

৪৬তম বিমিএম লিখিত ফুল কোর্স

গাণিতিক যুক্তি

লেখক: ০৫+০৬

টপিক:

- ✓ সেট ও ভেন চিত্র, ফাংশন এবং ত্রিকোণমিতিক মান ব্যবহার করে দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয়।
- ✓ বীজগাণিতিক সূত্রাবলি, উৎপাদকে বিশ্লেষণ, দ্বিঘাত সমীকরণ, বীজগাণিতিক সরলীকরণ, দুই ও তিন চলকবিশিষ্ট সমীকরণ, অসমতা, ল.সা.গু ও গ.সা.গু।



$A \subseteq B \rightarrow A$ is the subset of B

সেট

$B \supset A$
 B is the superset of A

প্রতীক	প্রতীকের নাম	প্রতীক	প্রতীকের নাম
$\{ \}$	সেট	$A' = U - A$	পূরক সেট
\cup (Union)	সংযোগ সেট	$A^c = U - A$	পূরক সেট
\cap (Intersection)	ছেদ সেট	U	সার্বিক সেট
\subseteq	উপসেট	\emptyset or $\{ \}$	ফাঁকা সেট
\subset	প্রকৃত উপসেট	\in element	অন্তর্গত
$\not\subseteq$	উপসেট নয় $A \not\subseteq B$	\notin not element	অন্তর্গত নয় এমন
\supseteq	সুপার সেট	(a, b)	ক্রমজোড়
\supset	প্রকৃত সুপারসেট	$A \times B$	কার্তেসীয় গুণজ সেট
$\not\supseteq$	সুপারসেট নয়	N_0/N_0	শূন্যসহ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট
$P(A)$	শক্তি সেট	N/N	শূন্য ছাড়া স্বাভাবিক সংখ্যার সেট
$A \setminus B$	সেটের অন্তর	Z/Z	পূর্ণ সংখ্যার সেট
$A - B$	সেটের অন্তর	R/R	বাস্তব সংখ্যার সেট

$A = \{1, 2, 3\}$
 $2 \in A$
 $3 \in A$
 $4 \notin A$

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

* $N \rightarrow$ normal $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

* $Z \rightarrow$ integers $= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

* $\mathbb{R} \rightarrow$ real numbers
 $\{0, +1, -1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \dots\}$

* Set:

'Group'

ଅନନ୍ତ ସଂଖ୍ୟା

ଅନନ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଗଠିତ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

ଓମ୍ପା $\left\{ \begin{array}{l} \text{କାନ୍ଦା} \\ \text{ନାହା} \end{array} \right.$

12 ଗଠି

ଅନନ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଗଠିତ

$$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$$

$$A = \{1, 2, 6, 3, 4\}$$

* 2nd matter of 2

* 2nd element of 2nd matter

मामामा 2

{1, 1, 2, 2}

~~4 element~~

{1, 2}
2 element

Union!

$$A = \{1, 2, 3\}$$

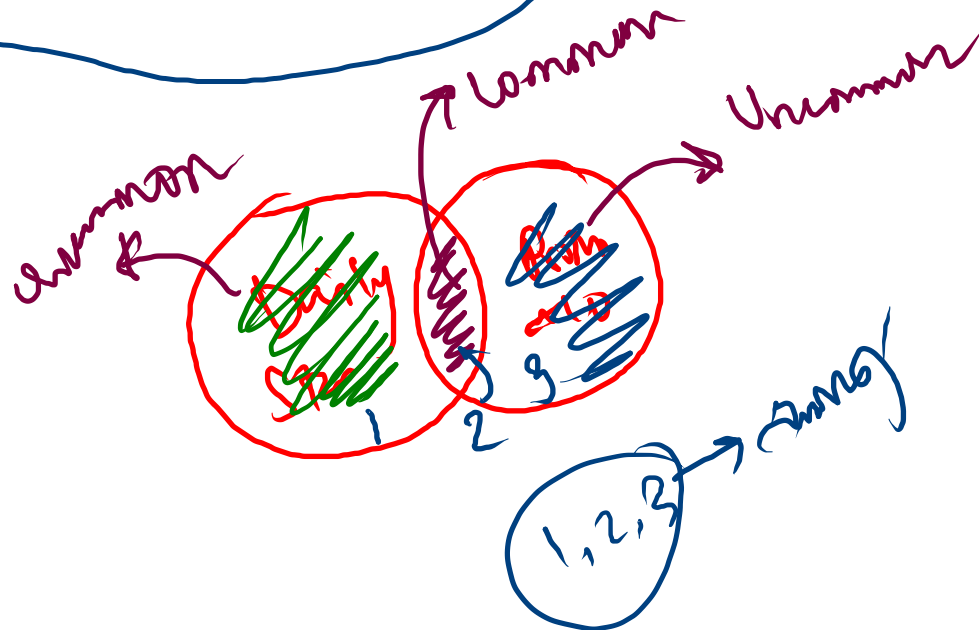
$$B = \{2, 3\}$$

$$\underline{\underline{A \cup B = \{1, 2, 3\}}}$$

2/22
Common element & Uncommon element

Daily
Steps

Prothom
Aro



*

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

Common



$$\{2, 3\} = A \cap B$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

* Complimentary (স্বতন্ত্র)

$$A' = U - A$$

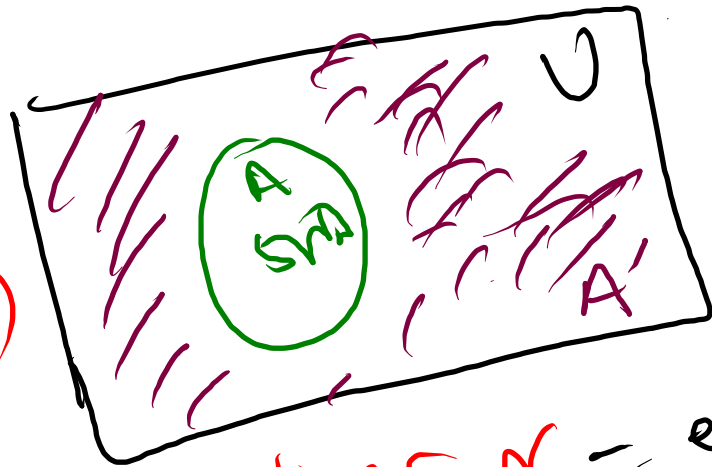
$$A' = U - A$$

কমপ্লিমেন্ট

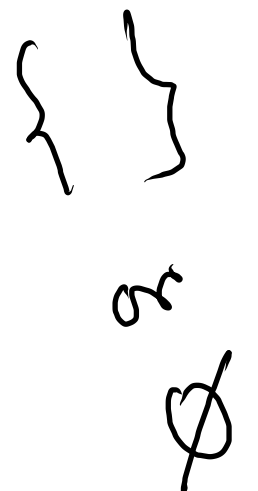
* সম্পূর্ণ (Universal)
 → সমস্ত (সব) পূর্ণ

$$A \cup A' = U$$

(সম্পূর্ণ)



$$A \cap A' = \text{empty / null / void} = \text{set} = \emptyset$$

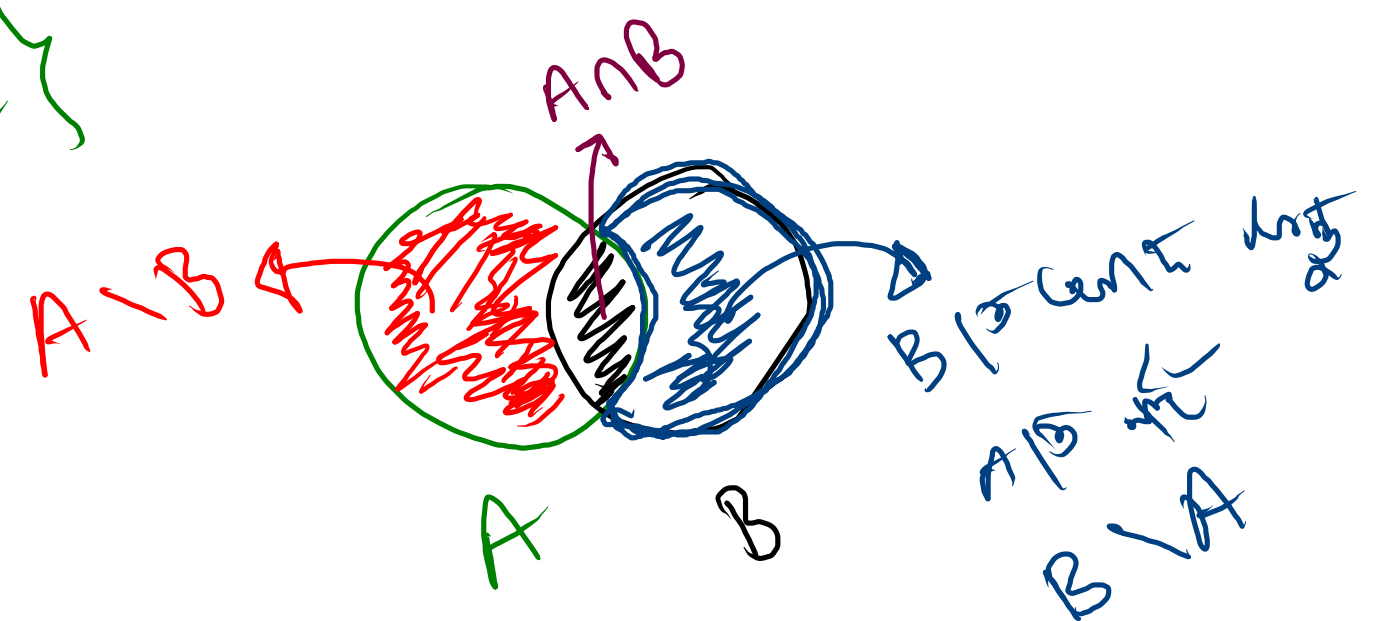


* $A \setminus B = A - B$
 $= A$ (ମଧ୍ୟ A ରୁ B ର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ)

$A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{2, 3, 4\}$

$A \setminus B = \{1\}$

$B \setminus A = \{4\}$



* Subset: 30/5/06

BCS = { Admin, Foreign, Police, Agri, Tax, Custom, Audit, ... }

2nd general case

{ Admin, Foreign, Police, Custom, Tax, Audit }

$A = \{1, 2, 3\}$ 3 elements

Three element subset $\rightarrow \{1, 2, 3\}$

Two element subset $\rightarrow \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

One element subset $\rightarrow \{1\}, \{2\}, \{3\}$

Zero element subset $\rightarrow \{\}$ or \emptyset

~~4~~ Total number of subsets of a set with n elements is 2^n ,
 Total subsets $n=3 \Rightarrow 2^3 = 8$

Ex: $2^3 - 1 = 7$ (excluding the empty set)

* Power Set:

2ⁿ subset or (2^n) power set

$$A = \{1, 2, 3\}$$

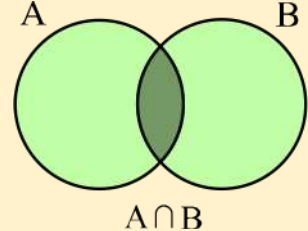
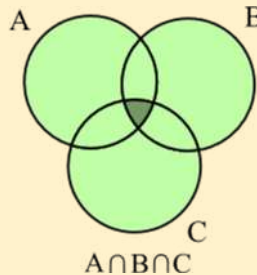
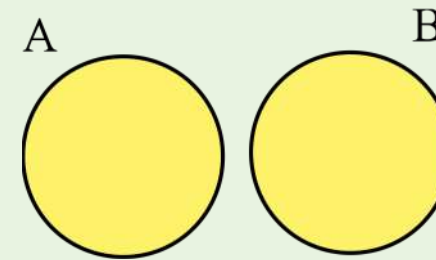
$$P(A) = \{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset \}$$



