

Progression

Series related important formula:

নিম্নোক্ত সূত্র কয়েকটি জানা থাকলে হিসেব করতে সহজ হবে:

- (i) An arithmetic progression is given by $a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \dots$
where $a =$ the first term, $d =$ the common difference
- (ii) n^{th} term of an arithmetic progression $t_n = a + (n - 1)d$
where $t_n = n^{\text{th}}$ term, $a =$ the first term, $d =$ common difference
- (iii) $n = \frac{L - a}{d} + 1$ (অর্থাৎ পদসংখ্যা বের করতে হলে শেষপদ ও প্রথম পদকে বিয়োগ করে ব্যবধান দিয়ে ভাগ করে ১ যোগ)
where $n =$ number of terms, $a =$ the first term, $L =$ Last term, $d =$ common difference
- (iv) Sum of a arithmetic series when first term, last term and common difference is given, $n \times \frac{(L + a)}{2}$ where $n =$ total number, $L =$ last term, $a =$ first term.
- (v) Sum of first n terms in an arithmetic progression
 $S_n = \frac{n}{2} \{ 2a + (n-1)d \}$ where $a =$ the first term, $d =$ common difference,
- (vi) Geometric mean of A and $B = \sqrt{AB}$
- (vii) n^{th} term of an infinite series $= ar^{n-1}$
- (viii) Sum of an infinite series $= \frac{a}{1-r}$ [where $|r| < 1$]

Important questions & solutions:

1. দুই অঙ্কবিশিষ্ট যে সকল সংখ্যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য তাদের যোগফল নির্ণয় করুন। [Bangladesh Bank (Off)-2019 (Written)]

সমাধান:

৩ দ্বারা বিভাজ্য দুই অঙ্কবিশিষ্ট সবথেকে ছোট সংখ্যা = 12 এবং সবথেকে বড় সংখ্যা = 99

সুতরাং ৩ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলোর সিরিজটি হবে 12, 15, 18, 21, 24 99

এখানে, $12 + 15 + 18 + \dots + 99 = ?$

প্রথম পদ $a = 12$, সাধারণ অন্তর $d = 3$

আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$$\Rightarrow 99 = 12 + (n - 1) \times 3 \quad \Rightarrow 3(n - 1) = 87 \quad \Rightarrow n - 1 = 29 \quad \therefore n = 30 \quad (\text{সিরিজটিতে } 30 \text{ টি পদ আছে})$$

আবার আমরা জানি, সমান্তর ধারার যোগফল $= \frac{n}{2} \{ 2a + (n-1)d \}$

$$= \frac{30}{2} \{ 2 \times 12 + (30-1)3 \} = 15 \{ 24 + 29 \times 3 \} = 15 \times 111 = 1665$$

Ans: 1665

2. Prove that the sum of the odd numbers from 1 to 125 inclusive is equal to the sum of the odd numbers from 169 to 209 inclusive. [Agrani Bank Officer (Cash)-2018-(Written)]

অর্থ: প্রমাণ করুন যে, ১ থেকে ১২৫ পর্যন্ত বিজোড় সংখ্যাগুলোর (এই দুটি সংখ্যাসহ) সমষ্টি, ১৬৯ থেকে ২০৯ পর্যন্ত বিজোড় সংখ্যাগুলোর (এই দুটি সংখ্যাসহ) সমষ্টির সমান।

Solution:

L.H.S, The odd number From 1 to 125 is $1+3+5+7+ \dots + 125$

We know that sum of n number = $\frac{n}{2} \{ 2a+(n-1)d \}$

Here, a = first number = 1, d = difference of the numbers = 3-1 = 2.
n = Total odd number in the series.

