BCS Career SPARK

Engr. ALIF EMRAN (B.Sc in EEE, BUET)

ASP, 43rd BCS POLICE(recommended)

Former Assistant Engineer, DESCO (power division)

AD, BANGLADESH BANK (recommended)

Assistant Engineer,Bangladesh Railway(Gazetted)

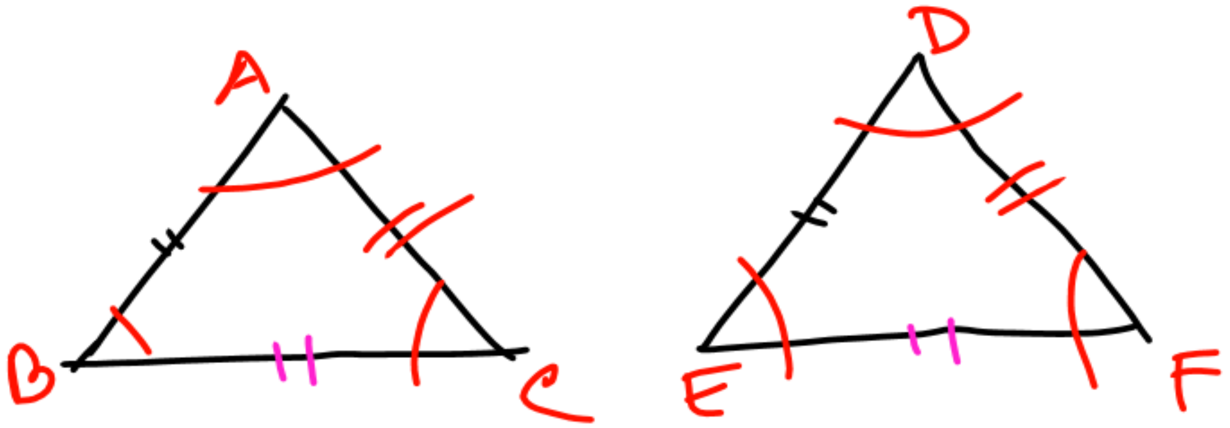
Geometry(Theorem –Circle Related)

৯-১০ শ্রেণির অধ্যায়- ০৮

বৃত্ত

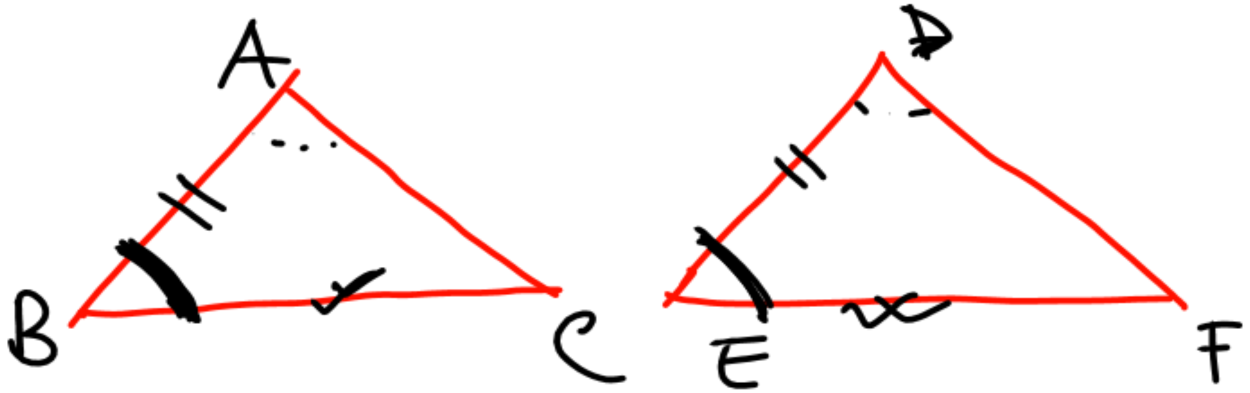
নিম্নের: সর্বসমতা

(i)



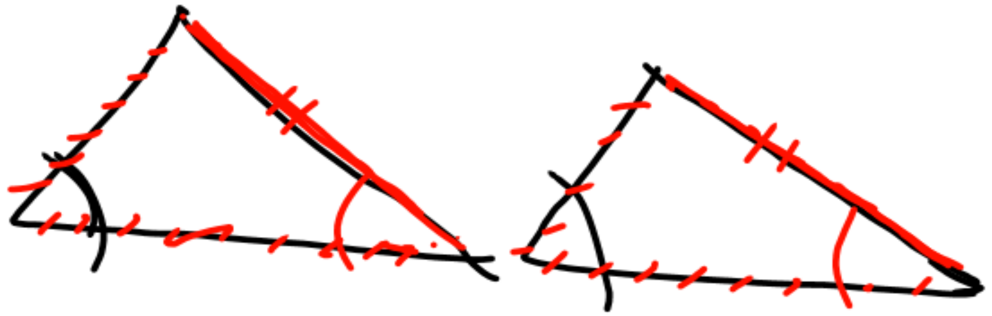
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(ii)

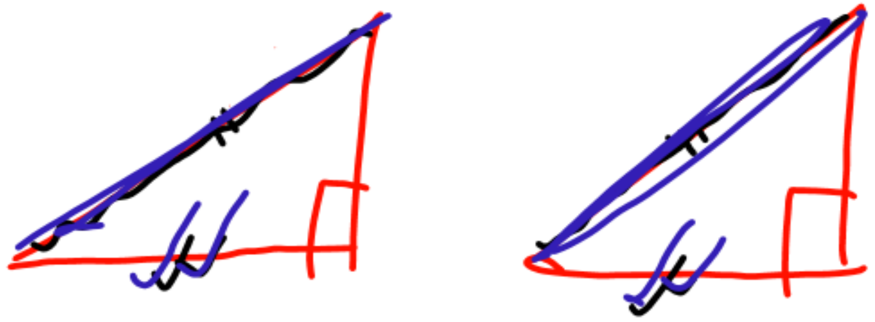


$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(iii)



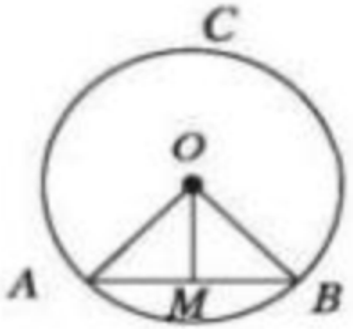
(iv)



প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব।

বিশেষ নির্বচন:

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা AB এবং এই জ্যা এর মধ্য বিন্দু M। O, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, OM রেখাংশ AB জ্যা এর উপর লম্ব।



অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle OAM$ এবং $\triangle OBM$ এ

$AM = BM$ [$\because$ M, AB এর মধ্যবিন্দু]

$OA = OB$ [$\because$ উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $OM = OM$ [সাধারণ বাহু]

