)\} \\ &= a(a-5)(a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ২য় \text{ রাশি} &= a^3 + 6a^2 + 8a \\ &= a(a^2 + 6a + 8) \\ &= a(a^2 + 4a + 2a + 8) \\ &= a\{a(a+4) + 2(a+4)\} \\ &= a(a+4)(a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ৩য় \text{ রাশি} &= a^4 - 5a^3 - 14a^2 \\ &= a^2(a^2 - 5a - 14) \\ &= a^2(a^2 - 7a + 2a - 14) \\ &= a^2\{a(a-7) + 2(a-7)\} \\ &= a^2(a-7)(a+2) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{গ.সা.গু.} = a(a+2) \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$



সংখ্যাযুগল নির্ণয় সম্পর্কিত

□ দুইটি সংখ্যার যোগফল ২৫৬ এবং গ.সা.গু. ৩২। এরূপ সকল সংখ্যাযুগল নির্ণয় করুন।

✓	✓	✗
৩	৪	৬
৭	৪	৪
	✗	
	২	৬
	৬	৬

৬ মানেই নেই

Solⁿ:

সংখ্যা দুটি $32x$ ও $32y$; x ও y পরস্পর সম্পূর্ণ

সংস্কৃত,

$$32x + 32y = 256$$

$$\text{অ. } x + y = \frac{256}{32} = 8$$

সম্ভব সমাধান

- ① $x = 1, y = 7$ — $32 \cdot 1 = 32, 32 \cdot 7 = 224$
- ② $x = 3, y = 5$ — $32 \cdot 3 = 96, 32 \cdot 5 = 160$



বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় সম্পর্কিত

□ কোন বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা ১৩০৫, ৪৬৬৫ ও ৬৯০৫ কে ভাগ করলে প্রতি ক্ষেত্রে একই অবশিষ্ট থাকে?

Sol: ধরি, অবশিষ্ট x অংশ

$$\begin{aligned} &\checkmark \underline{1305 - x} \\ &\checkmark \underline{4665 - x} \\ &\checkmark \underline{6905 - x} \end{aligned}$$

— ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যক ২য় বড় অবশিষ্টের সংখ্যক অংশ।

$$(4665 - x) - (1305 - x) = 3360$$

$$(6905 - x) - (4665 - x) = 2240$$

$$(6905 - x) - (1305 - x) = \boxed{5600}$$

$$\begin{array}{r|l} 2240 & 3360 & 1 \\ & \underline{2240} & \\ & 1120 & \\ & & \underline{2240} & 2 \\ & & & \underline{2240} & \\ & & & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \boxed{1120} & 5600 & 5 \\ & \underline{5600} & \\ & & 0 \end{array}$$

Ans:





গ.সা.গু.'র প্রয়োগ সম্পর্কিত

□ একটি হল ঘরের দৈর্ঘ্য ৩০ মিটার, প্রস্থ ১২ মিটার। অপর একটি হল ঘরের দৈর্ঘ্য ২০ মিটার, প্রস্থ ১৫ মিটার। সর্বাপেক্ষা বড় কোন মাপের আয়তাকার কার্পেট দ্বারা উভয় ঘরের মেঝে পুরোপুরি ঢাকা যাবে এবং মোট কতটি কার্পেট লাগবে? **/১১তম বিসিএস লিখিত/**

১মঃ

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 30} \ 1 \\ \underline{20} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

২য়ঃ

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 15} \ 1 \\ \underline{12} \\ 3 \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

সর্বাপেক্ষা বড় মাপ = 20×3 এর গুণিতক = 30 এর গুণিতক

১ম ঘরের জন্য

$$\text{কার্পেট লাগবে} = \frac{30 \times 12}{30} = 12 \checkmark$$

২য় ঘরের জন্য

$$\text{কার্পেট " } = \frac{20 \times 15}{30} = 10 \checkmark$$

মোট কার্পেট লাগবে = $(12 + 10)$ টি = 22 টি



- একটি লোহার পাত ও একটি তামার পাতের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে ৬৭২ সে.মি. ও ৯৬০ সে.মি। পাত দুইটি থেকে কেটে নেওয়া একই মাপের সবচেয়ে বড় টুকরার দৈর্ঘ্য কত হবে? প্রত্যেক পাতের টুকরার সংখ্যা নির্ণয় করুন।

Sol.

$$\begin{array}{r}
 672 \overline{) 960} \quad 2 \\
 \underline{672} \\
 288 \\
 672 \overline{) 288} \quad 3 \\
 \underline{576} \\
 96 \\
 96 \overline{) 96} \quad 1 \\
 \underline{96} \\
 0
 \end{array}$$