Total number of odd number between 1 to 125 = $\frac{125-1}{d} + 1$ (সূত্র) = $\frac{124}{2} + 1 = 63$

Sum of 63rd number of the series = $\frac{63}{2} \{ 2.1+(63-1)2 \} = \frac{63}{2} \times (2+124) = 63 \times 63 = 3969$

R.H.S, Series of odd numbers From 169 to 209 is $169+171+173+ \dots + 209$

Total odd numbers between 169 to 209 = $\frac{209-169}{d} + 1 = \frac{40}{2} + 1 = 21$

So The sum = $\frac{n}{2} \{ 2a+(n-1)d \}$

$\Rightarrow \frac{21}{2} \{ 2 \times 169 + (21-1)2 \} \Rightarrow \frac{21}{2} \times (338+40) \Rightarrow \frac{21}{2} \times 378 \Rightarrow 3969$

\therefore L.H.S = R.H.S (Proved)

3. Two numbers x, y are in GP and their sum is 30. Also the sum of their square is 468.

Find the numbers. (একটি জ্যামিতিক ধারার দুইটি সংখ্যা x ও y এর যোগফল ৩০ এবং তাদের বর্গের যোগফল ৪৬৮। সংখ্যাদুটি বের করুন।) [Rupali Bank (Off)—2019-(Written)]

Solution:

Let, the two numbers are x and y

ATQ, $x + y = 30 \quad \therefore x = 30 - y$

Again, $x^2 + y^2 = 468$

$\Rightarrow (30 - y)^2 + y^2 = 468$ [putting the value of x]

$\Rightarrow 900 - 60y + y^2 + y^2 = 468$ [(a-b)² = a²-2ab+b²]

$\Rightarrow 2y^2 - 60y + 432 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 30y + 216 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 18y - 12y + 216 = 0$

$\Rightarrow y(y - 18) - 12(y - 18) = 0$

$\Rightarrow (y - 18)(y - 12) = 0$

Either, $y = 18$ or, $y = 12$

If, $y = 18$ then $x = 30 - 18 = 12$

If $y = 12$ then $x = 30 - 12 = 18$

So, the numbers are **18 & 12 or 12 & 18**

Confusion Clear: প্রশ্নে ব্যবহৃত GP = Geometric Progression = গুণোত্তর ধারা হলো, গুণ করে অথবা ভাগ করে নতুন নতুন পদ তৈরীর যে ধারা। এখানে ১২ কে ১.৫ দিয়ে গুণ করলে যেমন ১৮ হয়। আবার ১৮ কে ১.৫ দিয়ে ভাগ করলে ১২ হয়। প্রশ্নটিতে শুধুমাত্র ২টি পদের কথা বলায় এবং উভয় শর্তে যোগের কথা বলায় গুণোত্তর ধারার কোন নিয়ম এখানে প্রয়োগ করতে হয় নি।

Ans, (18,12) or (12,18)

4. The sum of three numbers in an Arithmetic Progression is 30. The sum of their squares is 318. Find the numbers. [BKB – (Cash)-2018–(Written)]

অর্থ: একটি সমান্তর ধারায় তিনটি সংখ্যার যোগফল ৩০। তাদের বর্গের যোগফল ৩১৮ হলে, সংখ্যা তিনটি কি কি?

Solution:

Let, the first term be 'a' and common difference be 'd'.

So, 2nd term = a+d (প্রথম সংখ্যা + ব্যবধান = ২য় সংখ্যা)

and 3rd term = a+d+d = a + 2d (২য় সংখ্যা + ব্যবধান = ৩য় সংখ্যা।)

1st condition,

$$a + a+d + a+2d = 30$$

$$\Rightarrow 3a + 3d = 30 \Rightarrow 3(a+d) = 30 \Rightarrow a+d = 10 \quad \therefore a = 10-d$$

$$1^{\text{st}} \text{ term} = 10-d, 2^{\text{nd}} \text{ term} = 10-d+d = 10 \text{ and } 3^{\text{rd}} \text{ term} = 10-d+2d = 10+d$$

2nd condition,

$$(10-d)^2 + 10^2 + (10+d)^2 = 318$$

$$\Rightarrow 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot d + d^2 + 100 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot d + d^2 = 318$$

$$\Rightarrow 100 - 20d + d^2 + 100 + 100 + 20d + d^2 = 318$$

$$\Rightarrow 2d^2 + 300 = 318 \Rightarrow 2d^2 = 318 - 300 \Rightarrow 2d^2 = 18 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \sqrt{9} \quad \therefore d = \pm 3$$

So, common difference d = +3 or -3

If d = +3 then, 1st term = 10-3 = 7, 2nd term = 10 and 3rd term = 10+3 = 13.

If d = -3 then, 1st term = 10-(-3) = 13, 2nd term = 10 and 3rd term = 10+(-3) = 7.