সেট

নাম	গাণিতিক প্রকাশ	ভেনচিত্র
সেটের অন্তর	$A - B$ বা $A \setminus B$	
পূরক সেট	A^c বা $A' = U - A$	
সংযোগ সেট	$A \cup B$	
	$A \cup B \cup C$	

ভেনচিত্র (VENN-DIAGRAM)

নাম	গাণিতিক প্রকাশ	ভেনচিত্র
ছেদ সেট	$A \cap B$	
	$A \cap B \cap C$	
নিচ্ছেদ সেট	$A \cap B = \emptyset$	

সূত্র সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যা

□ সেটের সূত্র সংক্রান্ত প্রমাণ

➤ সংযোগ বিধি (Associative law):

✓ (a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

✓ (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

➤ বণ্টন নিয়ম (Distribute law):

✓ (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

✓ (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

✗ ডি মরগ্যানের সূত্র (De Morgan's law):

✓ (a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

✓ (b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

সূত্র সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যা

$$\Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ ও } B = \{2, 4, 6\}$$

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ নির্ণয় করুন।

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$A \cap B = \{2, 4\}$$
$$A - B = \{1, 3\}$$

সূত্র সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যা

$$\begin{array}{r} 5 \mid 8 \mid 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$8 - 3 = 5$$

$$\begin{array}{r} 5 \mid 18 \mid 3 \\ \hline 15 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$18 - 3 = 15$$

যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতি ক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে এদের সেট নির্ণয় করুন।

অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা $A = \{24, 32, 36, 48, 72, 96, \dots\}$

২৪
২৪

$$311 - 23 = 288$$

$$419 - 23 = 396$$

$$288 \times 36$$

$$288 = 1 \times 288$$

$$= 2 \times 144$$

$$= 9 \times 32$$

$$= 12 \times 24$$

$$= 16 \times 18$$

$$= 3 \times 96$$

$$= 4 \times 72$$

$$= 6 \times 66$$

সিদ্ধি,
 $A = 23$ অবশিষ্ট হলে
 288 বা 396

$$A = \{24, 32, 36, 48, 72, 96, 144, 288\}$$

গাণিতিক যুক্তি-

B = 23 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା 396 ର ସମସ୍ତ ଉତ୍ତର

$$B = \{33, 36, 44, 66, 99, 132, 198, 396\}$$

$$\begin{aligned} 396 &= 1 \times \underline{396} \\ &= 2 \times \underline{198} \\ &= 3 \times \underline{132} \\ &= 4 \times \underline{99} \\ &= 6 \times \underline{66} \\ &= 9 \times \underline{44} \\ &= 11 \times \underline{36} = 12 \times \underline{33} = 18 \times 22 \end{aligned}$$

$$A \cap B = \{36\}$$

23 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ ଉତ୍ତର

Ans 36

সূত্র সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যা

⇒ $A = \{x, x \in \mathbb{N} : x^3 > 25 \text{ এবং } x^4 < 264\}$ হলে $P(A)$ নির্ণয় করুন।

[৩৭তম বিসিএস

লিখিত]

x is the element of \mathbb{N} যদি $x^3 > 25$ এবং $x^4 < 264$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$x=1 \text{ হলে, } x^3 = 1 \not> 25 \rightarrow 1 \notin A$$

$$x=2 \text{ হলে, } x^3 = 8 \not> 25 \rightarrow 2 \notin A$$

$$x=3 \text{ হলে, } x^3 = 27 > 25 \text{ এবং } x^4 = 81 < 264$$

$$3 \in A$$

$$x=4 \text{ হলে, } x^3 = 64 > 25 \text{ এবং } x^4 = 256 < 264$$

$$4 \in A$$

$$x=5 \text{ হলে, } x^3 = 125 > 25 \text{ এবং } x^4 = 625 \not< 264$$

$$5 \notin A$$

$$x=6, 7, \dots \text{ হলে } x^3 > 25 \text{ এবং } x^4 > 264$$



$$A = \{ \underline{3, 9} \}$$

$$\underline{P(A)} = \{ \underline{\{3, 9\}}, \underline{\{3\}}, \underline{\{9\}}, \underline{\emptyset} \}$$

সূত্র সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যা

Homework

→ মডিফ

→ $U = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 16\}$; $A = \{x: x, 4 \text{ এর গুণিতক এবং } x < 12\}$

(ক) A' নির্ণয় করুন।

(খ) $P(A \cap A')$ এর উপাদান সংখ্যা সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

$$A = \{4, 8\}$$

$$A' = U - A = \{1, 2, 6, 12, 16\}$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$P(A \cap A') = \emptyset$$

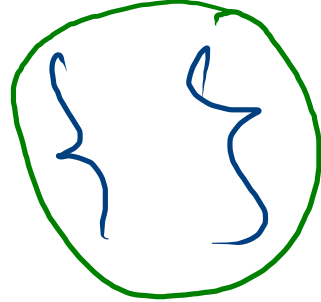
উপাদান সংখ্যা $20 = 2$

উপাদান সংখ্যা $2^2 = 2^0 = 1$

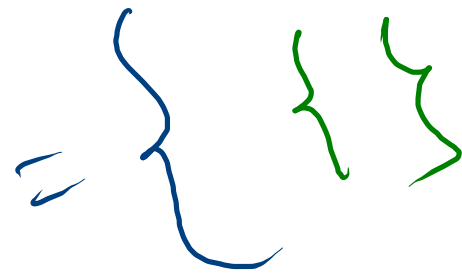
Handwritten note in green ink: "Handwritten" (written vertically).



$$A \cap A' = \{ \}$$



$$P(A \cap A') = \{ \{ \} \}$$



ভেনচিত্রের সূত্র সংক্রান্ত প্রমাণ

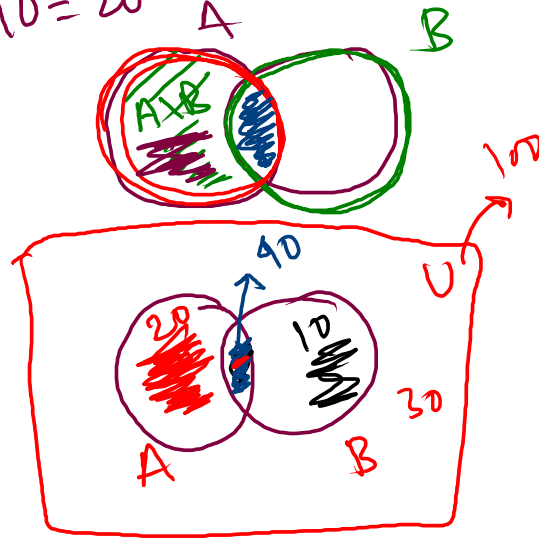
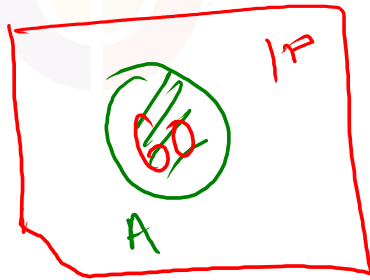
- ☉ সেটের উপাদান সংখ্যার ক্ষেত্রে $n(U) = 100$, $n(A) = 60$, $n(B) = 50$ এবং $n(A \cap B) = 40$ হলে, সংশ্লিষ্ট সূত্রসমূহ উল্লেখ করে- $n(A \cup B)$, $n(A \setminus B)$, $n(A^c)$, $n(A^c \cap B^c)$ এবং $n(A \oplus B)$ এর মান নির্ণয় করুন।

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 50 - 40 = 70$$

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 40 = 20$$

$$n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) = 10$$

$$n(A^c) = n(U) - n(A) = 100 - 60 = 40$$



গাণিতিক যুক্তি-

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

$$n(A \cup B)^c = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 70 = 30$$

$$A \text{ XOR } B = A B' + A' B$$

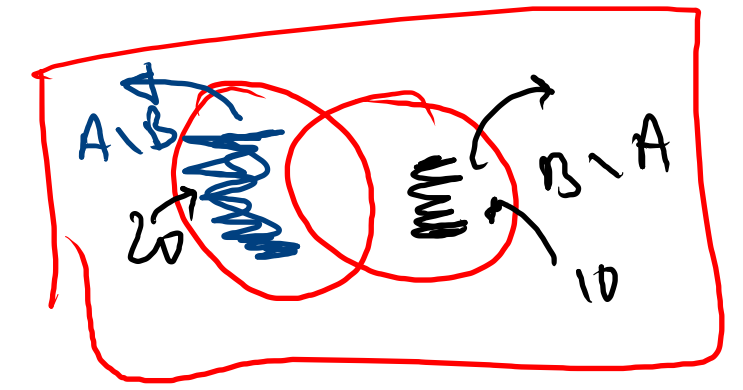
\downarrow
 $A \setminus B$
 $B \setminus A$

 \downarrow
 $A \setminus B$
 $B \setminus A$

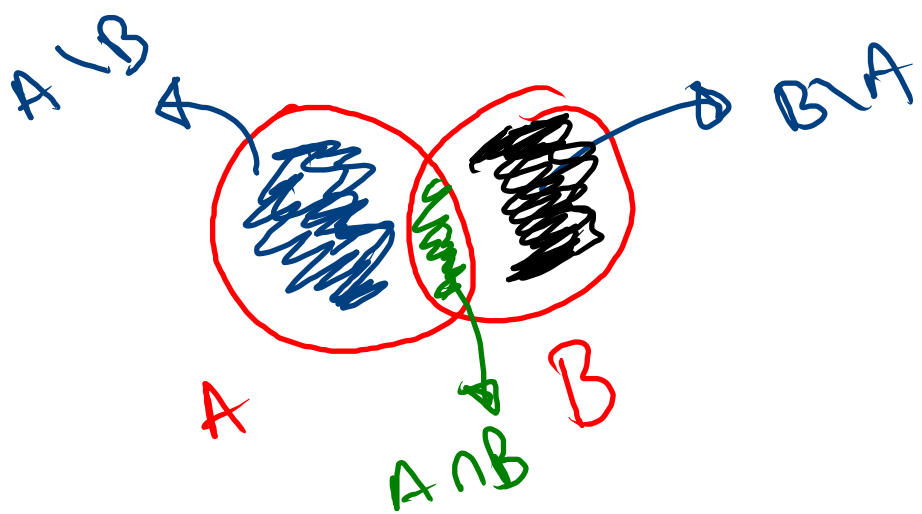
$$n(A \oplus B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A)$$

$$= 20 + 10$$

$$= 30$$



$n(A) =$ element
number of A



$$n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)$$

$$n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A)$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(U) = 100$$

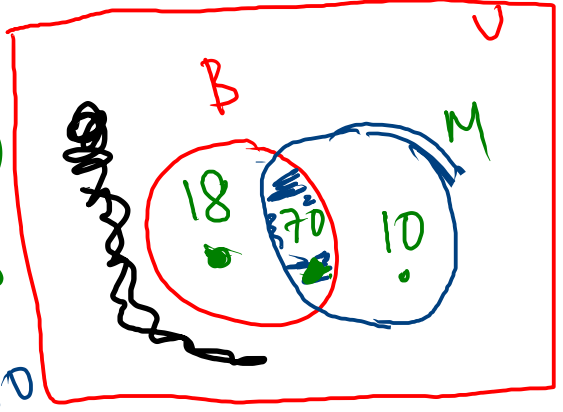
সেট ও ভেনচিত্রের ব্যবহারিক প্রয়োগ

$$n(B \cap M) = 70$$

100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 88 জন বাংলায়, 80 জন গণিতে এবং 70 জন উভয় বিষয়ে পাস করেছে। ভেনচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ করুন এবং কতজন শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে, তা নির্ণয় করুন।

বাংলায় পাস = B = 88
গণিত পাস = M = 80

মুঠ বাংলায় পাস = $n(B) - n(B \cap M)$
 $= 88 - 70 = 18$



মুঠ গণিত পাস = $80 - 70 = 10$

1 জন subject

↑
100



09666775566
www.uttoron.academy



গাণিতিক যুক্তি-

$$\text{এক্সেস} = n(B \cup M) = 18 + 70 + 10 = 98$$

$$\text{ফেলের সংখ্যা} = 100 - 98 = 2$$

সেট ও ভেনচিত্রের ব্যবহারিক প্রয়োগ

একটি স্কুল পরীক্ষায় ৭০% পরীক্ষার্থী গণিতে এবং ৮০% পরীক্ষার্থী বাংলায় পাস করে কিন্তু ১০% পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করে। যদি ৩৬০ জন পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে পাস করে, তাহলে কতজন পরীক্ষার্থী পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করেছিল?

