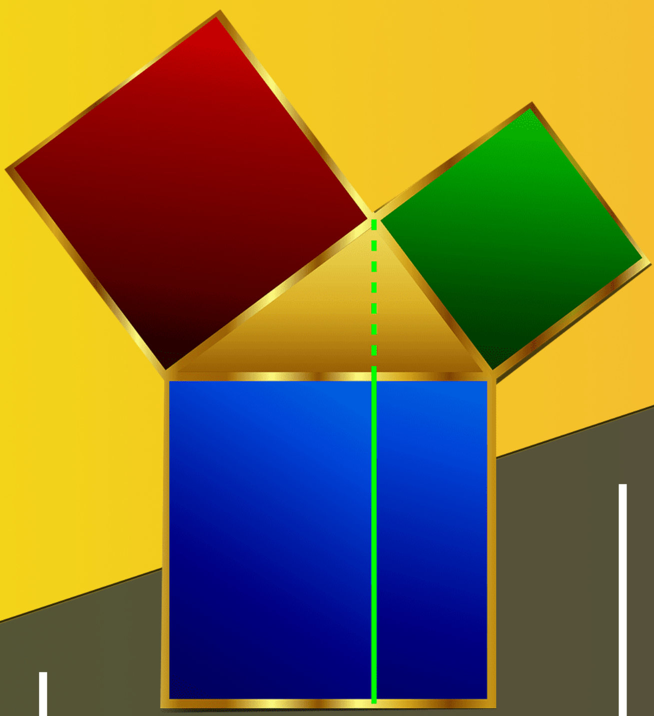
www.myschool4d.com

৪৩টি অনুশীলনীর সমাধান

SSC
গণিত সমাধান



A+

Easy to Study

দ্রুত প্রতিটি অধ্যায় চর্চা করতে এবং রিভিশন দিতে সহায়ক

Creative Concept

গণিত সহজে বুঝতে বিভিন্ন ব্যাখ্যা সংযোজন করা হয়েছে

প্রয়োজনীয় বিভিন্ন জায়গায় রঙিন ছবি ব্যবহার করা হয়েছে

Colourful Images

Version 2

পুনরায় খরচ ছাড়াই নতুন ভার্সন গুলো পাওয়া যাবে

এসএসসি গণিত সমাধান শিক্ষার্থী, শিক্ষক সবার কাজে আসবে বলে আশা করা যায়। দ্বিতীয় ভার্সনে কোনও অনাকাঙ্খিত ভুল চোখে পড়লে আমাদের জানানোর অনুরোধ করা হলো। পরবর্তী ভার্সনগুলোতে তা সংশোধন করে প্রকাশ করা হবে। পুনরায় খরচ ছাড়া পরবর্তী ভার্সনগুলো ফ্রিতেই পেতে আমাদের ওয়েবসাইট, অ্যাপ অথবা ফেসবুক পেইজ ছাড়া অন্য কোথাও থেকে ক্রয় করা হতে বিরত থাকুন। প্রতিনিয়ত আপডেট জানতে আমাদের ওয়েবসাইট, অ্যাপ অথবা ফেসবুক পেইজের সাথে সংযুক্ত থাকুন। ধন্যবাদ।

ওয়েবসাইটঃ www.myschool4d.com
ফেসবুক পেইজঃ www.facebook.com/myschool4d

ভার্সন ২ তে যা যা যোগ করা হয়েছে

* ফন্ট পরিবর্তন করা হয়েছে।
* ফন্ট এর কালার পরিবর্তন করা হয়েছে।
* ২০২১ সালের নতুন গাণিতিক সমস্যা এবং এর সমাধান যুক্ত করা হয়েছে।

সূচিপত্র

অধ্যায় ১

বাস্তব সংখ্যা
Real Numbers

১. নিচের কোনটি অমূলদ সংখ্যা?

ক. $0.\dot{3}$ খ. $\sqrt{\frac{16}{19}}$ গ. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ ঘ. $\frac{5}{\sqrt{3}}$

২. a, b, c, d চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা হলে নিচের কোনটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা?

ক. abcd খ. ab + cd গ. abcd + 1 ঘ. abcd – 1

ব্যাখ্যা: চারটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা গুণ করে তার সাথে 1 যোগ করলে যোগফল সবসময় পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে। যেমনঃ $4\times5\times6\times7+1 = 840+1 = 841 = (29)^2$

অর্থাৎ, $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$
$= a(a+3)(a+1)(a+2)+1 = (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$
$= (a^2+3a)^2 + 2.(a^2+3a)+1$
$= (a^2+3a)^2 + 2.(a^2+3a).1+(1)^2$
$= (a^2+3a+1)^2$
এখানে, $a = 4$ হলে, $(a^2+3a+1)^2 = (4^2+3.4+1)^2 = (29)^2$

৩. 1 থেকে 10 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যা কয়টি?

ক. 3 খ. 4 গ. 5 ঘ. 6

ব্যাখ্যা: 1 থেকে 10 পর্যন্ত মৌলিক সংখ্যা যথাক্রমে ২,৩,৫,৭

৪. কোনটি সকল পূর্ণসংখ্যার সেট?

ক. {... – 4, –2, 0, 2, 4, ...} খ. {... –2, –1, 0, 1, 2, ...}
গ. {... –3, –1, 0, 1, 3, ...} ঘ. {0, 1, 2, 3, 4}

ব্যাখ্যা: শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। অর্থাৎ ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা।

৫. বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে-

i. বিজোড় সংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা।
ii. দুইটি জোড় সংখ্যার গুণফল এর গুণিতক জোড় সংখ্যা।
iii. পূর্ণবর্গ নয় এমন সংখ্যার বর্গমূল মূলদ সংখ্যা।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও ii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও ii

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, 3, 5, 7 সংখ্যাগুলো পূর্ণবর্গ নয়। এবং এদের বর্গমূল $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ অমূলদ সংখ্যা। তাই, "পূর্ণবর্গ নয় এমন সংখ্যার বর্গমূল মূলদ সংখ্যা" কথাটি মিথ্যা।

৬. তিনটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল সর্বদাই নিচের কোনটি দ্বারা বিভাজ্য হবে?

ক. 5 খ. 6 গ. 7 ঘ. 11

a এবং b দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা।
উপরের তথ্যের আলোকে নিচের ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৭. নিচের কোনটি বিজোড় সংখ্যা?

ক. a^2 খ. b^2 গ. a^2+1 ঘ. b^2+2

ব্যাখ্যা: জোড় সংখ্যার বর্গ সর্বদাই জোড় সংখ্যা। আবার, জোড় সংখ্যার সাথে ১ যোগ করলে তা বিজোড় সংখ্যা হবে।

MCQ Answers:
১। ঘ ২। গ ৩। খ ৪। খ
৫। ক ৬। ক ৭। গ ৮। গ

মৌলিক সংখ্যাঃ ২, ৩, ৫, ৭, ১১, ১৩, ১৭, ১৯, ২৩, ২৯...

পূর্ণবর্গ সংখ্যাঃ ০, ১, ৪, ৯, ১৬, ২৫, ৩৬, ৪৯...

৮. $a^2 + b^2$ এর সাথে নিচের কোনটি যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে? ক. –ab খ. ab গ. 2ab ঘ. 4ab **ব্যাখ্যা:** আমরা জানি, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	
৯. প্রমাণ কর যে, (ক) $\sqrt{5}$ (খ) $\sqrt{7}$ (গ) $\sqrt{10}$ প্রত্যেকে অমূলদ সংখ্যা। **(ক) $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা** **সমাধান:** আমরা জানি, $4 < 5 < 9$ $\therefore \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ বা, $2 < \sqrt{5} < 3$ সুতরাং, $\sqrt{5}$ এর মান 2 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট। অতএব, $\sqrt{5}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়। সুতরাং, $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি, $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে, ধরি, $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$; যেখানে p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে] বা, $5q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুন করে] স্পষ্টত, 5q পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু, $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয় কারণ, p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ সুতরাং, 5q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ, $5q \neq \frac{p^2}{q}$ সুতরাং, $\sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনও সংখ্যাই হতে পারে না। অর্থাৎ, $\sqrt{5} \neq \frac{p}{q}$ সুতরাং, $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা নয়। $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)	অমূলদ সংখ্যা: যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সে সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলে। আমরা জানি, 2×2=4 3×3=9 এখন, $4 < 5 < 9$
(খ) $\sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা **সমাধান:** আমরা জানি, $4 < 7 < 9$ $\therefore \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ বা, $2 < \sqrt{7} < 3$ সুতরাং, $\sqrt{7}$ এর মান 2 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট।	আমরা জানি, 2×2=4 3×3=9 এখন, $4 < 7 < 9$

অতএব, $\sqrt{7}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়। সুতরাং, $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি, $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে, ধরি, $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$; যেখানে p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ বা, $7 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে] বা, $7q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুন করে] স্পষ্টত, 7q পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু, $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয় কারণ, p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ সুতরাং, 7q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ, $7q \neq \frac{p^2}{q}$ সুতরাং, $\sqrt{7}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনও সংখ্যাই হতে পারে না। অর্থাৎ, $\sqrt{7} \neq \frac{p}{q}$ সুতরাং, $\sqrt{7}$ মূলদ সংখ্যা নয়। $\sqrt{7}$ অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত) **(গ) $\sqrt{10}$ একটি অমূলদ সংখ্যা** **সমাধান:** আমরা জানি, $9 < 10 < 16$ $\therefore \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ বা, $3 < \sqrt{10} < 4$ সুতরাং 10 এর মান 3 অপেক্ষা বড় এবং 4 অপেক্ষা ছোট। অতএব, $\sqrt{10}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়। সুতরাং, $\sqrt{10}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা। যদি, $\sqrt{10}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে, ধরি, $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$; যেখানে p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ বা, $10 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে] বা, $10q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুন করে] স্পষ্টত, 10q পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু, $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয় কারণ, p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ সুতরাং, 10q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ, $10q \neq \frac{p^2}{q}$	আমরা জানি, $3 \times 3 = 9$ $4 \times 4 = 16$ এখন, $9 < 10 < 16$

সুতরাং, $\sqrt{10}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনও সংখ্যাই হতে পারে না।

অর্থাৎ, $\sqrt{10} \neq \frac{p}{q}$

সুতরাং, $\sqrt{10}$ মূলদ সংখ্যা নয়। $\sqrt{10}$ অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

১০. (ক) 0.31 এবং 0.12 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, একটি সংখ্যা a = 0.12505005......

এবং অপর সংখ্যা b = 0.12707007......
স্পষ্টত, a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই 0.12 অপেক্ষা বড় ও 0.31 অপেক্ষা ছোট।
অর্থাৎ, 0.12 < 0.12505005 ...... < 0.31
এবং 0.12 < 0.12707007...... <0.31
আবার, a ও b-কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।
∴ a ও b দুইটি নির্ণেয় অমূলদ সংখ্যা।

0.31 এবং 0.12 এর মাঝে এরকম অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা পাওয়া যাবে।

(খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sqrt{2}$ এর মধ্যে একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071067...$

এবং $\sqrt{2} = 1.4142135...$
মনে করি, $a = 1.2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$
এবং b = 1.020020002 .....

স্পষ্টত, a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই $\frac{1}{\sqrt{2}}$ অপেক্ষা বড় এবং $\sqrt{2}$ অপেক্ষা ছোট।
অর্থাৎ, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{6}{5} < \sqrt{2}$ এবং $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1.020020002.... < \sqrt{2}$
যেহেতু, a কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায়।
∴ a একটি মূলদ সংখ্যা।
b কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।
∴ b একটি অমূলদ সংখ্যা।
∴ a ও b দুইটি নির্ণেয় সংখ্যা যার মধ্যে a মূলদ এবং b অমূলদ।

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sqrt{2}$ এর মাঝে এরকম অসংখ্য মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা পাওয়া যাবে।

১১. (ক) প্রমাণ কর যে, যেকোনো বিজোড় পূর্ণ সংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা।
সমাধান: মনে করি, $2x - 1$ একটি বিজোড় পূর্ণসংখ্যা, যেখানে x যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।
তাহলে, $(2x - 1)$ এর বর্গ $= (2x - 1)^2$
$= (2x)^2 - 2.2x.1 + (1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$
$= 4x(x-1)+1 = 2.2x(x-1)+1$
যেহেতু, x যেকোনো পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং $2.2x(x - 1)$ একটি জোড় সংখ্যা।
∴ $2.2x(x - 1) + 1$ সংখ্যাটি বিজোড়।
অতএব, যেকোনো বিজোড় পূর্ণসংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা। (প্রমাণিত)

পূর্ণসংখ্যা: শুন্যসহ সকল ধ্বন্যাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। অর্থাৎ, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা।

(খ) প্রমাণ কর যে, দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যার গুণফল 8 (আট) দ্বারা বিভাজ্য।
সমাধান: মনে করি, দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা যথাক্রমে 2x ও 2x+2, যেখানে x যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা।
∴ এদের গুণফল $= 2x(2x+2) = 4x(x + 1)$

যেহেতু, x ও $(x + 1)$ দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং এদের যে কোনো একটি অবশ্যই জোড় সংখ্যা হবে। ফলে, এদের গুণফলও জোড় সংখ্যা হবে।

∴ $x(x+1)$, 2 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং $4x(x+1)$, 4×2 বা, ৪ দ্বারা বিভাজ্য।
অতএব দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যার গুণফল ৪ দ্বারা বিভাজ্য। (প্রমাণিত)

১২. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(ক) $\frac{1}{6}$

সমাধান: প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \frac{1}{6}$

এখানে, 6) 10 (0.166
6
———
40
36
———
40
36
———
4

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $= 0.1666.... = 0.1\dot{6}$

(খ) $\frac{7}{11}$

সমাধান: প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \frac{7}{11}$

এখানে, 11) 70 (0.6363
66
———
40
33
———
70
66
———
40
33
———
7

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $= 0.6363... = 0.\dot{6}\dot{3}$

(গ) $3\frac{2}{9}$

সমাধান: প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= 3\frac{2}{9} = \frac{29}{9}$

এখানে, 9) 29 (3.22
27
———
20
18
———
20
18
———
2

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ $= 3.222.... = 3.\dot{2}$

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ: যে সকল দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানে একটি অঙ্ক বারবার আসে বা একাধিক অঙ্ক পর্যায়ক্রমে বারবার আসে, এদের আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

(ঘ) $3\frac{8}{15}$

সমাধান: প্রদত্ত ভগ্নাংশ = $3\frac{8}{15} = \frac{53}{15}$

এখানে, 15) 53 (3.533

$$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 80 \\ 75 \\ \hline 50 \\ 45 \\ \hline 50 \\ 45 \\ \hline 5 \end{array}$$

∴ নির্ণেয় আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ = 3.5333... = $3.5\dot{3}$

১৩. সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(ক) $0.\dot{2}$

সমাধান: প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ = $0.\dot{2} = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ = $\frac{2}{9}$

(খ) $0.\dot{3}\dot{5}$

সমাধান: প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ = $0.\dot{3}\dot{5} = \frac{35-0}{99} = \frac{35}{99}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ = $\frac{35}{99}$

(গ) $0.1\dot{3}$

সমাধান: প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ = $0.1\dot{3} = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ = $\frac{2}{15}$

(ঘ) $3.7\dot{8}$

সমাধান: প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ = $3.7\dot{8} = \frac{378-37}{90} = \frac{341}{90} = 3\frac{71}{90}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ = $3\frac{71}{90}$

(ঙ) $6.2\dot{3}0\dot{9}$

সমাধান: প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ = $6.2\dot{3}0\dot{9} = \frac{62309-62}{9990} = \frac{20749}{3330} = 6\frac{769}{3330}$

∴ নির্ণেয় ভগ্নাংশ = $6\frac{769}{3330}$

১৪. সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(ক) $2.\dot{3}$, $5.2\dot{3}\dot{5}$

সমাধান: $2.\dot{3}$, $5.2\dot{3}\dot{5}$ আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা যথাক্রমে 0, 1. এখানে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি 1 বার আছে। তাই দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে 1. আবার আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 1 ও 2 এর ল.সা.গু .হলো 2।

সুতরাং, আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2।

∴ $2.\dot{3} = 2.3\dot{3}\dot{3}$ এবং $5.2\dot{3}\dot{5} = 5.2\dot{3}\dot{5}$

Ans. $2.3\dot{3}\dot{3}$, $5.2\dot{3}\dot{5}$

(খ) $7.2\dot{6}, 4.23\dot{7}$

সমাধান: $7.2\dot{6}, 4.23\dot{7}$ আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা যথাক্রমে 1, 2. এখানে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি 2 বার আছে। তাই দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে 2. আবার আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 1 ও 1 এর ল.সা.গু .হলো 1.

সুতরাং, আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 1.

$\therefore\ 7.2\dot{6} = 7.26\dot{6}$ এবং $4.23\dot{7} = 4.23\dot{7}$

Ans. $7.26\dot{6}, 4.23\dot{7}$

(গ) $5.\dot{7}, 8.\dot{3}\dot{4}, 6.\dot{2}4\dot{5}$

সমাধান: $5.\dot{7}, 8.\dot{3}\dot{4}, 6.\dot{2}4\dot{5}$ আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 0. তাই দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে 0. আবার আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 1, 2 ও 3 এর ল.সা.গু .হলো 6.

সুতরাং, আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 6.