So, the numbers of the series can be either 7, 10 and 13 or 13, 10 and 7

Ans: 7, 10 & 13 or 13, 10, & 7

5. Three numbers x, y and z are in A.P, and their sum is 30. Also The sum of their squares is 308. Find the numbers. [BB-(AD-General)-2018-(Written)]

অর্থ: একটি সমান্তর ধারায় তিনটি সংখ্যা x, y এবং z এর যোগফল ৩০। আবার তাদের বর্গের যোগফল ৩০৮ হলে, সংখ্যা তিনটি বের করুন?

Solution:

Given that 3 numbers x, y and z are in AP (Arithmetic Progression)

So, their differences is equal, and we can write

$$y-x = z-y \text{ (x থেকে y যত বড়, y থেকে z ও তত বড় তাই ব্যবধান সমান সমান হবে।)}$$

$$\text{So, } 2y = x + z \text{----- (i)}$$

According to the first condition,

$$x+y+z = 30$$

$$\text{or, } y + (x+z) = 30$$

$$\text{or, } y+2y = 30 \text{ [Since } x+z = 2y]$$

$$\text{or, } 3y = 30$$

$$\therefore y = 10$$

Let the common difference between x, y & z is 'd'

So, 2nd term y = 10, first term x = 10-d and 3rd term z = 10+d

According to the 2nd condition,

$$(10-d)^2 + 10^2 + (10+d)^2 = 308 \quad [\text{যেহেতু প্রশ্নে বলা হয়েছে সবগুলোর বর্গের যোগফল ৩০৮}]$$

$$\Rightarrow 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot d + d^2 + 100 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot d + d^2 = 308$$

$$\Rightarrow 100 - 20d + d^2 + 100 + 100 + 20d + d^2 = 308$$

$$\Rightarrow 2d^2 + 300 = 308 \Rightarrow 2d^2 = 308 - 300 \Rightarrow 2d^2 = 8 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = \sqrt{4} \therefore d = \pm 2$$

So, common difference $d = +2$ or -2

If $d = +2$ then, 1st term $x = 10 - 2 = 8$, 2nd term $y = 10$ and 3rd term $z = 10 + 2 = 12$

Again,

if $d = -2$ then 1st term $x = 10 - (-2) = 10 + 2 = 12$, 2nd term $y = 10$ and 3rd term $z = 10 - 2 = 8$

So, the numbers of the series can be either 8, 10 and 12 or 12, 10 and 8

Ans: 8, 10 & 12 or 12, 10, & 8

(Note: $d = 2$ এর মান শুধু $+2$ ধরলে এই প্রশ্নের উত্তর ৮, ১০, ১২ তবে এভাবে $+ ৩ -$ উভয় ধরে দিলে ১০০% সঠিক হবে।)

Alternative Solution: (সুকর অংশটি একটু ভিন্নভাবে সাজিয়ে।)

Let, common difference be 'd',

So, 2nd term = y, first term $x = y - d$, and 3rd term $z = y + d$

1st condition;

$$x + y + z = 30$$

or, $y - d + y + y + d = 30$ (একটা (-) আরেকটা (+) থাকায় কেটে গেল, দুটোই + নিলে হিসেব করতে বেশি সময় লাগে)

or, $3y = 30$ (এভাবে সবগুলোকেই y এর উপর ভিত্তি করে হিসেব করায় সহজে সমাধান করা যাবে।)

$$\therefore y = 10$$

2nd condition,

$$(y-d)^2 + y^2 + (y+d)^2 = 308 \quad [\text{সবগুলোর বর্গের যোগফল ৩০৮}]$$

$$\Rightarrow (10-d)^2 + 10^2 + (10+d)^2 = 308$$

$$\Rightarrow 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot d + d^2 + 100 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot d + d^2 = 308$$

$$\Rightarrow 100 - 20d + d^2 + 100 + 100 + 20d + d^2 = 308$$

$$\Rightarrow 2d^2 + 300 = 308 \Rightarrow 2d^2 = 308 - 300 \Rightarrow 2d^2 = 8$$

$$\Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = \sqrt{4} \therefore d = \pm 2 \quad \text{So, common difference } d = +2 \text{ or } -2$$

If $d = +2$ then, 1st term $x = 10 - 2 = 8$, 2nd term $y = 10$ and 3rd term $z = 10 + 2 = 12$

Again,

if $d = -2$ then 1st term $x = 10 - (-2) = 10 + 2 = 12$, 2nd term $y = 10$ and 3rd term $z = 10 - 2 = 8$

So, the numbers of the series can be either 8, 10 and 12 or 12, 10 and 8

Ans: 8, 10 & 12 or 12, 10, & 8

6. A man agrees to buy a fridge of Tk. 22000 by paying in installment. Every installment differs from previous installment by Tk. 500. If the first installment is Tk. 1000, in how many installment should be paid the price and what is the amount of last installment?