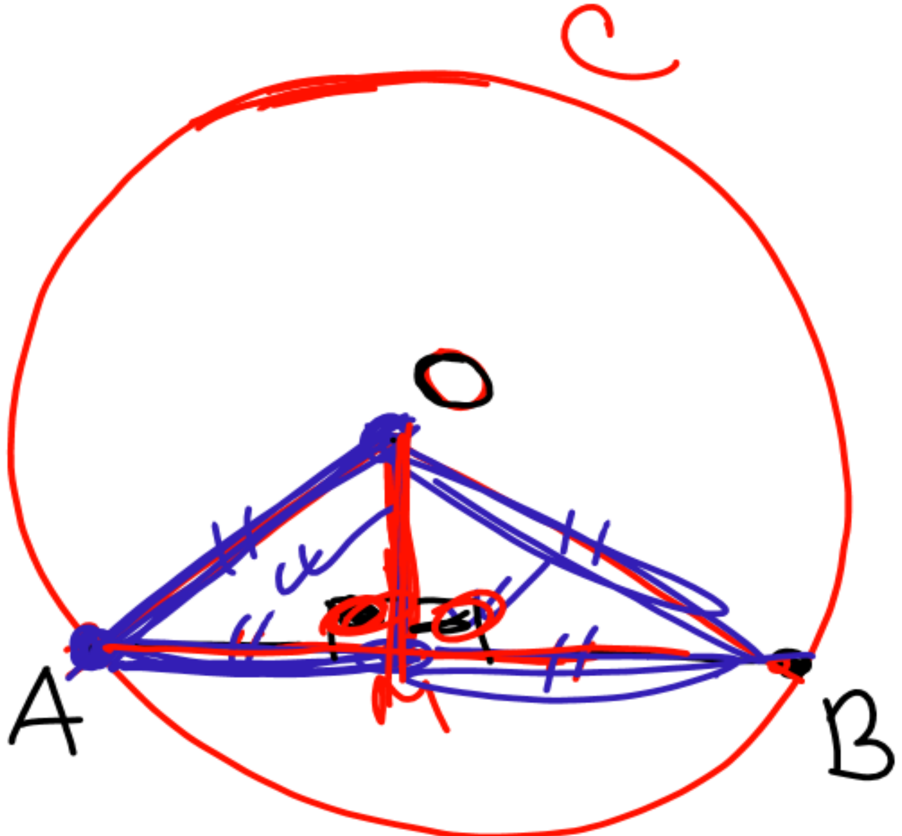
সুতরাং, $\boxed{\triangle OAM \cong \triangle OBM}$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle OMA = \angle OMB$

ধাপ ২. যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান।

সুতরাং, $\angle OMA = \angle OMB =$ এক সমকোণ।

অতএব, $OM \perp AB$। (প্রমাণিত)

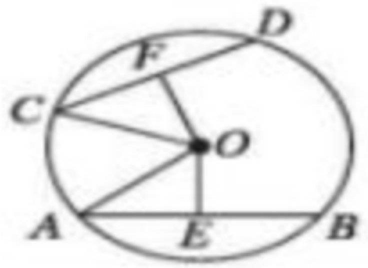


$AM = BM$ (শর্ত)

প্রমাণ → $AM \perp AB$

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এবং CD জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী।



অঙ্কন: O থেকে AB এবং CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব রেখাংশ আঁকি। O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$

সুতরাং, $AE = BE$ এবং $CF = DF$ [∵ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$

ধাপ ২. কিন্তু $AB = CD$ [ধরে নেয়া]

$\therefore AE = CF$

ধাপ ৩. এখন $\triangle OAE$ এবং $\triangle OCF$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং

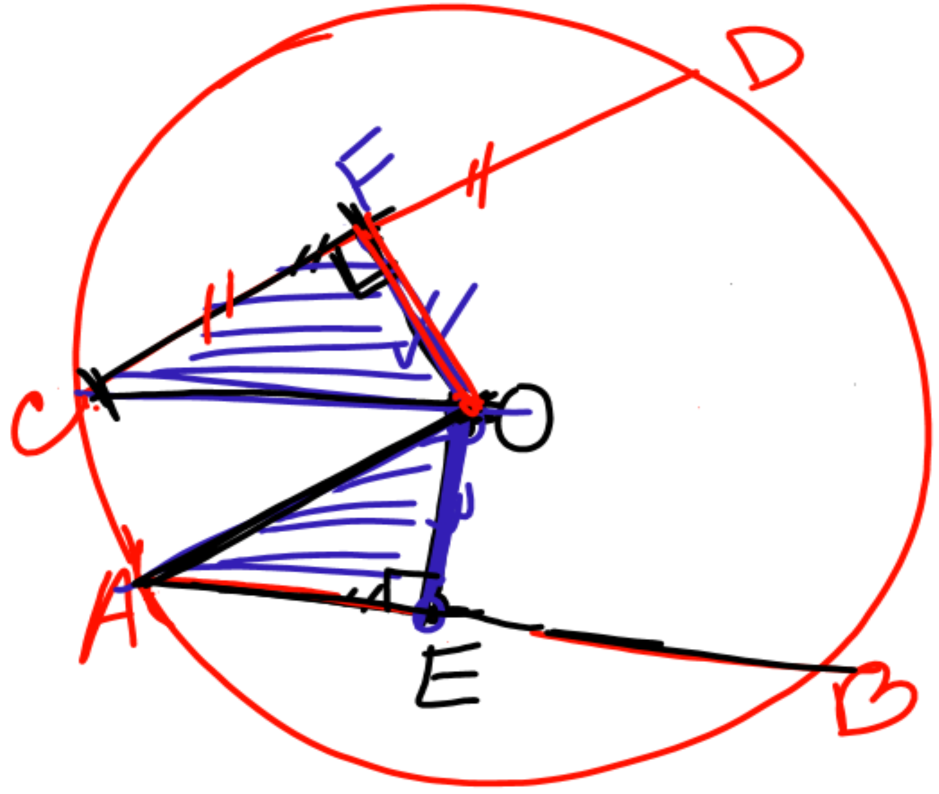
$AE = CF$ [ধাপ ২]

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCF$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore OE = OF$

ধাপ ৪. কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা এর দূরত্ব।

সুতরাং, AB এবং CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। (প্রমাণিত)



শর্ত: $AB = CD$

প্রমাণ: $OE = OF$

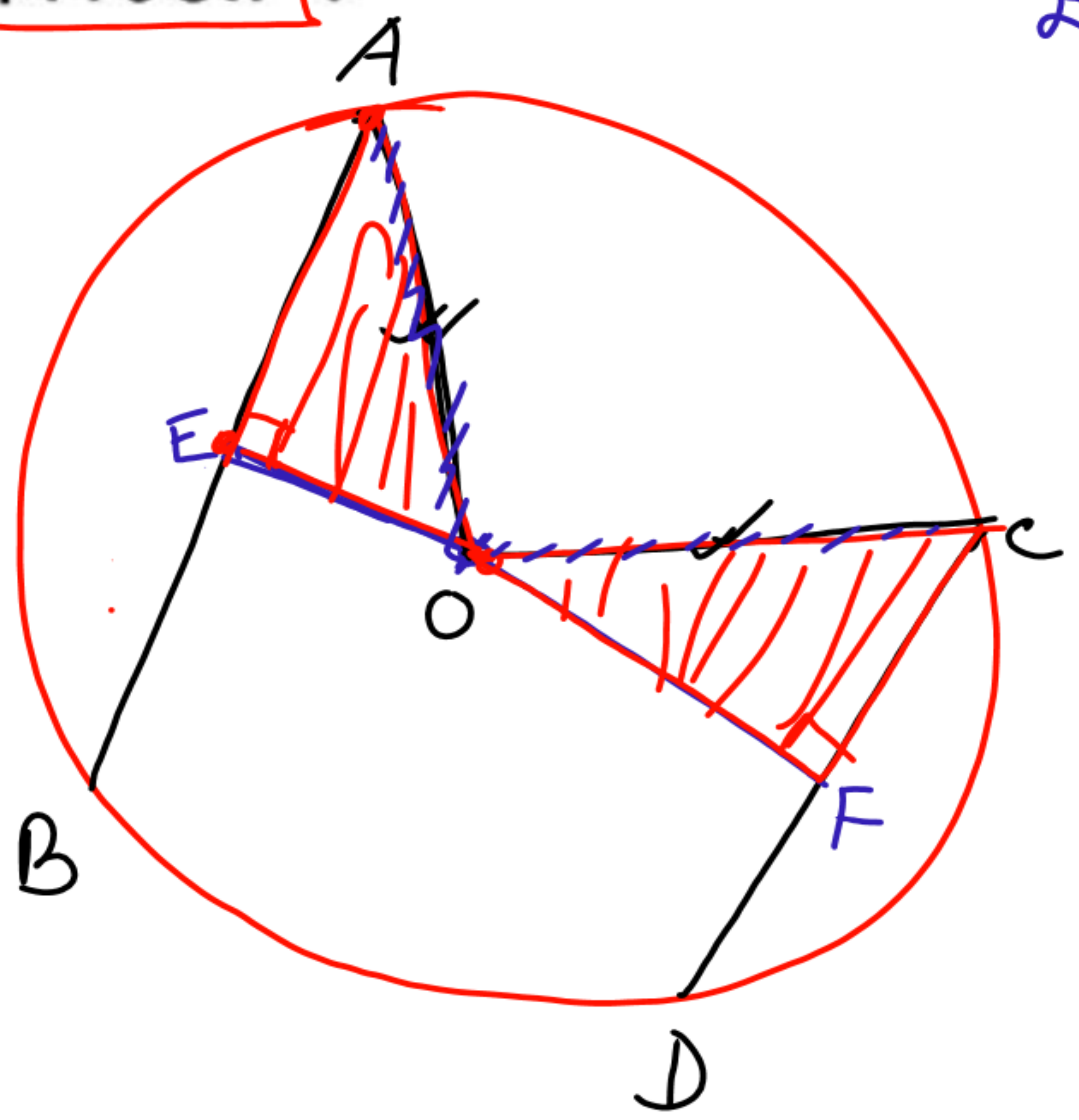
অনুশীলন করুন:

শর্ত সমাধান

১) বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যায়ের উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে ।

২) বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান ।

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যাটিই ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা CD জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ $\boxed{AB > CD}$। O কেন্দ্র হতে AB ও CD জ্যা এর লম্বদূরত্ব যথাক্রমে OE এবং OF

প্রমাণ করতে হবে, $OE < OF$.

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

Step-01: $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$ [ ]

Step-02: সমকোণী $\triangle OEA$ তে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অবলম্বন করে পাই, $OA^2 = AE^2 + OE^2$ —— (i)

অনুরূপভাবে সমকোণী $\triangle OFC$ তে,

$OC^2 = CF^2 + OF^2$ —— (ii)

Step-03

$OA^2 = OC^2$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\Rightarrow AE^2 + OE^2 = CF^2 + OF^2$

$\Rightarrow OE^2 - OF^2 = CF^2 - AE^2$

$= \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$

$\therefore OE^2 - OF^2 = \frac{1}{4}\left(\underset{\text{ছোট}}{CD^2} - \underset{\text{বড়}}{AB^2}\right)$ —— (iii)

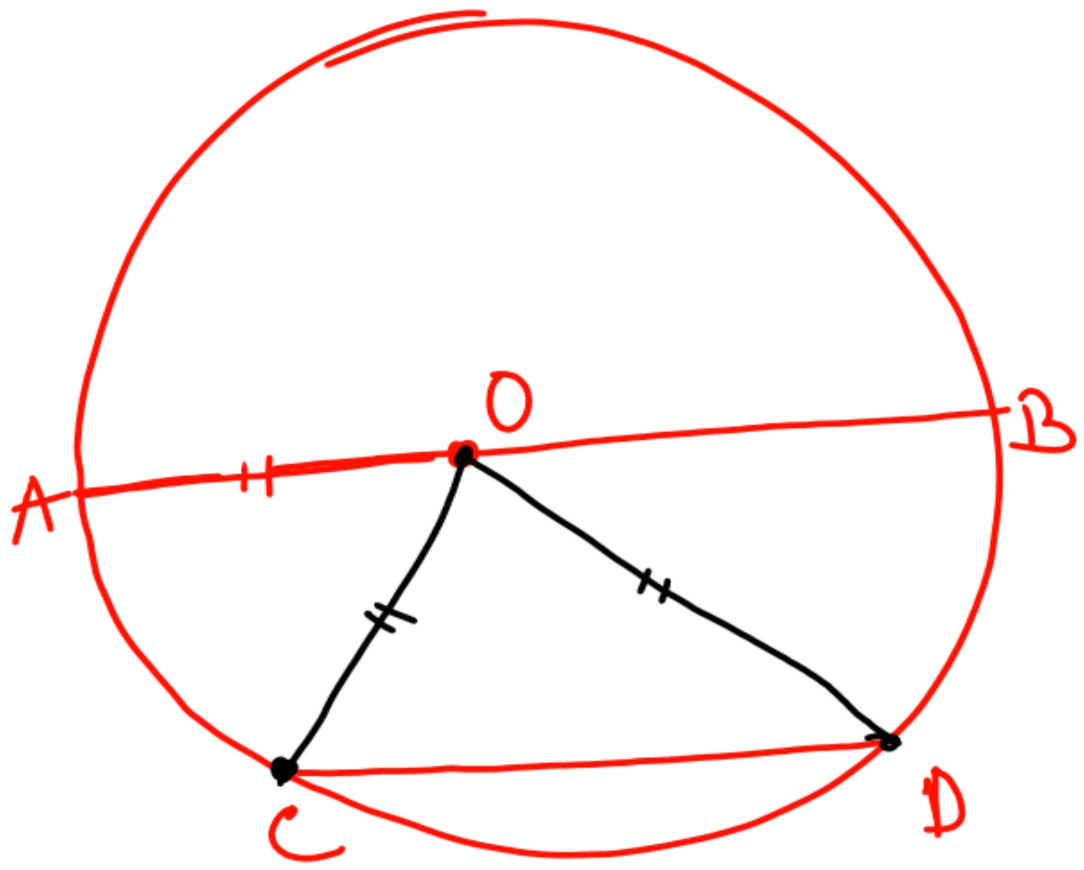
যেহেতু $AB > CD$ সেহেতু (iii) নং সমী. ডানপক্ষ ঋণাত্মক।

$\therefore OE^2 - OF^2 < 0$

$\Rightarrow OE^2 < OF^2$

$\therefore \boxed{OE < OF}$

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।



অংকন: O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ: ΔOCD এ

$OC + OD > CD$ [ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

$\Rightarrow OA + OB > CD$ [OA, OC, OD, OB সকলে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

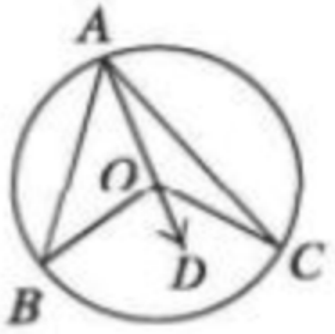
$\therefore AB > CD$

শর্ত: AB (ব্যাস)
CD (জ্যা)

$AB > CD$ (প্রমাণিত)

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের একই চাপের ওপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ। ***
অথবা, বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং তার একই উপচাপ BC এর ওপর দণ্ডায়মান $\angle BAC$ বৃত্তস্থ এবং $\angle BOC$ কেন্দ্রস্থ কোণ।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$

অঙ্কন: মনে করি, AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এ ক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AD আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\triangle AOB$ এর বহিঃস্থ কোণ $\angle BOD = \angle BAO + \angle ABO$ [∵ বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ ২. $\triangle AOB$ এ $OA = OB$ [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, $\angle BAO = \angle ABO$ [∵ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ ৩. ধাপ (১) ও (২) থেকে $\angle BOD = 2\angle BAO$ —— (i)