$\therefore\ 5.\dot{7} = 5.\dot{7}7777\dot{7}, 8.\dot{3}\dot{4} = 8.\dot{3}4343\dot{4}$ এবং $6.\dot{2}4\dot{5} = 6.\dot{2}4524\dot{5}$

Ans. $5.\dot{7}7777\dot{7}, 8.\dot{3}4343\dot{4}, 6.\dot{2}4524\dot{5}$

(ঘ) $12.32, 2.1\dot{9}, 4.32\dot{5}\dot{6}$

সমাধান: $12.32, 2.1\dot{9}$ এবং $4.32\dot{5}\dot{6}$ আবৃত্ত দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2, 1 ও 2। এখানে অনাবৃত্ত অংশে অঙ্ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি 2 বার আছে। তাই দশমিকে অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক হবে 2। আবার আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 0, 1 ও 2 এর ল.সা.গু . হলো 2।

সুতরাং, আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2।

$\therefore\ 12.32 = 12.32\dot{0}\dot{0}, 2.1\dot{9} = 2.19\dot{9}\dot{9}$ এবং $4.32\dot{5}\dot{6} = 4.32\dot{5}\dot{6}$

Ans. $12.32\dot{0}\dot{0}, 2.19\dot{9}\dot{9}, 4.32\dot{5}\dot{6}$

১৫. যোগ কর:

(ক) $0.4\dot{5} + 0.13\dot{4}$

সমাধান: $0.4\dot{5} + 0.13\dot{4}$

এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 1

$0.4\dot{5}$	=	$0.45\dot{5}$	55
$0.13\dot{4}$	=	$0.13\dot{4}$	44
		$0.58\dot{9}$	99

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল = $0.58\dot{9}$

(খ) $2.0\dot{5} + 8.0\dot{4} + 7.018$

সমাধান:

এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 3 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 1

$2.0\dot{5}$	=	$2.055\dot{5}$	55
$8.0\dot{4}$	=	$8.044\dot{4}$	44
7.018	=	$7.018\dot{0}$	00
		$17.117\dot{9}$	99

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল = $17.117\dot{9}$

(ঘ) $0.00\dot{6} + 0.\dot{9}\dot{2} + 0.0\dot{1}3\dot{4}$

সমাধান:

এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 1, 2, 3 এর

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ: যে সকল দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক বিন্দুর ডানে একটি অঙ্ক বারবার আসে বা একাধিক অঙ্ক পর্যায়ক্রমে বারবার আসে, এদের আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলা হয়। আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে যে অংশ বারবার অর্থাৎ পুনঃপুন আসে, একে <u>আবৃত্ত অংশ</u> আর বাকি অংশকে <u>অনাবৃত্ত অংশ</u> বলা হয়।

সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ও অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ: দুই বা ততোধিক আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশের অনাবৃত্ত ও আবৃত্ত উভয় অংশের অঙ্ক সংখ্যা সমান হলে এদের সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলে। অন্যথায় এদেরকে অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলে। যেমন: $12.\dot{4}\dot{5}$ ও $6.\dot{3}\dot{2}$; $9.45\dot{3}$ ও $125.89\dot{7}$ সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ। আবার, $0.3\dot{4}5\dot{6}$ ও $7.45\dot{7}8\dot{9}$; $6.43\dot{5}\dot{7}$ ও $2.89\dot{3}4\dot{5}$ অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ।

ল.সা.গু .হলো 6

$0.00\dot{6} = 0.00\dot{6}66666\dot{6}$	66
$0.\dot{9}\dot{2} = 0.92\dot{9}29292\dot{2}$	92
$0.0\dot{1}3\dot{4} = 0.01\dot{3}41341\dot{1}$	34
$0.94\dot{9}37300\dot{0}$	92

∴ নির্ণেয় যোগফল = $0.94\dot{9}37300\dot{0}$

১৬. বিয়োগ কর:

(ক) $3.\dot{4} - 2.1\dot{3}$

সমাধান: এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 1 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা .1এখন দশমিক সংখ্যা দুইটিকে সদৃশ করে বিয়োগ করি।

$3.\dot{4} = 3.4\dot{4}$	44
$2.1\dot{3} = 2.1\dot{3}$	33
$1.3\dot{1}$	11

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল = $1.3\dot{1}$

(খ) $5.\dot{1}\dot{2} - 3.4\dot{5}$

সমাধান: এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা হবে 1 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2. এখন দশমিক সংখ্যা দুইটিকে সদৃশ করে বিয়োগ করি।

$5.\dot{1}\dot{2} = 5.1\dot{2}\dot{1}$	21
$3.4\dot{5} = 3.4\dot{5}\dot{5}$	55
$1.6\dot{6}\dot{5}$	66

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল = $1.6\dot{6}\dot{5}$

(গ) $8.49 - 5.3\dot{5}\dot{6}$

সমাধান: এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2

$8.49 = 8.49\dot{0}\dot{0}$	00
$5.3\dot{5}\dot{6} = 5.35\dot{6}\dot{5}$	65
$3.13\dot{3}\dot{4}$	35

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল = $3.13\dot{3}\dot{4}$

(ঘ) $19.34\dot{5} - 13.2\dot{3}4\dot{9}$

সমাধান: এখানে, অনাবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 2 এবং আবৃত্ত অংশের অঙ্ক সংখ্যা 1 ও 3 এর ল.সা.গু. 3

$19.34\dot{5} = 19.34\dot{5}5\dot{5}$	55
$13.2\dot{3}4\dot{9} = 13.23\dot{4}9\dot{3}$	49
$6.11\dot{0}6\dot{2}$	06

∴ নির্ণেয় বিয়োগফল = $6.11\dot{0}6\dot{2}$

১৭. গুণ কর:

(ক) $0.\dot{3} \times 0.\dot{6}$

সমাধান:

$0.\dot{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

এবং $0.\dot{6} = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\therefore 0.\dot{3} \times 0.\dot{6} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = 0.\dot{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= 0.\dot{2}$

(খ) $2.\dot{4} \times 0.\dot{8}\dot{1}$

সমাধান:

$2.\dot{4} = \frac{24-2}{9} = \frac{22}{9}$

এবং $0.\dot{8}\dot{1} = \frac{81-0}{99} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$

$2.\dot{4} \times 0.\dot{8}\dot{1} = \frac{22}{9} \times \frac{9}{11} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= 2$

(গ) $0.6\dot{2} \times 0.\dot{3}$

সমাধান:

$0.6\dot{2} = \frac{62-6}{90} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$

এবং $0.\dot{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$0.6\dot{2} \times 0.\dot{3} = \frac{28}{45} \times \frac{1}{3} = \frac{28}{135} = 0.2074074... = 0.2\dot{0}7\dot{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= 0.2\dot{0}7\dot{4}$

(ঘ) $42.\dot{1}\dot{8} \times 0.2\dot{8}$

সমাধান:

$42.\dot{1}\dot{8} = \frac{4218-42}{99} = \frac{4176}{99} = \frac{464}{11}$

এবং $0.2\dot{8} = \frac{28-2}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$

$42.\dot{1}\dot{8} \times 0.2\dot{8} = \frac{464}{11} \times \frac{13}{45} = \frac{6032}{495} = 12.1858585... = 12.1\dot{8}\dot{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= 12.1\dot{8}\dot{5}$

১৮. ভাগ কর:

(ক) $0.\dot{3} \div 0.\dot{6}$

সমাধান:

$0.\dot{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$0.\dot{6} = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$0.\dot{3} \div 0.\dot{6} = \frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= 0.5$

(খ) $0.3\dot{5} \div 1.\dot{7}$

সমাধান:

$0.3\dot{5} = \frac{35-3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$

$1.\dot{7} = \frac{17-1}{9} = \frac{16}{9}$

$0.3\dot{5} \div 1.\dot{7} = \frac{16}{45} \div \frac{16}{9} = \frac{16}{45} \times \frac{9}{16} = \frac{1}{5} = 0.2$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= 0.2$

(গ) $2.3\dot{7} \div 0.4\dot{5}$

সমাধান:

$2.3\dot{7} = \frac{237-23}{90} = \frac{214}{90}$

$0.4\dot{5} = \frac{45-4}{90} = \frac{41}{90}$

$2.3\dot{7} \div 0.4\dot{5} = \frac{214}{90} \div \frac{41}{90} = \frac{214}{90} \times \frac{90}{41} = \frac{214}{41} = 5.2195121951......$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= 5.\dot{2}195\dot{1}$

(ঘ) $1.\dot{1}8\dot{5} \div 0.\dot{2}\dot{4}$

$1.\dot{1}8\dot{5} = \frac{1185-1}{999} = \frac{1184}{999}$

$0.\dot{2}\dot{4} = \frac{24-0}{99} = \frac{24}{99}$

$1.\dot{1}8\dot{5} \div 0.\dot{2}\dot{4} = \frac{1184}{999} \div \frac{24}{99} = \frac{1184}{999} \times \frac{99}{24} = \frac{148}{111} \times \frac{11}{3} = \frac{1628}{333} = 4.888......$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= 4.\dot{8}$

১৯. বর্গমূল নির্ণয় কর (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত) এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূলগুলোর আসন্ন মান লেখ:

(ক) 12

সমাধান: 12 এর বর্গমূল = $\sqrt{12}$

এখানে,
```
3    | 12.00 00 00 | 3.464
     |  9
     ---------------
64   | 300
     | 256
     ---------
686  | 4400
     | 4116
     ---------
6924 | 28400
     | 27696
     ---------
         704
```

অতএব, 12-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল = 3.464

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 3.46

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল = 3.464, 3.46 (আসন্ন)

(খ) $0.\dot{2}\dot{5}$

সমাধান: $0.\dot{2}\dot{5}$ এর বর্গমূল = $\sqrt{0.\dot{2}\dot{5}}$

$$\begin{array}{r|l|l}
\text{এখানে,}\ 5 & 0.252525.... & 0.502 \\
 & 25 & \\ \hline
1002 & 2525 & \\
 & 2004 & \\ \hline
 & 521 &
\end{array}$$

অতএব, $0.\dot{2}\dot{5}$ এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল = 0.502

এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 0.50

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 0.502, 0.50 (আসন্ন)

(গ) $1.3\dot{4}$

সমাধান: $1.3\dot{4}$ এর বর্গমূল = $\sqrt{1.3\dot{4}}$

$1.3\dot{4}$ = 1.344444...

$$\begin{array}{r|l|l}
\text{এখানে,}\ 1 & 1.34\ 44\ 44.... & 1.159 \\
 & 1 & \\ \hline
21 & 34 & \\
 & 21 & \\ \hline
225 & 1344 & \\
 & 1125 & \\ \hline
2309 & 21944 & \\
 & 20781 & \\ \hline
 & 1163 &
\end{array}$$

অতএব, $1.3\dot{4}$ এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল = 1.159 এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 1.16

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 1.159, 1.16 (আসন্ন)

(ঘ) $5.1\dot{3}0\dot{2}$

সমাধান:

$5.1\dot{3}0\dot{2}$ -এর বর্গমূল= $\sqrt{5.1\dot{3}0\dot{2}}$

$5.1\dot{3}0\dot{2}$ = 5.130230....

$$\begin{array}{r|l|l}
\text{এখানে,}\ 2 & 5.130230... & 2.265 \\
 & 4 & \\ \hline
42 & 113 & \\
 & 84 & \\ \hline
446 & 2902 & \\
 & 2676 & \\ \hline
4525 & 22630 & \\
 & 22625 & \\ \hline
 & 5 &
\end{array}$$

অতএব, $5.1\dot{3}0\dot{2}$ -এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল= 2.265 এবং দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান= 2.27

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 2.265, 2.27 (আসন্ন)

২০. নিচের কোন সংখ্যাগুলো মূলদ এবং কোন সংখ্যাগুলো অমূলদ লেখ:

(ক) $0.\dot{4}$ **(খ)** $\sqrt{9}$ **(গ)** $\sqrt{11}$ **(ঘ)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(ঙ) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$ **(চ)** $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$ **(ছ)** $\frac{2}{3} \div \frac{3}{7}$ **(জ)** $5.\dot{6}3\dot{9}$

সমাধান:

(ক) $0.\dot{4} = \frac{4}{9}$

$\therefore$ $0.\dot{4}$ সংখ্যাটি মূলদ।

(খ) $\sqrt{9}$

$= \sqrt{3 \times 3} = \sqrt{3^2} = 3$

$\therefore \sqrt{9}$ সংখ্যাটি মূলদ।

(গ) $\sqrt{11}$

যেহেতু 11 সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা নয়,

$\therefore \sqrt{11}$ সংখ্যাটি অমূলদ।

(ঘ) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

$= \frac{\sqrt{3 \times 2}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

যেহেতু $\frac{2}{3}$ পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ নয়,

$\therefore \frac{\sqrt{6}}{3}$ সংখ্যাটি অমূলদ।

(ঙ) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$

যেহেতু $\frac{2}{7}$ পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ নয়,

$\therefore \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$ সংখ্যাটি অমূলদ।

(চ) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$

$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{9}}{\sqrt{3} \times \sqrt{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$ সংখ্যাটি মূলদ।

(ছ) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{7}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{9}$

$\therefore$ সংখ্যাটি মূলদ।

(জ) $5.\dot{6}3\dot{9}$

$= \frac{5639-5}{999} = \frac{5634}{999} = \frac{626}{111}$

$\therefore$ সংখ্যাটি মূলদ।

২১. $n = 2x-1$, যেখানে $x \in N$
ক. $1.\dot{2}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।
খ. দেখাও যে, n^2 কে 8(আট)দ্বারা ভাগ করলে, প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ 1 থাকবে।
গ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{n}$ একটি অমূলদ সংখ্যা, যেখানে $x = 10$.

সমাধান:

ক. প্রদত্ত আবৃত দশমিক ভগ্নাংশ $= 1.\dot{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $n = (2x - 1)$ যেখানে $x \in N$.

$\therefore$ n এর বর্গ $= n^2 = (2x - 1)^2$

$= (2x)^2 - 2.2x.1 + (1)^2$

$= 4x^2 - 4x + 1$

$= 4x(x-1)+1$

এখানে, x এবং $(x-1)$ দুটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা। সুতরাং এদের যে কোন একটি অবশ্যই জোড় সংখ্যা হবে। এদের গুণফলও জোড়সংখ্যা হবে।।

$\therefore x(x-1)$, 2 দ্বারা বিভাজ্য।

$4x(x-1)$, $4\times 2 = 8$ দ্বারা বিভাজ্য।

$4x(x-1) + 1$ এর $4x(x-1)$, 8 দ্বারা বিভাজ্য।

সুতরাং $4x(x-1)+1$ কে 8 দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 1 অবশিষ্ট থাকবে।

$\therefore n^2$ কে ৪ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 1 অবশিষ্ট থাকবে। (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $n = 2x - 1$

$x = 10$ হলে, $n = 2\times 10 - 1 = 19$.

আমরা জানি, $16 < 19 < 25$.

বা, $\sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25}$

$\therefore 4 < 19 < 5$

সুতরাং $\sqrt{19}$ এর মান 4 অপেক্ষা বড় এবং 5 অপেক্ষা ছোট।

অতএব, $\sqrt{19}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

সুতরাং, $\sqrt{19}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা।

যদি, $\sqrt{19}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে,

ধরি, $\sqrt{19} = \frac{p}{q}$; যেখানে p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

বা, $19 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $19q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুন করে]

স্পষ্টত, 19q পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু, $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয় কারণ, p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা এবং এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

সুতরাং, 19q এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ, $19q \neq \frac{p^2}{q}$

সুতরাং, $\sqrt{19}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনও সংখ্যাই হতে পারে না।

অর্থাৎ, $\sqrt{19} \neq \frac{p}{q}$

সুতরাং, $\sqrt{19}$ মূলদ সংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{19}$ বা, $\sqrt{n}$ অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

২২. $\sqrt{5}$ ও 4 দুইটি বাস্তব সংখ্যা।
ক. কোনটি মূলদ ও কোনটি অমূলদ নির্দেশ কর।
খ. $\sqrt{5}$ ও 4 এর মধ্যে দুইটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় কর।
গ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান

ক. যেহেতু $\sqrt{5}$ পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়,

সেহেতু $\sqrt{5}$ সংখ্যাটি অমূলদ।

$4 = \frac{4}{1}$, যা মূলদ [$\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায়]

$\therefore$ 4 সংখ্যাটি মূলদ। (Ans.)

খ. এখানে, $\sqrt{5} = 2.236067 ....$

মনে করি, $a = 2.4040040004 ....$

এবং $b = 2.5050050005 ....$

এখানে স্পষ্টত, a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং উভয়ই $\sqrt{5}$ অপেক্ষা বড় ও 4 অপেক্ষা ছোট।

অর্থাৎ $\sqrt{5} < a < 4$ এবং $\sqrt{5} < b < 4$

আবার a ও b কে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

$\therefore$ a ও b নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় যেখানে উভয় সংখ্যাই অমূলদ (Ans.)

গ. ৯(ক) সমাধান দ্রষ্টব্য

২৩। সরল কর:

ক. $(0.\dot{3} \times 0.8\dot{3}) \div (0.5 \times 0.\dot{1}) + 0.3\dot{5} \div 0.0\dot{8}$

খ. $[(6.27 \times 0.5) \div \{(0.5 \times 0.75) \times 8.36\}] \div \{(0.25 \times 0.1) \times (0.75 \times 21.\dot{3}) \times 0.5\}$

সমাধান:

ক. $(0.\dot{3} \times 0.8\dot{3}) \div (0.5 \times 0.\dot{1}) + 0.3\dot{5} \div 0.0\dot{8}$

$= (\frac{3}{9} \times \frac{83-8}{90}) \div (\frac{5}{10} \times \frac{1}{9}) + \frac{35-3}{90} \div \frac{8}{90}$

$= (\frac{3}{9} \times \frac{75}{90}) \div \frac{5}{90} + \frac{32}{90} \div \frac{8}{90}$

$= \frac{25}{90} \times \frac{90}{5} + \frac{32}{90} \times \frac{90}{8}$

$= 5 + 4 = 9$

উত্তর: 9

খ. $[(6.27\times0.5) \div \{(0.5\times0.75) \times8.36\}] \div \{(0.25\times0.1) \times (0.75\times21.\dot{3}) \times0.5\}$

$= [(\frac{627}{100} \times \frac{5}{10}) \div \{(\frac{5}{10} \times \frac{75}{100}) \times \frac{836}{100}\}] \div \{(\frac{25}{100} \times \frac{1}{10}) \times (\frac{75}{100} \times \frac{213-21}{9}) \times \frac{5}{10}\}$

$= [(\frac{627}{100} \times \frac{1}{2}) \div \{(\frac{1}{2} \times \frac{75}{100}) \times \frac{836}{100}\}] \div \{\frac{25}{1000} \times (\frac{75}{100} \times \frac{192}{9}) \times \frac{1}{2}\}$

$= [\frac{627}{200} \div \{\frac{75}{200} \times \frac{836}{100}\}] \div \{\frac{25}{1000} \times \frac{1600}{100} \times \frac{1}{2}\}$

$= [\frac{627}{200} \div \frac{627}{200}] \div \{\frac{25}{1000} \times 16 \times \frac{1}{2}\}$

$= 1 \div \{\frac{1}{40} \times 8\}$

$= 1 \div \frac{1}{5}$

$= 1 \times \frac{5}{1}$

$= 5$

উত্তর: 5

অধ্যায় ২ ২.১ সেট ও ফাংশন Set and Function

১. নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক. $\{x \in N : x^2 > 9$ **এবং** $x^3 < 130\}$

সমাধান: আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $N = \{1, 2, 3, ...\}$

এখানে,

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1 \ngtr 9$ এবং $x^3 = 1^3 = 1 < 130$

$x = 2$ হলে, $x^2 = 2^2 = 4 \ngtr 9$ এবং $x^3 = 2^3 = 8 < 130$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9 \ngtr 9$ এবং $x^3 = 3^3 = 27 < 130$

$X = 4$ হলে, $x^2 = 4^2 = 16 > 9$ এবং $x^3 = 4^3 = 64 < 130$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25 > 9$ এবং $x^3 = 5^3 = 125 < 130$

$x = 6$ হলে, $x^2 = 6^2 = 36 > 9$ এবং $x^3 = 6^3 = 216 \nless 130$

$\therefore$ শর্তমতে, গ্রহণযোগ্য সংখ্যাসমূহ: 4, 5

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{4, 5\}$

খ. $\{x \in Z : x^2 > 5$ **এবং** $x^3 \leq 36\}$

সমাধান: পূর্ণসংখ্যার সেট, $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

যেহেতু $x \in Z$

সুতরাং, $x = 0$ হলে, $x^2 = 0^2 = 0 \ngtr 5$ এবং $x^3 = 0^3 = 0 < 36$

$x = \pm 1$ হলে, $x^2 = (\pm 1)^2 = 1 \ngtr 5$ এবং $x^3 = (\pm 1)^3 = \pm 1 < 36$

$x = \pm 2$ হলে, $x^2 = (\pm 2)^2 = 4 \ngtr 5$ এবং $x^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8 < 36$

$x = \pm 3$ হলে, $x^2 = (\pm 3)^2 = 9 > 5$ এবং $x^3 = (\pm 3)^3 = \pm 27 < 36$

$x = -4$ হলে, $x^2 = (-4)^2 = 16 > 5$ এবং $x^3 = (-4)^3 = -64 < 36$

$x = 4$ হলে, $x^2 = (4)^2 = 16 > 5$ এবং $x^3 = 4^3 = 64 \nless 36$

....