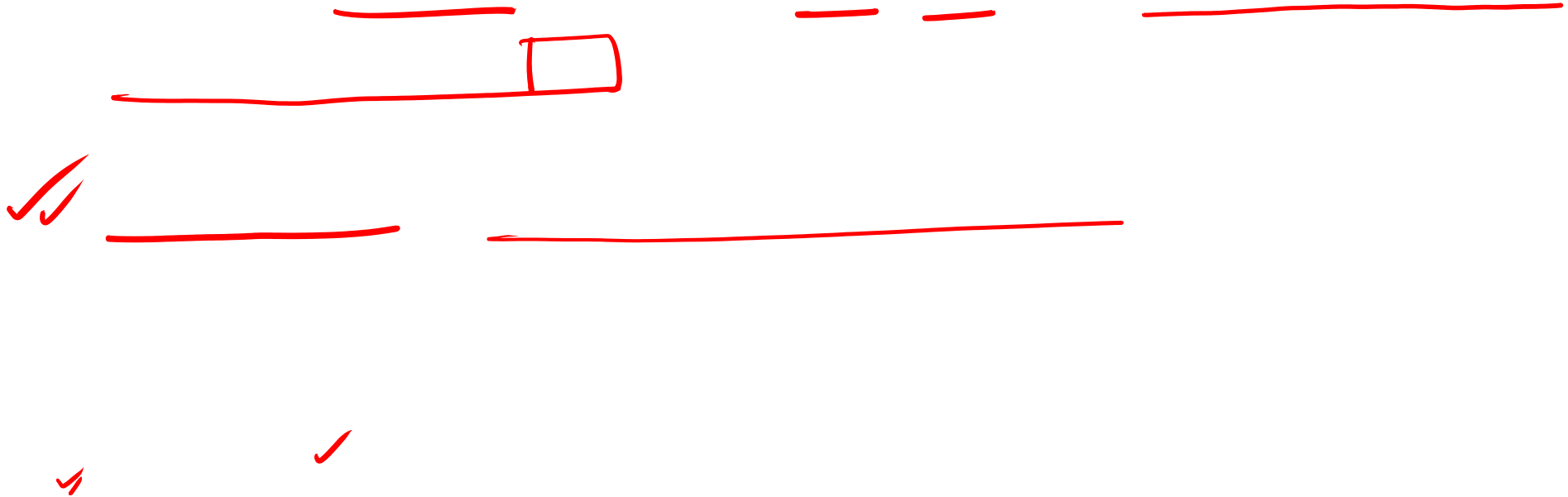
সব টুকরার দৈর্ঘ্য = 96 cm

লোহার টুকরার সংখ্যা = $\frac{672}{96} = 7$

তামার " " = $\frac{960}{96} = 10$



ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. এর মধ্যে সম্পর্ক





ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. এর মধ্যে সম্পর্ক

□ দুইটি সংখ্যার গ.সা.গু. ২১ এবং ল.সা.গু. ৪৬৪১। একটি সংখ্যা ২০০ ও ৩০০ এর মধ্যবর্তী;
অপরটি কত?

সি.: [২৪তম ও ৩৪তম বিসিএস লিখিত] x ও y সমীকরণ

সর্বমোট,

$$21xy = 4641$$

ন. $xy = 221 = 1 \times 221 \rightarrow$ সংখ্যা ২১ $x=1 \rightarrow \boxed{21}$ $y=221 \rightarrow 21 \times 221 = \boxed{4641}$ \times

$= 13 \times 17$
 \downarrow \downarrow
 x y

\rightarrow সংখ্যা ২১ $x=13, \rightarrow 21 \times 13 = \boxed{273}$
 $y=17, \rightarrow 21 \times 17 = \boxed{357}$

Ans:



ভগ্নাংশের ল.সা.গু. -এর প্রয়োগ

□ তিনটি চাকা প্রতি মিনিটে যথাক্রমে ৪০, ২৪ এবং ১৬ বার ঘুরে। প্রতিটি চাকায় একটি লাল চিহ্ন দেয়া আছে যা শুরুর সময় মাটিতে স্পর্শ করে ছিল। কতক্ষণ পরে, সবগুলো চাকার লাল চিহ্নগুলো একইসাথে মাটি স্পর্শ করবে?

১ম চাকা
৪০ বার ঘুরে = ১ মিনিটে
∴ ১ " " = $\frac{1}{40}$ "

২য় চাকা
২৪ বার ঘুরে = $\frac{1}{24}$ মিনিটে

৩য় চাকা
১৬ বার ঘুরে = $\frac{1}{16}$ মিনিটে

$$\frac{1}{40}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16} \text{ এর ল.সা.গু}$$

$$= \frac{\text{ল.সা.গু. ল.সা.গু.}}{\text{সবগুলোর ল.সা.গু.}}$$

$$= \frac{1}{8} \text{ মিনিটে}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 24} \ 2 \\ \underline{16} \\ 8 \overline{) 16} \ 2 \\ \underline{16} \\ 0 \end{array} \quad \boxed{8} \overline{) 40} \ 5 \\ \underline{40} \\ 0$$