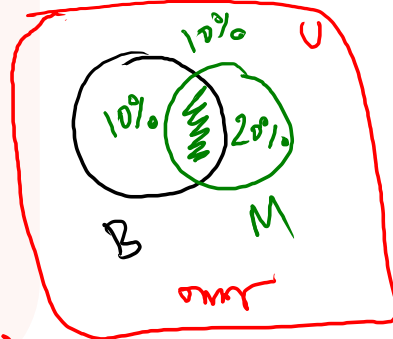
[৩২তম, ২০তম এবং ১৫তম বিসিএস লিখিত]

গণিত (সেট) = ৬০% = M

বাংলা (সেট) = ২০% = B

উভয় (সেট) = ২০%

উভয় $n(B \cap M) = ২০\% - (২০\% + ২০\%) = ৩০\%$



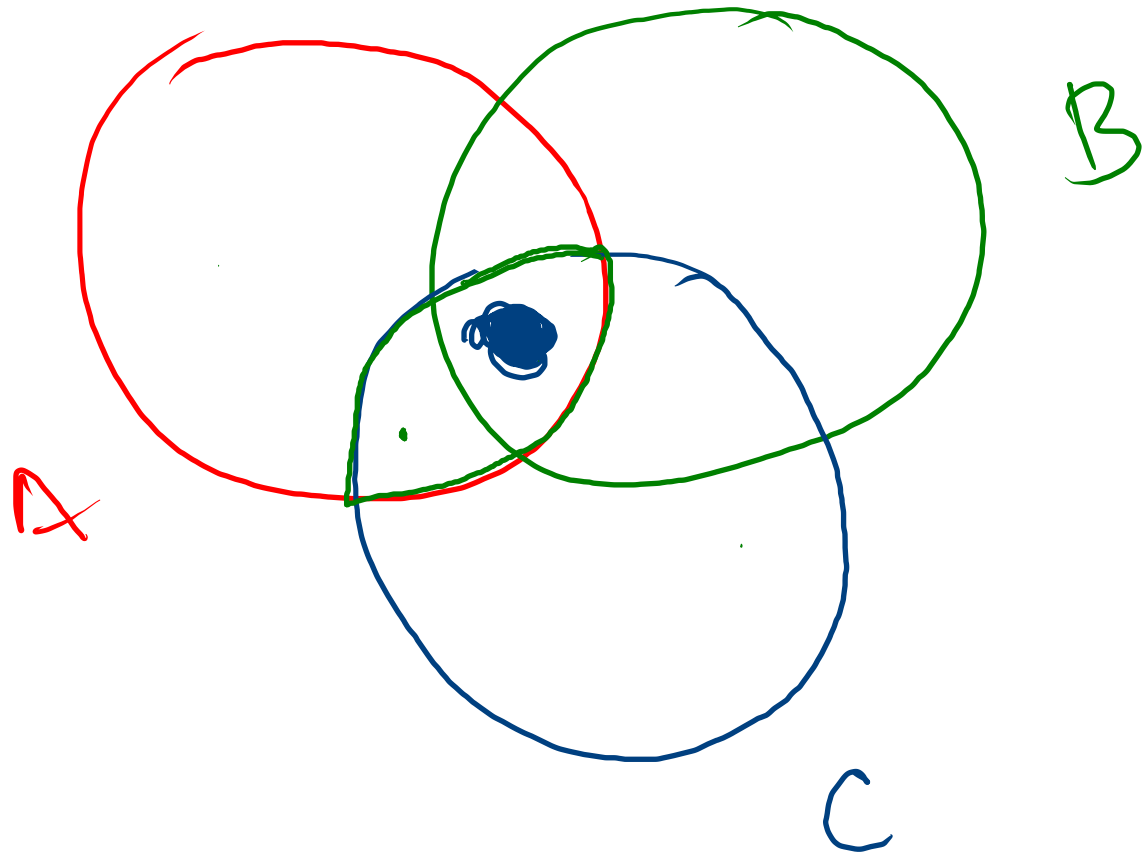
$$n(B \cup M) = n(B) + n(M) - n(B \cap M) = ৪০\%$$

উভয় $n(B \cap M) = ৩৬০$ জন

সেট, ২০% = ?

গাণিতিক যুক্তি-

৩০% → ৩৬০
 $\frac{৩৬০}{৩০} \times ২০ = ২৪০$ জন

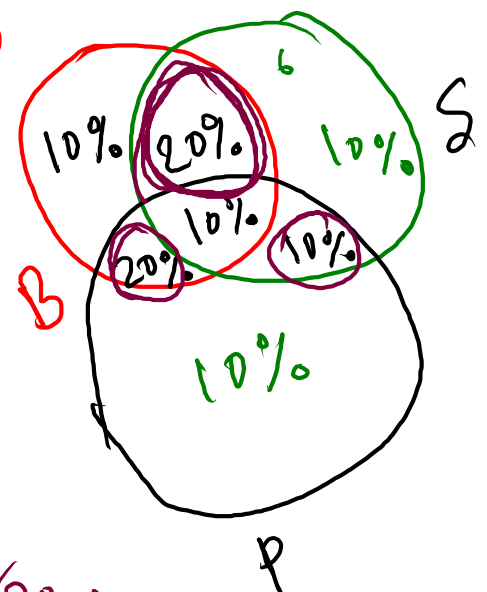
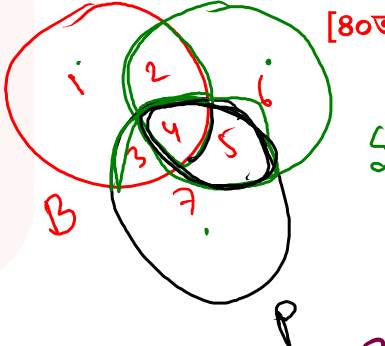
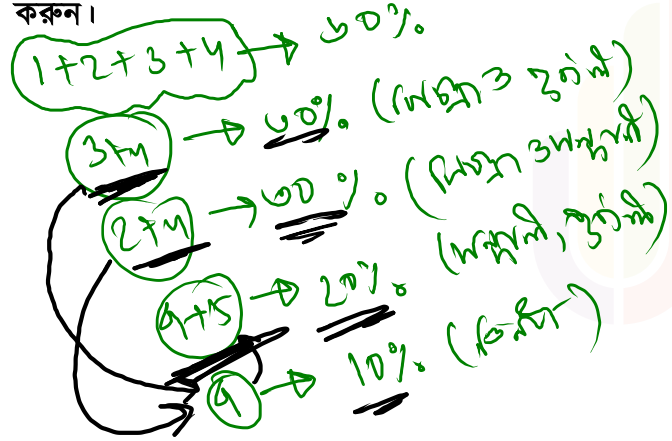


● $A \cap B \cap C$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

সেট ও ভেনচিত্রের ব্যবহারিক প্রয়োগ

⇒ ছাত্রদের মধ্যে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল ৬০% ছাত্র বিচিত্রা, ৫০% ছাত্র সন্ধানী, ৫০% ছাত্র পূর্বাণী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, ৩০% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী, ২০% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং ১০% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুটি পত্রিকা পড়ে তা নির্ণয় করুন।



মোট দুইটি পত্রিকা = $(20 + 20 + 10)\% = 50\%$

গাণিতিক যুক্তি-
 $2, 3, 4, 5$

মোট ১টি পত্রিকা = $1, 6, 7 = 10 + 10 + 10 = 30\%$

মোট অস্বত্ব পত্রিকা = $100\% - (10 + 20 + 20 + 10 + 10 + 10) = 10\%$

সেট ও ভেনচিত্রের ব্যবহারিক প্রয়োগ

- ➔ একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন হকি খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও হকি এবং 12 ফুটবল ও হকি খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়।
(ক) কতজন ছাত্র তিনটি খেলায় পারদর্শী?



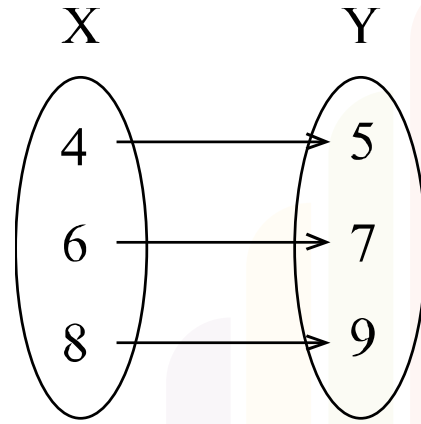
সেট ও ভেনচিত্রের ব্যবহারিক প্রয়োগ

- ➔ একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন হকি খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও হকি এবং 12 ফুটবল ও হকি খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়।
(খ) কতজন ছাত্র কেবলমাত্র ফুটবল খেলায় পারদর্শী ?



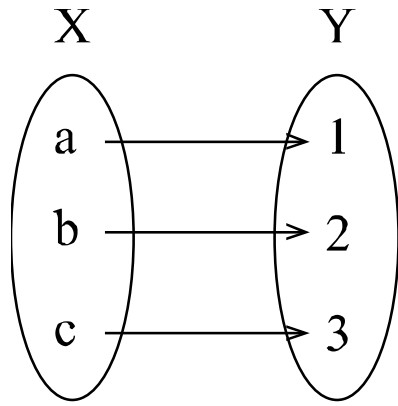
ফাংশন

□ অস্বয় (Relations): দুইটি সেটের উপাদানের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ককে অস্বয় বলে।

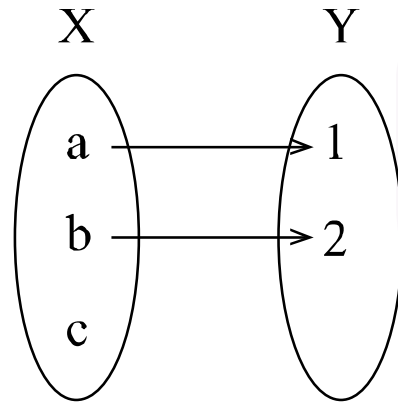


ফাংশন

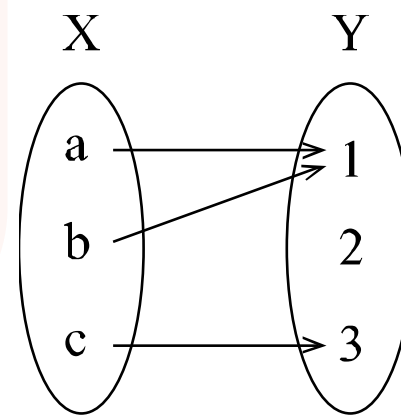
□ **ফাংশন (Function):** এক বিশেষ ধরনের অম্বয় যেখানে X সেটের প্রতিটি উপাদান Y সেটের অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট। এ ধরনের অম্বয়কে X সেট থেকে Y সেটের একটি ফাংশন বলা হয়। অর্থাৎ, সকল ফাংশন অম্বয় কিন্তু সকল অম্বয় ফাংশন নয়। একটি অম্বয় ফাংশন হবে যদি- (i) সেটের (X) সবগুলো উপাদান দ্বিতীয় সেটের (Y) উপাদান গুলোর সাথে সম্পর্ক গঠন করে (ii) তবে প্রথম সেটের একটি উপাদান দ্বিতীয় সেটের একাধিক উপাদানের সাথে সম্পর্ক গঠন করে না।