অর্থ: এক ব্যক্তি ২২০০০ টাকায় একটি ফ্রিজ কিস্তিতে পরিশোধের মাধ্যমে কিনতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে ৫০০ টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি ১০০০ টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে তিনি ফ্রিজের দাম পরিশোধ করতে পারবেন এবং সর্বশেষ কিস্তির পরিমাণ কত? [৩৫তম বিসিএস লিখিত]

Solution :

Here, First installment (a) = 1000, d = 500

So, the installment series will be $1000 + 1500 + 2000 + \dots + n = 22000$

Let, total installment be = n

We know, The sum of n^{th} numbers $S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$

Here, $\frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} = 22000$ (এখানে n হল মোট কিস্তির সংখ্যা)

$$\Rightarrow n\{2 \times 1000 + (n-1)500\} = 22000 \times 2 \quad (\text{মান বসানো হলো})$$

$$\Rightarrow n\{2000 + 500n - 500\} = 44000$$

$$\Rightarrow n(500n + 1500) = 44000$$

$$\Rightarrow 500n^2 + 1500n - 44000 = 0$$

$$\Rightarrow 500(n^2 + 3n - 88) = 0$$

$$\Rightarrow n^2 + 3n - 88 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 + 11n - 8n - 88 = 0 \Rightarrow n(n+11) - 8(n+11) = 0 \Rightarrow (n+11)(n-8) = 0$$

now either, $n+11=0 \therefore n = -11$ (but Installment can not be negative)

So, $n-8=0 \therefore n = 8$ So, the number of installment = 8

Again, we know that, value of n^{th} terms = $a + (n-1)d$

$$= 1000 + (8-1) \times 500 = 1000 + 7 \times 500 = 1000 + 3500 = 4500$$

So, the amount of last installment = Tk. 4500

Ans: 8 & Tk. 4500

Self Task:

7. A man agrees to refund the loan of Tk. 2500 in some installments. Each installment is Tk. 2 more than the previous installment. If the first installment is Tk. 1, in how many installments will the man be able to refund that amount? [Class 9-10 (13.1)]

অর্থ: এক ব্যক্তি ২৫০০ টাকার একটি ঋণ কিছু সংখ্যক কিস্তিতে পরিশোধ করতে রাজী হন। প্রত্যেক কিস্তি পূর্বের কিস্তি থেকে ২ টাকা বেশি। যদি প্রথম কিস্তি ১ টাকা হয়, তবে কতগুলো কিস্তিতে ঐ ব্যক্তি তার ঋণ শোধ করতে পারবেন?

Solution :

Let, the number of installment = n So, the series $1+3+5+\dots+n^{\text{th}}$

Here, 1^{st} term $a=1$ 2^{nd} term $=1+2=3$ and the Common difference $d = (3-1)=2$

We know that, Sum of n terms = $S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} = 2500$

$$\text{ATQ, } \frac{n}{2} \{2 \times 1 + (n-1)2\} = 2500$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \{2 + 2n - 2\} = 2500 \Rightarrow \frac{n}{2} \times 2n = 2500 \Rightarrow n^2 = 2500 \therefore n = 50$$

Ans: 50

8. Mr. Rashid has saved Taka 1200 from his first month's salary. He plans to increase his monthly savings by Taka 100 in every following month. How much time would it take to save Taka 106200? [BKB- (officer)-2017-(Written)]

অর্থ: জনাব রশিদ তার প্রথম মাসিক বেতনের টাকা থেকে ১২০০ টাকা সঞ্চয় করল এবং পর্যায়ক্রমে প্রতিমাসে ১০০ টাকা করে বেশি সঞ্চয় করার পরিকল্পনা করল। মোট ১০৬২০০ টাকা সঞ্চয় করতে তার কত সময় লাগবে?