বিবিধ

- তিন অঙ্কের ক্ষুদ্রতম মৌলিক সংখ্যাটি নির্ণয় করুন যার অঙ্কগুলোর যোগফল 11 এবং প্রতিটি অঙ্ক মৌলিক সংখ্যা নির্দেশ করে। আপনার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দিন। 178 তম বিসিএস

সো. লিখিত/

① 11 এর ক্ষুদ্রতম মৌলিক সংখ্যা = 2, 3, 5, 7

②

$$2 + 2 + 7 = 11 \text{ — 1st case}$$

$$3 + 3 + 5 = 11 \text{ — 2nd "}$$

③

1st case

$$\boxed{227} \checkmark$$

$$272 \times$$

$$722 \times$$

2nd case

$$335 \times$$

$$\boxed{353} \checkmark$$

$$533 \times \text{ (১৩ দ্বারা বিভাজ্য)}$$

Ans: 227, 353



□ এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় করুন যাদের প্রত্যেক জোড়া সহমৌলিক এবং যাদের প্রথম দুটির গুণফল ৪৩৭ এবং শেষ দুটির গুণফল ৫৫১।

সমাধ.

$$x y = 437 \text{ --- ①}$$

$$y z = 551 \text{ --- ②}$$

① ÷ ②

$$\frac{x \cdot y}{z \cdot y} = \frac{437}{551} = \frac{23 \times 19}{29 \times 19}$$

নির্লভ সংখ্যাগুলি = $23, 19, 29$ ৭ন
সহমৌলিক



বিবিধ

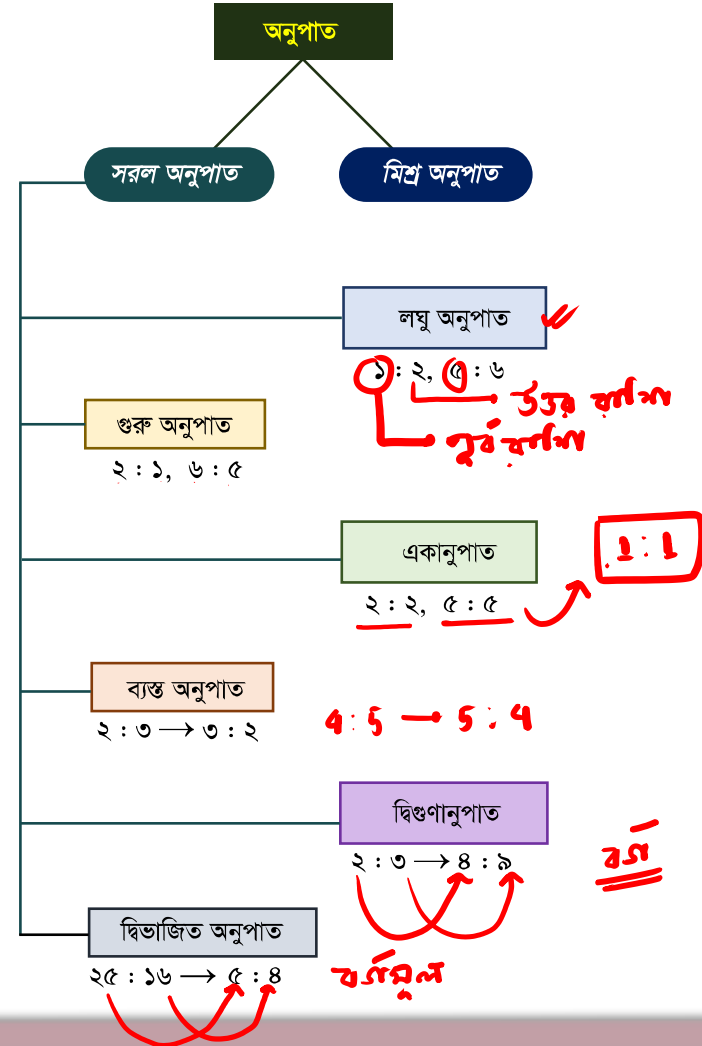
➔ যুক্তিসহ মানের অধঃক্রমে সাজান: $\frac{২৭}{৫১}, \frac{২৩}{৪৩}, \frac{১৯}{৩১}, \frac{৬}{৭}, \frac{১৩}{১৫}$

Solⁿ:

Use Calculator

[১০ তম বিসিএস লিখিত]

অনুপাত ও সমানুপাত (RATIO AND PROPORTION)



অনুপাত ও সমানুপাত (RATIO AND PROPORTION)

✦ অনুপাতের ধর্মাবলি--

✓ ব্যস্তকরণ ধর্ম: $a : b = c : d$ অর্থাৎ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