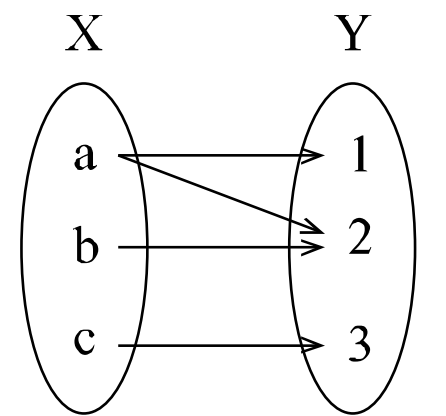
ফাংশন



ফাংশন নয়



ফাংশন

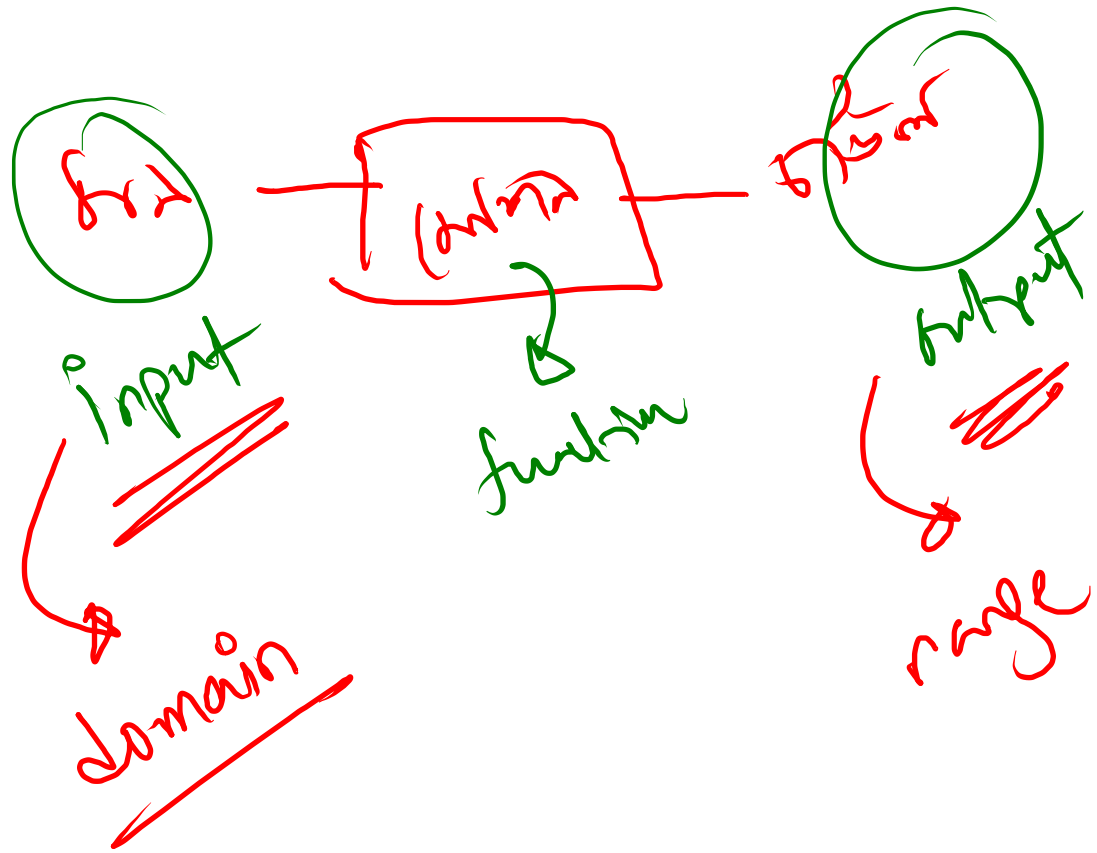


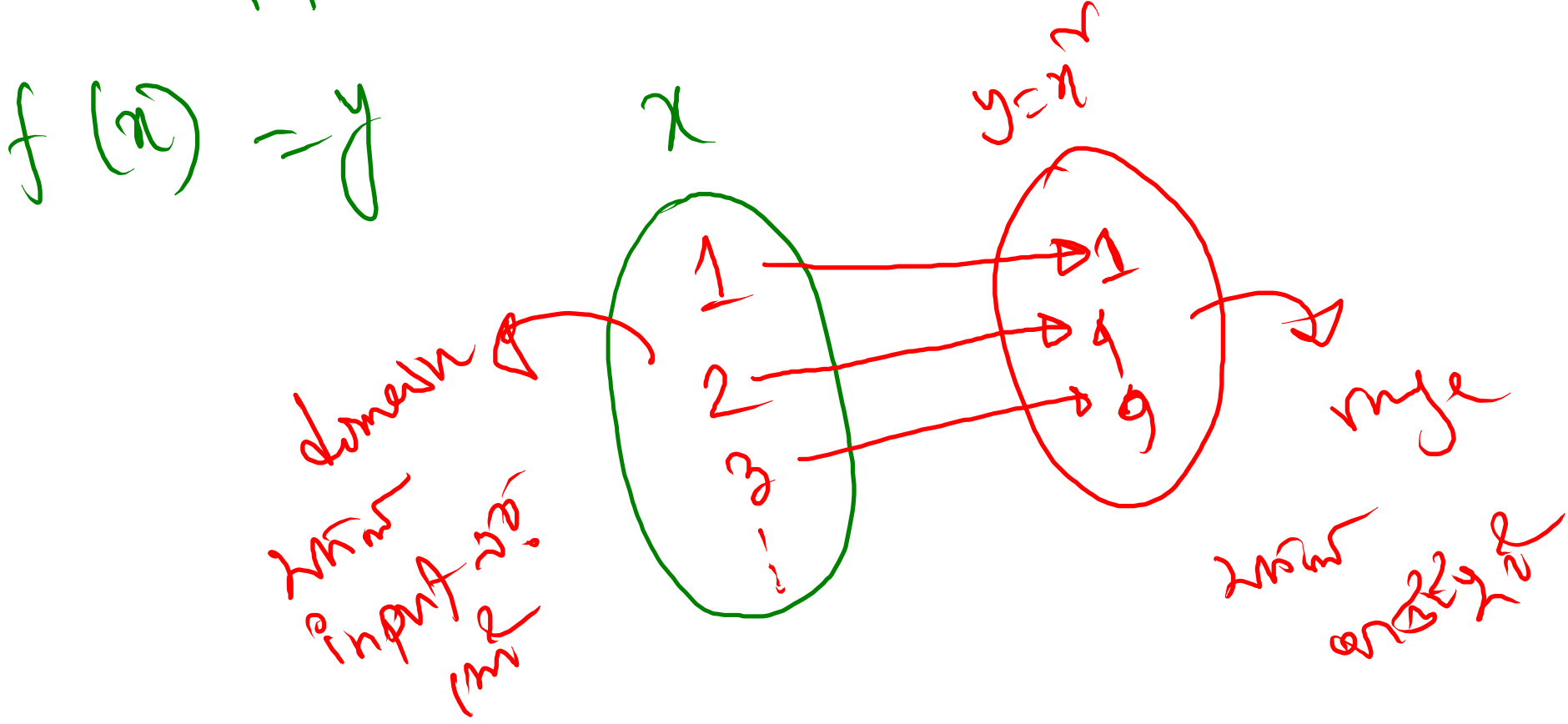
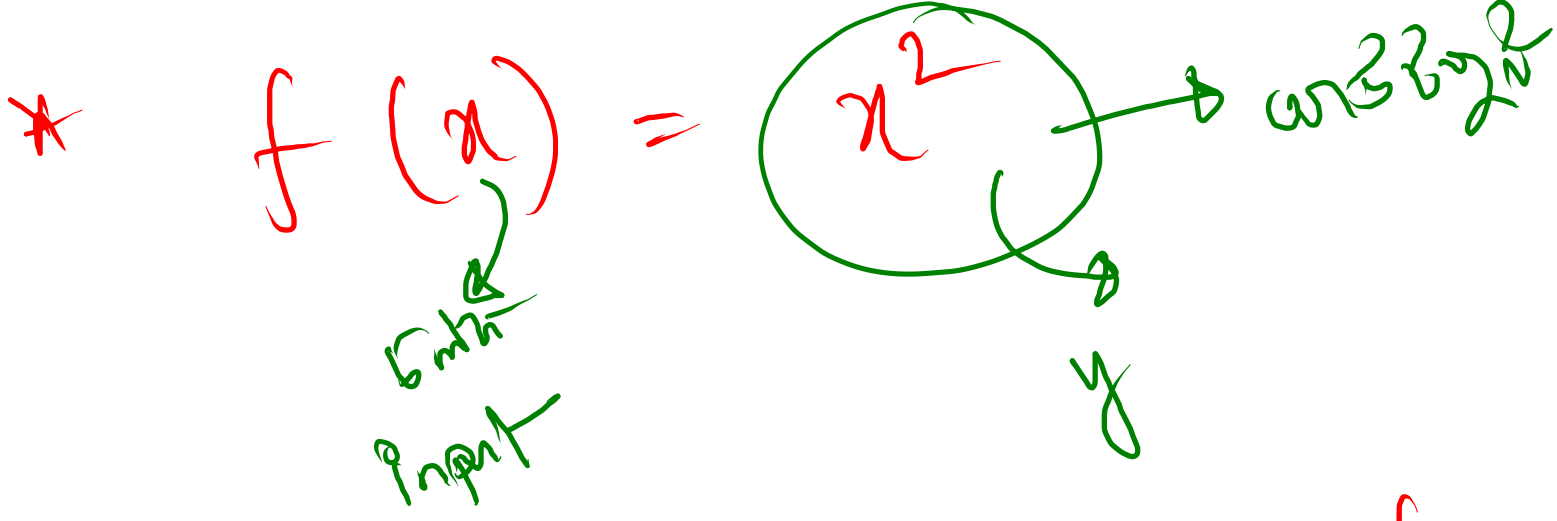
ফাংশন নয়

5 min Break

Will Start 8:42 pm

* map (function)





$$* f(x) = x^2$$

Q1.3.12 \rightarrow

is this
Q1.3.12
Q1.3.12

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 \\ f(-1) &= 1 \\ f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(1/2) &= 1/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Q1.3.12} &= \mathbb{R} = \{0, +1, -1, 1/2, \sqrt{2}, \dots\} \\ \text{Q1.3.12} &= \mathbb{R}_+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ or } x > 0\} \end{aligned}$$

~~⊛~~ $f(x) = \frac{1}{x}$

$$x=0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{0}$$

$$\text{Domain} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{Range} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Domain me 0 nahi
Range me 0 nahi

~~$x = -2$~~
 $f(-2) = \frac{1}{-2}$

* Range aur Domain

Range (Manna)

→ Range

Domain

Range

$$f(x) = x^2$$

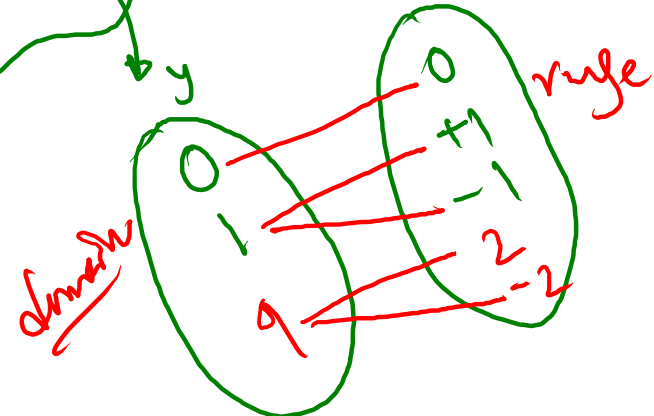
$y = x^2$

Range aur Domain

$f^{-1}(f(x)) = x$
 $f^{-1}(y) = x$

$x = \pm\sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$



$$* f(x) = y$$

$$* x = f^{-1}(y)$$

* $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ Find $f^{-1}(x) = ?$ $f^{-1}(2) = ?$

for,

$f(x) = y \rightarrow x = f^{-1}(y)$

$f^{-1}(y) = \frac{-3y-2}{y-1}$

$\frac{x-2}{x+3} = y$

$xy + 3y = x - 2$

$xy - x = -3y - 2$

$\therefore x(y-1) = -3y-2$

$\therefore x = \frac{-3y-2}{y-1}$

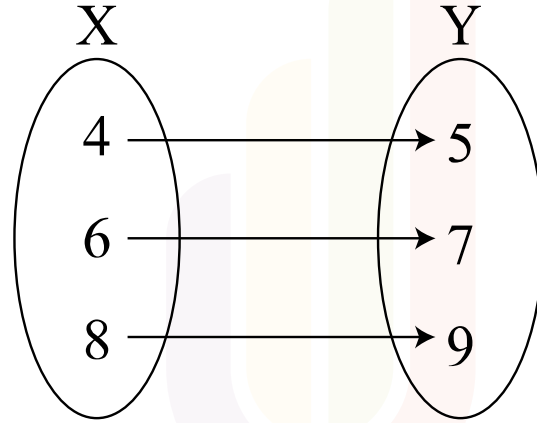
$f^{-1}(2) = \frac{-3 \times 2 - 2}{2 - 1}$