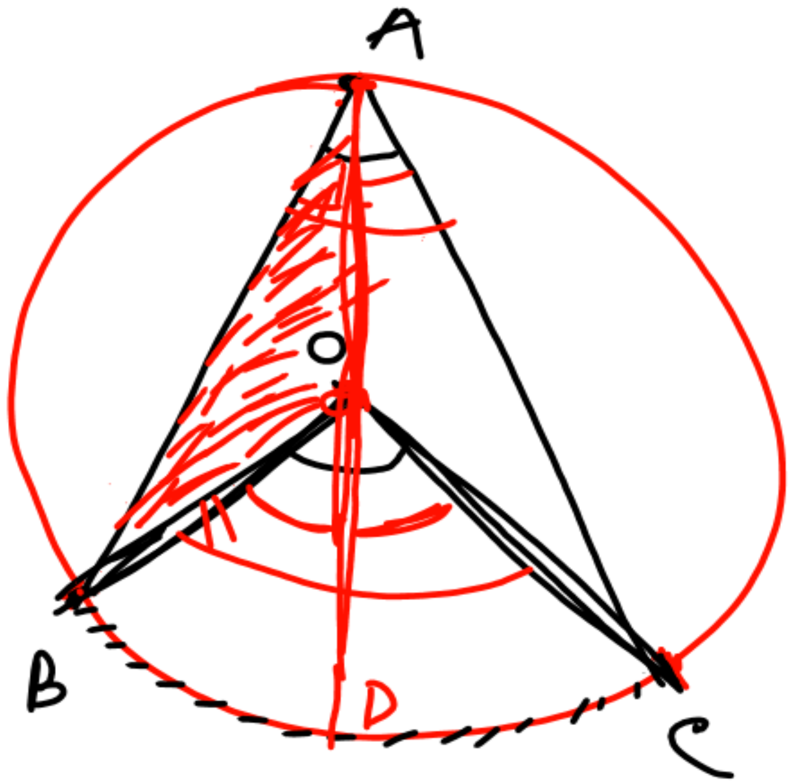
ধাপ ৪. একইভাবে $\triangle AOC$ থেকে $\angle COD = 2\angle CAO$ —— (ii)

ধাপ ৫. ধাপ (৩) ও (৪) থেকে

$\angle BOD + \angle COD = 2\angle BAO + 2\angle CAO$ [যোগ করে]

অর্থাৎ $\angle BOC = 2\angle BAC$। (প্রমাণিত)

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

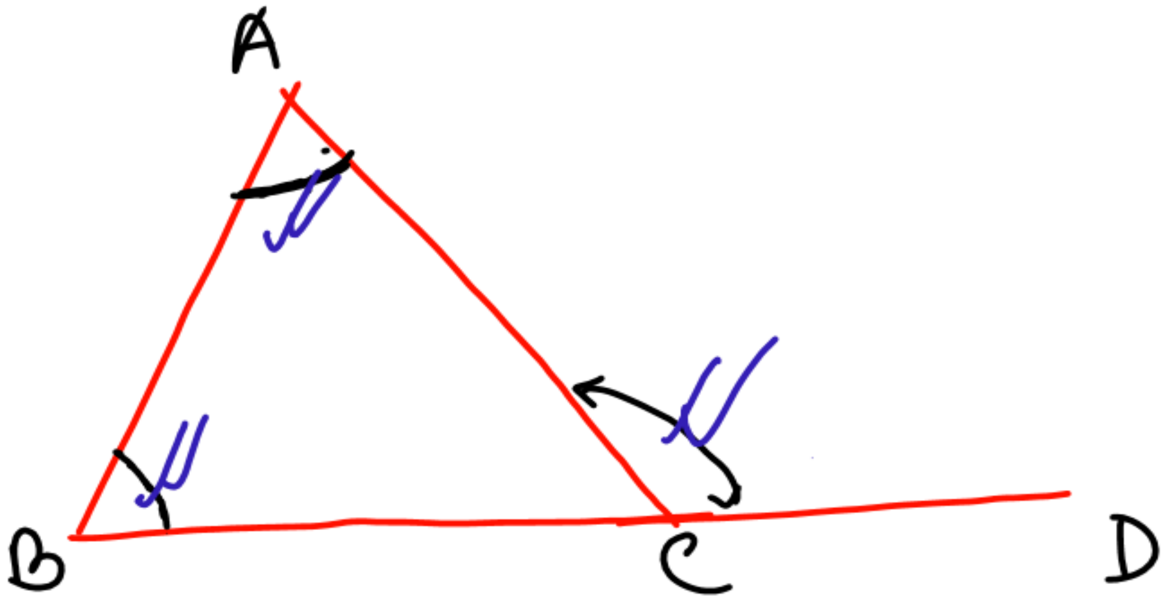


$\angle BOC = 2\angle BAC$

OTC

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

BCS CAREER SPARK

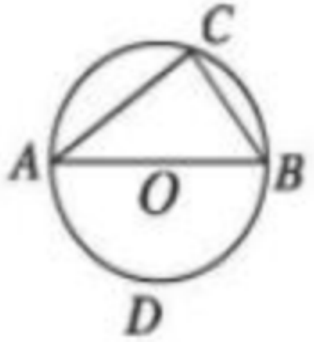


বহিঃস্থ $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

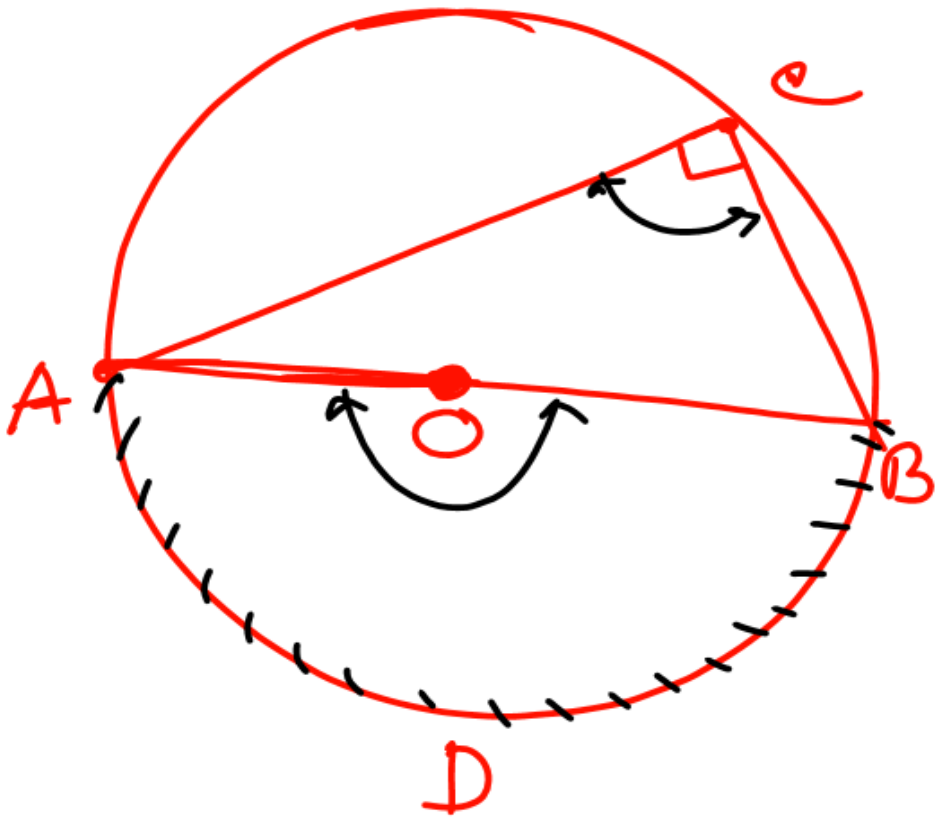
[ত্রিভুজের যেকোনো বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান)

প্রমাণ করুন যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB$ এক সমকোণ।



অঙ্কন: AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত, তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।



প্রমাণ:

ধাপ ১. ADB চাপের ওপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (কেন্দ্রস্থ সরল কোণ $\angle AOB$) [∵ একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