✓ একান্তকরণ ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

✓ যোজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

✓ বিয়োজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

✓ যোজন-বিয়োজন ধর্ম: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

✓ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

✓ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে, যদি $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ বা $b^2 = ac$ বা, $a : b = b : c$ হয়।

$$\frac{\frac{4}{6}}{\frac{10}{15}} = \frac{\frac{14}{21}}{\frac{2}{3}}$$



অনুপাতের সাহায্যে মান নির্ণয়

⇒ সমাধান করুন : $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$, $2a > x > 0$ এবং $x \neq 0$

$$\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x} \quad [7092-09992]$$

$$\frac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$$

$$\frac{a^2+2ax+x^2}{a^2-x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2} \quad [709]$$

$$\frac{a^2+2ax+x^2 - (a^2-x^2)}{a^2+2ax+x^2 + (a^2-x^2)} = \frac{b^2+2bx+x^2 + (b^2-2bx+x^2)}{b^2+2bx+x^2 - (b^2-2bx+x^2)} \quad [7092-09992]$$

$$\frac{2a(a+x)}{2x(a+x)} = \frac{2(b^2+x^2)}{4bx}$$

$$a = \frac{b^2+x^2}{2x}$$

$$\text{ত. } b^2+x^2 = 2ab \quad \therefore x = \pm \sqrt{2ab-b^2} \quad \underline{\underline{ans}}$$



অনুপাতের সাহায্যে মান নির্ণয়

→ ~~a, b, c, d ত্রয়িক সমানুপাতিক এবং~~ $x = \frac{10pq}{p+q}$, যেখানে $p \neq q$, হলে $\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[৪তম বিসিএস লিখিত]

সমাঃ

$$x = \frac{10pq}{p+q}$$

$$\therefore x = \frac{2q \cdot 5p}{p+q}$$

$$\therefore \frac{x}{5p} = \frac{2q}{p+q}$$

$$\therefore \frac{x+5p}{x-5p} = \frac{2q+p+q}{2q-p-q}$$

$$\therefore \frac{x+5p}{x-5p} = \frac{p+3q}{q-p} \quad \text{--- (1)}$$

অন্যঃ

$$x = \frac{10pq}{p+q}$$

$$\therefore \frac{x}{5q} = \frac{2p}{p+q}$$

$$\therefore \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{2p+p+q}{2p-p-q}$$

$$\therefore \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{3p+q}{p-q} \quad \text{--- (2)}$$

(1) + (2)

$$\begin{aligned} \frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q} &= \frac{p+3q}{q-p} - \frac{3p+q}{q-p} \\ &= \frac{p+3q-3p-q}{q-p} \\ &= \frac{2(q-p)}{(q-p)} = 2 \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$



অনুপাতের সাহায্যে মান নির্ণয়

⇒ $\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$ এর **দ্বিগুনানুপাত** 25 : 1 হলে, x এর মান কত?

[১৮তম বিসিএস লিখিত]

Sol:

$$\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{25}{1}$$

$$৩. \frac{9x^2 + 6x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 25$$

$$৩. 9x^2 + 6x + 1 = 25x^2 - 50x + 25$$

$$০. 16x^2 - 56x + 24 = 0$$

$$৩. 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$৩. 2x^2 - 6x - x + 3 = 0$$

$$৩. 2x(x-3) - 1(x-3) = 0$$

$$৩. (x-3)(2x-1) = 0$$

$$= x = 3, \frac{1}{2} \quad \underline{\underline{১.৩৩}}$$



প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলি

→ $y = \frac{\sqrt{2p+3q} + \sqrt{2p-3q}}{\sqrt{2p+3q} - \sqrt{2p-3q}}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $3q\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{4p}{y}$ [৩৭তম বিসিএস লিখিত]

Solⁿ: $\frac{y+1}{y-1} = \frac{\sqrt{2p+3q} + \sqrt{2p-3q} + \sqrt{2p+3q} - \sqrt{2p-3q}}{\sqrt{2p+3q} + \sqrt{2p-3q} - \sqrt{2p+3q} + \sqrt{2p-3q}}$ [১০৭৯২-১০৭৭৯২]

১. $\frac{y+1}{y-1} = \frac{2\sqrt{2p+3q}}{2\sqrt{2p-3q}}$

২. $\frac{y^2+2y+1}{y^2-2y+1} = \frac{2p+3q}{2p-3q}$

৩. $\frac{y^2+2y+1+y^2-2y-1}{y^2+2y+1-y^2+2y-1} = \frac{2p+3q+2p-3q}{2p+3q-2p+3q}$ [১০৭৯২-১০৭৭৯২]

৪. $\frac{2(y^2+1)}{4y} = \frac{4p}{6q}$

৫. $\frac{y^2+1}{2y} = \frac{4p}{6q}$

১. $6q \cdot \frac{y^2+1}{2y^2} = \frac{4p}{y}$

২. $3q \cdot \frac{y^2+1}{y^2} = \frac{4p}{y}$

∴ $3q\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{4p}{y}$
(Proved)



প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলি

→ $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ প্রমাণ করুন যে, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$

Solⁿ:

ধরি, $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k$

∴ $x = k(b+c)$, $y = k(c+a)$, $z = k(a+b)$

১ম অংশ,

$\frac{a}{y+z-x} = \frac{a}{k(c+a) + k(a+b) - k(b+c)} = \frac{a}{k \cdot 2a} = \frac{1}{2k}$