Solution :

1st month =1200, 2nd month =1300, 3rd month =1400

Term =1200+1300+1400+ - - - - -

Here, 1st term (a) = 1200 and Common difference (d) = 1300-1200 = 100

Sum of the n terms $S_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$

ATQ, $\frac{n}{2} [2a+(n-1)d] = 106200$

$\Rightarrow \frac{n}{2} [2 \times 1200 + (n-1) \times 100] = 106200$

$\Rightarrow \frac{n}{2} (2400 + 100n - 100) = 106200$

$\Rightarrow \frac{n}{2} \times 2(1150 + 50n) = 106200$

$\Rightarrow 1150n + 50n^2 = 106200$

$\Rightarrow 50n^2 + 1150n - 106200 = 0$

$\Rightarrow 50(n^2 + 23n - 2124) = 0 \Rightarrow n^2 + 59n - 36n - 2124 = 0 \Rightarrow (n+59)(n-36) = 0$

So, n = 36 (since n = -59 is not acceptable) SO, need 36 month or 3 years **Ans: 3 years**

9. Two men X and Y started working for a certain company at similar jobs on January 1, 1950. X asked for an initial salary of Tk. 300 with an annual increment of Tk.30. Y asked for an initial salary of Tk. 200 with a rise of Tk. 15 every six months. Assume that the arrangements remained unaltered till December 31, 1959. Salary is paid on the last day of the month. What is the total amount paid to them as salary during the period?

[Janata Bank –(AEO)-2020 (Written)]

অর্থ: ১লা জানুয়ারী ১৯৫০ থেকে দুইজন লোক X এবং Y একটি কোম্পানিতে একই পদে কাজ করা শুরু করে। X এর প্রাথমিক বেতন ৩০০ টাকা ধরা হয়, যা প্রতি বছরে ৩০ টাকা করে বৃদ্ধি পায়। Y এর প্রাথমিক বেতন ২০০ টাকা ধরা হয়, যা প্রতি ৬ মাস পর পর ১৫ টাকা করে বাড়বে এই নিয়ম ৩১ ডিসেম্বর, ১৯৫৯ পর্যন্ত অপরিবর্তনীয় ছিল। বেতন প্রতি মাসের শেষদিনে দেওয়া হয়। এই সময়ের মধ্যে তাদের বেতন হিসেবে সর্বমোট কত দেওয়া হয়।

Solution:

Since, initial salary of X is Tk. 300 and increase Tk. 30 every year.

So, sum of his 10 years salary will be $12 \times 300 + 12 \times 330 + 12 \times 360 + \dots$ [যেহেতু বছরের শুরুতে বেতন বাড়ার পর ঐ পরিমাণ টাকা ১২ মাস পর্যন্ত পাবে তাই ১২ দিয়ে গুণ, প্রতিবার বেতন বাড়ার পর আবার ১২ মাস চলবে]

Or, $12 \times (300 + 330 + 360 + \dots)$ [প্রতিটির সঙ্গে ১২ গুণ থাকায় ১২ কমন নিয়ে যোগ করতে হবে]

Here total time = (December 31, 1959 – January 1, 1950) = 10 years So, n = 10

Sum of the series $S = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$ Where a = 300, d = 30

$$= \frac{10}{2} \{2 \times 300 + (10 - 1) \times 30\} = 5 (600 + 270) = 5 \times 870 = 4350$$

So, total salary of X in 10 years = $12 \times 4350 = \text{Tk. } 52200$

Again,

Initial salary of Y = Tk.200 and every 6 month his salary increased by Tk.15

So sum of his 10 years salaries = $6 \times 200 + 6 \times 215 + 6 \times 230 + \dots$ till 10 years [৬ মাস পর পর বেতন বাড়ার জন্য প্রতি ৬ মাস পরের নতুন বেতনের সাথে ৬ দিয়ে গুণ, কারণ একই বেতন ৬ মাস করে পাবে]

Or, $6 \times (200 + 215 + 230 + \dots)$

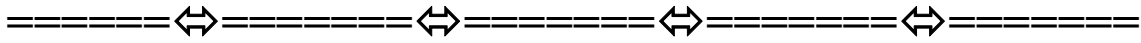
Here, total time = 10 years but salary increased after every 6 months So, $n = 10 \times 2 = 20$