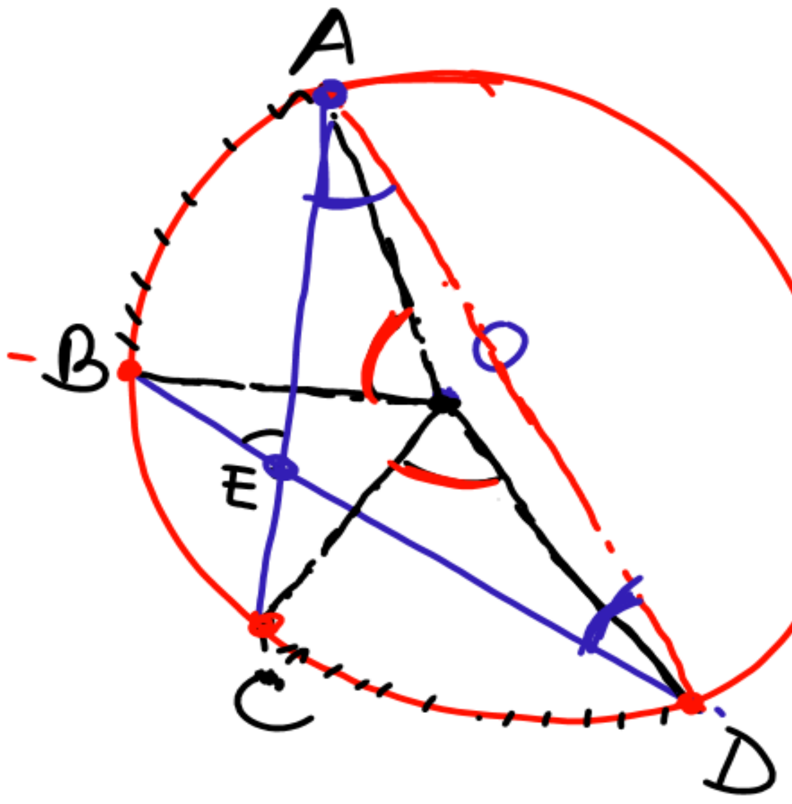
ধাপ ২. কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ = দুই সমকোণ।

∴ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ) = এক সমকোণ। (প্রমাণিত)

সরলকোণ = 180°

O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে AC ও BD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ করুন যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$ ✓ *****

/ জ্যা দুইটি E বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করলে, প্রমাণ করুন যে, $\angle AOB + \angle COD = 180°$



অঙ্কন: A, D যোগ করি।

প্রমাণ: AB চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ = বৃত্তস্থ $2\angle ADB$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ] —— (i)

আবার, CD চাপের উপর,

$\angle COD = 2\angle CAD$ —— (ii)

(i) + (ii): $\angle AOB + \angle COD = 2(\angle ADB + \angle CAD)$

$= 2\angle AEB$

[$\triangle AED$ এ বহিঃস্থ $\angle AEB = \angle ADB + \angle CAD$]

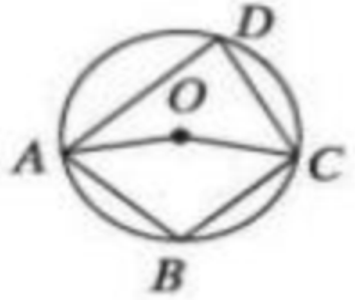
অথবা: $\angle AEB = 90°$

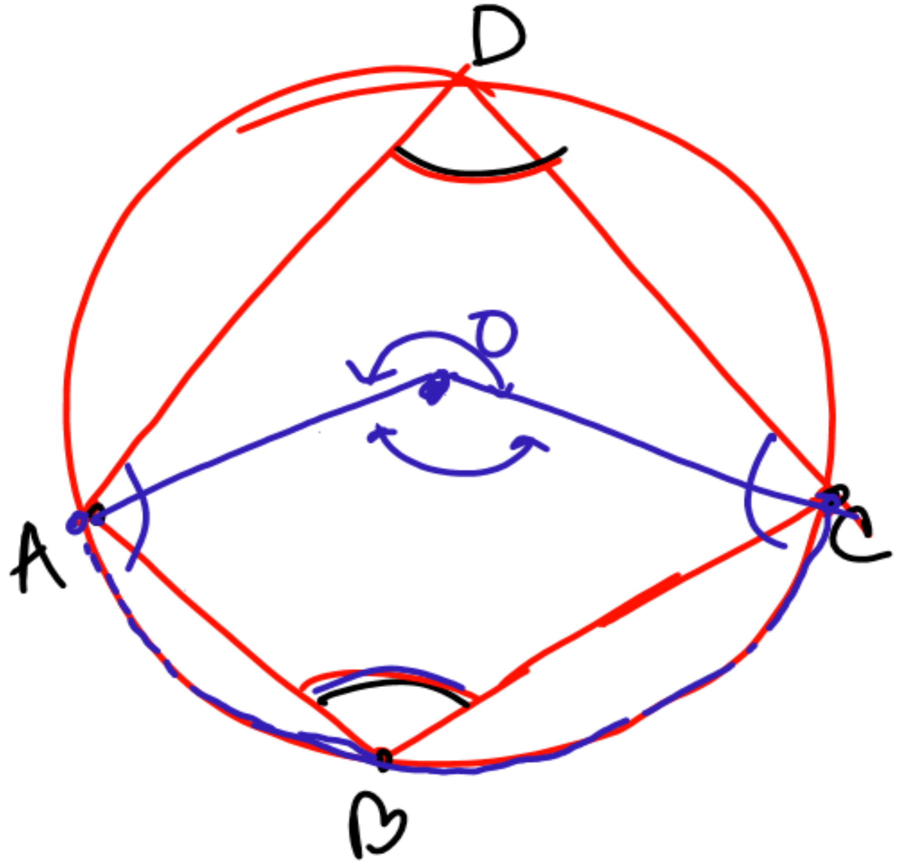
$\therefore \angle AOB + \angle COD = 180°$

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোন দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ / বিপরীত কোণদ্বয় সম্পূরক কোণ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে $ABCD$ চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ এবং $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করি।





প্রমাণ:

ধাপ ১. একই চাপ ADC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ABC$)

অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2\angle ABC$ [বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ] —— (i)

ধাপ ২. আবার, একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ADC$)

অর্থাৎ কোণ $\angle AOC = 2\angle ADC$ [বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ] —— (ii)

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC +$ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$

কিন্তু প্রবৃদ্ধ $\angle AOC +$ কোণ $\angle AOC =$ চার সমকোণ

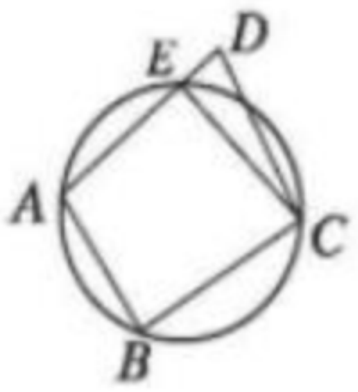
$\therefore 2(\angle ABC + \angle ADC) =$ চার সমকোণ