এছাড়াও -4 এর চেয়ে ছোট সকল ঋণাত্মক বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{......., -5, -4, -3, 3\}$

গ. $\{x \in N : x$, **36 এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক**$\}$

সমাধান: স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

আবার, $36 = 1 \times 36$

$= 2 \times 18$

$= 3 \times 12$

$= 4 \times 9$

$= 6 \times 6$

$\therefore$ 36 এর গুণনীয়কসমূহ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

এবং 6 এর গুণিতকসমূহ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য সংখ্যাসমূহ: 6, 12, 18, 36

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{6, 12, 18, 36\}$

ঘ. $\{x \in N: x^3 > 25$ **এবং** $x^4 < 264\}$

সমাধান: স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $N = \{1, 2, 3, ...\}$

এখানে, $x = 1$ হলে, $x^3 = 1^3 = 1 \ngtr 25$ এবং $x^4 = 1^4 = 1 < 264$

$x = 2$ হলে, $x^3 = 2^3 = 8 \ngtr 25$ এবং $x^4 = 2^4 = 16 < 264$

$x = 3$ হলে, $x^3 = 3^3 = 27 > 25$ এবং $x^4 = 3^4 = 81 < 264$

$x = 4$ হলে, $x^3 = 4^3 = 64 > 25$ এবং $x^4 = 4^4 = 256 < 264$

$x = 5$ হলে, $x^3 = 5^3 = 125 > 25$ এবং $x^4 = 5^4 = 625 \nless 264$

শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য সংখ্যা দুইটি: 3, 4

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{3, 4\}$

সেটকে দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। যথা: তালিকা পদ্ধতি (Roster Method বা Tabular Method) ও সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method)।

তালিকা পদ্ধতি: এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনী {} এর মধ্যে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে 'কমা' ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে আলাদা করা হয়। যেমন, A = {a, b}, B = {2, 4, 6}, C = {নিলয়, তিশা, শুভ্রা} ইত্যাদি।

২. নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক. {3, 5, 7, 9, 11}

সমাধান: {3, 5, 7, 9, 11} সেটের উপাদানগুলো প্রত্যেকটি বিজোড় সংখ্যা, 3 এর ছোট নয় এবং 11 এর বড় নয়।

∴ নির্ণেয় সেট = $\{x \in N: x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 13\}$

[বি:দ্র: এই প্রশ্নের একাধিক উত্তর হতে পারে।

যেমন: $\{x \in N: x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \leq x \leq 11\}$

$\{x \in N: x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x \leq 11\}$

$\{x \in N: x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \leq x < 13\}$]

খ. {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

সমাধান: {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} সেটের উপাদানসমূহ প্রত্যেকে স্বাভাবিক সংখ্যা ও 36 এর গুণনীয়ক।

∴ নির্ণেয় সেট = $\{x \in N: x$, 36 এর গুণনীয়ক$\}$

গ. {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

সমাধান: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40} সেটের উপাদানসমূহ প্রত্যেকে 4 এর গুণিতক ও 40 এর বড় নয়।

∴ নির্ণেয় সেট = $\{x \in N: x$, 4 এর গুণিতক এবং $x \leq 40\}$।

ঘ. {±4, ±5, ±6}

সমাধান: {± 4, ± 5, ± 6} সেটের উপাদানসমূহ প্রত্যেকে পূর্ণসংখ্যা,

এখন, $x = \pm 4$ হলে, $x^2 = 16$ এবং $x^3 = \pm 64$

$x = \pm 5$ হলে, $x^2 = 25$ এবং $x^3 = \pm 125$

$x = \pm 6$ হলে, $x^2 = 36$ এবং $x^3 = \pm 216$,

অর্থাৎ, উপাদানসমূহের বর্গ 16 অপেক্ষা বড় অথবা সমান এবং ঘন 216 অপেক্ষা ছোট অথবা সমান।

∴ নির্ণেয় সেট, $\{x \in Z: x^2 \geq 16$ এবং $x^3 \leq 216\}$

[বি. দ্র. এ প্রশ্নে আরো উত্তর থাকতে পারে।

যেমন: $\{x \in Z: 16 \leq x^2 \leq 36\}$

৩. A = {2, 3, 4}, B = {1, 2, a} এবং C = {2, a, b} হলে, নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর:

ক. B\C

সমাধান: দেওয়া আছে, B = {1, 2, a} এবং C = {2, a, b}

∴ $B \setminus C = \{1, 2, a\} - \{2, a, b\} = \{1\}$

∴ $B \setminus C = \{1\}$ (Ans.)

খ. AUB

সমাধান: দেওয়া আছে,

A = {2, 3, 4} এবং B = {1, 2, a}

∴ $A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{1, 2, a\} = \{1, 2, 3, 4, a\}$

∴ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a\}$ (Ans.)

গ. A ∩ C

সমাধান: দেওয়া আছে, A = {2, 3, 4} এবং C = {2, a, b}

∴ $A \cap C = \{2, 3, 4\} \cap \{2, a, b\} = \{2\}$

∴ $A \cap C = \{2\}$ (Ans.)

ঘ. AU (B ∩ C)

সমাধান: দেওয়া আছে, A = {2, 3, 4}, B = {1, 2, a} এবং C = {2, a, b}

এখানে, $B \cap C = \{1, 2, a,\} \cap \{2, a, b\} = \{2, a\}$

∴ $A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4\} \cup \{2, a\} = \{2, 3, 4, a\}$

∴ $A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4, a\}$ (Ans.)

সেট গঠন পদ্ধতি: এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদান নির্ধারণের জন্য সাধারণ ধর্মের উল্লেখ থাকে। যেমন: A = {x : x স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা}, B = {x : x নবম শ্রেণির প্রথম পাঁচজন শিক্ষার্থী} ইত্যাদি। এখানে, ':' দ্বারা 'এরূপ যেন' বা সংক্ষেপে 'যেন' (such that) বোঝায়। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ধারণের জন্য শর্ত বা নিয়ম (Rule) দেওয়া থাকে, এ জন্য এ পদ্ধতিকে Rule Method ও বলা হয়।

ঙ. $A \cap (B \cup C)$

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, a\}$ এবং $C = \{2, a, b\}$

এখানে, $B \cup C = \{1, 2, a\} \cup \{2, a, b\} = \{1, 2, a, b\}$

$A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, a, b\} = \{2\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = \{2\}$ (Ans.)

৪. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই কর:

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

সমাধান:

সেট	উপাদান
U	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
A	1, 3, 5
B	2, 4, 6
AUB	1, 2, 3, 4, 5, 6
(AUB)′	7
A′	2, 4, 6, 7
B′	1, 3, 5, 7
A′ ∩ B′	7

$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$ (সত্যতা যাচাই হলো)

বিকল্প সমাধান: দেয়া আছে,

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$

এখানে, $A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore (A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$= \{7\}$

আবার, $A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5\}$

$= \{2, 4, 6, 7\}$

$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5, 7\}$

$A' \cap B' = \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{7\}$

$\therefore (A \cup B)' = A' \cap B'$ (সত্যতা যাচাই হলো)

(ii) $(B \cap C)' = B' \cup C'$

সমাধান:

সেট	উপাদান
U	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
B	2, 4, 6
C	3, 4, 5, 6, 7
B∩C	4, 6
(B∩C)′	1, 2, 3, 5, 7
B′	1, 3, 5, 7
C′	1, 2
B′ U C′	1, 2, 3, 5, 7

$\therefore (B \cap C)' = B' \cup C'$ (সত্যতা যাচাই হলো)

বিকল্প সমাধান:

দেয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

এখানে, $B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 6\}$

$\therefore (B \cap C)' = U - (B \cap C)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{4, 6\}$

$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$
আবার, $B' = U\text{-}B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\}$
$= \{1, 3, 5, 7\}$
$C' = U\text{-}C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2\}$
$\therefore B' \cup C' = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2\}$
$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$
$\therefore (B\cap C)' = B' \cup C'$ (সত্যতা যাচাই হলো)

(iii) $(A\cup B) \cap C = (A\cap C) \cup (B\cap C)$
সমাধান:

সেট	উপাদান
A	1, 3, 5
B	2, 4, 6
C	3, 4, 5, 6, 7
AUB	1, 2, 3, 4, 5, 6
(AUB) ∩ C	3, 4, 5, 6
A∩C	3, 5,
B∩C	4, 6
(A∩C) U (B∩C)	3, 4, 5, 6

$\therefore (A\cup B) \cap C = (A\cap C) \cup (B\cap C)$ (সত্যতা যাচাই হলো)

বিকল্প সমাধান:
দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
এখানে, $A\cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\therefore (A\cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6\}$
আবার, $A\cap C = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 5\}$
$B\cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 6\}$

$\therefore (A\cap C) \cup (B\cap C) = \{3, 5\} \cup \{4, 6\}$
$= \{3, 4, 5, 6\}$
$\therefore (A\cup B) \cap C = (A\cap C) \cup (B\cap C)$ (সত্যতা যাচাই হলো)

(iv) $(A\cap B) \cup C = (A\cup C) \cap (B\cup C)$
সমাধান:

সেট	উপাদান
A	1, 3, 5
B	2, 4, 6
C	3, 4, 5, 6, 7
A∩B	∅
(A∩B)UC	3, 4, 5, 6, 7
AUC	1, 3, 4, 5, 6, 7
BUC	2, 3, 4, 5, 6, 7
(AUC)∩(BUC)	3, 4, 5, 6, 7

$\therefore (A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$ (সত্যতা যাচাই হলো)

৫. $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, l\}$ হলে, $P(Q)$ এবং $P(R)$ নির্ণয় কর।
সমাধান: দেওয়া আছে, $Q= \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, l\}$
এখানে, Q এর উপসেটসমূহ $\{x, y\}, \{x\}, \{y\}$ এবং $\emptyset$
$\therefore P(Q) = \{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \emptyset\}$. (Ans.)
আবার, R এর উপসেটসমূহ $\{m,n, l\}, \{m, n\}, \{m, l\}, \{n, l\}, \{m\}, \{n\}, \{l\}$ এবং $\emptyset$
$\therefore P(R) = \{\{m, n, l\}, \{m, n\}, \{m, l\}, \{n, l\}, \{m\}, \{n\}, \{l\}, \emptyset\}$ (Ans.)

৬. $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$ এবং $C = AUB$ হলে, দেখাও যে, P(C) এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$
$\therefore C = AUB = \{a, b\} U \{a, b, c\}$
$= \{a, b, c\}$
এখানে, C এর উপাদান সংখ্যা 3 এবং
C এর উপসেটসমূহ $\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a\}, \{b\}, \{ c \}, \emptyset$
$\therefore P(C) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$
$\therefore$ P(C) এর উপাদান সংখ্যা $= 8 = 2^3$
$\therefore$P(C) এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হলো C এর উপাদান সংখ্যা। (দেখানো হলো)

৭. (ক) $(x -1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(x - 1, y + 2) = (y -2, 2x + 1)$
ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $x - 1 = y-2$
বা, $x - y = -2+1$
$\therefore x-y = -1$ ... ... (i)

এবং $y + 2 = 2x +1$
বা, $y- 2x = 1-2$
বা, $y-2x = -1$
বা, $2x- y = 1$ ..... (ii) [উভয় পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,
$x -y - (2x - y) = -1-1$
বা, $x-y- 2x + y = -2$
বা, $- x = - 2$
$\therefore x = 2$ [উভয় পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]
এখন, (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে
$2- y = -1$
বা, $-y = -3$
$\therefore y = 3$ [উভয় পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]
Ans. $x = 2, y = 3$

(খ) $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$
ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $ax - cy = 0$ .... (i)
এবং $a^2 - c^2 = ay - cx$
বা, $ay - cx = a^2 - c^2$ .... (ii)
(i) নং কে a দ্বারা ও (ii) নং কে c দ্বারা গুণ করে যোগ করি,
$a^2x - acy = 0$
$acy - c^2x = a^2c - c^3$

$a^2x - c^2x = a^2c - c^3$
বা, $x(a^2 - c^2) = c(a^2 - c^2)$
$\therefore x = c$
(i) নং এ x এর মান বসিয়ে,
$ac - cy = 0$
বা, $cy = ac$
$\therefore y = a$
$\therefore (x, y) = (c, a)$
Ans. (c, a)

(গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

ক্রমজোড়ের শর্তমতে, $6x - y = 1$ .... (i)

এবং $13 = 3x + 2y$

বা, $3x + 2y = 13$ .... (ii)

(i) নং কে 2 দ্বারা দ্বারা গুণ করে (ii) এর সাথে যোগ করি,

$12x - 2y \;\; = 2$

$3x + 2y \;\;\; = 13$

$15x = 15$

বা, x = 1

(i) নং এ x এর মান বসিয়ে,

$6.1 - y = 1$

বা, $6 - y = 1$

$\therefore y = 5$

$\therefore$ (x, y) = (1, 5)

Ans. (1, 5)

৮.(ক) P= {a}, Q= {b, c} হলে, P×Q এবং Q×P নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, P = {a} এবং Q = {b, c}

$\therefore$ P × Q = {a} × {b, c} = {(a, b), (a, c)}

এবং Q × P = {b, c} × {a} = {(b, a), (c, a)}

Ans. {(a, b), (a, c)}; {(b, a), (c, a)}

(খ) A = {3, 4, 5}, B = {4, 5, 6} এবং C = {x, y} হলে, (A∩B) × C নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, A = {3, 4, 5}, B = {4, 5, 6} এবং C = {x, y}

এখানে, A∩B = {3, 4, 5} ∩ {4, 5, 6} = {4, 5}

(A ∩ B) × C = {4, 5} × {x, y}

= {(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)}

Ans. {(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)}.

(গ) P= {3, 5, 7}, Q = {5, 7} এবং R = P\Q হলে, (PUQ) × R নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, P= {3, 5, 7} এবং Q= {5, 7}

$\therefore$ R = P\Q= {3, 5, 7} – {5, 7}={3}

এখানে, (PUQ) = {3, 5, 7} U {5, 7} = {3, 5, 7}

(PUQ) × R = {3, 5, 7} × {3} = {(3, 3), (5, 3), (7, 3)}

Ans. {(3, 3), (5, 3), (7, 3)}

৯. A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, A U B ও A∩B নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, 35 = 1 × 35 = 5 ×7

$\therefore$ A = {1, 5, 7, 35}

আবার, 45 = 1 × 45

= 3 × 15

= 5×9

$\therefore$ B = {1, 3, 5, 9, 15, 45}

$\therefore$ A U B = {1, 5, 7, 35} U {1, 3, 5, 9, 15, 45}

= {1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45}

এবং A ∩ B = {1, 5, 7, 35} ∩ {1, 3, 5, 9, 15, 45}

= {1, 5}

Ans. {1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45} এবং {1, 5}

১০. যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে এদের সেট নির্ণয় কর।

সমাধান: যে স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যাটি 31 অপেক্ষা বড় এবং সংখ্যাটি $(346-31) = 315$ ও $(556-31) = 525$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনে করি, 31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়কের সেট = A এবং 525 এর গুণনীয়কের সেট = B

এখানে,	আবার,
$315 = 1 \times 315$	$525 = 1 \times 525$
$= 3 \times 105$	$= 3 \times 175$
$= 5 \times 63$	$= 5 \times 105$
$= 7 \times 45$	$= 7 \times 75$
$= 9 \times 35$	$= 15 \times 35$

31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়কগুলো হলো: 35, 45, 63, 105, 315

31 অপেক্ষা বড় 525 এর গুণনীয়কগুলো হলো: 35, 75, 105, 175, 525

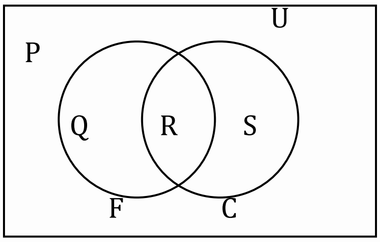
$A = \{35, 45, 63, 105, 315\}$ এবং $B = \{35, 75, 105, 175, 525\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= A \cap B = \{35, 105\}$

Ans. $\{35, 105\}$

১১. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলাই পছন্দ করে তদ্রুপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10 ; কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ফুটবল খেলা পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সেট F এবং ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সেট C.



ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 30 জন শিক্ষার্থীর সেট U এবং পরস্পরছেদী দুইটি বৃত্ত ক্ষেত্র দ্বারা F ও C নির্দেশ করা হলো।

ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে। যাদেরকে P, Q, R, S দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

এখানে, উভয় খেলা পছন্দকারী শিক্ষার্থীর সেট $R = F \cap C$, যার সদস্য সংখ্যা 10

Q = শুধু ফুটবল খেলা পছন্দকারী শিক্ষার্থীর সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 20 - 10 = 10$

S = শুধু ক্রিকেট খেলা পছন্দকারী শিক্ষার্থীর সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 15 - 10 = 5$

$\therefore Q \cup R \cup S = F \cup C$, একটি অথবা উভয় খেলা পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 10 + 5 + 10 = 25$

$\therefore P$ = দুইটি খেলাই পছন্দ করে না এরূপ শিক্ষার্থীর সেট, যার সদস্য সংখ্যা $= 30 - 25 = 5$

$\therefore$ 5 জন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না।

Ans. 5 জন

১২. 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65% শিক্ষার্থী বাংলায়, 48% শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাস এবং 15% শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।

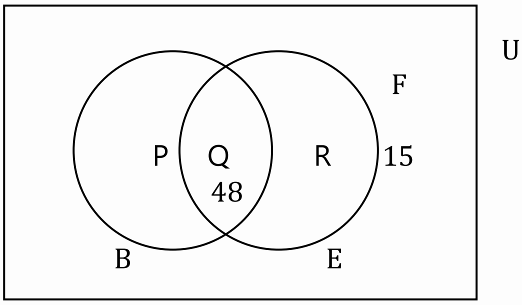
ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।

খ. শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাস করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ. উভয় বিষয়ে পাস এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক.



ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 100 জন পরীক্ষার্থীর সেট U এবং পরস্পরছেদী দুইটি বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা বাংলা ও ইংরেজিতে পাস পরীক্ষার্থীদের সেট যথাক্রমে B ও E নির্দেশ করা হলো।
ভেনচিত্রটি চারটি নিচ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদের P, Q, R ও F দ্বারা নির্দেশ করা হলো।

খ.এখানে, $Q = B \cap E$ = উভয় বিষয়ে পাস পরীক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা = 48
$\therefore$ P = শুধু বাংলায় পাস পরীক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা = 65 –48 = 17
এবং R = শুধু ইংরেজিতে পাস পরীক্ষার্থীদের সেট, যার সদস্য সংখ্যা = 100 – (17+ 48 +15)

$= 100 - 80 = 20$

Ans. 17%, 20%

গ. মনে করি, উভয় বিষয়ে পাস পরীক্ষার্থীদের সংখ্যার মৌলিক গুণনীয়ক সমূহের সেট M এবং উভয় বিষয়ে ফেল পরীক্ষার্থীর সংখ্যার মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট N।
এখানে, উভয় বিষয়ে পাস পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা 48, যার মৌলিক গুণনীয়কসমূহ 2, 3
$\therefore M = \{2, 3\}$
আবার, উভয় বিষয়ে ফেল শিক্ষার্থীর সংখ্যা 15, যার মৌলিক গুণনীয়কসমূহ 3, 5
$\therefore N = \{3, 5\}$
$\therefore$ MUN = {2, 3} U {3, 5} = {2, 3, 5} (Ans.)

অধ্যায় ২ ২.২ সেট ও ফাংশন Set and Function

MCQ Answers:
১। খ ২। গ ৩। খ
৪। ক ৫। ঘ ৬। ঘ
৭। গ ৮। গ ৯। ঘ

১. ৪ এর গুণনীয়ক সেট কোনটি?

ক. {8, 16, 24, ...} খ. {1, 2, 4, 8} গ. {2, 4, 8} ঘ. {1, 2}

ব্যাখ্যা: $8 = 1 \times 8$
$8 = 2 \times 4$
$\therefore$ 8 এর গুণনীয়ক 1, 2, 4, 8

২. সেট C হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $R \subset C$ খ. $R \subset B$ গ. $R \subseteq C \times B$ ঘ. $C \times B \subseteq R$

ব্যাখ্যা: R, $C \times B$ এর উপসেট হবে।

৩. $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 5\}$ হলে $P(A \cap B)$ এর সদস্য সংখ্যা নিচের কোনটি?

ক. 1 খ. 2 গ. 3 ঘ. ৪

ব্যাখ্যা: $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 5\} = \{2\}$
$\therefore P(A \cap B) = \{\{2\}, \emptyset\}$
$\therefore P(A \cap B)$ এর সদস্য সংখ্যা 2

৪. নিচের কোনটি $\{x \in N : 13 < x < 17$ এবং x মৌলিক সংখ্যা$\}$ এর তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ?

ক. $\emptyset$ খ. {0} গ. $\{\emptyset\}$ ঘ. {13, 17}

৫. $A \cup B = \{a, b, c\}$ হলে
i. $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$ ii. $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c\}$ iii. $A = \{a, b\}, B = \{c\}$

উপরোক্ত তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. ii গ. i ও ii ঘ. i, ii ও iii

৬. A ও B দুইটি সসীম সেটের জন্য-
i. $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in B\}$
ii. $n(A) = a, n(B) = b$ হলে $n(A \times B) = ab$
iii. $A \times B$ এর প্রতিটি সদস্য একটি ক্রমজোড়।

উপরোক্ত তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

$A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ হলে, নিচের (৭-১৯) নং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাওঃ

৭. A সেটের সঠিক প্রকাশ কোনটি?

ক. $\{x \in N : 6 < x < 13\}$ খ. $\{x \in N : 6 \leq x < 13\}$
গ. $\{x \in N : 6 \leq x \leq 13\}$ ঘ. $\{x \in N : 6 < x \leq 13\}$

ব্যাখ্যা: উপাদানগুলো স্বাভাবিক সংখ্যা এবং 6 থেকে শুরু হয়ে 13 পর্যন্ত

৮. A সেটের মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট কোনটি?

ক. {6, 8, 10, 12} খ. {7, 9, 11, 13} গ. {7, 11, 13} ঘ. {9, 12}

ব্যাখ্যা: 6 থেকে 13 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে মৌলিক সংখ্যাসমূহ 7, 11, 13

৯. A সেটের 3 এর গুণিতকগুলোর সেট কোনটি?

ক. {6, 9} খ. {6, 11} গ. {9, 12} ঘ. {6, 9, 12}

ব্যাখ্যা: 6 থেকে 13 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে 3 এর গুণিতকগুলো $3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 4 = 12$

১০. যদি $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $x \in A$ এবং $y \in B$ হয়, তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x>y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে রিলেশনটি নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$

প্রশ্নানুসারে, রিলেশন $R= \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x > y\}$

এখানে, $A \times B = \{3, 4\} \times \{2, 4\} = \{(3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

$\therefore R \{(3, 2), (4, 2)\}$

$\therefore$ নির্ণেয় রিলেশন $\{(3, 2), (4, 2)\}$

১১. যদি $C = \{2, 5\}$, $D = \{4, 6, 7\}$, $x \in C$ এবং $y \in D$ হয়, তবে C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x+1<y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে তবে অন্বয়টি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, অন্বয়টি R

শর্তমতে, $R = \{(x, y): x \in C, y \in D$ এবং $x +1<y\}$

এখন, $C\times D = \{2, 5\} \times \{4, 6, 7\}$

$= \{(2, 4), (2, 6), (2, 7), (5, 4), (5, 6), (5, 7)\}$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $R = \{(2, 4), \{2, 6), (2, 7), (5, 7)\}$

১২. $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1)$, $f(2)$ এবং $f(\frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 + 5x - 3$

$\therefore f(-1) = (-1)^4 + 5.(-1) - 3 = 1- 5 - 3 = -7$

$\therefore f(2) = 2^4 + 5(2) - 3 = 16 + 10 - 3 = 26 - 3 = 23$

এবং $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^4 + 5(\frac{1}{2}) - 3 = \frac{1}{16} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{1+40-48}{16} = \frac{-7}{16}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $f(-1) = -7$, $f(2) = 23$ এবং $f(\frac{1}{2}) = \frac{-7}{16}$

১৩. যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে ?

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$

$\therefore f(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 - 4(-2) - 8$

$= -8 + 4k + 8 - 8 = -8 + 4k$

যেহেতু, $f(-2) = 0$

সুতরাং, $-8 + 4k = 0$

বা, $4k = 8$

বা, $k = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $k = 2$

১৪. $f(x) = x^3 - 6x^2+11x - 6$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 6x^2+11x - 6$

$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$

$= x^2 (x-1) - 5x(x-1)+ 6(x-1)$

$= (x-1) (x^2 - 5x + 6)$

$= (x-1) (x^2 - 3x - 2x + 6)$

$= (x-1) \{x(x-3) - 2(x-3)\}$

$= (x-1) (x - 2) (x - 3)$

কিন্তু $f(x) = 0$

$\therefore (x-1) (x - 2) (x - 3) = 0$

হয় $x-1 = 0$ অথবা, $x- 2 = 0$ অথবা, $x-3 = 0$

$\therefore x = 1$ $\therefore x = 2$ $\therefore x = 3$

$\therefore x = 1$ অথবা 2 অথবা 3 হলে $f(x) = 0$ হবে

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $x = 1$ অথবা 2 অথবা 3

১৫. যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তবে $\frac{f(\frac{1}{x^2})+1}{f(\frac{1}{x^2})-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

এখানে, $f(\frac{1}{x^2}) = \frac{2.\frac{1}{x^2}+1}{2.\frac{1}{x^2}-1} = \frac{\frac{2}{x^2}+1}{\frac{2}{x^2}-1} = \frac{\frac{2+x^2}{x^2}}{\frac{2-x^2}{x^2}} = \frac{2+x^2}{x^2} \times \frac{x^2}{2-x^2} = \frac{2+x^2}{2-x^2}$

$\therefore \frac{f(\frac{1}{x^2})+1}{f(\frac{1}{x^2})-1} = \frac{\frac{2+x^2}{2-x^2}+1}{\frac{2+x^2}{2-x^2}-1} = \frac{\frac{2+x^2+2-x^2}{2-x^2}}{\frac{2+x^2-2+x^2}{2-x^2}} = \frac{\frac{4}{2-x^2}}{\frac{2x^2}{2-x^2}} = \frac{4}{2-x^2} \times \frac{2-x^2}{2x^2} = \frac{2}{x^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $\frac{2}{x^2}$

১৬. $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $g(\frac{1}{x^2}) = g(x^2)$

সমাধান: দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$\therefore g(\frac{1}{x^2}) = \frac{1+(\frac{1}{x^2})^2+(\frac{1}{x^2})^4}{(\frac{1}{x^2})^2} = \frac{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}}{\frac{1}{x^4}} = \frac{\frac{x^8+x^4+1}{x^8}}{\frac{1}{x^4}}$

$= \frac{x^8+x^4+1}{x^8} \times \frac{x^4}{1} = \frac{1+x^4+x^8}{x^4}$

আবার, $g(x^2) = \frac{1+(x^2)^2+(x^2)^4}{(x^2)^2} = \frac{1+x^4+x^8}{x^4}$

$\therefore \quad g(\frac{1}{x^2}) = g(x^2)$ (দেখানো হলো)

১৭. নিচের অন্বয়গুলো থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর:

(ক) R = {(2,1), (2, 2), (2, 3)}

সমাধান: দেওয়া আছে, R= {(2,1), (2, 2), (2, 3}}

R অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান 2 এবং দ্বিতীয় উপাদান সমূহ 1, 2, 3.

$\therefore$ ডোম R = {2} এবং রেঞ্জ R = {1, 2, 3} (Ans.)

(খ) S = {(−2, 4), (−1, 1), (0, 0), (1,1), (2, 4)}

সমাধান: দেওয়া আছে,

S = {(−2, 4), (−1, 1), (0, 0), (1,1), (2, 4)}

S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ −2, -1, 0, 1, 2 এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ 0, 1, 4

$\therefore$ ডোম S = {−2, −1, 0, 1, 2} এবং রেঞ্জ S = {0, 1, 4} (Ans.)

(গ) $F = \{(\frac{1}{2}, 0), (1,1), (1, -1), (\frac{5}{2}, 2), (\frac{5}{2}, -2)\}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $F = \{(\frac{1}{2}, 0), (1,1), (1, -1), (\frac{5}{2}, 2), (\frac{5}{2}, -2)\}$

F অন্বয়টির ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{5}{2}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ −2, −1, 0, 1, 2

$\therefore$ ডোম $F = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\}$ এবং রেঞ্জ F = {−2, −1, 0, 1, 2} (Ans.)

১৮. নিচের অন্বয়গুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ক) $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$ যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $R = \{(x, y): x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

R এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $x + y = 1$ বা $y = 1 - x$

এখন প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = 1 - x$ এর মান নির্ণয় করি।

x	–2	–1	0	1	2
y	3	2	1	0	–1

যেহেতু $3 \notin A$, কাজেই $(-2, 3) \notin R$.

$\therefore R = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$ (Ans.)

$\therefore$ ডোম $R = \{-1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{-1, 0, 1, 2\}$ (Ans.)

(খ) $F = \{(x, y) : x \in C, y \in C$ এবং $y = 2x\}$, যেখানে $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ এবং এবং $F = \{(x, y) : x \in C, y \in C$ এবং $y = 2x\}$

F এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $y = 2x$.

এখন প্রত্যেক $x \in C$ এর জন্য $y = 2x$ নির্ণয় করি।

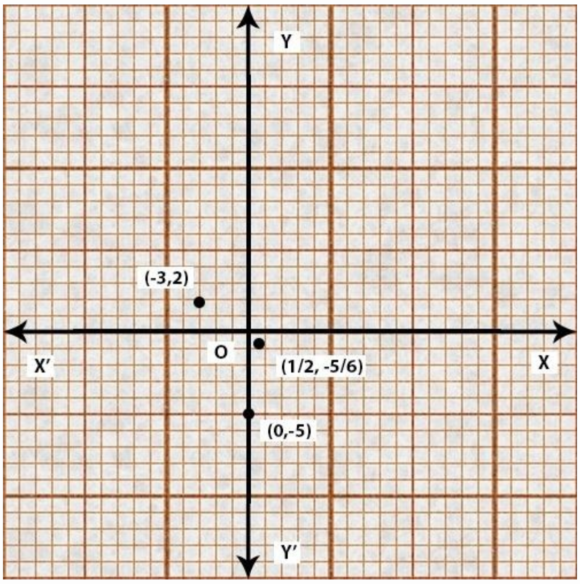
x	–1	0	1	2	3
y	–2	0	2	4	6

যেহেতু -2, 4, 6 উপাদানগুলো C সেটের অন্তর্ভুক্ত নয়, কাজেই $(-1, -2)$, $(2, 4)$ এবং $(3, 6)$ ক্রমজোড়গুলো F অন্বয়ের অন্তর্ভুক্ত হবে না।

$\therefore F = \{(0, 0), (1, 2)\}$ (Ans.)

$\therefore$ ডোম $F = \{0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{0, 2\}$ (Ans.)

১৯. ছক কাগজে $(-3, 2)$, $(0, -5)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6})$ বিন্দুগুলো স্থাপন কর।



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি।

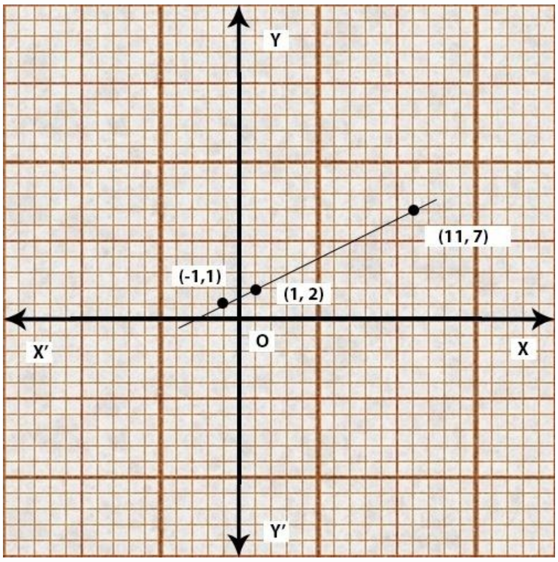
$(-3, 2)$ বিন্দুর অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে। O হতে OX' বরাবর 3 একক গিয়ে সেখান থেকে OY এর সমান্তরাল দিকে 2 একক যেতে হবে। চিত্রে বিন্দুটি চিহ্নিত করে তার পাশে স্থানাঙ্ক $(-3, 2)$ লিখা হলো।

$(0, -5)$ বিন্দুর অবস্থান y-অক্ষের উপর। O হতে OY' বরাবর 5 একক যেতে হবে। চিত্রে বিন্দুটি চিহ্নিত করে পাশে স্থানাঙ্ক $(0, -5)$ লিখা হলো।

($\frac{1}{2}$, – $\frac{5}{6}$) বিন্দুর অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে। O হতে OX বরাবর একক গিয়ে সেখান হতে OY' এর সমান্তরাল দিকে একক যেতে হবে। চিত্রে বিন্দুটি চিহ্নিত করে তার পাশে স্থানাঙ্ক ($\frac{1}{2}$, – $\frac{5}{6}$) লিখা হলো।

২০. ছক কাগজে (1, 2), (-1, 1), (11, 7) বিন্দু তিনটি স্থাপন করে দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান:



বিন্দু তিনটির লেখ অঙ্কন: ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (1, 2), (−1, 1), (11, 7) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। অত:পর বিন্দুগুলোকে যোগ করে উভয় দিকে বর্ধিত করি। ফলে একটি সরলরেখা উৎপন্ন হলো। অর্থাৎ, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত। (দেখানো হলো)।

২১. সার্বিক সেট U = {x : x ∈N এবং x বিজোড় সংখ্যা}
A = {x ∈ N : 2 ≤ x ≤ 7}
B = {x ∈ N : 3 < x < 6}
C = {x ∈ N : x^2 > 5 এবং x^3 < 130}
ক. A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
খ. A' এবং C\B নির্ণয় কর।
গ. B × C এবং P(A ∩ C) নির্ণয় কর।
সমাধান
ক. স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... }
এখন, A = {x ∈ N : 2 ≤ x ≤ 7}
অর্থাৎ, 2 এর চেয়ে বড় বা সমান এবং 7 এর চেয়ে ছোট বা সমান বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ হলো 3, 5, 7
∴ A = {3, 5, 7} (Ans.)