Sum of the series $S = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$ Where, $a = 200, d = 15$

$$= \frac{20}{2} \{2 \times 200 + (20 - 1) \times 15\} = \text{Tk. } 6850$$

So, total salary of Y in 10 years = $6 \times 6850 = \text{Tk. } 41100$

So, Total salary paid to X and Y in this period of 10 years = $52200 + 41100 = \text{Tk. } 93300$



Practice Part

1. A man saves Tk.100 in January 2014 and increases his saving by Tk. 50 every month over the previous month. What is the annual saving for the man in the year 2014?
2. A student takes a test consisting of 100 questions with differential marking is told that each question after the first is worth 4 marks more than the preceding question. If the third question of the test is worth 9 marks. What is the maximum score that the student can obtain by attempting 98 questions?
3. A girl wants to buy a bag. She decides to save her pocket money to buy it. On the first day she saves Tk. 10 and on every subsequent day, she saves Tk.10 more than the money she has saved on the previous day. When the girl be able to save Tk. 1200 for her bag? [quora.com/m4maths.com]
4. Two numbers A and B are such that their Geometric Mean (GM) is 20% lower than their Arithmetic Mean(AM). Find the ratio between the numbers. [doubtnut.com]
5. The sum of the first term and the fifth term of an AP is 26 and the product of the second term by the fourth term is 160. Find the sum of the first seven terms of this AP. [toppr.com]
6. In an arithmetic progression, the sum of first term, third term and the fifth term is 39 and the sum of second term, fourth term and the sixth term is 51. Find the tenth term of the sequence? [toppr.com]
7. The sum of all terms of the arithmetic progression having ten terms except for the first term, is 99, and except for the sixth term, 89. Find the third term of the progression if the sum of the first and the fifth term is equal to 10. [toppr.com]
8. After striking the floor, a rubber ball rebounds to 4/5th of the height from which it has fallen. Find the total distance that it travels before coming to rest if it has been gently dropped from a height of 120 metres.

Answer & Solution

1. অর্থ: একজন ব্যক্তি ২০১৪ সালের জানুয়ারিতে ১০০ টাকা সঞ্চয় করে এবং তার সঞ্চয় আগের মাসের তুলনায় প্রতি মাসে ৫০ টাকা বৃদ্ধি করে। ২০১৪ সালে ব্যক্তিটির বার্ষিক সঞ্চয় কত?

Solution:

First month saving $a = 100$ Common difference $d = 50$ and total time $n = 12$

Now, series of his monthly savings $100 + 150 + 200 + \dots + 650$

$$\therefore \text{Savings} = \frac{100 + 650}{2} \times 12 = \frac{750}{2} \times 12 = 750 \times 6 = \text{Tk. 4500}$$

Ans: Tk.4500

2. অর্থ: একজন শিক্ষার্থী ডিফারেনশিয়াল মার্কিং সহ ১০০ টি প্রশ্নের একটি পরীক্ষা দেয় এবং বলা হয় যে প্রথমটির পরের প্রতিটি প্রশ্ন পূর্ববর্তী প্রশ্নের চেয়ে ৪ মার্ক বেশি। যদি পরীক্ষার তৃতীয় প্রশ্নের মান ৯ নম্বর হয় তবে ৯৮ টি প্রশ্নে শিক্ষার্থী সর্বোচ্চ কত নম্বর পেতে পারে?

Solution:

First term, $a = 9$ Common difference, $d = 4$ Total question, $n = 98$

Value of n^{th} term $= a + (n-1)d = 9 + (98-1) \times 4 = 9 + (97 \times 4) = 9 + 388 = 397$

Now the series will be, $9 + 13 + 17 + \dots + 393 + 397$

$$\therefore \text{Maximum number of would be the sum of the series} = \frac{9 + 397}{2} \times 98 = \mathbf{19894} \quad \text{Ans: 19894}$$

3. অর্থ: একটি মেয়ে একটি ব্যাগ কিনতে চায়। সে তার পকেট মানি সেভ করার জন্য কেনার সিদ্ধান্ত নেয়। প্রথম দিন সে ১০ টাকা জমায় এবং পরবর্তী প্রতিটি দিনে, সে আগের দিনে সঞ্চয়িত অর্থের চেয়ে ১০ টাকা বেশি জমা করে। কখন মেয়েটি ব্যাগের জন্য ১২০০ টাকা জমাতে সমর্থ হবে?