$f^{-1}(x) = \frac{-3x-2}{x-1}$

ফাংশন

□ ডোমেন(Domain) ও রেঞ্জ (Range) এর ধারণা: ডোমেনের সংজ্ঞা নিম্নোক্ত দুইভাবে বর্ণনা করা যায়-

(i) অশ্বয়ের সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান গুলো নিয়ে যে সেট গঠিত হয়, তাকে অশ্বয়ের ডোমেন বলে।



ফাংশন

(ii) কোনো ফাংশনের x এর যে সকল মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়, x এর সে সকল মানকে ফাংশনটির ডোমেন বলে।

যেমন: $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি যদি $f(x) = \frac{3}{x-1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, এক্ষেত্রে x এর যে সকল মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে, x এর সে সকল মানই $f(x)$ এর ডোমেন।

x এর মান	f(x) এর মান
-1	$-\frac{3}{2}$
0	-3
1	$\frac{3}{0}$ (অবমান্য)
2	3

ডোমেন: $\{-1, 0, 2\}$ রেঞ্জ: $\{-\frac{3}{2}, -3, 3\}$

সুতরাং প্রদত্ত $f(x)$ এর ডোমেন = $\{-1, 0, 2\}$
এবং $f(x)$ এর প্রাপ্ত বাস্তব মানকে ফাংশনের রেঞ্জ বলে।

সুতরাং প্রদত্ত $f(x)$ এর রেঞ্জ = $\{-\frac{3}{2}, -3, 3\}$

- সমীকরণ সম্বলিত ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয়ের ক্রম:
- বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করা।
 - বিপরীত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করা।
 - বিপরীত ফাংশনের ডোমেনই মূল ফাংশনের রেঞ্জ।

ফাংশন

⇒ যদি $f(y) = \frac{y^3 - 3y^2 + 1}{y(1-y)}$ হলে দেখান যে, $f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1-y)$



$$x = f^{-1}(y)$$

ফাংশন

Answer
x = -1

যদি $f: x \rightarrow \frac{2x-1}{2x+3}$ এবং $2f^{-1}(x) = x$ হয় তবে x-এর মান বাহির করুন। [৪৫তম বিসিএস]

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$$

ধরে, $f(x) = y$

$$\frac{2x-1}{2x+3} = y$$

$$\therefore x = \frac{1+3y}{2(1-y)}$$

$$2xy + 3y = 2x - 1$$

$$2xy - 2x = -3y - 1$$

$$2x(y-1) = -(1+3y)$$

$$x = -\frac{1+3y}{2(y-1)}$$

$$x = \frac{1+3y}{2(1-y)}$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1+3y}{2(1-y)}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{2(1-x)}$$

সুতরাং,

$$2f^{-1}(x) = x$$

$$2 \left\{ \frac{1+3x}{2(1-x)} \right\} = x$$

$$x - x^2 = 1 + 3x$$

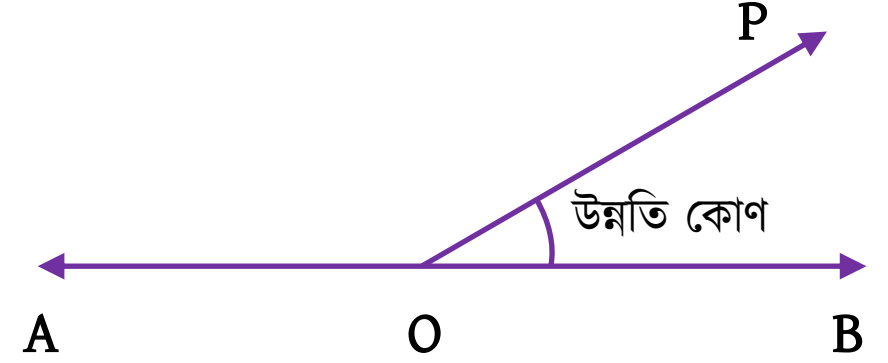
$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

ত্রিকোণমিতিক মান ব্যবহার করে দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয়

⇒ উন্নতি কোণ:

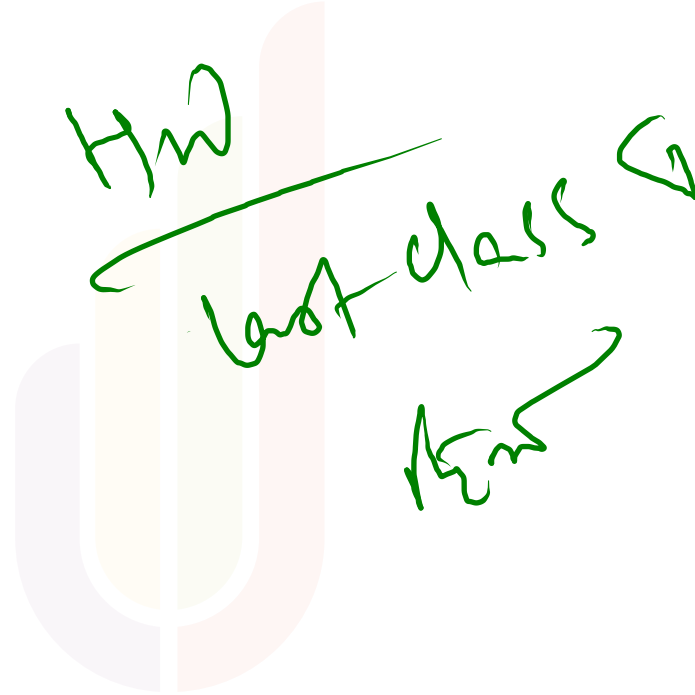


⇒ অবনতি কোণ:



ত্রিকোণমিতিক মান ব্যবহার করে দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয়

- ☞ কোন স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে ২৫ মিটার এগিয়ে এলে মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতিকোণ 30° থেকে 45° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করুন। [৪১তম বিসিএস লিখিত]



ত্রিকোণমিতিক মান ব্যবহার করে দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয়

- একটি দেয়ালের শীর্ষবিন্দু থেকে একটি রড ভূমিতে 60° কোণ উৎপন্ন করে। অন্য একটি রড প্রথম রডের ভূমির স্পর্শবিন্দু হতে ৪২ ফুট পেছনে ভূমিতে 85° কোণ উৎপন্ন করে। দেয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় করুন।
[৪৪তম বিসিএস লিখিত]



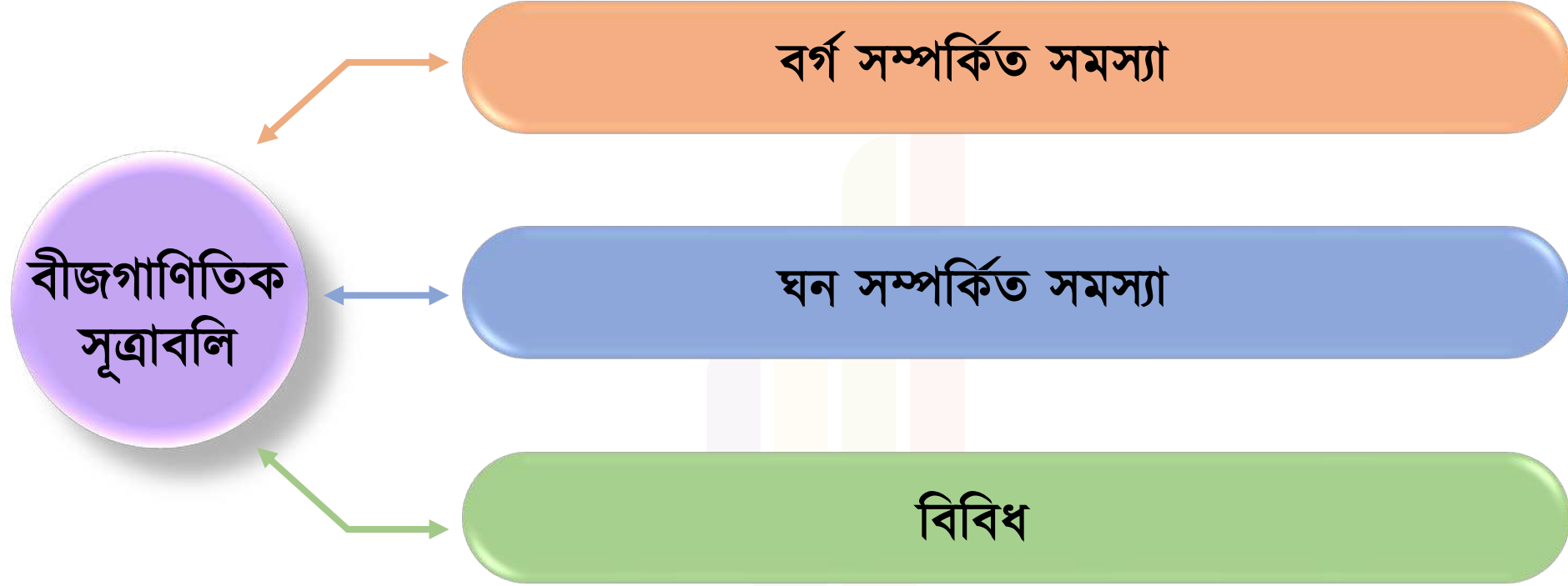
ত্রিকোণমিতিক মান ব্যবহার করে দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয়

- ⇒ একটি খুঁটি এমনভাবে ভেঙে গেল যে তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 85° কোণ উৎপন্ন করে খুঁটির গোড়া থেকে ১৫ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। খুঁটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [৪০তম বিসিএস লিখিত]



শেকচার-০৬

বীজগাণিতিক সূত্রাবলি



বর্গ সম্পর্কিত সমস্যা

❖ বর্গ-এর সূত্রসমূহ:

- ❑ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ❑ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ❑ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- ❑ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

❖ বর্গ-এর অনুসিদ্ধান্তসমূহ:

- ❑ $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
- ❑ $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
- ❑ $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
- ❑ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

- ❑ $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$
- ❑ $(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

- ❑ $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$
- ❑ $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\{(a + b)^2 + (a - b)^2\}$
- ❑ $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$
- ❑ $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

- ❑ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- ❑ $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$
- ❑ $(x - a)(x + b) = x^2 + (b - a)x - ab$
- ❑ $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

$$* (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$* (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

বর্গ সম্পর্কিত সমস্যা

⇒ $x + \frac{1}{x} = 5$ হলে, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[৪১তম বিসিএস লিখিত]

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 25$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (23)^2$$

$$(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 529$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 529 - 2 = 527$$

$\frac{1}{a}$ (সংস্কৃত) $\frac{1}{a}$ (সংস্কৃত)

বর্গ সম্পর্কিত সমস্যা

☛ $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ হলে, $\frac{a^2+2}{2a}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[৪৩তম বিসিএস লিখিত]

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a^2+2}{2a} = \frac{a^2}{2a} + \frac{2}{2a}$$
$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$$
$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

Handwritten signature

বর্গ সম্পর্কিত সমস্যা

☞ যদি $x + \frac{1}{x} = 3$ হয়, তবে $\frac{3x}{(x-1)^2}$ এর মান কত?