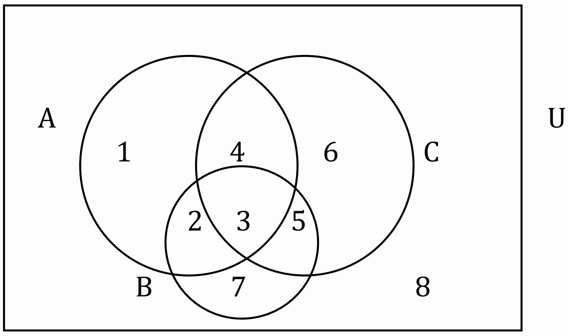
খ. U = {x : x ∈ N এবং x বিজোড় সংখ্যা}
∴ U = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ... }
এখন, A' = U – A
= {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...} – {3, 5, 7}
= {1, 9, 11, ...} (Ans)

আবার, C = {x ∈ N : x^2 > 5 এবং x^3 < 130}
x = 1 হলে, $x^2 = 1^2 = 1 \ngtr 5$ এবং $x^3 = 1^3 = 1 < 130$
x = 3 হলে, $x^2 = 3^2 = 9 > 5$ এবং $x^3 = 3^3 = 27 < 130$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25 > 5$ এবং $x^3 = 5^3 = 125 < 130$
$x = 7$ হলে, $x^2 = 7^2 = 49 > 5$ এবং $x^3 = 7^3 = 343 \nless 130$
$\therefore C = \{3, 5\}$
$B = \{x \in N : 3 < x < 6\}$
অর্থাৎ, 3 এর চেয়ে বড় এবং 6 এর চেয়ে ছোট বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা 5
$\therefore B = \{5\}$
এখন, $C \setminus B = C - B = \{3, 5\} - \{5\} = \{3\}$ (Ans.)

গ. 'ক' ও 'খ' থেকে পাই
$A = \{3, 5, 7\}, B = \{5\}, C = \{3, 5\}$
$B \times C = \{5\} \times \{3, 5\} = \{(5, 3), (5, 5)\}$ (Ans.)
এখন, $A \cap C = \{3, 5, 7\} \cap \{3, 5\} = \{3, 5\}$
$P(A \cap C) = \{\{3, 5\}, \{3\}, \{5\}, \emptyset\}$ (Ans.)

২২.



ক. B কে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
খ. উদ্দীপক ব্যবহার করে $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই কর।
গ. $S = (B \cup C)^c \times A$ হলে, ডোম S নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. ভেনচিত্র থেকে B সেটের উপাদানসমূহ : 2, 3, 5, 7
এখানে, প্রতিটি উপাদান মৌলিক সংখ্যা
$\therefore$ নির্ণেয় সেট, $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $2 \leq x \leq 7\}$

খ. উদ্দীপকের ভেনচিত্র হতে পাই,
$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6\}$
$\therefore B \cap C = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 5\}$
বামপক্ষ $= A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 5\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$
আবার,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
ডানপক্ষ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (সত্যতা যাচাই হলো)

গ. দেওয়া আছে,
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5, 7\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$
এখন, $B \cup C = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{3, 4, 5, 6\}$
$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$(B \cup C)^c = U - (B \cup C)$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{1, 8\}$
$\therefore S = (B \cup C)^c \times A$
$= \{1, 8\} \times \{1, 2, 3, 4\}$

$= \{(1,1), (1,2), (1, 3), (1, 4), (৪, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4)\}$

$\therefore S= \{(1,1), (1, 2), (1,3), (1, 4), (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4)\}$

S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান 1, ৪

$\therefore$ ডোম $S = \{1, 8\}$ (Ans.)

২৩. $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ একটি ফাংশন।

ক. $f(-\frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\frac{f(x)+2}{f(x)-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $f(y) = x$

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

$\therefore f(-\frac{1}{2}) = \frac{4(-\frac{1}{2})-7}{2(-\frac{1}{2})-4} = \frac{-2-7}{-1-4} = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5}$

খ. দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

$$\therefore \frac{f(x)+2}{f(x)-1} = \frac{\frac{4x-7}{2x-4}+2}{\frac{4x-7}{2x-4}-1} = \frac{\frac{4x-7+4x-8}{2x-4}}{\frac{4x-7-2x+4}{2x-4}} = \frac{8x-15}{2x-4} \times \frac{2x-4}{2x-3} = \frac{8x-15}{2x-3}$$

গ. দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

$\therefore f(y) = \frac{4y-7}{2y-4}$

এখন, $y = \frac{4x-7}{2x-4}$

বা, $2xy - 4y = 4x - 7$

বা, $2xy - 4x = 4y - 7$

বা, $x(2y - 4) = 4y - 7$

বা, $x = \frac{4y-7}{2y-4}$

বা, $x = f(y)$

$\therefore f(y) = x$ (দেখানো হলো)

অধ্যায় ৩ ৩.১

বীজগাণিতিক রাশি
Algebraic Expressions

১। সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর:

ক. $2a + 3b$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (2a + 3b)^2$
$= (2a)^2 + 2.2a.3b + (3b)^2$
$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$

খ. $x^2 + \frac{2}{y^2}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (x^2 + \frac{2}{y^2})^2$
$= (x^2)^2 + 2.x^2.\frac{2}{y^2} + (\frac{2}{y^2})^2$
$= x^4 + \frac{4x^2}{y^2} + \frac{4}{y^2}$

গ. $4y - 5x$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (4y - 5x)^2$
$= (4y)^2 - 2.4y.5x + (5x)^2$
$= 16y^2 - 40xy + 25x^2$

ঘ. $5x^2 - y$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (5x^2 - y)^2$
$= (5x^2)^2 - 2.5x^2.y + (y)^2$
$= 25x^4 - 10x^2y + y^2$

ঙ. $3b - 5c - 2a$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (3b - 5c - 2a)^2$
$= \{3b + (-5c) + (-2a)\}^2$
$= (3b)^2 + (-5c)^2 + (-2a)^2 + 2.3b.(-5c) + 2.(-5c).(-2a) + 2.(-2a).3b$
$= 9b^2 + 25c^2 + 4a^2 - 30bc + 20ca - 12ab$

চ. $ax - by - cz$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (ax - by - cz)^2$
$= \{ax + (-by) + (-cz)\}^2$
$= (ax)^2 + (-by)^2 + (-cz)^2 + 2.ax.(-by) + 2.(-by).(-cz) + 2.(-cz).ax$
$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy + 2bcyz - 2cazx$

ছ. $2a + 3x - 2y - 5z$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (2a + 3x - 2y - 5z)^2$
$= \{(2a + 3x) - (2y + 5z)\}^2$
$= (2a + 3x)^2 - 2.(2a + 3x).(2y + 5z) + (2y + 5z)^2$
$= (2a)^2 + 2.2a.3x + (3x)^2 - 2.(4ay + 10az + 6xy + 15xz) + (2y)^2 + 2.2y.5z + (5z)^2$
$= 4a^2 + 12ax + 9x^2 - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 4y^2 + 20yz + 25z^2$
$= 4a^2 + 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12ax - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 20yz$

জ. 1007

সমাধান: প্রদত্ত রাশির বর্গ $= (1007)^2$
$= (1000 + 7)^2$
$= (1000)^2 + 2.1000.7 + (7)^2$
$= 1000000+14000+49$
$=1014049$

সূত্র ও অনুসিদ্ধান্তঃ

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
4. $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
5. $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
6. $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
7. $a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$
8. $ab = (\frac{a + b}{2})^2 - (\frac{a - b}{2})^2$
9. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
10. $(x + a)(x + b)$
$= x^2 + (a + b)x + ab$
11. $(a + b + c)^2 =$
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
12. $a^2 + b^2 + c^2$
$= (a + b + c)^2 - 2(ab + b + ca)$
13. $2(ab + bc + ca)$
$= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

২। সরল কর:

ক. $(7p + 3q - 5r)^2 - 2.(7p + 3q - 5r).(8p - 4q - 5r) + (8p - 4q - 5r)^2$

সমাধান:

মনে করি, $(7p + 3q - 5r) = a$

এবং $(8p - 4q - 5r) = b$

প্রদত্ত রাশি $= (a)^2 - 2.a.b + (b)^2$

$= (a - b)^2$

$= \{(7p + 3q - 5r) - (8p - 4q - 5r)\}^2$

$= (7p + 3q - 5r - 8p + 4q + 5r)^2$

$= (7q - p)^2$

$= (7q)^2 - 2.7q.p + (p)^2$

$= 49q^2 - 14qp + p^2$

খ. $(2m + 3n - p)^2 + (2m - 3n + p)^2 - 2.(2m + 3n - p).(2m - 3n + p)$

সমাধান:

মনে করি, $(2m + 3n - p) = a$

এবং $(2m - 3n + p) = b$

প্রদত্ত রাশি $= (a)^2 - 2.a.b + (b)^2$

$= (a - b)^2$

$= \{(2m + 3n - p) - (2m - 3n + p)\}^2$

$= (2m + 3n - p - 2m + 3n - p)^2$

$= (6n - 2p)^2$

$= (6n)^2 - 2.6n.2p + (2p)^2$

$= 36n^2 - 24np + 4p^2$

গ. $6.35\times6.35 + 2\times 6.35\times3.65 + 3.65\times3.65$

সমাধান:

$6.35\times6.35+2\times 6.35\times3.65+3.65\times3.65$

$= (6.35)^2 + 2 \times 6.35 \times 3.65 + (3.65)^2$

$= (6.35 + 3.65)^2$

$= (10)^2 = 100$

ঘ. $\frac{2345\times2345 - 759\times759}{2345-759}$

$= \frac{(2345)^2 - (759)^2}{2345 - 759}$

$= \frac{(2345 + 759)(2345 - 759)}{(2345 - 759)}$

$= (2345 + 759)$

$= 3104$

৩। $a-b = 4$ এবং $ab = 60$ হলে, $a+b$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a-b = 4$ এবং $ab = 60$

এখন, $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ [অনুসিদ্ধান্ত]

$= (4)^2 + 4.60$ [মান বসিয়ে]

$= 16 + 240$

$= 256$

$\therefore (a + b)^2 = 256$

বা, $a + b = \pm\sqrt{256}$

$\therefore a + b = \pm16$

৪। a+b = 9m এবং ab = 18m² হলে, a−b এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a+b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$

এখন, $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ [অনুসিদ্ধান্ত]

$= (9m)^2 - 4.18m^2$ [মান বসিয়ে]

$= 81m^2 - 72m^2$

$= 9m^2$

$\therefore (a-b)^2 = 9m^2$

বা, $a-b = \pm\sqrt{9m^2}$

$\therefore a-b = \pm 3m$

৫। $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$

সমাধান: দেয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = 4$

বা, $(x - \frac{1}{x})^2 = (4)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 - 2.x.\frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = 16$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 16$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 + 2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = (18)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $(x^2)^2 + 2.x^2.\frac{1}{x^2} + (\frac{1}{x^2})^2 = 324$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 324$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 324 - 2$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ (প্রমাণিত)

6. $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $2x + \frac{2}{x} = 3$

বা, $2(x + \frac{1}{x}) = 3$

বা, $(x + \frac{1}{x}) = \frac{3}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(x + \frac{1}{x})^2 = (\frac{3}{2})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = \frac{9}{4}$

বা, $x^2 + 2 + (\frac{1}{x})^2 = \frac{9}{4}$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{9}{4} - 2$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{9-8}{4}$

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

7. $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 2$

বা, $\frac{a^2+1}{a} = 2$

বা, $a^2 + 1 = 2a$

বা, $a^2 - 2a + 1 = 0$

বা, $(a-1)^2 = 0$

বা, $a - 1 = 0$

$\therefore\ a = 1$

বামপক্ষ $= a^2 + \frac{1}{a^2}$

$= 1^2 + \frac{1}{1^2}$ [মান বসিয়ে]

$= 2$

ডানপক্ষ $= a^4 + \frac{1}{a^4}$

$= 1^4 + \frac{1}{1^4}$ [মান বসিয়ে]

$=2$

$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$ (দেখানো হলো)

8. $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 24$

সমাধান: দেয়া আছে, $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$

বামপক্ষ $= 8ab(a^2 + b^2)$

$= 4ab.2(a^2 + b^2)$

$= \{(a+b)^2 - (a-b)^2\}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$

[অনুসিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে]

$= \{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2\}\{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2\}$

$= (7-5).(7+5)$

$= 2 \times 12$

$= 24$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore 8ab(a^2 + b^2) = 24$ (প্রমাণিত)

9. $a+b+c = 9$ এবং $ab+bc+ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a+b+c = 9$ এবং $ab+bc+ca = 31$

আমরা জানি,

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

$= (9)^2 - 2.31$ [মান বসিয়ে]

$= 81 - 62$

$= 19$

10. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab+bc+ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab+bc+ca = 8$

আমরা জানি,

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$= 9 + 2.8$ [মান বসিয়ে]

$= 9+16$

$=25$

11. $a+b+c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 =$ কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a+b+c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

আমরা জানি,

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

বা, $(6)^2 = 14 + 2.(ab + bc + ca)$ [মান বসিয়ে]

বা, $36 = 14 + 2.(ab + bc + ca)$

বা, $2.(ab + bc + ca) = 36-14$

বা, 2. (ab +bc +ca) = 22

∴ ab +bc +ca = 11

প্রদত্ত রাশি = $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$

$= 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca)$

$= 2.14 - 2.11$ [মান বসিয়ে]

$= 28 - 22$

$= 6$

12. x=3, y =4 এবং z=5 হলে, $9x^2+16y^2+4z^2-24xy-16yz+12zx$ = কত?

সমাধান: দেয়া আছে, x=3, y =4 এবং z=5

প্রদত্ত রাশি = $9x^2+16y^2+4z^2-24xy-16yz+12zx$

$= (3x)^2+(-4y)^2+(2z)^2+2.3x.(-4y)+2.(-4y).2z+2.2z.3x$

$= \{3x+(-4y)+2z\}^2$

$= (3x-4y+2z)^2$

$= \{3.3-4.4+2.5\}^2$ [মান বসিয়ে]

$= (9-16+10)^2$

$= (3)^2$

$= 9$

13. (a+2b)(3a+2c) কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: (a+2b)(3a+2c)

$= \{\frac{(a+2b)+(3a+2c)}{2}\}^2 - \{\frac{(a+2b)-(3a+2c)}{2}\}^2$ [অনুসিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে]

$= (\frac{a+2b+3a+2c}{2})^2 - (\frac{a+2b-3a-2c}{2})^2$

$= (\frac{4a+2b+2c}{2})^2 - (\frac{2b-2a-2c}{2})^2$

$= \{\frac{2(2a+b+c)}{2}\}^2 - \{\frac{2(b-a-c)}{2}\}^2$

$= (2a+b+c)^2 - (b-a-c)^2$

14. $x^2+10x+24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: $x^2+10x+24$

$= x^2+6x+4x+24$

$= x(x+6)+4(x+6)$

$= (x+6)(x+4)$

$= \{\frac{(x+6)+(x+4)}{2}\}^2 - \{\frac{(x+6)-(x+4)}{2}\}^2$ [অনুসিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে]

$= (\frac{x+6+x+4}{2})^2 - (\frac{x+6-x-4}{2})^2$

$= (\frac{2x+10}{2})^2 - (\frac{2}{2})^2$

$= \{\frac{2(x+5)}{2}\}^2 - (1)^2$

$= (x+5)^2 - (1)^2$

15. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ হলে,
(ক) $a^2 + b^2$, (খ) ab এর মান কত?