Solution:

Here, First term, $a = 10$, common difference, $d = 10$ & Total savings $= 1200$

We know that, sum of n terms $= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

$$\text{ATQ, } \frac{n}{2} [20 + (n-1)10] = 1200$$

$$\Rightarrow n(20 + 10n - 10) = 2400$$

$$\Rightarrow n(10n + 10) = 2400 \Rightarrow 10n(n+1) = 2400 \Rightarrow n^2 + n = 240 \Rightarrow n^2 + n - 240 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 + 16n - 15n - 240 = 0 \Rightarrow n(n+16) - 15(n+16) = 0 \Rightarrow (n+16)(n-15) \therefore n = 15$$

Since $n = -16$ is not Acceptable So, the So, the required time $= 15$ days. **Ans: 15 days**

4. অর্থ: দুটি সংখ্যা A এবং B এমন যে তাদের জ্যামিতিক গড় (GM) তাদের গাণিতিক গড় (AM) থেকে ২০% কম। সংখ্যা দুটির অনুপাত বের করুন।

Solution:

We know that,

$$\text{Geometric mean of A and B} = \sqrt{AB} \text{ and Arithmetic mean of A and B} = \frac{A+B}{2}$$

Let, $AM = 100$, So, $GM = 100 - (20\% \text{ of } 100) = 100 - 20 = 80$

So, the ratio of AM to GM $= 100 : 80 = 5:4$

$$\text{ATQ, } \frac{A+B}{2} : \sqrt{AB} = 5:4$$

$$\Rightarrow \frac{A+B}{2\sqrt{AB}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{A+B+2\sqrt{AB}}{A+B-2\sqrt{AB}} = \frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{A})^2 + (\sqrt{B})^2 + 2\sqrt{AB}}{(\sqrt{A})^2 + (\sqrt{B})^2 - 2\sqrt{AB}} = \frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2}{(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{A} - \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{3+1}{3-1} \Rightarrow \frac{2\sqrt{A}}{2\sqrt{B}} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{16}{4} \therefore A : B = 4 : 1 \quad \text{Ans: 4:1}$$

5. অর্থ: একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ এবং পঞ্চম পদের যোগফল ২৬ এবং চতুর্থ পদের সাথে দ্বিতীয় পদের গুণফল ১৬০। এই সমান্তর ধারার প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি বের করুন।

Solution:

Let the five terms of the A.P. be $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$.

Sum of the first and fifth terms is $(a-2d)+(a+2d) = 2a$ Since $2a=26 \therefore a=13$

Again, product of second and fourth terms is

$$(a-d)(a+d) = a^2 - d^2 \Rightarrow (13)^2 - d^2 = 160 \Rightarrow 169 - d^2 = 160 \Rightarrow d^2 = 9$$

It is an ascending A.P. and hence d takes positive values. $d = 3$

$$\text{Sum of } n \text{ terms in an A.P is } S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$\text{Here the first term is } a-2d = 13-2 \times 3 = 13-6 = 7$$

$$\text{Sum of seven terms} = S_7 = \frac{7}{2} \{2 \times 7 + (7-1) \times 3\} = \frac{7}{2} \times (14+18) = \frac{7}{2} \times 32 \therefore S = 112 \quad \text{Ans: 112}$$

6. অর্থ: একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ, তৃতীয় পদ এবং পঞ্চম পদের সমষ্টি ৩৯ এবং দ্বিতীয় পদ, চতুর্থ পদ ও ষষ্ঠ পদের সমষ্টি ৫১। ধারার দশম পদ বের করুন।

Solution:

Given that: $T_1 + T_3 + T_5 = 39$ and $T_2 + T_4 + T_6 = 51$

We have to find: tenth term $T_{10} = ?$

Let a be the first term and d be the common difference.

$$T_1 + T_3 + T_5 = 39 \Rightarrow a + a + 2d + a + 4d = 39 \Rightarrow 3a + 6d = 39 \Rightarrow a + 2d = 13 \dots\dots\dots(i)$$

$$T_2 + T_4 + T_6 = 51 \Rightarrow a + d + a + 3d + a + 5d = 51 \Rightarrow 3a + 9d = 51 \Rightarrow a + 3d = 17 \dots\dots\dots(ii)$$