২য় অংশ,

$\frac{b}{z+x-y} = \frac{b}{k(a+b) + k(b+c) - k(c+a)} = \frac{b}{k \cdot 2b} = \frac{1}{2k}$

৩য় অংশ,

$\frac{c}{x+y-z} = \frac{c}{k(b+c) + k(c+a) - k(a+b)} = \frac{c}{k \cdot 2c} = \frac{1}{2k}$

∴ $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$ (Proved)



প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলি

⇒ $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $c = a$, অথবা, $a + b + c + d = 0$ [৩০তম বিসিএস লিখিত]

সমাঃ

$$\frac{a+b-b-c}{b+c} = \frac{c+d-d-a}{d+a} \quad [\text{লোপন}]$$

$$\therefore \frac{a-c}{b+c} = \frac{c-a}{d+a}$$

$$\therefore \frac{a-c}{b+c} = -\frac{a-c}{d+a}$$

$$\therefore (a-c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) = 0$$

$$\therefore a-c=0 \quad \text{অথবা} \quad \frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} = 0$$

$$\therefore \boxed{a=c}$$

$$\therefore \frac{d+a+b+c}{(b+c)(d+a)} = 0$$

$$\therefore \boxed{a+b+c+d=0}$$

(Proved)



প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলি

☞ $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে, দেখান যে, প্রতিটি অনুপাত = $\frac{1}{a+b+c}$

সমাঃ $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc} = k$

$$\therefore x = k(xa + yb + zc)$$

$$y = k(ya + zb + xc)$$

$$z = k(za + xb + yc)$$

$$\therefore x + y + z = k(xa + yb + zc + ya + zb + xc + za + xb + yc)$$

$$\therefore x + y + z = k\{x(a+b+c) + y(a+b+c) + z(a+b+c)\}$$

$$\therefore (x+y+z) = k(x+y+z)(a+b+c)$$

$$\therefore k = \frac{1}{a+b+c} \quad \checkmark \quad \text{(shown)}$$



ক্রমিক সমানুপাত





ক্রমিক সমানুপাত

→ $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, $a \neq c$ প্রমাণ করুন যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাত।

Solⁿ:

$$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{b^2+2bc+c^2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2+2bc+c^2}$$

$$\frac{a^2+b^2-a^2-2ab-b^2}{a^2+2ab+b^2} = \frac{b^2+c^2-b^2-2bc-c^2}{b^2+2bc+c^2}$$

$$\frac{-2ab}{a^2+2ab+b^2} = \frac{-2bc}{b^2+2bc+c^2}$$

$$\frac{a}{a^2+2ab+b^2} = \frac{c}{b^2+2bc+c^2}$$

$$ab^2+2abc + ac^2 = c^2 + 2abc + b^2c$$

$$ab^2 - b^2c + ac^2 - a^2c = 0$$

$$b^2(a-c) + ac(c-a) = 0$$

$$b^2(a-c) - ac(a-c) = 0$$

$$(a-c)(b^2-ac) = 0$$

$$\boxed{a-c \neq 0} \quad | \quad b^2-ac=0$$

$$\therefore \boxed{b^2=ac}$$

∴ a, b, c ক্রমিক সমানুপাত

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{c}}$$

$$\boxed{\frac{2}{5} = \frac{5}{2}}$$

$a \neq c$
X



ধারাবাহিক অনুপাত

- চারটি সমানুপাতিক রাশির প্রান্তীয় রাশি দুইটির গুণফল ২০০। ১ম রাশি : ২য় রাশি = ১ : ২,
২য় রাশি : ৪র্থ রাশি = ১ : ৪ হলে সংখ্যা চারটি নির্ণয় করুন।

[৩৩তম বিসিএস লিখিত]

সিঃ

$$১ম রাশি : ২য় রাশি = 1 : 2$$

$$২য় রাশি : ৪র্থ রাশি = 1 : 4 \\ = 2 : 8$$

$$\therefore ১ম রাশি : ২য় রাশি : ৪র্থ রাশি = 1 : 2 : 8$$

সর্বমোট,

$$x \cdot 8x = 200$$

$$৪x^2 = 200$$

$$x^2 = 25$$

$$\therefore x = 5$$

$$১ম রাশি : ২য় রাশি : ৪র্থ রাশি = ১ : ২ : ৪$$

সুতরাং

$$\frac{২য় রাশি}{১ম রাশি} = \frac{৪র্থ রাশি}{২য় রাশি}$$

$$\therefore \frac{10}{5} = \frac{৪র্থ রাশি}{২৫}$$

$$\therefore ৪র্থ রাশি = \frac{40 \times 5}{10} = 20$$

$$১ম রাশি : ২য় রাশি : ৪র্থ রাশি = 5 : 10 : 20 : 40$$



ধারাবাহিক অনুপাত

□ একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3 : 4 : 5$. কোণ তিনটির মান কত?