সমাধান:

দেয়া আছে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$............(1)

এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$............(2)

(1) নং হতে পাই,

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$

বা, $(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 8$

বা, $(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = 8$

বা, $4.(a^2 + b^2 - ab) = 8$ [মান বসিয়ে]

বা, $a^2 + b^2 - ab = \frac{8}{4}$

$\therefore$ $a^2 - ab + b^2 = 2$ ....(3)

(ক)

(2) ও (3) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$a^2 + ab + b^2 + a^2 - ab + b^2 = 4 + 2$

বা, $2a^2 + 2b^2 = 6$

বা, $2(a^2 + b^2) = 6$

বা, $a^2 + b^2 = \frac{6}{2}$

বা, $a^2 + b^2 = 3$

(খ)

(2) নং সমীকরণ হতে (3) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$a^2 + ab + b^2 - a^2 + ab - b^2 = 4 - 2$

বা, $2ab = 2$

বা, $ab = \frac{2}{2}$

বা, $ab = 1$

অধ্যায় ৩ | ৩.২

বীজগাণিতিক রাশি
Algebraic Expressions

১. সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর:

ক. $2x^2 + 3y^2$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির ঘন $= (2x^2 + 3y^2)^3$

$= (2x^2)^3 + 3.(2x^2)^2.3y^2 + 3.2x^2.(3y^2)^2 + (3y^2)^3$

$= 8x^6 + 3.4x^4.3y^2 + 3.2x^2.9y^4 + 27y^6$

$= 8x^6 + 36x^4y^2 + 54x^2y^4 + 27y^6 \quad (Ans.)$

খ. $7m^2 - 2n$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির ঘন $= (7m^2 - 2n)^3$

$= (7m^2)^3 - 3.(7m^2)^2.2n + 3.7m^2.(2n)^2 - (2n)^3$

$= 343m^6 - 3.49m^4.2n + 3.7m^2.4n^2 - 8n^3$

$= 343m^6 - 294m^4n + 84m^2n^2 - 8n^3 \quad (Ans.)$

গ. $2a - b - 3c$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির ঘন $= (2a - b - 3c)^3$

$= \{(2a - b) - 3c\}^3$

$= (2a - b)^3 - 3.(2a - b)^2.3c + 3.(2a - b).(3c)^2 - (3c)^3$

$= \{(2a)^3 - 3.(2a)^2.b + 3.2a.(b)^2 - (b)^3\} - 3.\{(2a)^2 - 2.2a.b + b^2\}.3c + 3.(2a - b).9c^2 - 27c^3$

$= 8a^3 - 3.4a^2.b + 6ab^2 - b^3 - 9c.(4a^2 - 4ab + b^2) + 27c^2.(2a - b) - 27c^3$

$= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 - 36a^2c + 36abc - 9b^2c + 54ac^2 - 27bc^2 - 27c^3$

$= 8a^3 - b^3 - 27c^3 - 12a^2b - 36a^2c + 6ab^2 + 54ac^2 - 9b^2c - 27bc^2 + 36abc \quad (Ans.)$

২. সরল কর:

ক. $(7x + 3b)^3 - (5x + 3b)^3 - 6x(7x + 3b)(5x + 3b)$

সমাধান:

ধরি, $7x + 3b = p$ এবং $5x + 3b = q$

$\therefore p - q = 7x + 3b - 5x - 3b$
$\therefore p - q = 2x$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= p^3 - q^3 - 6x.pq$
$= p^3 - q^3 - 3.pq.2x$
$= p^3 - q^3 - 3.pq.(p - q) \quad [\because p - q = 2x]$
$= (p - q)^3$
$= (2x)^3$
$= 8x^3 \quad (Ans.)$

সূত্র ও অনুসিদ্ধান্তঃ

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
3. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
4. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
5. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
6. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
7. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
8. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

খ. $(a+b+c)^3-(a-b-c)^3-6(b+c)\{a^2-(b+c)^2\}$

সমাধান:

$$(a+b+c)^3-(a-b-c)^3-6(b+c)\{a^2-(b+c)^2\}$$
$= (a+b+c)^3-(a-b-c)^3-3.2\,(b+c)\{a^2-(b+c)^2\}$

ধরি, $a+b+c=x$ এবং $a-b-c=y$

$\therefore x-y=(a+b+c)-(a-b-c)$
$= a+b+c-a+b+c$
$= 2b+2c = 2(b+c)$

$\therefore xy=(a+b+c)\times(a-b-c)$
$= \{a+(b+c)\}\times\{a-(b+c)\}$
$= a^2-(b+c)^2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= x^3-y^3-3(x-y).xy$ [মান বসিয়ে]
$= (x-y)^3$
$= \{2(b+c)\}^3$ [$(x-y)$ এর মান বসিয়ে]
$= 8(b+c)^3$ $(Ans.)$

গ. $(m+n)^6-(m-n)^6-12mn(m^2-n^2)^2$

সমাধান:

$$(m+n)^6-(m-n)^6-12mn(m^2-n^2)^2$$
$= \{(m+n)^2\}^3-\{(m-n)^2\}^3-3.4mn(m^2-n^2)^2$

ধরি, $(m+n)^2=p$ এবং $(m-n)^2=q$

$\therefore (m+n)^2(m-n)^2=pq$

বা, $\{(m+n)(m-n)\}^2=pq$

বা, $(m^2-n^2)^2=pq$ $[\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2]$

আবার, $4mn=(m+n)^2-(m-n)^2$
$\therefore 4mn=p-q$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= p^3-q^3-3(p-q).pq$
$= (p-q)^3$

$= \{(m+n)^2-(m-n)^2\}^3$ [মান বসিয়ে]

$= (4mn)^3$ $[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab]$

$= 64m^3n^3$ $(Ans.)$

ঘ. $(x+y)(x^2-xy+y^2)+(y+z)(y^2-yz+z^2)+(z+x)(z^2-zx+x^2)$

সমাধান: $(x+y)(x^2-xy+y^2)+(y+z)(y^2-yz+z^2)+(z+x)(z^2-zx+x^2)$

$= (x^3+y^3)+(y^3+z^3)+(z^3+x^3)$

$= x^3+y^3+y^3+z^3+z^3+x^3$

$= 2x^3+2y^3+2z^3$

$= 2(x^3+y^3+z^3)$ $(Ans.)$

২. $(2x+3y-4z)^3+(2x-3y+4z)^3+12x\{4x^2-(3y-4z)^2\}$

সমাধান: $(2x+3y-4z)^3+(2x-3y+4z)^3+12x\{4x^2-(3y-4z)^2\}$

$=(2x+3y-4z)^3+(2x-3y+4z)^3+12x\{(2x)^2-(3y-4z)^2\}$

$=(2x+3y-4z)^3+(2x-3y+4z)^3+3.4x(2x+3y-4z)(2x-3y+4z)$

ধরি, $2x+3y-4z=p$ এবং $2x-3y+4z=q$
$\therefore p+q=2x+3y-4z+2x-3y+4z=4x$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=p^3+q^3+3(p+q).pq$

$=(p+q)^3$
$=(4x)^3$ [মান বসিয়ে]
$=64x^3$ $(Ans.)$

৩. $a-b=5$ এবং $ab=36$ হলে, a^3-b^3 এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a-b=5$ এবং $ab=36$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(5)^3+3\times36\times5$ [মান বসিয়ে]

$=125+540$

$=665$ $(Ans.)$

৪. $a^3-b^3=513$ এবং $a-b=3$ হলে, ab এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a^3-b^3=513$
বা, $(a-b)^3+3ab(a-b)=513$
বা, $(3)^3+3ab.3=513$ [মান বসিয়ে]
বা, $27+9ab=513$
বা, $9ab=513-27$
বা, $9ab=486$
বা, $ab=\frac{486}{9}$
বা, $ab=54$ $(Ans.)$

৫. $x=19$ এবং $y=-12$ হলে, $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ এর মান কত?

সমাধান: প্রদত্ত রাশি
$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

$=(2x)^3+3.(2x)^2.3y+3.2x.(3y)^2+(3y)^3$

$=(2x+3y)^3$

$=\{2.19+3.(-12)\}^3$ [মান বসিয়ে]

$=(38-36)^3$

$=(2)^3$

$=8$ $(Ans.)$

৬. $a=15$ হলে, $8a^3+60a^2+150a+130$ এর মান কত?

সমাধান: প্রদত্ত রাশি
$=8a^3+60a^2+150a+130$

$=8a^3+3.4a^2.5+3.2a.25+125+5$

$=(2a)^3+3.(2a)^2.5+3.2a.(5)^2+(5)^3+5$

$= (2a + 5)^3 + 5$

$= \{2.15 + 5\}^3 + 5$ [মান বসিয়ে]

$= (30 + 5)^3 + 5$

$= (35)^3 + 5$

$= 42875 + 5$

$= 42880$ $(Ans.)$

৭. যদি $a + b = m,\ a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$ হয় তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$

সমাধান:

বামপক্ষ $= m^3 + 2p^3$

$= (a + b)^3 + 2(a^3 + b^3)$ [মান বসিয়ে]

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2a^3 + 2b^3$

$= 3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3$

$= 3(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$= 3\{a^2(a + b) + b^2(a + b)\}$

$= 3(a + b)(a^2 + b^2)$

$= 3mn$ $[a + b = m,\ a^2 + b^2 = n]$

= ডানপক্ষ

সুতরাং, $m^3 + 2p^3 = 3mn$ (দেখানো হলো)

৮. $a + b = 3$ এবং $ab = 2$ হলে,
ক. $a^2 - \text{ab} + b^2$ এবং
খ. $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. প্রদত্ত রাশি $= a^2 - \text{ab} + b^2$
$= a^2 + b^2 - \text{ab}$

$= (a + b)^2 - 2\text{ab} - \text{ab}$ $[\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2\text{ab}]$

$= (a + b)^2 - 3\text{ab}$

$= (3)^2 - 3.2$ [মান বসিয়ে]

$= 9 - 6 = 3$ (Ans.)

খ. প্রদত্ত রাশি $= a^3 + b^3$

$= (a + b)^3 - 3\text{ab}(\text{a} + \text{b})$

$= (3)^3 - 3.2.3$ [মান বসিয়ে]

$= 27 - 18 = 9$ (Ans.)

৯. $a - b = 5$ এবং $ab = 36$ হলে,
ক. $a^2 + \text{ab} + b^2$ এবং
খ. $a^3 - b^3$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. প্রদত্ত রাশি $= a^2 + \text{ab} + b^2$

$= a^2 + b^2 + \text{ab}$

$= (a - b)^2 + 2\text{ab} + \text{ab}$ $[\because a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2\text{ab}]$

$= (a-b)^2 + 3ab$

$= (5)^2 - 3.36$ [মান বসিয়ে]

$= 25 + 108 = 133$ (Ans.)

খ. প্রদত্ত রাশি $= a^3 - b^3$
$= (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$= (5)^3 + 3.36.5$ [মান বসিয়ে]

$= 125 + 540 = 665$ (Ans.)

১০. $m + \frac{1}{m} = a$ হলে, $m^3 + \frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $m + \frac{1}{m} = a$

বা, $(m + \frac{1}{m})^3 = a^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $m^3 + (\frac{1}{m})^3 + 3.m.\frac{1}{m}(m + \frac{1}{m}) = a^3$

বা, $m^3 + \frac{1}{m^3} + 3(m + \frac{1}{m}) = a^3$

বা, $m^3 + \frac{1}{m^3} + 3a = a^3$ [মান বসিয়ে]

বা, $m^3 + \frac{1}{m^3} = a^3 - 3a$ (Ans.)

১১. $x - \frac{1}{x} = p$ হলে, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = p$

বা, $(x - \frac{1}{x})^3 = p^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 - (\frac{1}{x})^3 - 3.x.\frac{1}{x}(x - \frac{1}{x}) = p^3$

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} - 3(x - \frac{1}{x}) = p^3$

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} - 3p = p^3$ [মান বসিয়ে]

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} = p^3 + 3p$ (Ans.)

১২. যদি $a - \frac{1}{a} = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - \frac{1}{a^3} = 4$

সমাধান:

বামপক্ষ $= a^3 - \frac{1}{a^3}$

$= (a - \frac{1}{a})^3 + 3.a.\frac{1}{a}(a - \frac{1}{a})$

$= (a - \frac{1}{a})^3 + 3(a - \frac{1}{a})$

$= (1)^3 + 3.1$

$= 1 + 3$
$= 4 =$ ডানপক্ষ

সুতরাং, $a^3 - \frac{1}{a^3} = 4$ (দেখানো হলো)

১৩. $a+b+c=0$ হলে, দেখাও যে,
ক. $a^3+b^3+c^3=3abc$
খ. $\frac{(b+c)^2}{3bc}+\frac{(c+a)^2}{3ca}+\frac{(a+b)^2}{3ab}=1$

সমাধান:
ক. দেয়া আছে, $a+b+c=0$
বা, $a+b=-c$
বা, $(a+b)^3=(-c)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]
বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$
বা, $a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3$
বা, $a^3+b^3-3abc=-c^3$ [$\because a+b=-c$]
বা, $a^3+b^3+c^3=3abc$ (দেখানো হলো)

খ. দেয়া আছে, $a+b+c=0$
$\therefore a+b=-c, b+c=-a$ এবং $c+a=-b$

বামপক্ষ $=\frac{(b+c)^2}{3bc}+\frac{(c+a)^2}{3ca}+\frac{(a+b)^2}{3ab}$
$=\frac{(-a)^2}{3bc}+\frac{(-b)^2}{3ca}+\frac{(-c)^2}{3ab}$
$=\frac{a^2}{3bc}+\frac{b^2}{3ca}+\frac{c^2}{3ab}$
$=\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$
$=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3}{3abc}$
$=\frac{(-c)^3-3ab(-c)+c^3}{3abc}$
$=\frac{-c^3+3abc+c^3}{3abc}$
$=\frac{3abc}{3abc}$
$=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{(b+c)^2}{3bc}+\frac{(c+a)^2}{3ca}+\frac{(a+b)^2}{3ab}=1$ (দেখানো হলো)

১৪. যদি $p-q=r$ হয়, তবে দেখাও যে, $p^3-q^3-r^3=3pqr$

সমাধান: দেয়া আছে,
$p-q=r$
বা, $(p-q)^3=r^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]
বা, $p^3-q^3-3pq(p-q)=r^3$
বা, $p^3-q^3-3pq.r=r^3$
বা, $p^3-q^3-r^3=3pqr$ (দেখানো হলো)

১৫. যদি $2x-\frac{2}{x}=3$ হয়, তবে দেখাও যে, $8(x^3-\frac{1}{x^3})=63$

সমাধান: দেয়া আছে, $2x-\frac{2}{x}=3$
বা, $2(x-\frac{1}{x})=3$

বা, $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

বা, $(x - \frac{1}{x})^3 = (\frac{3}{2})^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 - (\frac{1}{x})^3 - 3.x.\frac{1}{x}(x - \frac{1}{x}) = \frac{27}{8}$

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} - 3.\frac{3}{2} = \frac{27}{8}$ [$\because x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$]

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} - \frac{9}{2} = \frac{27}{8}$

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} = \frac{27}{8} + \frac{9}{2}$

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} = \frac{27+36}{8}$

বা, $x^3 - \frac{1}{x^3} = \frac{63}{8}$

বা, $8(x^3 - \frac{1}{x^3}) = 63$ (দেখানো হলো)

১৬. $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6-1}{a^3}$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{6 - 5}$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{1}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$\therefore a - \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{a^6-1}{a^3}$

$= \frac{a^6}{a^3} - \frac{1}{a^3}$

$= a^3 - \frac{1}{a^3}$

$= (a - \frac{1}{a})^3 + 3.a.\frac{1}{a}(a - \frac{1}{a})$ [সূত্র ব্যবহার করে]

$= (2\sqrt{5})^3 + 3.2\sqrt{5}$

$= 8.5\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$

$= 40\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$

$$= 46\sqrt{5} \ (Ans.)$$

১৭. $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ **যেখানে,** $x \neq 0$

ক. প্রমাণ কর যে, $x^2 - \sqrt{3}x = 1$

খ. প্রমাণ কর যে, $23\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$

গ. $\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. দেয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ যেখানে, $x \neq 0$

বা, $\frac{x^2-1}{x} = \sqrt{3}$

বা, $x^2 - 1 = \sqrt{3}x$

$\therefore\ x^2 - \sqrt{3}x = 1$

খ. $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2.x.\frac{1}{x}$

$= (\sqrt{3})^2 + 2$

$= 3 + 2 = 5$

বামপক্ষ $= 23\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 23 \times 5 = 115$

ডানপক্ষ $= 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$

$= 5\{(x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2\}$

$= 5\{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2.x^2.\frac{1}{x^2}\}$

$= 5\{(5)^2 - 2\}$

$= 5(25 - 2)$

$= 5 \times 23 = 115$

$\therefore\ 23\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ (প্রমাণিত)

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$

প্রদত্ত রাশি $= x^6 + \frac{1}{x^6}$

$= (x^2)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3$

$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3.x^2.\frac{1}{x^2}(x^2 + \frac{1}{x^2})$

$= (5)^3 - 3 \times 5$

$= 125 - 15$

$= 110\ \ (Ans.)$

অধ্যায় ৩ | ৩.৩

বীজগাণিতিক রাশি
Algebraic Expressions

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: (১-৩০)

১। $ab(x-y)-bc(x-y)$

সমাধান: $ab(x-y)-bc(x-y)$
$=(x-y)(ab-bc)$
$=(x-y)\{b(a-c)\}$
$=b(x-y)(a-c)\quad (Ans.)$

২। $9x^2+24x+16$

সমাধান: $9x^2+24x+16$
$=(3x)^2+2.3x.4+(4)^2$
$=(3x+4)^2\quad (Ans.)$

৩। a^4-27a^2+1

সমাধান: a^4-27a^2+1
$=(a^2)^2-2.a^2.1+(1)^2-25a^2$
$=(a^2-1)^2-(5a)^2$
$=\{(a^2-1)+5a\}\{(a^2-1)-5a\}$
$=(a^2+5a-1)(a^2-5a-1)\quad (Ans.)$

৪। $x^4-6x^2y^2+y^4$

সমাধান: $x^4-6x^2y^2+y^4$
$=(x^2)^2-2.x^2.y^2+(y^2)^2-4x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2$
$=(x^2-y^2+2xy)(x^2-y^2-2xy)$
$=(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)\quad (Ans.)$

৫। $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$

সমাধান: $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$
$=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+4abxy$
$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2-a^2y^2+2abxy-b^2x^2$
$=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$
$=\{(ax)^2+2.ax.by+(by)^2\}-\{(ay)^2-2.ay.bx+(bx)^2\}$
$=(ax+by)^2-(ay-bx)^2$
$=\{(ax+by)+(ay-bx)\}\{(ax+by)-(ay-bx)\}$
$=(ax+by+ay-bx)(ax+by-ay+bx)$
$(Ans.)$

৬। $4a^2-12ab+9b^2-4c^2$

সমাধান: $4a^2-12ab+9b^2-4c^2$
$=(2a)^2-2.2a.3b+(3b)^2-4c^2$
$=(2a-3b)^2-(2c)^2$
$=(2a-3b+2c)(2a-3b-2c)\quad (Ans.)$

৭। $a^2+6a+8-y^2+2y$

সমাধান: $a^2+6a+8-y^2+2y$
$=a^2+6a+9-y^2+2y-1$
$=a^2+6a+9-(y^2-2y+1)$
$=\{(a)^2+2.a.3+(3)^2\}-\{(y)^2-2.y.1+(1)^2\}$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ (Factorization):
কোনো রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলা হয়। কোনো বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকগুলো নির্ণয় করার পর রাশিটিকে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলা হয়। বীজগাণিতিক রাশিগুলো এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট (বহুপদী) হতে পারে। সেজন্য উক্ত রাশির উৎপাদকগুলোও এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে।

$= (a+3)^2 - (y-1)^2$
$= (a+3+y-1)(a+3-y+1)$
$= (a+y+2)(a-y+4) \quad (Ans.)$

৮। $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$
সমাধান: $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$
$= (4x)^2 - (5y)^2 - 2z(4x-5y)$
$= (4x+5y)(4x-5y) - 2z(4x-5y)$
$= (4x-5y)(4x+5y-2z) \quad (Ans.)$

৯। $x^2 + 13x + 36$
সমাধান: $x^2 + 13x + 36$
$= x^2 + 9x + 4x + 36$
$= x(x+9) + 4(x+9)$
$= (x+9)(x+4) \quad (Ans.)$

১০। $x^4 + x^2 - 20$
সমাধান: $x^4 + x^2 - 20$
$= x^4 + 5x^2 - 4x^2 - 20$
$= x^2(x^2+5) - 4(x^2+5)$
$= (x^2+5)(x^2-4)$
$= (x^2+5)(x^2-2^2)$
$= (x^2+5)(x+2)(x-2) \quad (Ans.)$