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 3$$

$$x^2 + 1 = 3x$$

$$\frac{3x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{3x}{(x^2 + 1) - 2x}$$

$$= \frac{3x}{3x - 2x}$$

$$= \frac{3x}{x} = 3$$

$$\underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{3}}$$

ঘন সম্পর্কিত সমস্যা

□ ঘন এর সূত্রসমূহ:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

হুম

□ ঘন এর অনুসিদ্ধান্তসমূহ:

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

ঘন সম্পর্কিত সমস্যা

☞ যদি $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ হয়, তবে $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[৪০তম বিসিএস লিখিত]

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 7$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2 = 9$$

$$x + \frac{1}{x} = \pm 3$$

$$\begin{aligned} \frac{x^6+1}{x^3} &= \frac{x^6}{x^3} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\text{সদ্য ক্রম} = \frac{x^6+1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 3^3 - 3 \times 3$$

$$= 18$$

যদি $x + \frac{1}{x} = 3$ হয়, তবে $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান = 18

যদি $x + \frac{1}{x} = -3$ হয়, তবে $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান = $(-3)^3 - 3(-3)$

$$= -27 + 9$$

$$= -18$$

Ans ± 18

$$x^9 = (x^3)^3$$

বর্গ সম্পর্কিত সমস্যা

☞ $x + \frac{1}{x} = 3$ হলে, $x^9 + \frac{1}{x^9}$ এর মান নির্ণয় করুন।

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times 3 = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

[৪৩তম বিসিএস লিখিত]

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^3 = (18)^3$$

$$\left(x^3\right)^3 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^3 + 3 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 5832$$

$$x^9 + \frac{1}{x^9} + 3 \times 18 = 5832$$

গাণিতিক যুক্তি-

$$x^9 + \frac{1}{x^9} = 5832 - 54 = 5778$$

ঘন সম্পর্কিত সমস্যা

☛ $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ হলে, $x^6 + \frac{1}{x^6}$ এর মান নির্ণয় করুন।
[লিখিত]

[৩৮তম বিসিএস]

$$\begin{aligned}x^6 + \frac{1}{x^6} &= (x^3)^2 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 \\&= \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2 + 2 \cdot \cancel{x^3} \cdot \frac{1}{\cancel{x^3}} \\&= \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2 + 2 \\&= \left\{ \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \right\}^2 + 2\end{aligned}$$

ঘন সম্পর্কিত সমস্যা

⇒ $x + \frac{1}{x} = 3$ হলে, $x^4 + x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[৩৬তম বিসিএস লিখিত]

$$x^9 + \frac{1}{x^9} = ?$$

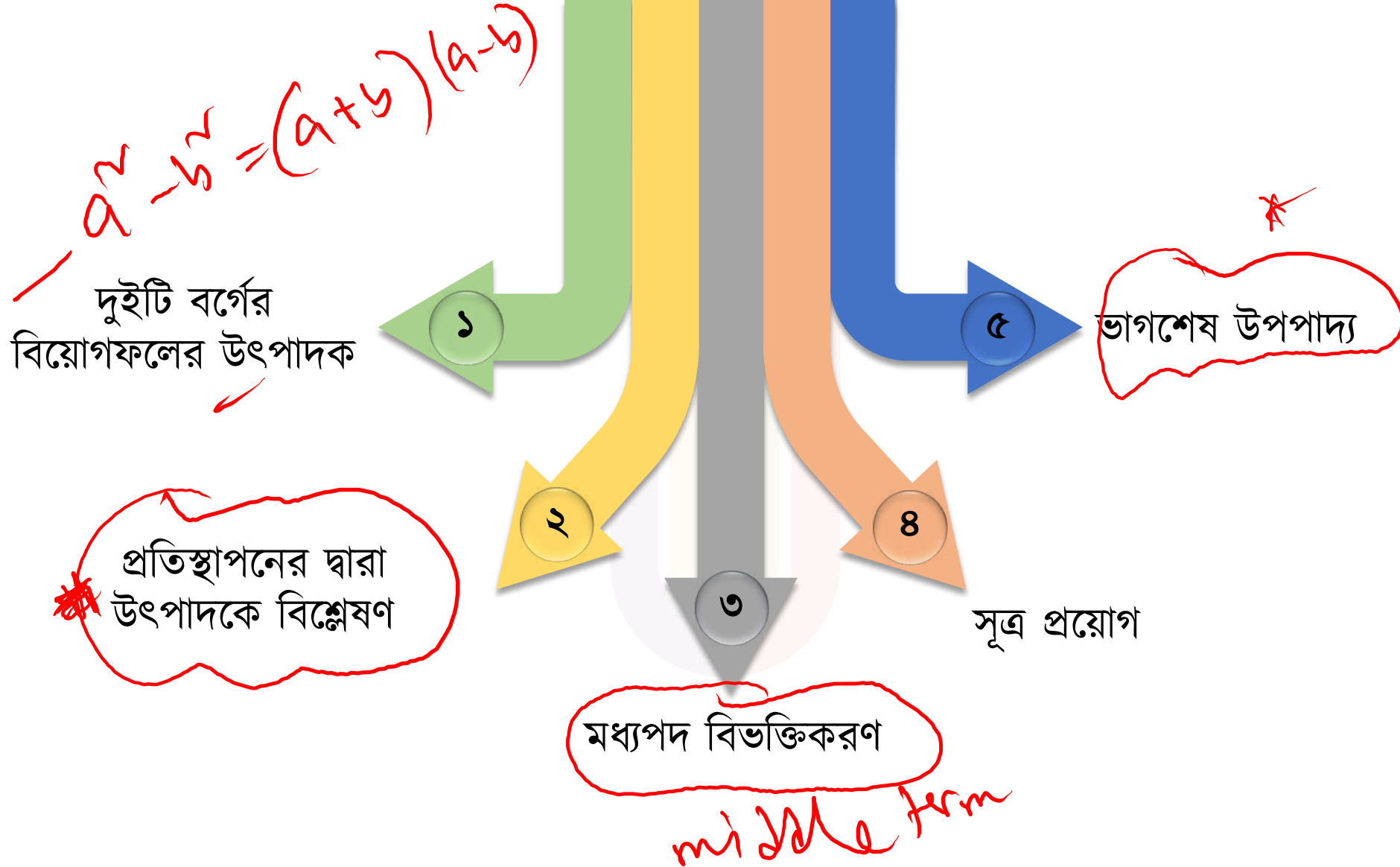
$$x^6 + \frac{1}{x^6} = ?$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$$

(x)

৯

উৎপাদকে বিশ্লেষণ



দুইটি বর্গের বিয়োগফলের উৎপাদক

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 8 - y^2 + 2y$$

$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 - (y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2)$$

$$= (a+3)^2 - (y-1)^2$$

$$= \{(a+3) + (y-1)\} \{(a+3) - (y-1)\}$$

$$= (a+y+2)(a-y+4)$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$3^2 - 1^2 = 8$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

প্রতিস্থাপনের দ্বারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ

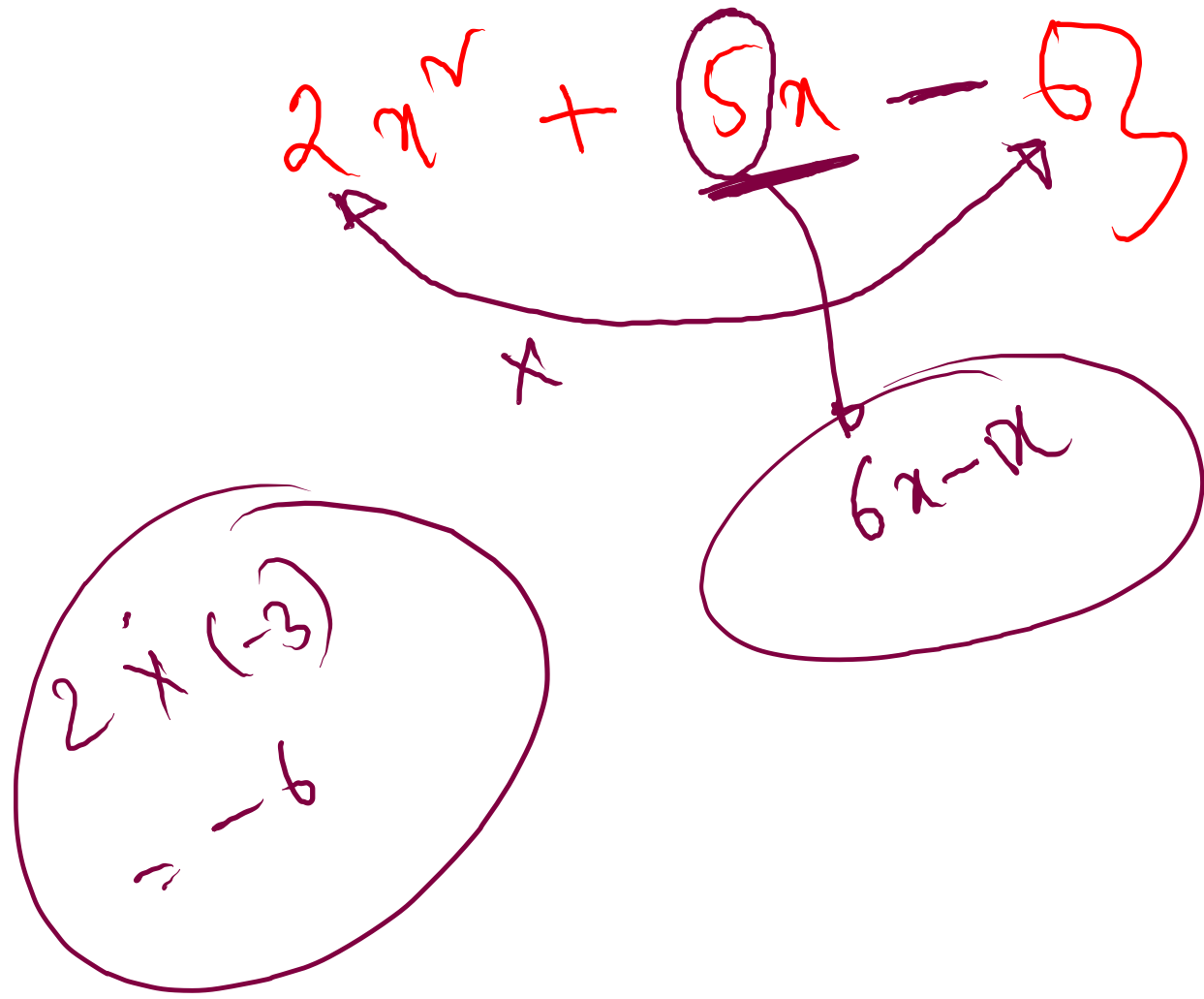
⇒ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $4a^2 + \frac{1}{4a^2} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$

[৪৪তম বিসিএস লিখিত]

$$= (2a)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 - 2 \cdot (2a) \left(\frac{1}{2a}\right) + 4a - \frac{1}{a}$$

$$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)^2 + 2 \left(2a - \frac{1}{2a}\right)$$

$$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right) \left\{ \left(2a - \frac{1}{2a}\right) + 2 \right\}$$



$$\begin{aligned}
 &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\
 &= 2x(x + 3) - 1(x + 3) \\
 &= (x + 3)(2x - 1)
 \end{aligned}$$

প্রতিস্থাপনের দ্বারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ

⇒ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন : $(a-1)x^2 + a^2xy + (a+1)y^2$ [৪৩তম ও ৩১তম বিসিএস লিখিত]