Solⁿ:

$$3x + 4x + 5x = 180$$

$$\text{অ. } 12x = 180$$

$$\text{ত. } x = 15$$

$$\therefore \text{কোণসমূহ} \quad 3x = 3 \cdot 15 = 45^\circ$$

$$4x = 4 \cdot 15 = 60^\circ$$

$$5x = 5 \cdot 15 = 75^\circ$$

৷



মিশ্রণের উপাদানের অনুপাত

- ৪০ কিলোগ্রাম দ্রবণে পানি এবং চিনির অনুপাত ৮ : ১। ঐ দ্রবণে কি পরিমাণ চিনি মিশ্রিত করলে পানি ও চিনির অনুপাত ৮০ : ১৯ হবে?

সমাঃ: /হাতম বিসিএস লিখিত/

$$\text{পানি} = \frac{8}{9} \times 40 = \frac{320}{9}$$

$$\text{চিনি} = \frac{1}{9} \times 40 = \frac{40}{9}$$

সংগত,

$$\frac{320}{9} : \left(\frac{40}{9} + x\right) = 80 : 19$$

$$\therefore \frac{320}{9} \times \frac{9}{40+9x} = \frac{80}{19}$$

↓ solving

$$\underline{x = 4 \text{ kg}}$$



মিশ্রণের উপাদানের অনুপাত

- ৬০ লিটার মিশ্রিত সেরিগ ও পলারি অনুলুত্র ৭ : ৩। ঐ মিশ্রিত জোর কীপার মিশ্রিত পলারি মিশ্রিত সেরিগ ও পানির অনুপাত ৩ : ৭ হবে?

Solⁿ:

Same as previous math.



অংশীদার কারবার সংক্রান্ত

ক ও খ যথাক্রমে ১০,০০০ টকা ও ৬,০০০ টকা দ্বি একত ব্লক রাব রা শরু করল। ৪ মজ পরে ক তার মূলধনের ১/৪ অংশ উঠিয়ে নিয়ে গেল এবং খ আরও ৫০০ টকা বিনিয়োগ করল। এর ২ মজ পরে গ ঐ ক রাব রা ১০,০০০ টকা দ্বি অংশীদার হলে। এর ৬ মজ পরে দে ঞ্গা লে তাদের কারবারে লাভ হয়েছে ২২,০০০ টকা। লাভের অংশ কে কত পাবে?

সি: [২০তম, ১১তম বিসিএস লিখিত]

১ মজ পরে 'ক' তার অংশের অংশ = $(4000 - \frac{1}{4} \times 4000) = 3000$ টাকা → ৪ মজ পরে

৪ মজ পরে 'ক' = ৪৩০০

'ক' তার মূলধন = $(4000 \times 4 + 3000 \times 8) = 40,000$ টাকা

'খ' " " = $(6000 \times 4 + 6500 \times 8) = 76000$ "

'গ' " " = $6 \times 10,000 = 60,000$ টাকা

ক, খ ও গ এর মূলধনের অনুপাত = $40,000 : 76,000 : 60,000$
= 10 : 19 : 15

ক লাভ = $\frac{10}{44} \times 22,000 = 5,000$ টাকা

খ - লাভ = $\frac{19}{44} \times 22,000 = 9,500$ টাকা

গ - লাভ = $\frac{15}{44} \times 22,000 = 7,500$ টাকা





বর্টন সংক্রান্ত সমস্যাবলি

- ক ফি টেং লেয়া স কা বি, মশুফ কিলু ও ম শার ফী ১৭১ র লা করল োস কা বি ও মশুফ কিলু র এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত ৩ : ২ হলে কে কত রান করেছে?

সল:

$$\text{মশুফ : মুশফিকুর} = 3:2 \\ = \boxed{9:6}$$

$$\text{মুশফিকুর : মাশরাফী} = 3:2 \\ = \boxed{6:4}$$

$$\therefore \text{মশুফ : মুশফিকুর : মাশরাফী} = 9:6:4$$

$$\text{মশুফ} = \frac{9}{19} \times 171 = 81$$

$$\text{মুশফিকুর} = \frac{6}{19} \times 171 = 54$$

$$\text{মাশরাফী} = \frac{4}{19} \times 171 = 36 \quad \text{সুতরাং}$$



বণ্টন সংক্রান্ত সমস্যাবলি

- কোন একজন মহিলার ২৪০৭৫ টাকা ছিল। তিনি নিজের জন্য ৬৭৫ টাকা রেখে অবশিষ্ট টাকা স্বামী, মা এবং কন্যাদ্বয়ের মধ্যে $১/৪ : ১/৬ : ২/৩$ অনুপাতে ভাগ করে দিলেন। প্রত্যেক কন্যা কত পেল?