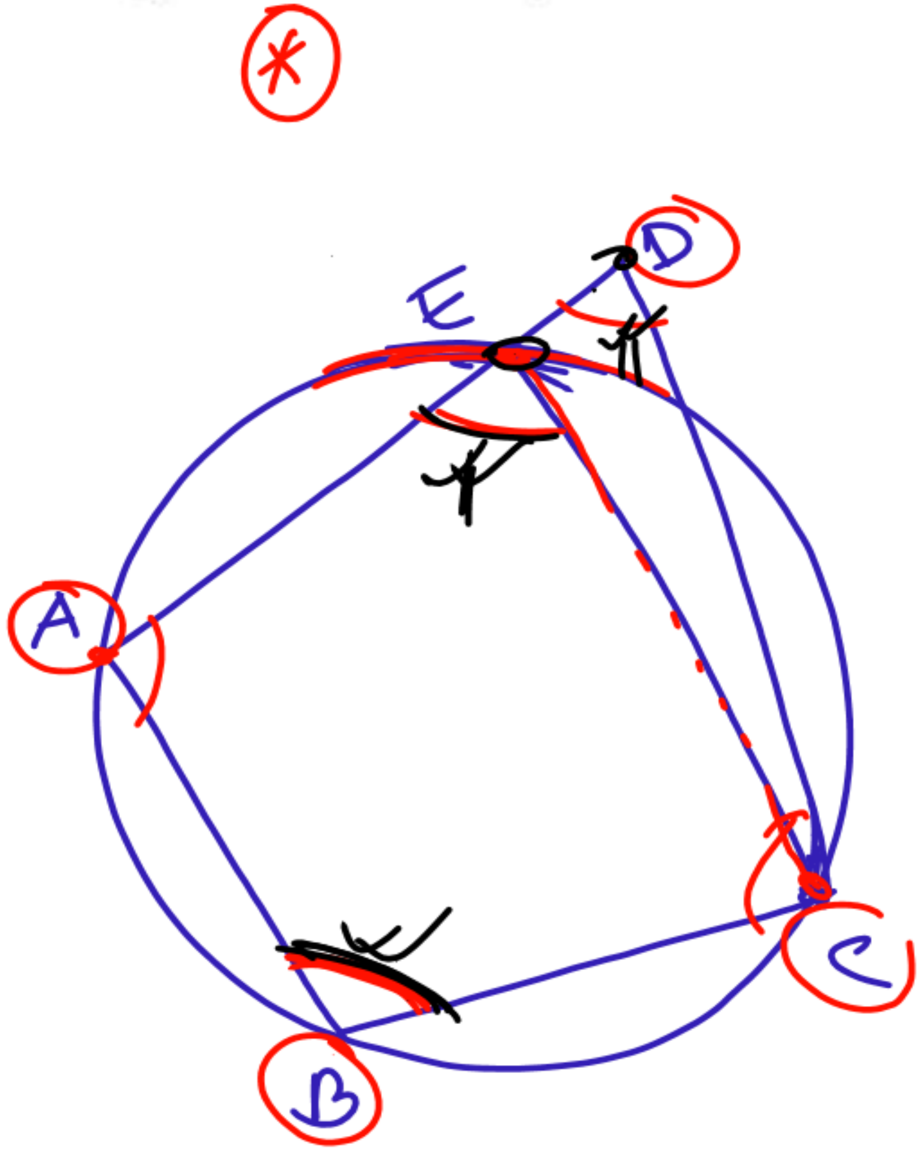
$\therefore \angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ।

একইভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

প্রমাণ করুন যে, কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হয় ।

মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।





অঙ্কন: যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়, সুতরাং বিন্দু তিনটি দিয়ে যায় এরূপ একটি ও কেবল একটি বৃত্ত আছে। মনে করি, বৃত্তটি AD রেখাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $ABCE$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

সুতরাং $\angle ABC + \angle AEC =$ দুই সমকোণ [বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ [দেওয়া আছে]

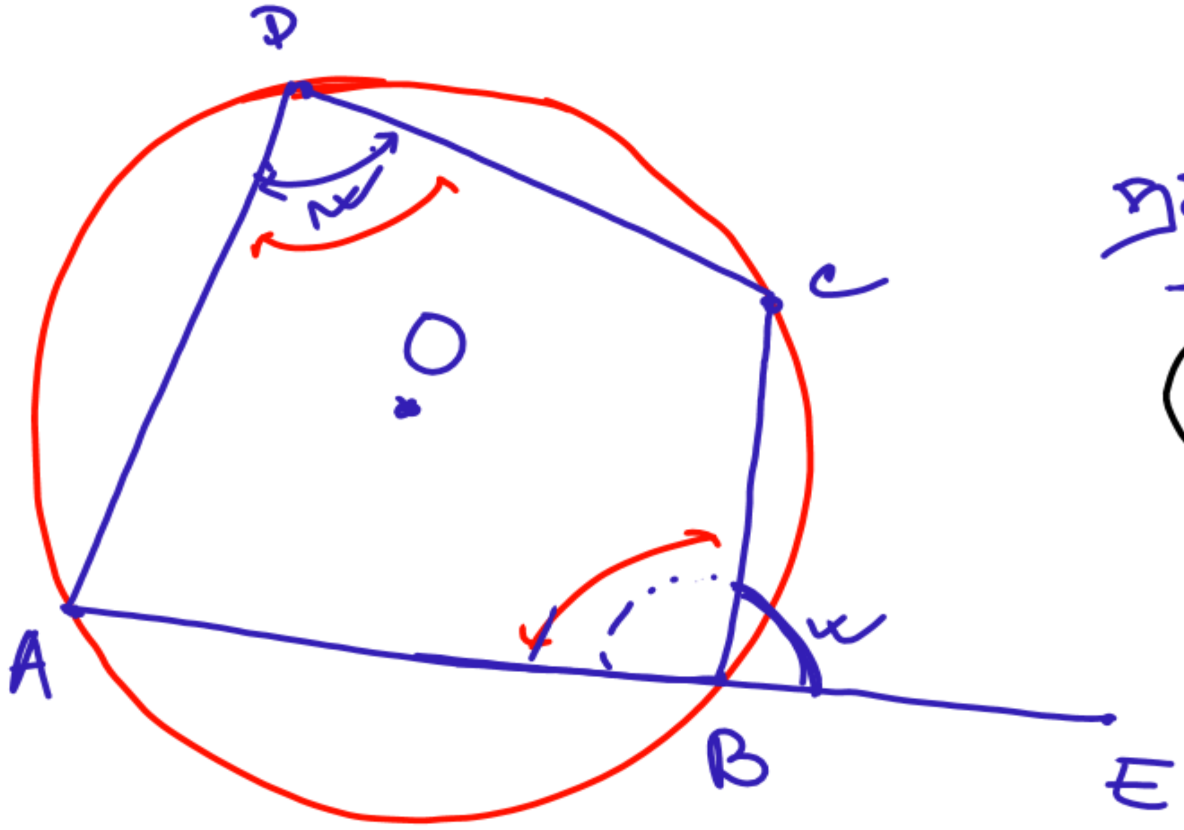
$\therefore \angle AEC = \angle ADC$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ চিত্রে $\triangle CED$ এর বহিঃস্থ $\angle AEC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ADC$

সুতরাং E এবং D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না। E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোন একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।



প্রমাণ:

$\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ ——— (i)

[ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হওয়ায় বিপরীত দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।]

$\angle ABC + \angle EBC =$ দুই সমকোণ ——— (ii)