[দ্রষ্টব্য: ৪৩তম বিসিএস লিখিত প্রশ্নে ভুল ছিলো। প্রশ্নের তৃতীয় পদ $(a+1)y$ এর পরিবর্তে $(a+1)y^2$ হবে]

$$\left. \begin{array}{l} \text{সেত, } a-1 = p \\ a+1 = q \end{array} \right\} pq = (a-1)(a+1) = a^2 - 1 = a^2 - 1$$

$$a^2 = pq + 1$$

$$\begin{aligned} \text{মূল্য স্থাপন} &= px^2 + (pq+1)xy + qy^2 \\ &= px^2 + pqxy + xy + qy^2 \\ &= px(x+qy) + y(x+qy) \end{aligned}$$

$$= (x+qy)(px+y)$$

$$= \{x + (a+1)y\} \{ (a-1)x + y \}$$

৯

Common

প্রতিস্থাপনের দ্বারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ

⇒ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন : $x(x-1)(x-2)(x-3) - 24$

[৩৬তম বিসিএস লিখিত]

$$= x(x-3)(x-1)(x-2) - 24$$

$$= (x^2 - 3x) \{ x^2 - x - 2x + 2 \} - 24$$

$$= \underline{(x^2 - 3x)} \underline{(x^2 - 3x + 2)} - 24$$

ধিচ্চু,
 $x^2 - 3x = p$

$$= p(p+2) - 24$$

$$= p^2 + 2p - 24 = p^2 + 6p - 4p - 24$$

$$= p(p+6) - 4(p+6)$$

$$= (p+6)(p-4)$$

$$= (x^2 - 3x + 6)(x^2 - 3x - 4)$$

$$= (x^2 - 3x + 6)(x^2 - 4x + x - 4)$$

$$= (x^2 - 3x + 6) \{ x(x-4) + 1(x-4) \}$$

$$= (x^2 - 3x + 6)(x-4)(x+1)$$

∞

~~পূর্ণ~~ ভাগশেষ উপপাদ্য

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

○ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

[৩৮তম বিসিএস লিখিত]

$$= 27x^3(2x+a) - 8(2x+a)$$

$$= (2x+a)(\underline{27x^3} - 8)$$

$$= (2x+a) \{ (3x)^3 - 2^3 \}$$

$$= (2x+a)(3x-2) \{ (3x)^2 + 3x \cdot 2 + 2^2 \}$$

$$= (2x+a)(3x-2)(9x^2 + 6x + 4)$$

$$\begin{array}{r} 4 \times 9 \\ \hline 736 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \times 36 \\ 2 \times 18 \end{array}$$

$$3 \times 12$$

$$4 \times 9$$

$$6 \times 6$$

ভাগশেষ উপপাদ্য

$$1 \times 6 = 6$$
$$\frac{+1, +2, +3, +6}{\text{---}}$$

⇒ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 6 \neq 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$$

$$\therefore f(-1) = 0 \text{ হলে } \left\{ x - \left(\underset{-1}{-1} \right) \right\} = (x+1) \text{ গুণকটি } f(x)$$

এই উপপাদ্য হলে,

ଅଧିକତମ
ସଂଖ୍ୟା ପଦ
ସମାପ୍ତ

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$$

$$= x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1)$$

$$= (x+1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$= (x+1)(x^2 + 2x + 3x + 6)$$

$$= (x+1)(x+2)(x+3)$$

ଅଧିକତମ
ସଂଖ୍ୟା ପଦ
ସମାପ୍ତ

* $f(x)$ କୁ $(x-a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଜିବା ପାଇଁ

$$\text{ଶେଷ ଭାଗ} = f(a)$$

* $f(a) = 0$

ଅର୍ଥାତ୍, ଭାଗଶେଷ = 0,
 $f(x)$, $(x-a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଜିଯାଏ (କେଉଁ)

$(x-a)$; $f(x)$ ଉପରେ
ଭାଗଶେଷ 275,

$$* f(x) = x^4 - 1$$

(Note, $f(1) = 1^4 - 1 = 0$, so $(x-1)$ divides $f(x)$ with remainder 0

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2)^2 - (1)^2 \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) \\ &= (x^2 + 1)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

একঘাত সমীকরণ

সমাধান করুন : $\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x-2} = \frac{9}{x-3}$ \rightarrow $2^{\text{য়}} \rightarrow x-3 \neq 0$ [২৮তম বিসিএস লিখিত]

$$x, \frac{5}{x-1} + \frac{4}{x-2} = \frac{5}{x-3} + \frac{4}{x-3}$$

$$x, \frac{5}{x-1} - \frac{5}{x-3} = \frac{4}{x-3} - \frac{4}{x-2}$$

$$x, 5 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \right) = 4 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right)$$

$$x, 5 \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)} = 4 \frac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)}$$

$$x, \frac{-10}{(x-1)(x-3)} = \frac{4}{(x-3)(x-2)}$$

$$x, 4x - 4 = -10x + 20$$

$$14x = 4 + 20 = 24$$

$$x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \text{ ✓}$$

$x-3$ হার গুন

একঘাত সমীকরণ

সমাধান করুন : $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

$x-a-b \neq 0$
 দুই পক্ষ/দুই
 পক্ষ

$$\therefore \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a}{x-a-b} + \frac{b}{x-a-b}$$

$$\therefore \frac{a}{x-a} - \frac{a}{x-a-b} = \frac{b}{x-a-b} - \frac{b}{x-b}$$

$$\frac{a(x-a-b) - a(x-a)}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{b(x-b) - b(x-a-b)}{(x-a-b)(x-b)}$$

$ab \neq 0$

$$\therefore \frac{-ab}{x-a} = \frac{+ab}{x-b}$$

$$\therefore x-a = -x+b \quad \therefore x = \frac{a+b}{2}$$

একঘাত সমীকরণ

☞ বনভোজনে যাওয়ার জন্য ৫৭০০ টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো। শর্ত থাকল যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। ৫ জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া ৩ টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল?

[৩৬তম বিসিএস লিখিত]

ধরি, যাত্রীর সংখ্যা x জন
 যাত্রী না গিয়ে ভাড়া $\frac{5700}{x}$ টাকা

প্রতি যাত্রী = $(x-5)$ জন

$$\text{ঠিকানা ভাড়া} = \frac{5700}{x-5} \text{ টাকা}$$

সম্প্রতি,

$$\frac{5700}{x-5} - \frac{5700}{x} = 3$$

$$\therefore x^2 + 5x - 28500 = 0$$

$$x^2 + 200x - 28x - 28500 = 0$$

গাণিতিক যুক্তি-

$$x(x+200) - 28(x+200) = 0$$

$$(x+200)(x-28) = 0$$

$$x+200 = 0 \quad \text{অথবা} \quad x-28 = 0$$

$$x = -200 \quad \text{অথবা} \quad x = 28$$

$$x = 28 \quad (\text{যাত্রীর সংখ্যা})$$

$$\text{মোট ভাড়া} = 28 + 28 = 56 \text{ জন}$$

সমস্যা নং ১৫
 ১৫ জন যাত্রী গিয়েছিল

দ্বিঘাত সমীকরণ

$ax^2 + bx + c = 0$ একটি এক চলকের দ্বিঘাত বহুপদী সমীকরণ।

সমীকরণটির মূল $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; এখানে, $b^2 - 4ac$ কে নিশ্চায়ক বলা হয়।

নিশ্চায়ক ($b^2 - 4ac$) এর প্রকৃতি		মূল দুটির প্রকৃতি
$b^2 - 4ac > 0$ (ধনাত্মক)	$b^2 - 4ac$, পূর্ণবর্গ হলে	মূল দুটি বাস্তব, মূলদ ও অসমান হবে।
	$b^2 - 4ac$, পূর্ণবর্গ না হলে	মূল দুটি বাস্তব, অমূলদ ও অসমান হবে।
$b^2 - 4ac = 0$		পরস্পর বাস্তব, মূলদ ও সমান হবে।
$b^2 - 4ac < 0$ (ঋণাত্মক)		মূল দুইটি জটিল সংখ্যা হবে।

$$* 2x^2 + 5x + 6 = 0$$

(middle term)

Wt or not wt

সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

☉ $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) সমীকরণটি সমাধান করে x -এর মান নির্ণয় করুন। [৩৬তম বিসিএস
লিখিত]

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\textcircled{a}x^2 + \textcircled{b}x + \textcircled{c} = 0 \quad \text{27(25)}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

for example, $\textcircled{1}x^2 + \textcircled{5}x - \textcircled{6} = 0 \quad \text{27(25)}$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 5 \\ c &= -6 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{2} = 1, -6$$

* $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

negative
→
ଅନାଧିକ

$b^2 - 4ac = \text{discriminant} = D$

$D < 0$ → ଅନାଧିକ
 $D > 0$ → ଶାସ୍ତ୍ର, ଅନାଧିକ

$D = 0$, ଶାସ୍ତ୍ର
ଏକ-ଅନାଧିକ

$b^2 - 4ac < 0$ 2ଟି, x ବସ୍ତୁ ଭାବେ ଅନାଧିକ

$b^2 - 4ac > 0$ 2ଟି, x ବସ୍ତୁ ଭାବେ ଶାସ୍ତ୍ର

$b^2 - 4ac = 0$ 1ଟି, x ବସ୍ତୁ ଭାବେ

ଶାସ୍ତ୍ର ଲାଭେ, $x = \frac{-b}{2a}$
(ଏହି ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନାଧିକ)

$a=3, b=7, c=1$ সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

⇒ $3x^2 + 7x + 1 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করুন এবং মূলদ্বয়ের প্রকৃতি বিশ্লেষণ করুন।

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

x মূলদ্বয়ের মান দুইটি

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 3 \times 1 = 37$$

যেহেতু, $D > 0$, মূলদ্বয়ের মান দুইটি

$$* \quad 3x^2 + 1x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3 \times 4$$
$$= 1 - 48$$
$$= -47$$

→ $\sqrt{-47}$ is not possible

মূলের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কিত সমস্যা

P এর মানের ব্যবধি বের করুন যার জন্য $x^2 - 2px + p^2 + 5p - 6 = 0$ সমীকরণের কোনো বাস্তব মূল নেই। [80তম বিসিএস লিখিত]

$$1x^2 - 2px + (p^2 + 5p - 6) = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -2p$$

$$c = p^2 + 5p - 6$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2p)^2 - 4 \times 1 \times (p^2 + 5p - 6)$$

$$D = 4p^2 - 4p^2 - 20p + 24$$

$$D = 24 - 20p$$

কোন মূলও নেই হলে $D < 0$ হবে

$$D < 0 \text{ হবে}$$

$$24 - 20p < 0 \quad \therefore 24 < 20p$$

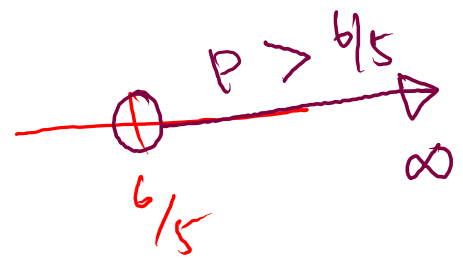
$$\therefore 20p > 24$$

$$p > \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

২ম মূল নেই হলে

$$p > \frac{6}{5}$$

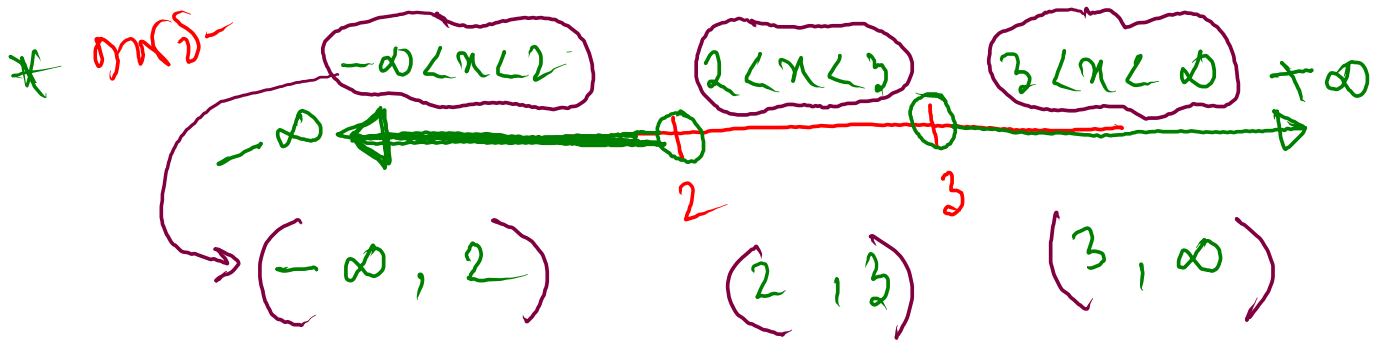
$$p > \frac{6}{5}$$



$$\text{সমাধান} = \left(\frac{6}{5}, \infty \right)$$

Ans





$$(a, b) = a < x < b$$

$$(a, \infty) = a < x < \infty$$

$$(-\infty, a) = -\infty < x < a$$

$$\underline{\underline{[a, b] = a \leq x \leq b}}$$

$$[a, b] = a \leq x \leq b$$

$$[b, \infty) = b \leq x < \infty$$

বর্গমূল ও ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণের সমাধান

➔ সমাধান করুন: $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

[৪১তম বিসিএস লিখিত]