১১। $a^2 - 30a + 216$
সমাধান: $a^2 - 30a + 216$
$= a^2 - 18a - 12a + 216$
$= a(a-18) - 12(a-18)$
$= (a-18)(a-12) \quad (Ans.)$

১২। $a^8 - a^4 - 2$
সমাধান: $a^8 - a^4 - 2$
$= a^8 - 2a^4 + a^4 - 2$
$= a^4(a^4-2) + 1(a^4-2)$
$= (a^4-2)(a^4+1) \quad (Ans.)$

১৩। $x^2 - 37x - 650$
সমাধান: $x^2 - 37x - 650$
$= x^2 + 13x - 50x - 650$
$= x(x+13) - 50(x+13)$
$= (x+13)(x-50) \quad (Ans.)$

১৪। $9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2$
সমাধান: $9x^2y^2 - 5xy^2 - 14y^2$
$= y^2(9x^2 - 5x - 14)$
$= y^2(9x^2 - 14x + 9x - 14)$
$= y^2\{x(9x-14) + 1(9x-14)\}$
$= y^2(9x-14)(x+1) \quad (Ans.)$

১৫। $4x^4 - 27x^2 - 81$
সমাধান: $4x^4 - 27x^2 - 81$
$= 4x^4 - 36x^2 + 9x^2 - 81$
$= 4x^2(x^2-9) + 9(x^2-9)$
$= (x^2-9)(4x^2+9)$
$= (x^2-3^2)(4x^2+9)$
$= (x+3)(x-3)(4x^2+9) \quad (Ans.)$

১৬। $ax^2+(a^2+1)x+a$

সমাধান: $ax^2+(a^2+1)x+a$
$= ax^2+a^2x+x+a$
$= ax(x+a)+1(x+a)$
$= (x+a)(ax+1) \quad (Ans.)$

১৭। $3(a^2+2a)^2-22(a^2+2a)+40$

সমাধান: $3(a^2+2a)^2-22(a^2+2a)+40$
ধরি,

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)+(a+b-2b)\{(a+b)^2+(a+b).2b+(2b)^2\}$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(a^2+2ab+b^2+2ab+2b^2+4b^2)$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(a^2+4ab+7b^2)$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2+a^2+4ab+7b^2)$

$= (a-b)(2a^2+5ab+8b^2)\quad (Ans.)$

২২। $8x^3+12x^2+6x-63$

সমাধান: $8x^3+12x^2+6x-63$

$= 8x^3+12x^2+6x+1-64$

$= (2x)^3+3.(2x)^2.1+3.2x.1^2+(1)^3-64$

$= (2x+1)^3-(4)^3$

$= \{2x+1-4\}\{(2x+1)^2+(2x+1).4+(4)^2\}$

$= (2x-3)\{(2x)^2+2.2x.1+(1)^2+8x+4+16\}$

$= (2x-3)(4x^2+4x+1+8x+20)$

$= (2x-3)(4x^2+12x+21)\quad (Ans.)$

২৩। $8a^3+\frac{b^3}{27}$

সমাধান: $8a^3+\frac{b^3}{27}$

$= (2a)^3+(\frac{b}{3})^3$

$= \left(2a+\frac{b}{3}\right)+\{(2a)^2-2a.\frac{b}{3}+\left(\frac{b}{3}\right)^2\}$

$= \left(2a+\frac{b}{3}\right)(4a^2-\frac{2ab}{3}+\frac{b^2}{9})$

$= \left(\frac{6a+b}{3}\right)(\frac{36a^2-6ab+b^2}{9})$

$= \frac{1}{27}(6a+b)(36a^2-6ab+b^2)\quad (Ans.)$

২৪। $\frac{a^6}{27}-b^6$

সমাধান: $\frac{a^6}{27}-b^6$

$= (\frac{a^2}{3})^3-(b^2)^3$

$= \left(\frac{a^2}{3}-b^2\right)\{\left(\frac{a^2}{3}\right)^2+\frac{a^2}{3}.b^2+(b^2)^2\}$

$= \left(\frac{a^2}{3}-b^2\right)\left(\frac{a^4}{9}+\frac{a^2.b^2}{3}+b^4\right)\quad (Ans.)$

২৫। $4a^2+\frac{1}{4a^2}-2+4a-\frac{1}{a}$

সমাধান: $4a^2+\frac{1}{4a^2}-2+4a-\frac{1}{a}$

$= (2a)^2+(\frac{1}{2a})^2-2.2a.\frac{1}{2a}+2(2a-\frac{1}{2a})$

$= (2a)^2-2.2a.\frac{1}{2a}+(\frac{1}{2a})^2+2(2a-\frac{1}{2a})$

$= \left(2a-\frac{1}{2a}\right)^2+2(2a-\frac{1}{2a})$

$= \left(2a - \frac{1}{2a}\right)^2 (2a - \frac{1}{2a} + 2)$ $(Ans.)$

২৬। $(3a+1)^3 - (2a-3)^3$

সমাধান: $(3a+1)^3 - (2a-3)^3$

$= \{(3a+1)-(2a-3)\}\ \{(3a+1)^2 + (3a+1)(2a-3) + (2a-3)^2\}$

$= (3a+1-2a+3)\ \{(3a)^2 + 2.3a.1 + (1)^2 + 3a.2a + 1.2a - 3.3a - 3 + (2a)^2 - 2.2a.3 + (3)^2\}$

$= (a+4)(9a^2 + 6a + 1 + 6a^2 + 2a - 9a - 3 + 4a^2 - 12a + 9)$

$= (a+4)(19a^2 - 13a + 7)$ $(Ans.)$

২৭। $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 48$

সমাধান: $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 48$

$= (x+2)(x+5)(x+3)(x+4) - 48$

$= (x^2 + 2x + 5x + 10)(x^2 + 3x + 4x + 12) - 48$

$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 48$

ধরি, $x^2 + 7x + 10 = a$
$\therefore x^2 + 7x + 12$
$= x^2 + 7x + 10 + 2$
$= a + 2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+2) - 48$
$= a^2 + 2a - 48$
$= a^2 + 8a - 6a - 48$
$= a(a+8) - 6(a+8)$
$= (a+8)(a-6)$
$= (x^2 + 7x + 10 + 8)(x^2 + 7x + 10 - 6)$ [a এর মান বসিয়ে]
$= (x^2 + 7x + 18)(x^2 + 7x + 4)$
$= (x^2 + 7x + 4)(x^2 + 7x + 18)$ $(Ans.)$

২৮। $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) - 65$

সমাধান: $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) - 65$
$= (x-1)(x-7)(x-3)(x-5) - 65$
$= (x^2 - 7x - x + 7)(x^2 - 5x - 3x + 15) - 65$
$= (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) - 65$

ধরি, $x^2 - 8x + 7 = a$
$\therefore x^2 - 8x + 15 = x^2 - 8x + 7 + 8 = a + 8$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a(a+8) - 65$
$= a^2 + 8a - 65$
$= a^2 + 13a - 5a - 65$
$= a(a+13) - 5(a+13)$
$= (a+13)(a-5)$
$= (x^2 - 8x + 7 + 13)(x^2 - 8x + 7 - 5)$ [a এর মান বসিয়ে]
$= (x^2 - 8x + 20)(x^2 - 8x + 2)$
$= (x^2 - 8x + 2)(x^2 - 8x + 20)$ $(Ans.)$

২৯। $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

সমাধান:

$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$
$= 4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$

$= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2)$
$= 4a^2b^2 - \{(a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 + 2b^2(-c^2) + 2(-c^2)a^2\}$
$= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$
$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$
$= \{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2\}\{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)\}$
$= \{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2\}$
$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$ $(Ans.)$

৩০। $14(x+z)^2 - 29(x+z)(x+1) - 15(x+1)^2$

সমাধান: $14(x+z)^2 - 29(x+z)(x+1) - 15(x+1)^2$
ধরি, $x + z = p$
এবং $x + 1 = q$
প্রদত্ত রাশি $= 14\mathrm{p}^2 - 29pq - 15\mathrm{q}^2$
$= 14\mathrm{p}^2 - 35pq + 6pq - 15\mathrm{q}^2$
$= 7p(2p - 5q) + 3q(2p - 5q)$
$= (2p - 5q)(7p + 3q)$
$= \{2(x+z) - 5(x+1)\}\{7(x+z) + 3(x+1)\}$ [p, q এর মান বসিয়ে]
$= (2x + 2z - 5x - 5)(7x + 7z + 3x + 3)$
$= (2z - 3x - 5)(10x + 7z + 3)$ $(Ans.)$

৩১। দেখাও যে,
$(x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4) = (3x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 2x - 8)$

সমাধান:
বামপক্ষ $= (x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4)$
$= (x+1)(3x-1)(x+2)(3x-4)$
$= (3x^2 + 3x - x - 1)(3x^2 + 6x - 4x - 8)$
$= (3x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 2x - 8)$
= ডানপক্ষ

$\therefore (x+1)(x+2)(3x-1)(3x-4) = (3x^2 + 2x - 1)(3x^2 + 2x - 8)$
(দেখানো হলো)

অধ্যায় ৩ | ৩.৪

বীজগাণিতিক রাশি
Algebraic Expressions

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

১। $3a^3 + 2a + 5$

সমাধান: ধরি, $f(a) = 3a^3 + 2a + 5$

তাহলে, $f(-1) = 3(-1)^3 + 2(-1) + 5$
$= -3 - 2 + 5 = 0$

$\therefore \{a - (-1)\} = (a + 1),\;\; f(a)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $3a^3 + 2a + 5$
$= 3a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 3a + 5a + 5$
$= 3a^2(a + 1) - 3a(a + 1) + 5(a + 1)$
$= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5)\quad (Ans.)$

২। $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

তাহলে, $f(-y) = (-y)^3 - 7(-y)y^2 - 6y^3$
$= -y^3 + 7y^3 - 6y^3 = 0$

$\therefore \{x - (-y)\} = (x + y),\;\; f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$
$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 6y^3$
$= x^2(x + y) - xy(x + y) - 6y^2(x + y)$
$= (x + y)(x^2 - xy - 6y^2)$
$= (x + y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2)$
$= (x + y)\ \{x(x - 3y) + 2y(x - 3y)\}$
$= (x + y)\ (x - 3y)\ (x + 2y)\quad (Ans.)$

৩। $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

তাহলে, $f(2) = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6$
$= 8 + 2.4 - 10 - 6$
$= 8 + 8 - 10 - 6 = 0$

$\therefore (x - 2),\;\; f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
$= x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6$
$= x^2(x - 2) + 4x(x - 2) + 3(x - 2)$
$= (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$
$= (x - 2)(x^2 + 3x + x + 3)$
$= (x - 2)\ \{x(x + 3) + 1(x + 3)\}$
$= (x - 2)\ (x + 1)\ (x + 3)\quad (Ans.)$

৪। $x^3 + 4x^2 + x - 6$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

তাহলে, $f(1) = 1^3 + 4.1^2 + 1 - 6$
$= 1 + 4.1 + 1 - 6$
$= 6 - 6 = 0$

$\therefore (x - 1),\;\; f(x)$ এর একটি উৎপাদক

উৎপাদকে (Factor):
কোনো রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলা হয়।

এখন, x^3+4x^2+x-6
$=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6$
$=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)$
$=(x-1)(x^2+5x+6)$
$=(x-1)(x^2+3x+2x+6)$
$=(x-1)\ \{x(x+3)+2(x+3)\}$
$=(x-1)\ (x+2)\ (x+3)\quad (Ans.)$

৫। $a^3+3a+36$

সমাধান: ধরি, $f(a)=a^3+3a+36$
তাহলে, $f(-3)=(-3)^3+3(-3)+36$
$=-27-9+36$
$=36-36=0$

$\therefore \{a-(-3)\}=(a+3),\ \ f(a)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $a^3+3a+36$
$=a^3+3a^2-3a^2-9a+12a+36$
$=a^2(a+3)-3a(a+3)+12(a+3)$
$=(a+3)(a^2-3a+12)\quad (Ans.)$

৬। a^4-4a+3

সমাধান: ধরি, $f(a)=a^4-4a+3$
তাহলে, $f(1)=(1)^4-4(1)+3$
$=1-4+3$
$=4-4=0$

$\therefore (a-1),\ \ f(a)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, a^4-4a+3
$=a^4-a^3+a^3-a^2+a^2-a-3a+3$
$=a^3(a-1)+a^2(a-1)+a(a-1)-3(a-1)$
$=(a-1)(a^3+a^2+a-3)$

আবার ধরি, $g(a)=a^3+a^2+a-3$
তাহলে, $g(1)=(1)^3+(1)^2+(1)-3$
$=1+1+1-3$
$=3-3=0$

$\therefore (a-1),\ \ g(a)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, a^3+a^2+a-3
$=a^3-a^2+2a^2-2a+3a-3$
$=a^2(a-1)+2a(a-1)+3(a-1)$
$=(a-1)(a^2+2a+3)$

$\therefore\ a^4-4a+3=(a-1)(a-1)(a^2+2a+3)\quad (Ans.)$

৭। $a^3-a^2-10a-8$

সমাধান: ধরি, $f(a)=a^3-a^2-10a-8$
তাহলে, $f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-10(-1)-8$
$=-1-1+10-8$
$=10-10=0$

$\therefore \{a-(-1)\}=(a+1),\ \ f(a)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $a^3-a^2-10a-8$
$=a^3+a^2-2a^2-2a-8a-8$

$= a^2(a+1) - 2a(a+1) - 8(a+1)$
$= (a+1)(a^2 - 2a - 8)$
$= (a+1)(a^2 - 4a + 2a - 8)$
$= (a+1)\ \{a(a-4) + 2(a-4)\}$
$= (a+1)\ (a+2)\ (a-4) \quad (Ans.)$

৮। $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
তাহলে, $f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 4$
$= 8 - 12 + 8 - 4$
$= 16 - 16 = 0$

$\therefore (x-2),\ \ f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
$= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4$
$= x^2(x-2) - x(x-2) + 2(x-2)$
$= (x-2)(x^2 - x + 2) \quad (Ans.)$

৯। $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$
সমাধান: ধরি, $f(a) = a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$
তাহলে, $f(b) = (b)^3 - 7.b^2.b + 7.b.b^2 - b^3$
$= b^3 - 7b^3 + 7b^3 - b^3 = 0$

$\therefore (a-b),\ \ f(a)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$
$= a^3 - a^2b - 6a^2b + 6ab^2 + ab^2 - b^3$
$= a^2(a-b) - 6ab(a-b) + b^2(a-b)$
$= (a-b)(a^2 - 6ab + b^2) \quad (Ans.)$

১০। $x^3 - x - 24$
সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 - x - 24$
তাহলে, $f(3) = (3)^3 - 3 - 24$
$= 27 - 3 - 24$
$= 27 - 27 = 0$

$\therefore (x-3),\ \ f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^3 - x - 24$
$= x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 8x - 24$
$= x^2(x-3) + 3x(x-3) + 8(x-3)$
$= (x-3)(x^2 + 3x + 8) \quad (Ans.)$

১১। $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$
সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$
তাহলে, $f(-3y) = (-3y)^3 + 6.(-3y)^2.y + 11.(-3y).y^2 + 6y^3$
$= -27y^3 + 54y^3 - 33y^3 + 6y^3$
$= 60y^3 - 60y^3 = 0$
$\therefore \{x - (-3y)\} = (x+3y),\ \ f(x)$ এর একটি উৎপাদক
এখন, $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$
$= x^3 + 3x^2y + 3x^2y + 9xy^2 + 2xy^2 + 6y^3$
$= x^2(x+3y) + 3xy(x+3y) + 2y^2(x+3y)$
$= (x+3y)(x^2 + 3xy + 2y^2)$

$= (x+3y)(x^2+2xy+xy+2y^2)$

$= (x+3y)\ \{x(x+2y)+y(x+2y)\}$

$= (x+3y)\ (x+y)\ (x+2y) \quad (Ans.)$

১২। $2x^4-3x^3-3x-2$

সমাধান: ধরি, $f(x) = 2x^4-3x^3-3x-2$

তাহলে, $f(2) = 2.(2)^4-3(2)^3-3.(2)-2$

$= 32-24-6-2$

$= 32-32 = 0$

$\therefore (x-2),\ \ f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $2x^4-3x^3-3x-2$

$= 2x^4-4x^3+x^3-2x^2+2x^2-4x+x-2$

$= 2x^3(x-2)+x^2(x-2)+2x(x-2)+1(x-2)$

$= (x-2)(2x^3+x^2+2x+1)$

$= (x-2)\ \{x^2(2x+1)+1(2x+1)\}$

$= (x-2)(x^2+1)(2x+1) \quad (Ans.)$

১৩। $4x^4+12x^3+7x^2-3x-2$

সমাধান: ধরি, $f(x) = 4x^4+12x^3+7x^2-3x-2$

তাহলে, $f(-1) = 4(-1)^4+12.(-1)^3+7.(-1)^2-3.(-1)-2$

$= 4.1+12.(-1)+7.1-3.(-1)-2$

$= 4-12+7+3-2$

$= 14-14 = 0$

$\therefore \{x-(-1)\} = (x+1),\ \ f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $4x^4+12x^3+7x^2-3x-2$

$= 4x^4+4x^3+8x^3+8x^2-x^2-x-2x-2$

$= 4x^3(x+1)+8x^2(x+1)-x(x+1)-2(x+1)$

$= (x+1)(4x^3+8x^2-x-2)$

$= (x+1)\{4x^2(x+2)-1(x+2)\}$

$= (x+1)\ \ (x+2)(4x^2-1)$

$= (x+1)\ \ (x+2)\{(2x)^2-1^2\}$

$= (x+1)\ \ (x+2)(2x+1)(2x-1) \quad (Ans.)$

১৪। $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x$

সমাধান: $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x$

$= x(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

ধরি, $f(x) = x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

তাহলে, $f(1) = 1^5-1^4+1^3-1^2+1-1$

$= 1-1+1-1+1-1$

$= 0$

$\therefore (x-1),\ \ f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

$= x^4(x-1) + x^2(x-1) + 1(x-1)$

$= (x-1)(x^4 + x^2 + 1)$

$= (x-1)\{(x^2)^2 + 2.x^2.1 + 1^2 - x^2\}$

$= (x-1)\ \{(x^2+1)^2 - (x)^2\}$

$= (x-1)\ (x^2+1+x)\ (x^2+1-x)$

$\therefore x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

$= x(x-1)\ (x^2+x+1)\ (x^2-x+1)$

$(Ans.)$

১৫। $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

সমাধান: ধরি, $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

তাহলে, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 4.(\frac{1}{4})^3 - 5.(\frac{1}{4})^2 + 5.\left(\frac{1}{4}\right) - 1$

$$= 4.\frac{1}{64} - 5.\frac{1}{16} + 5.\left(\frac{1}{4}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} - 1$$

$$= \frac{1 - 5 + 20 - 16}{16}$$

$$= \frac{21 - 21}{16}$$

$$= \frac{0}{16} = 0$$

$\therefore \left(x - \frac{1}{4}\right)$ অর্থাৎ $(4x-1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

$= 4x^3 - x^2 - 4x^2 + x + 4x - 1$

$= x^2(4x-1) - x(4x-1) + 1(4x-1)$

$= (4x-1)(x^2 - x + 1)$ $(Ans.)$

১৬। $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

সমাধান: ধরি, $f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

তাহলে, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 18.(-\frac{1}{2})^3 + 15.(-\frac{1}{2})^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2$

$$= -18.\frac{1}{8} + 15.\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$= \frac{-9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{-9 + 15 + 2 - 8}{4}$$

$$= \frac{17 - 17}{4}$$

$$= \frac{0}{4} = 0$$

$\therefore \left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = (x + \frac{1}{2})$ অর্থাৎ $(2x+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $18x^3 + 15x^2 - x - 2$ $= 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$ $= 9x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$ $= (2x + 1)(9x^2 + 3x - 2)$ $= (2x + 1)(9x^2 + 6x - 3x - 2)$ $= (2x + 1)\{3x(3x + 2) - 1(3x + 2)\}$ $= (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1) \quad (Ans.)$	

অধ্যায় ৩ ৩.৫

বীজগাণিতিক রাশি
Algebraic Expressions

১. $f(x) = x^2 - 4x + 4$ হলে, $f(2)$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. 4 খ. 2 গ. 1 ঘ. 0

ব্যাখ্যা: $f(x) = x^2 - 4x + 4$

বা, $f(2) = 2^2 - 4.2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$

২. $\frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. $2(a^2+b^2)$ খ. a^2+b^2 গ. 2ab ঘ. 4ab

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\} = \frac{1}{2}.4ab = 2ab$

৩. $x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^3 + \frac{8}{x^3}$ এর মান কত?