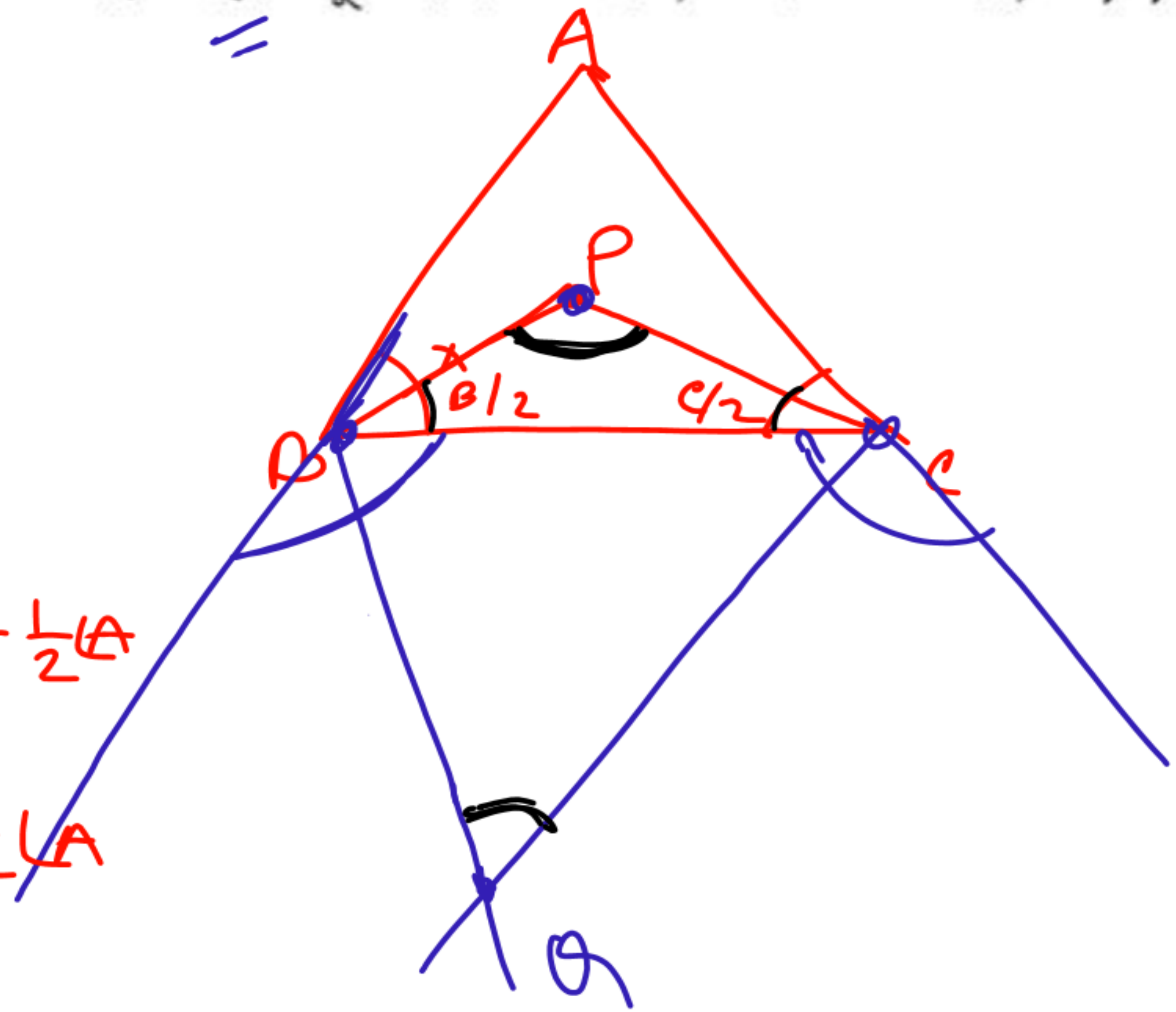
[কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ]

(i) ও (ii) হতে

$\angle ADC = \angle EBC$

(প্রমাণিত)

ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখন্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B,P,C,Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত ।



প্রমাণঃ ΔBPC হতে পাই,

$$\angle BPC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BPC + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

$$\Rightarrow \angle BPC + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 180^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

$$\Rightarrow \angle BPC + \frac{1}{2} \times 180^\circ = 180^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

$$\Rightarrow \angle BPC = 180 - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

$$\therefore \boxed{\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A} \text{ —— (i)}$$

$\triangle BQC$ এ:

$\angle BQC + \frac{1}{2}(\text{বহি:স্থ } \angle B) + \frac{1}{2}(\text{বহি:স্থ } \angle C) = 180^\circ$

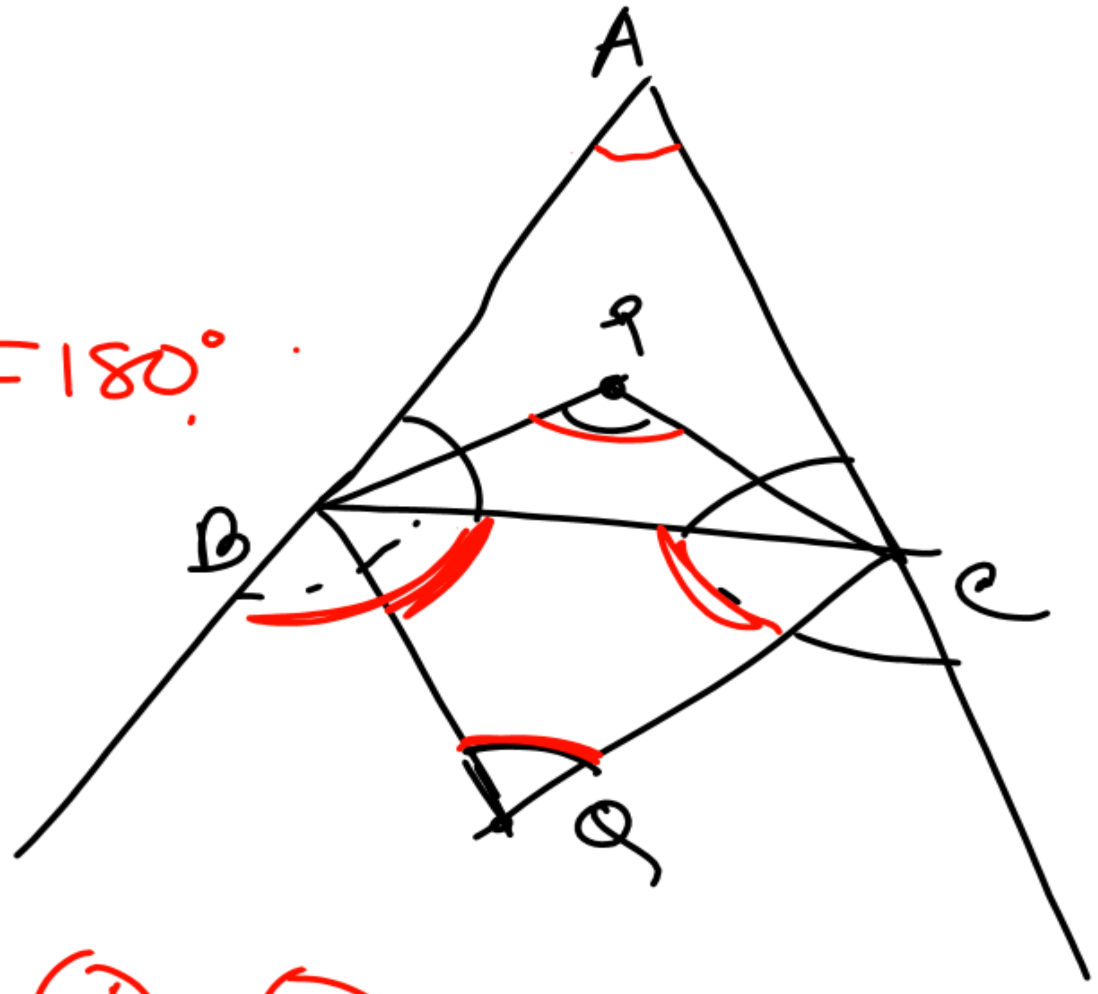
$\Rightarrow \angle BQC + \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BQC + \frac{1}{2}(\angle A + \underline{\angle C + \angle A + \angle B}) = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BQC + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2} \times 180^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BQC = 180 - 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

$\therefore \boxed{\angle BQC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A}$ —— (ii)



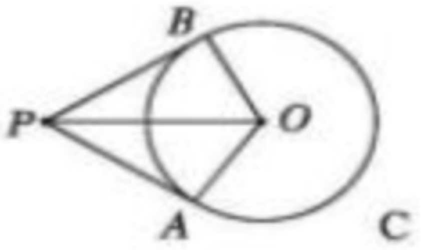
(i) + (ii):

$\angle BPC + \angle BQC = 180^\circ$

যেহেতু BPCQ চতুর্ভুজের বিপরীত দুই কোণের সমষ্টি 180°, সেহেতু B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে ঐবিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রেখাংশদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, $\boxed{PA = PB}$



অঙ্কন: $O, A; O, B$ এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $PA \perp OA$

$\therefore \angle PAO =$ এক সমকোণ। [$\because$ স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব]