বর্গমূল ও ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণের সমাধান

⇒ সমাধান করুন : $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$

[৩৮তম বিসিএস লিখিত]



☛ $x^2 - 5x + 6 > 0$ অসমতাটির সমাধান করুন।

[৪৪তম বিসিএস লিখিত]

$$\therefore x^2 - 2x - 3x + 6 > 0$$

$$x(x-2) - 3(x-2) > 0$$

$$(x-2)(x-3) > 0$$

সুগতম

positive

২য়/ ১) উৎস negative $\rightarrow x-2 < 0$ এবং $x-3 < 0$

$$x < 2 \text{ এবং } x < 3$$

$$x < 2$$

উত্তরণ

09666775566
www.utoron.academy



গাণিতিক যুক্তি-

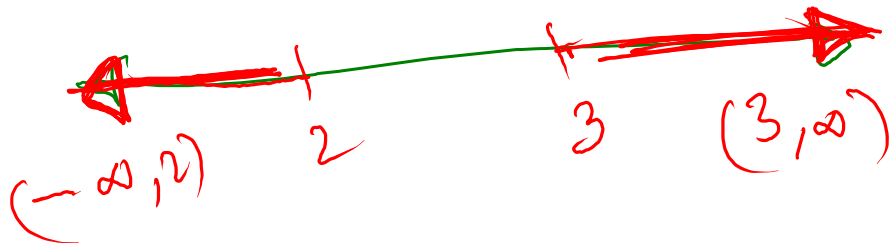
২য়/ ১১) উৎস positive $x-2 > 0$ এবং $x-3 > 0$

$$x > 2 \text{ এবং } x > 3$$

$$x > 3$$

$$\therefore x < 2 \text{ এবং } x > 3$$

$$(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$



$$* (x-2)(x-3) < 0$$

ಹಾಸ್ಟಾ ಮ್

ಸೂತ್ರ negative

ಇವು, ①
*

$$x-2 > 0 \quad \text{or} \quad x-3 < 0$$

positive negative

$$\therefore x > 2 \quad \text{or} \quad x < 3$$
$$\therefore 2 < x < 3$$

ಇವು, ②
X

$$x-2 < 0 \quad \text{or} \quad x-3 > 0$$

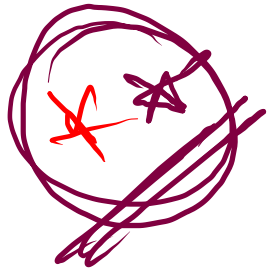
negative positive

$$x < 2 \quad \text{or} \quad x > 3$$

ಇವು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ

$$\text{ಹಾಸ್ಟಾ} = 2 < x < 3 = (2, 3)$$

∅



$$|x| < a \text{ अर्थ,}$$

$$-a < x < a$$

$$\star |2x + 5| < 3 \quad ; \text{ kankar 2?}$$

$$-3 < 2x + 5 < 3$$

$$-3 - 5 < 2x + 5 - 5 < 3 - 5$$

$$-8 < 2x < -2$$

$$- \frac{8}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{-2}{2}$$

$$\rightarrow -4 < x < -1$$



कमपना
negative sign
शुद्धी करनी
होगी

*

$$-x > 2$$

$\frac{1}{x} < -2$

∴

$$x < -2$$

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \text{ positive} \\ -x & ; x \text{ negative} \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$|2| = 2 \quad | -2 | = -(-2) = 2$$

$$* |2x + 5| > 7$$

Case 1:
when,

$(2x + 5)$ positive num,

$$2x + 5 > 7$$

$$\therefore x > 1$$

Case 2:

$(2x + 5)$ when negative num,

$$-(2x + 5) > 7$$

$$\therefore 2x + 5 < -7$$

$$2x < -5 - 7$$

$$2x < -12$$

$$x < \frac{-12}{2}$$

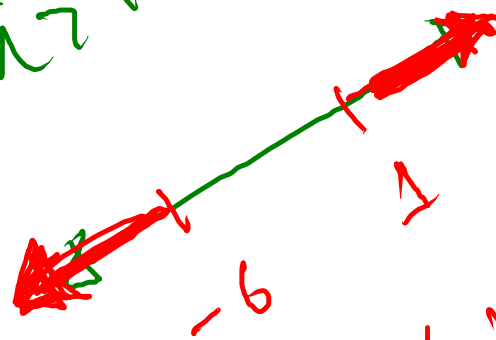
$$x < -6$$

माना 21

माना

$x > 1$

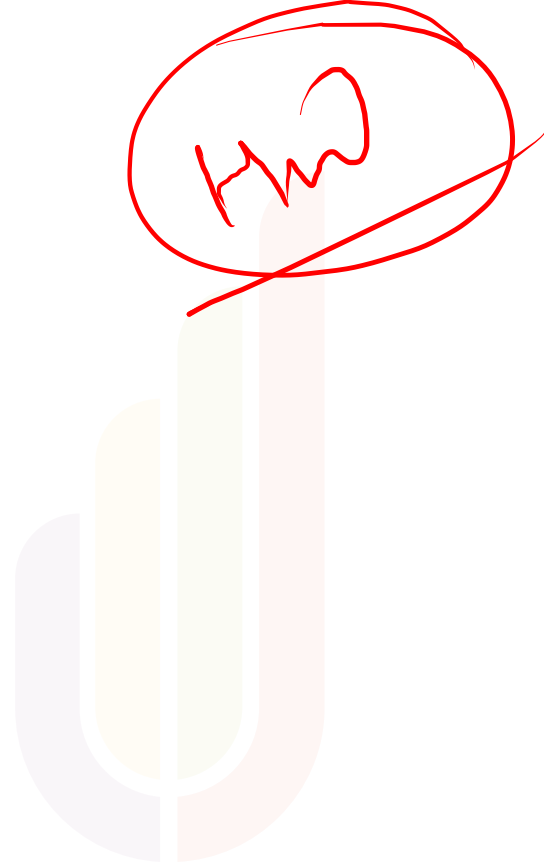
अतः $x < -6$



$(-\infty, -6)$ माना

পরমমান সম্পর্কিত অসমতার সমাধান

⇒ সমাধান করুন: $\frac{1}{|2x-1|} \geq 7, (x \neq \frac{1}{2})$



দুই চলক ও তিন চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ

☞ সমাধান করুন: $y(3+x) = x(6+y)$, $3(3+x) = 5(y-1)$

[৪৪তম বিসিএস লিখিত]

$$\therefore \underline{y(3+x)} = x(6+y) \text{ — (i)}$$

$$\underline{3(3+x)} = 5(y-1) \text{ — (ii)}$$

$$\Rightarrow 3+x = \frac{5}{3}(y-1) \text{ — (iii)} \Rightarrow x = \frac{5}{3}(y-1) - 3$$

(iii) মূল্যে x কে (i) এতে,

$$y \left(\frac{5}{3} \right) (y-1) = \left\{ \frac{5}{3}(y-1) - 3 \right\} (6+y)$$

যে মূল্যে x কে (iii) এতে

(ii)

যে মূল্যে y কে (ii) এতে

দুই চলক ও তিন চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ

⇒ $x + y = 1$, $kx + y = 2$ এবং $x + ky = 3$ হলে, k এর মান নির্ণয় করুন।

[৪৩তম বিসিএস লিখিত]

$$x + y = 1$$

$$\begin{aligned} kx + y &= 2 \\ x + ky &= 3 \end{aligned}$$

$$\oplus \rightarrow kx + x + y + ky = 5$$

$$x(k+1) + y(k+1) = 5$$

$$(x+y)(k+1) = 5$$

$$1(k+1) = 5$$

$$\cancel{k=4}$$

দুই চলক ও তিন চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ

- ☉ একজন শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতি বছর শেষে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ বেতন বৃদ্ধি পায়। তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4780 টাকা এবং 7 বছর পর 5140 টাকা হয়। 12 বছর পর তার মাসিক বেতন কত হবে তাহা বের করুন।

লিখিত]

মুঠ বেতন দিন x [৩৫তম

প্রতি বছর শেষে বেতন বাড় y বিসিএস

$$4 \text{ বছর শেষে বেতন} = x + 4y = 4780$$

$$7 \text{ বছর শেষে বেতন} = x + 7y = 5140$$

$x = ?$ $y = ?$

$$12 \text{ বছর শেষে বেতন} = x + 12y$$

= ?

বীজগাণিতীয় রাশির গ.সা.গু. নির্ণয়

☞ $a^3 - 3a^2 - 10a$, $a^3 + 6a^2 + 8a$ এবং $a^4 - 5a^3 - 14a^2$ রাশিগুলোর গ.সা.গু. এবং ল.সা.গু. নির্ণয় করুন।

$$\text{১} = a^3 - 3a^2 - 10a = a(a^2 - 3a - 10) = a(a-5)(a+2)$$

$$\text{২} = a^3 + 6a^2 + 8a = a(a^2 + 6a + 8) = a(a+4)(a+2)$$

$$\text{৩} = a^4 - 5a^3 + 14a^2 = a^2(a^2 - 5a + 14) = a^2(a-7)(a+2)$$

$$\text{গ.সা.গু.} = a(a+2)$$

$$\text{ল.সা.গু.} = a^2(a+2)(a-5)$$

গাণিতিক যুক্তি-

$$(a+4)(a-7)$$

ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. এর মধ্যে সম্পর্ক

➤ দুইটি সংখ্যার গ.সা.গু. a হলে সংখ্যা দুইটি হবে ax ও ay । এখানে, x ও y পরস্পর সহমৌলিক এবং ax ও ay সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু. = axy

➤ দুইটি সংখ্যার গুণফল = সংখ্যাদ্বয়ের গ.সা.গু. \times সংখ্যাদ্বয়ের ল.সা.গু.

Important

➤ দুইটি সংখ্যার একটি সংখ্যা, ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. জানা থাকলে,

$$\text{অপর সংখ্যা} = \frac{\text{সংখ্যাদ্বয়ের গ.সা.গু.} \times \text{সংখ্যাদ্বয়ের ল.সা.গু.}}{\text{একটি সংখ্যা}}$$

BCS কঠিন নয়; প্রস্তুতি যদি গোছানো হয়

 Facebook Page
<https://www.facebook.com/uttoronacademy>



 Facebook Group (BCS উত্তরণ)
<https://www.facebook.com/groups/www.uttoron.academy>

 YouTube Channel
<https://www.youtube.com/c/Uttoron>

 **উত্তরণ**
ক্যারিয়ার এন্ড স্কিলস একাডেমি

BCS অনলাইন ও অফলাইনের সমন্বয়ে গোছানো প্রস্তুতি
(<https://www.youtube.com/watch?v=MFKW8FSNnP0>)



 09666775566
 www.uttoron.academy