Subtracting equation (i) from equation (ii) we get, $d = 4$

Putting value $d = 4$ in equation (i) we get, $a + 2 \times 4 = 13 \Rightarrow a = 13 - 8 \therefore a = 5$

$$\text{Now, } T_{10} = a + 9d = 5 + 9 \times 4 = 5 + 36 = 41$$

Ans: 41

7. অর্থ: একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ বাদে দশটি পদের সমষ্টি ৯৯, এবং ষষ্ঠ পদ বাদে ৮৯। যদি প্রথম এবং পঞ্চম পদের সমষ্টি ১০ হয়, তাহলে ধারার তৃতীয় পদ বের করুন।

Solution:

$$\text{Given, } S_{10} - T_1 = 99 \therefore S_{10} = 99 + T_1 \dots\dots(i) \text{ again, } S_{10} - T_6 = 89 \therefore S_{10} = 89 + T_6 \dots\dots(ii)$$

Where S_{10} is the sum of 10 terms of the A.P. and T_1, T_6 are the first and sixth term respectively.

Say a and d are the first term and common difference of the A.P. respectively.

$$\therefore S_{10} = \frac{10}{2} \{2a + (10-1)d\} = 5(2a+9d)$$

$$T_1 = a; \quad T_6 = a+5d \dots\dots(iii) \quad \therefore 5\{2a+9d\} = 99 + T_1 = a + 99 \dots\dots(iv)$$

$$\text{Again, } 5\{2a+9d\} = 89 + a + 5d = a + 89 + 5d \dots\dots(v)$$

$$\text{From (iv) \& (v) we can write } = a + 89 + 5d = a + 99 \Rightarrow 5d = 10 \therefore d = 2$$

$$\text{Also given that } T_1 + T_5 = 10 \Rightarrow a + a + 4d = 10 \Rightarrow 2a + 4 \times 2 = 10 \Rightarrow 2a = 2 \therefore a = 1$$

$$\text{So, the third term } T_3 = a + 2d = 1 + 2 \times 2 = 5$$

Ans: 5

8. অর্থ: মেঝেতে আঘাত করার পর, একটি রাবারের বল যে উচ্চতা থেকে পড়ে গেছে তার $\frac{8}{5}$ অংশতে ফিরে আসে। স্থিতিতে আসার আগে এটি মোট কত দূরত্ব অগ্রসর করে তা বের করুন। যদি এটি ১২০ মিটার উচ্চতা থেকে হালকা করে ফেলে দেওয়া হয়।

Solution:

পাশের চিত্রটি দেখুন, প্রথমে উপর থেকে ১২০ মিটার নিচে পরে যাওয়ার পর জাম্প করে ৯৬ মিটার উঠে আবার ঐ ৯৬ মিটার ই নিচে নামবে, এরপর ৭৬.৮ মিটার উঠে আবার ৭৬.৮ মিটারই নামবে। এভাবে প্রতিবার $\frac{8}{5}$ অংশ করে জাম্প করবে। এখানে সবথেকে গুরুত্বপূর্ণ বিষয়টি হলো, উঠা এবং নামা উভয় দূরত্ব ই হিসেব করতে হবে। অর্থাৎ পাশের রেখাটিকে একটি রশি মনে করলে পুরো রশির দৈর্ঘ্যই আমাদের উত্তর।



The first drop from top to floor is 120 metres. After this the ball will rise from floor to air by 96 metres and fall by 96 metres. This process will continue in the form of infinite GP with common ratio 0.8 and first term 96.

The required answer is given by the formula: $\frac{a}{1-r}$

$$\text{So, } \frac{120}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{120}{\frac{1}{5}} = 120 \times 5 = 600 \text{ again, } \frac{a}{1-r} \text{ So, } \frac{96}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{96}{\frac{1}{5}} = 96 \times 5 = 580$$

$$\text{So, total distance that it travels} = 600\text{m} + 580\text{m} = 1080\text{m}$$

Ans: 1080m

[**Note:** এখানে দুটি সিরিজ আছে, ১২০, ৯৬, ৭৬.৮ (প্রতিবার নামবে) এভাবে আরেকটি হচ্ছে, ৯৬, ৭৬.৮ (প্রতিবার উঠবে)]