অনুরূপে $\angle PBO =$ এক সমকোণ।

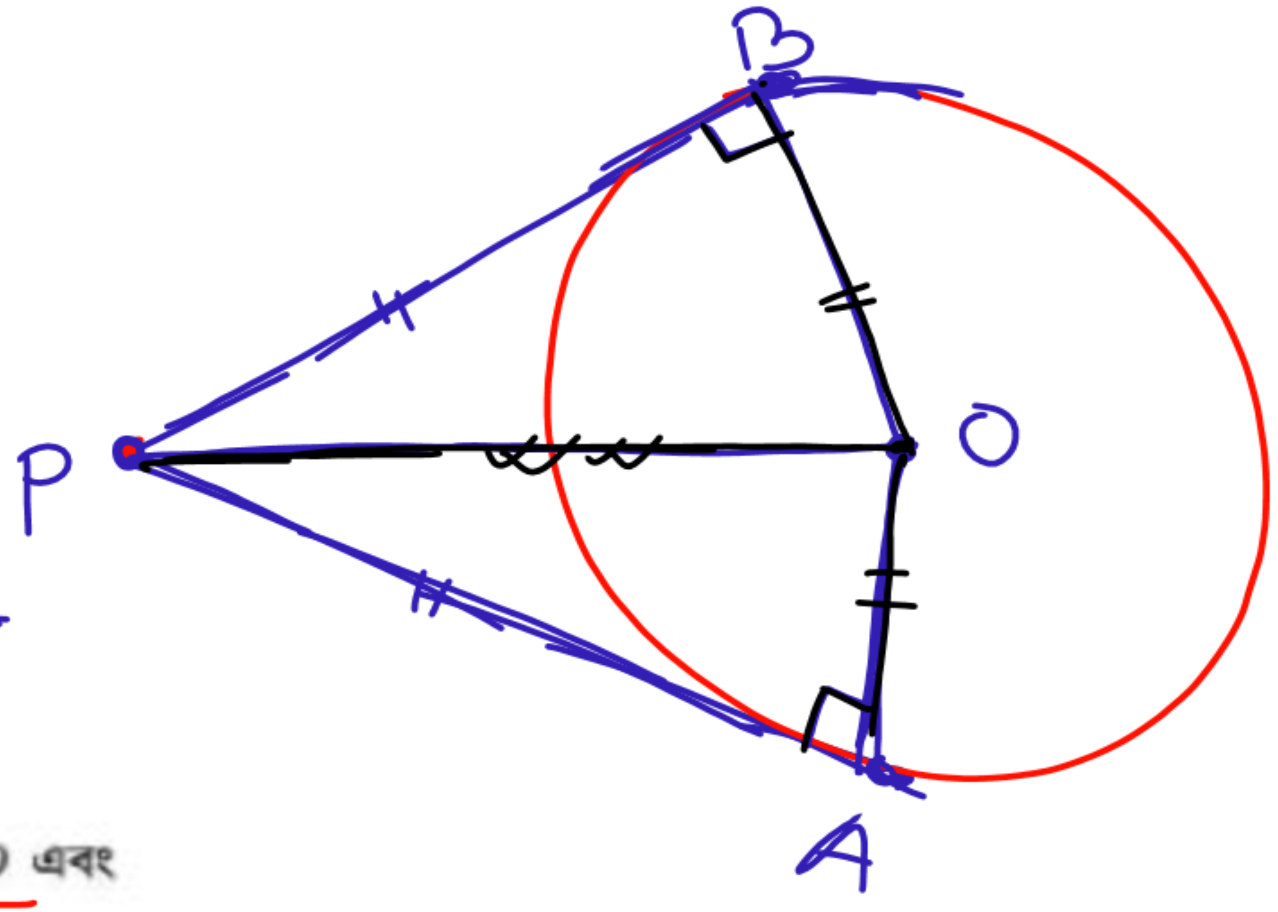
$\therefore \triangle PAO$ এবং $\triangle PBO$ উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২. এখন, $\triangle PAO$ এবং $\triangle PBO$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ $PO =$ অতিভুজ PO এবং

$OA = OB$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

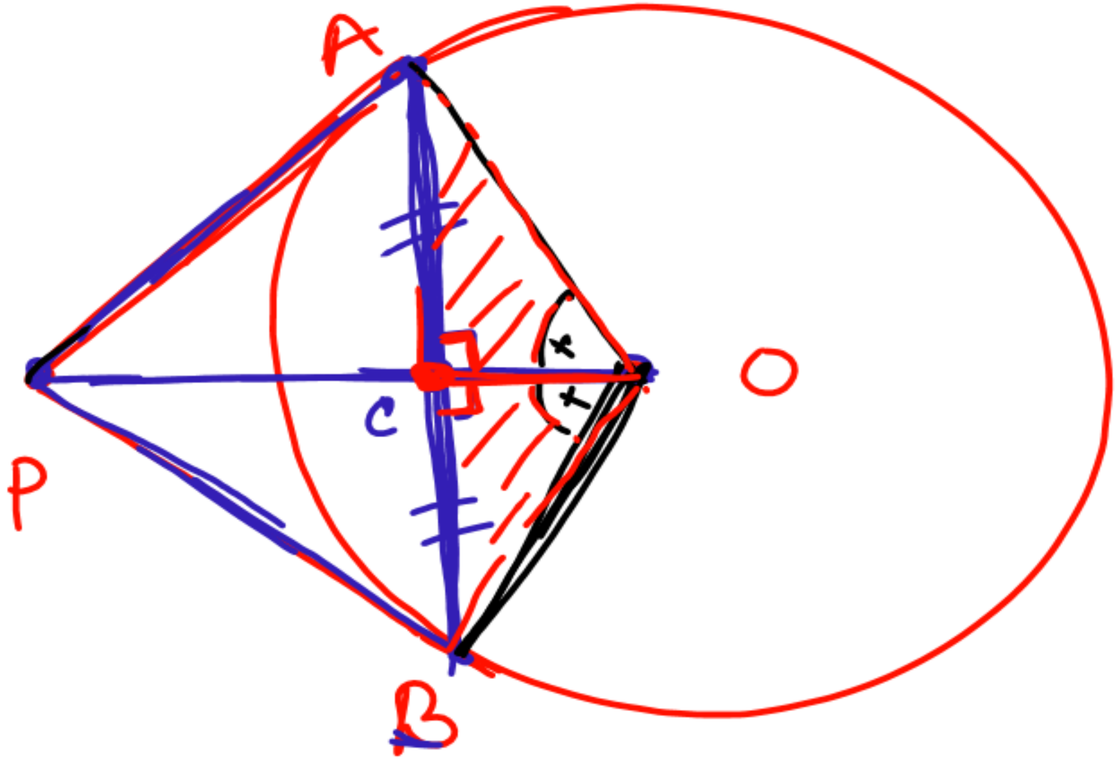
$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

$\therefore PA = PB$। (প্রমাণিত)



BCS CAREER SPARK

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক | প্রমাণ করুন যে,OP রেখাংশ স্পর্শ জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক |



অঙ্কন: A, O এবং B, O যোগ করি।

প্রমাণ: △APO এবং △BPO তে

OP = OP (সাধারণ বাহু)

OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

PA = PB (স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান)

∴ △APO ≅ △BPO

∴ $\boxed{\angle AOP = \angle BOP}$ — (i)

△AOC এবং △BOC তে

OC = OC (সাধারণ বাহু)

OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

অন্তর্ভুক্ত ∠AOP = অন্তর্ভুক্ত ∠BOP

∴ △AOC ≅ △BOC

∴ $\boxed{AC = BC}$

এবং ∠ACO = ∠BCO ; কিন্তু তারা পরস্পরের রৈখিক যুগল কোণ।

∴ ∠ACO = ∠BCO = এক সমকোণ।

∴ OP রেখাংশ AB কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

BCS CAREER SPARK