সমাঃ [২৪০৭৫ - ৬৭৫] টাকা = $(24075 - 675)$ টাকা
= 23400 টাকা

স্বামী : মা : কন্যা = $\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{2}{3}$
= $3 : 2 : 8$

প্রত্যেক কন্যা পায় = $\frac{8}{13 \times 2} \times 23400$ টাকা
= 7200 টাকা



বণ্টন সংক্রান্ত সমস্যাবলি

□ একটি অফিসে ২ জন কর্মকর্তা, ৭ জন অফিস সহকারী এবং ৩ জন অফিস সহায়ক আছে। একজন অফিস সহকারী ১ টি কাপ লে, একজন অফিস সহকারী ২ টি কাপ। একজন কর্মকর্তা পায় ৪ টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন ১৫০০০০ টাকা হলে, কে কত বেতন পায়?

সমা: বেতনের অনুপাত

$$\text{অফিস সহকারী : অফিস সহায়ক : কর্মকর্তা} = (1 \times 3) : (2 \times 7) : (4 \times 2) \\ = 3 : 14 : 8$$

$$\therefore \text{অফিস সহকারীর বেতন} = \frac{3}{25 \times 3} \times 150000 = 6000 \text{ টাকা}$$

$$\text{" সহায়কের " } = \frac{14}{25 \times 7} \times 150000 = 12000 \text{ "}$$

$$\text{— কর্মকর্তার —} \text{" } = \frac{8}{25 \times 2} \times 150000 = 24000 \text{ টাকা}$$



বয়স সম্পর্কিত সমস্যাগুলি

- পতি ও পত্নী বর্তমান বয়সের সমষ্টি ৭০ বছর। তদ্ব্যতিরিক্ত বয়সের অন্তর ৭ বছর পরে বৃদ্ধি ৫ :
২। ৫ বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

Solⁿ:

বর্তমান বয়স

$$পতি = 5x + 7 \text{ বছর}$$

$$পত্নী = 2x + 7 \text{ "}$$

সর্বমোট,

$$5x + 7 + 2x + 7 = 70$$

$$\therefore 7x = 70 - 14$$

$$\therefore 7x = 56$$

$$\therefore x = 8$$

$$পতি বর্তমান বয়স = 47 বছর$$

$$পত্নী " " = 23 "$$

৫ বছর পরে পতি ও পত্নী বয়সের অনুপাত

$$= \frac{47 + 5}{23 + 5}$$

$$= \frac{52}{28}$$

$$= \frac{13}{7}$$



বয়স সম্পর্কিত সমস্যাবলি

- যদি A এর বয়স B এর অর্ধ এবং B এর বয়স C এর অর্ধ এবং C দ্বারা B বয়সের সমষ্টি ১১৪ বৎসর হয়, তবে প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় করুন। [২২ম তম বিসিএস লিখিত]

সমাধান:

A এর বয়স	= x	→	16 2/7 বছর
B " "	= 2x	→	2 × 16 2/7 "
C " "	= 4x	→	4 × 16 2/7 "

সর্বমোট,

$$x + 2x + 4x = 114$$
$$\therefore 7x = 114$$
$$\therefore x = 16 \frac{2}{7} \text{ বছর}$$



বয়স সম্পর্কিত সমস্যাগুলি

□ মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। পাঁচ বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হয়। ১৫ বছর পর মাতার বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির কত গুণ হবে?

ধরি, মাতার বয়স = x বছর

সুতরাং দুই কন্যার বয়সের সমষ্টি = y

সর্বমুখ্যে,
 $x = 4y$ — (1)

$$x + 5 = 2(y + 5 + 5)$$

$$\therefore x + 5 = 2(y + 10)$$

$$\therefore 4y + 5 = 2y + 20$$

$$\therefore 2y = 15$$

$$\therefore y = \frac{15}{2} \text{ বছর}$$

$$\textcircled{1} \text{ অর্থাৎ, } x = 4 \cdot \frac{15}{2} = 30 \text{ বছর}$$

১৫ বছর পর

$$= \frac{30 + 15}{\frac{15}{2} + 15 + 15}$$

$$= \frac{45}{\frac{15}{2} + 30}$$

$$= \frac{45 \times 2}{15 + 60}$$

$$= \frac{90}{75}$$

$$= \frac{6}{5}$$

Ans



প্রতিযোগিতা বিষয়ক সমস্যাবলি

- করিম যে সময়ে ৭ বার পদক্ষেপ দেয়, রহিম ততক্ষণে ৮ বার পদক্ষেপ দেয়। কিন্তু রহিম ৫ পদক্ষেপে যতদূর যায়; করিম ৪ পদক্ষেপে ততদূর যায়। করিম ও রহিমের গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় করুন।

সো: ২০তম বিসিএস, এলিভিডপ
Same in preceding math



প্রতিযোগিতা বিষয়ক সমস্যাবলি

- একটি বিড়াল একটি হাঁদুর ধরার জন্য তাড়া করে। বিড়ালটি যে সময়ে ৪ বার লাফ দেয় হাঁদুরটি সে সময়ে ৫ বার লাফ দেয়। বিড়ালটি ৫ লাফে যতদূর যায় হাঁদুরটি ৬ লাফে ততদূর যায়।

৫০) বিড়ালটি হাঁদুরটিকে ধরতে পারবে কি? হাঁদুরের বেগের তুলনা

$$\therefore " 4 " " = " \frac{6}{5} \times 4 " "$$

$$= \frac{24}{5} \text{ মিলিমিটার তুলনা}$$

$$\text{হাঁদুরের বেগ : হাঁদুরের বেগ} = \frac{24}{5} : 5$$

$$= \boxed{24 : 25}$$

\therefore বিড়ালটি হাঁদুরকে ধরতে পারবে না।



বিবিধ

করিম ও রহিমের আয়ের অনুপাত ৩ : ৪। তাদের ব্যয়ের অনুপাত ৪ : ৫। যদি করিমের সঞ্চয় তার আয়ের $\frac{1}{8}$ অংশ হয়, তাদের সঞ্চয়ের অনুপাত নির্ণয় করুন। [৪৪তম বিসিএস লিখিত]

Soln

করিমের আয় = $3x$

" রহিমের আয় = $4y$

" তাদের ব্যয় = $3x - 4y$

সর্বমোট, $3x - 4y = \boxed{\frac{1}{4} \cdot 3x}$ — (i)

অ. $12x - 16y = 3x$

স. $9x = 16y$

অ. $\boxed{y = \frac{9}{16}x}$ — (ii)

করিম ও রহিমের সঞ্চয়ের অনুপাত

$$= \frac{3x - 4y}{4x - 5y}$$

$$= \frac{3x/4}{4x - 5 \cdot \frac{9}{16}x}$$

[(i) ও (ii) বসে]

$$= \frac{12}{64 - 45}$$

$$= \boxed{\frac{12}{19}}$$

Ans



বিবিধ

→ শ্রেণিকক্ষে একটি কাজ একজন শিক্ষার্থী একা অথবা ছাত্র-ছাত্রীর জুটি করতে পারবে বলে শিক্ষক নির্দেশ দিলেন।

ছাত্রদের $\frac{2}{3}$ এবং ছাত্রীদের $\frac{3}{5}$ অংশ জুটি বেঁধে কাজটি করলো। শ্রেণির কতভাগ শিক্ষার্থী একা কাজটি করলো?

[৪৩তম বিসিএস লিখিত]

সমাঃ

$$\begin{aligned} \text{৪৩. ছাত্র সংখ্যা} &= x \text{ জন} \\ \text{ছাত্রী " } &= y \text{ " } \\ \therefore \text{ছাত্রের অংশ} &= (x - \frac{2}{3}x) \text{ জন} = \frac{1}{3}x \text{ জন} \\ \text{ছাত্রী " } &= (y - \frac{3}{5}y) \text{ " } = \frac{2}{5}y \text{ " } \end{aligned}$$

শর্তসত্তে,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x &= \frac{3}{5}y \\ \therefore x &= \frac{9}{10}y \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

মোট ভাগ হল

$$= \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$$

মোট শিক্ষার্থী = $x + y$

$$\begin{aligned} \text{অর্থাৎ} &= \frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y}{x + y} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}y + \frac{2}{5}y}{\frac{9}{10}y + y} \\ &= \frac{9 + 12}{27 + 30} = \frac{21}{57} = \frac{7}{19} \end{aligned}$$



Last math

বিবিধ

□ ক ঘাঝেদি ষায় ১৩২ জন পরীক্ষার্থী মধ কৃতকার্য ও অকৃতকার্য পরীক্ষার্থীর অনুপাত ৯ : ২। যদি আরও ৪ জন পরীক্ষার্থী কৃতকার্য হয়, তবে কৃতকার্য ও অকৃতকার্য পরীক্ষার্থীর অনুপাত কত?

১০৮ কৃতকার্য পরীক্ষার্থী = $\frac{9}{11} \times 132 = 108$ জন

অকৃতকার্য " = $\frac{2}{11} \times 132 = 24$ "

আরও ৪ জন কৃতকার্য হলে

কৃতকার্য পরীক্ষার্থীর সংখ্যা = $(108 + 4)$ জন = ১১২ জন

অকৃতকার্য " " = $(24 - 4)$ " = ২০ "

∴ কৃতকার্য : অকৃতকার্য = ১১২ : ২০
= $\boxed{28:5}$ ✓



Facebook Page

<https://www.facebook.com/uttoronacademy>



Facebook Group (BCS উত্তরণ)

<https://www.facebook.com/groups/www.uttoron.academy>



YouTube Channel

<https://www.youtube.com/c/Uttoron>

BCS কঠিন নয়;
প্রস্তুতি যদি গোছানো হয়

 উত্তরণ
ক্যারিয়ার এন্ড স্কিলস একাডেমি

BCS অনলাইন ও অফলাইনের সমন্বয়ে গোছানো প্রস্তুতি (<https://www.youtube.com/watch?v=MFkWsFSNnPo>)



09666775566



www.uttoron.academy