ক. 1 খ. 8 গ. 9 ঘ. 16

ব্যাখ্যা: $x + \frac{2}{x} = 3$ বা, $(x + \frac{2}{x})^3 = (3)^3$

বা, $x^3 + (\frac{2}{x})^3 + 3.x.\frac{2}{x}(x + \frac{2}{x}) = 27$

বা, $x^3 + \frac{8}{x^3} + 3.2.3 = 27$ [মান বসিয়ে]

বা, $x^3 + \frac{8}{x^3} + 18 = 27$

বা, $x^3 + \frac{8}{x^3} = 9$

৪. $p^4 + p^2 + 1$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষায়িত রূপ নিচের কোনটি?

ক. $(p^2 - p + 1)(p^2 + p - 1)$ খ. $(p^2 - p - 1)(p^2 + p + 1)$

গ. $(p^2 + p + 1)(p^2 + p + 1)$ ঘ. $(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$

ব্যাখ্যা: $p^4 + p^2 + 1 = (p^2)^2 + 2.p^2.1 + (1)^2 - p^2$

$= (p^2 + 1)^2 - p^2 = (p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$

৫. যদি $x = 2 - \sqrt{3}$ হয়, তবে x^2 এর মান কত?

ক. 1 খ. $7 - 4\sqrt{3}$ গ. $2 + \sqrt{3}$ ঘ. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: $x = 2 - \sqrt{3}$

বা, $x^2 = (2 - \sqrt{3})^2$

$= (2)^2 - 2.2.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

৬. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ এবং $f(x) = 0$ হলে, $x =$ কত?

ক. 2, 3 খ. –5, 1 গ. –2, 3 ঘ. 1, –5

ব্যাখ্যা: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ এবং $f(x) = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

বা, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

বা, $x(x-3) - 2(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(x-2) = 0$

হয়, $x - 3 = 0$ বা, $x = 3$ অথবা, $x - 2 = 0$ বা, $x = 2$

MCQ Answers:
১। ঘ
২। গ
৩। গ
৪। ঘ
৫। খ
৬। ক
৭। গ
৮। গ
৯। খ
১০। ঘ
১১। ঘ
১২। ক
১৩। খ

৭. $9x^2+16y^2$ এর সাথে কত যোগ করলে যোগফল পুর্ণবর্গ রাশি হবে?

ক. 6xy খ. 12xy গ. 24xy ঘ. 144xy

ব্যাখ্যা: $9x^2+16y^2=(3x)^2+(4y)^2=(3x+4y)^2-2.3x.4y=(3x+4y)^2-24xy$

অর্থাৎ $9x^2+16y^2$ এর সাথে $24xy$ যোগ করলে যোগফল পূর্ণবর্গ রাশি হবে।

$x^4-x^2+1=0$ হলে, নিচের (৮-১০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৮. $x^2+\frac{1}{x^2}=$ কত?

ক. 4 খ. 2 গ. 1 ঘ. 0

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $x^4-x^2+1=0$

বা, $x^4+1=x^2$

বা, $\frac{x^4+1}{x^2}=1$

বা, $x^2+\frac{1}{x^2}=1$

৯. $(x+\frac{1}{x})^2$ এর মান কত?

ক. 4 খ. 3 গ. 2 ঘ. 1

ব্যাখ্যা: $x^2+\frac{1}{x^2}=1$

বা, $(x+\frac{1}{x})^2-2.x.\frac{1}{x}=1$

বা, $(x+\frac{1}{x})^2=3$

১০. $x^3+\frac{1}{x^3}=$ কত?

ক. 3 খ. 2 গ. 1 ঘ. 0

ব্যাখ্যা: $(x+\frac{1}{x})^2=3$

বা, $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$

বা, $(x+\frac{1}{x})^3=(\sqrt{3})^3$ [ঘন করে]

বা, $x^3+\frac{1}{x^3}+3.x.\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=3\sqrt{3}$

বা, $x^3+\frac{1}{x^3}+3.\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

বা, $x^3+\frac{1}{x^3}=0$

১১. $a^2+b^2=9$ এবং $ab=3$ হলে

i. $(a-b)^2=3$

ii. $(a+b)^2=15$

iii. $a^2+b^2+a^2b^2=18$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: i. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=9-2\times3=3$

ii. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=9+2\times3=15$

iii. $a^2+b^2+a^2b^2=9+3^2=18$

১২. $3a^5 - 6a^4 + 3a + 14$ একটি বীজগাণিতিক রাশি হলে-
i. রাশিটির চলক a
ii. রাশিটির মাত্রা 5
iii. a^4 এর সহগ 6

নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i, ii খ. i, iii
গ. ii, iii ঘ. i, ii ও iii
ব্যাখ্যা: iii সঠিক নয়, কারণ a^4 এর সহগ -6

১৩. $p^3 - \frac{1}{64}$ এর উৎপাদক-
i. $p - \frac{1}{4}$
ii. $p^2 + \frac{p}{4} + \frac{1}{8}$
iii. $p^2 + \frac{p}{4} + \frac{1}{16}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii
গ ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $p^3 - \frac{1}{64} = p^3 - \frac{1}{4^3} = \left(p - \frac{1}{4}\right)\{p^2 + p.\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2\}$

$$= \left(p - \frac{1}{4}\right)(p^2 + \frac{p}{4} + \frac{1}{16})$$

১৪. ক একটি কাজ p দিনে করে এবং খ 2p দিনে করে। তারা একটি কাজ আরম্ভ করে এবং কয়েকদিন পর ক কাজটি অসমাপ্ত রেখে চলে গেল। বাকি কাজটুকু খ r দিনে শেষ করে। কাজটি কত দিনে শেষ হয়েছিল?

সমাধান: ধরি, কাজটি সর্বমোট x দিনে শেষ হয়।
∴ ক ও খ একত্রে কাজ করে (x –r) দিন এবং খ একা করে r দিন।

ক এক দিনে করে কাজটির $\frac{1}{p}$ অংশ কাজ

খ এক দিনে করে কাজটির $\frac{1}{2p}$ অংশ কাজ

ক ও খ একত্রে একদিনে করে কাজটির $(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p})$ অংশ $= \frac{3}{2p}$ অংশ

∴ ক ও খ একত্রে (x –r) দিনে করে কাজটির $\frac{3(x-r)}{2p}$ অংশ

খ একা r দিনে করে কাজটির অংশ।

প্রশ্নমতে,

[(ক + খ) এর (x –r) দিনের কাজ] + [খ এর r দিনের কাজ] = [সম্পূর্ণ কাজ]
∴ $\frac{3(x-r)}{2p} + \frac{r}{2p} = 1$

বা, $\frac{3(x-r)+r}{2p} = 1$

বা, $\frac{3x-3r+r}{2p} = 1$
বা, $3x - 2r = 2p$ [আড় গুণন করে]
বা, $3x = 2p + 2r$
∴ $x = \frac{2(p+r)}{3}$

∴ $\frac{2(p+r)}{3}$ দিনে কাজটি শেষ হয়েছিল। (Ans.)

১৫. দৈনিক 6 ঘণ্টা পরিশ্রম করে 10 জন লোক একটি কাজ 7 দিনে করতে পারে। দৈনিক কত ঘণ্টা পরিশ্রম করে 14 জনে 6 দিনে ঐ কাজটি করতে পারবে।

সমাধান: 10 জন লোক কাজটি 7 দিনে করতে পারে দৈনিক 6 ঘণ্টা পরিশ্রম করে।

$\therefore$ 1 জন লোক কাজটি 1 দিনে করতে পারে দৈনিক $6 \times 10 \times 7$ ঘণ্টা পরিশ্রম করে

$\therefore$ 14 জন লোক কাজটি 6 দিনে করতে পারে দৈনিক $\frac{6\times10\times7}{14\times6}$ ঘণ্টা পরিশ্রম করে

$=$ 5 ঘণ্টা পরিশ্রম করে

১৬. মিতা একটি কাজ 10 দিনে করতে পারে। রিতা সে কাজ 15 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করবে পারবে?

সমাধান: মনে করি, তারা একত্রে d দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

মিতা করতে পারে 10 দিনে করতে পারে 1টি কাজ

$\therefore$ 1 দিনে করতে পারে $\frac{1}{10}$ কাজ

$\therefore$ d দিনে করতে পারে $\frac{d}{10}$ কাজ

রিতা করতে পারে 15 দিনে করতে পারে 1টি কাজ

$\therefore$ 1 দিনে করতে পারে $\frac{1}{15}$ কাজ

$\therefore$ d দিনে করতে পারে $\frac{d}{15}$ কাজ

প্রশ্নানুসারে, $\frac{d}{10} + \frac{d}{15} = 1$

বা, $d\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) = 1$

বা, $d\left(\frac{3+2}{30}\right) = 1$

বা, $d \times \frac{5}{30} = 1$

বা, $d = 1 \times \frac{30}{5}$

বা $d = 6$

$\therefore$ মিতা ও রিতা একত্রে ৫ দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

১৭. বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5700 টাকায় একটি বাস ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো যে, প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 5 জন যাত্রী না যাওয়ায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে কতজন যাত্রী গিয়েছিল?

সমাধান: মনে করি, বাসে যাত্রী গিয়েছিল x জন

$\therefore$ জন প্রতি ভাড়া $\frac{5700}{x}$ টাকা

$\therefore$ সব যাত্রী আসলে যাত্রী হতো $(x + 5)$ জন

$\therefore$ তখন জন প্রতি ভাড়া হতো $\frac{5700}{x+5}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{5700}{x} - \frac{5700}{x+5} = 3$

বা, $\frac{5700(x+5)-5700x}{x(x+5)} = 3$

বা, $\frac{5700x+28500-5700x}{x^2+5x} = 3$

বা, $28500 = 3x^2 + 15x$

বা, $3x^2 + 15x - 28500 = 0$

বা, $3(x^2 + 5x - 9500) = 0$

বা, $x^2 + 5x - 9500 = 0$

বা, $x^2 + 100x - 95x - 9500 = 0$

বা, $x(x + 100) - 95(x + 100) = 0$

বা, $(x + 100)(x - 95) = 0$

হয়, $x + 100 = 0$
বা, $x = -100$

অথবা, $x - 95 = 0$
$\therefore x = 95$

$x=-100$ গ্রহণযোগ্য নয় কারণ যাত্রী সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।
$\therefore x = 95$
$\therefore$ বাসে যাত্রী গিয়েছিল 95 জন। (Ans.)

১৮. একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে p ঘণ্টায় d কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে তার q ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগ কত?

সমাধান: ধরি, নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি.মি. এবং স্রোতের বেগ ঘন্টায় y কি.মি.

$\therefore$ স্রোতের অনুকুলে বেগ ঘণ্টায় $(x + y)$ কি.মি.

এবং স্রোতের প্রতিকূলে বেগ ঘণ্টায় $(x - y)$ কি.মি.

আমরা জানি, বেগ $= \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$

প্রশ্নমতে, $x - y = \frac{d}{p}$ ... (i)

এবং $x + y = \frac{d}{q}$ ... (ii)

সমীকরণ (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$(x - y) + (x + y) = \frac{d}{p} + \frac{d}{q}$

বা, $x-y + x + y = d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$

বা, $2x = d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$

বা, $x = \frac{d}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$

(ii) নং সমীকরণ থেকে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$(x + y) - (x - y) = \frac{d}{q} - \frac{d}{p}$

বা, $x + y - x + y = \frac{d}{q} - \frac{d}{p}$

বা, $2y = d(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$

বা, $y = \frac{d}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$

$\therefore$ স্রোতের বেগ $\frac{d}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$ কি.মি./ ঘণ্টা এবং নৌকার বেগ $\frac{d}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$ কি.মি./ ঘণ্টা।
(Ans.)

১৯. একজন মাঝির দাঁড় বেয়ে 15 কি.মি. যেতে এবং সেখান থেকে ফিরে আসতে 4 ঘন্টা সময় লাগে। সে স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 5 কি.মি. যায়, স্রোতের প্রতিকূলে ততক্ষণে 3 কি.মি. যায়। দাড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দাঁড়ের বেগ ঘন্টায় x কি.মি. এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y কি.মি.

∴ অনুকূলে বেগ ঘন্টায় (x+ y) কি.মি.

এবং প্রতিকূলে বেগ ঘন্টায় (x- y) কি.মি.

প্রশ্নমতে, $\frac{15}{x+y}+\frac{15}{x-y}=4$ ... (i)

এবং $\frac{5}{x+y}+\frac{3}{x-y}$

বা, $5(x-y)=3(x+y)$

বা, $5x-5y=3x+3y$

বা, $5x-3x=3y+5y$

বা, $2x=8y$

∴ $x=4y$ .... (ii)

$x=4y$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{15}{4y+y}+\frac{15}{4y-y}=4$

বা, $\frac{15}{5y}+\frac{15}{3y}=4$

বা, $\frac{3}{y}+\frac{5}{y}=4$

বা, $\frac{3}{y}+\frac{5}{y}=4$

বা, $\frac{3+5}{y}=4$

বা, $\frac{8}{y}=4$

বা, $4y=8$

∴ y = 2

(ii) নং সমীকরণে y এর মান বসিয়ে পাই, $x=4\times 2=8$
দাড়ের বেগ ৪ কি.মি./ঘন্টা এবং স্রোতের বেগ 2 কিমি./ঘন্টা (Ans.)

২০. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয় নল দ্বারা t_2 মিনিটে খালি হয়। নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে পূর্ণ হবে? (এখানে, $t_2>t_1$).

সমাধান: প্রথম নল দ্বারা, t_1 মিনিটে পূর্ণ হয় 1 অংশ

∴ 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $\frac{1}{t_1}$ অংশ

দ্বিতীয় নল দ্বারা, t_2 মিনিটে খালি হয় 1 অংশ

∴ 1 মিনিটে খালি হয় $\frac{1}{t_2}$ অংশ

দুইটি নল একত্রে খুলে দিলে 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2})$ অংশ

$=\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$ অংশ

∴ নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে $\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$ অংশ পূর্ণ হয় 1 মিনিটে

∴ নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে 1 বা সম্পূর্ণ অংশ পূর্ণ হয় $\frac{1}{\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}}$ মিনিটে

$= \frac{t_1t_2}{t_2-t_1}$ মিনিটে

∴ নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে চৌবাচ্চাটি $\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}$ মিনিটে পূর্ণ হবে। (Ans.)

২১. একটি নল দ্বারা 12 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। অপর একটি নল দ্বারা 1 মিনিটে তা থেকে 15 লিটার পানি বের করে দেয়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দেওয়া হয় এবং চৌবাচ্চাটি 48 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে?

সমাধান: মনে করি, চৌবাচ্চাটিতে পানি ধরে v লিটার

∴ প্রথম নল দ্বারা 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $\frac{v}{12}$ লিটার পানি।

দ্বিতীয় নল দ্বারা 1 মিনিটে নির্গত হয় 15 লিটার পানি

∴ নল দুইটি একসাথে খুলে দিলে 1 মিনিটে পানি পূর্ণ হয় $(\frac{v}{12} - 15)$ লিটার

∴ $48\ (\frac{v}{12} - 15) = v$

বা, $48\ (\frac{v-180}{12}) = v$

বা, $4(v - 180) = v$

বা, $4v - 720 = v$

বা, $4v - v = 720$

বা, $3v = 720$

বা, $v = \frac{720}{3}$

∴ $v = 240$

∴ চৌবাচ্চাটিতে পানি ধরে 240 লিটার। (Ans.)

২২. ক, খ ও গ এর মধ্যে 260 টাকা এরূপে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশের 2 গুণ, খ এর অংশের 3 গুণ এবং গ এর অংশের 4 গুণ পরস্পর সমান হয়।

সমাধান: মনে করি, ক এর অংশ = x টাকা

খ এর অংশ = y টাকা

গ এর অংশ = z টাকা

দেওয়া আছে, 2×ক এর অংশ = 3 × খ এর অংশ = 4 × গ এর অংশ

∴ $2x = 3y = 4z$

∴ $y = \frac{2x}{3}$ এবং $z = \frac{2x}{4}$ বা, $z = \frac{x}{2}$

শর্তমতে, $x + y + z = 260$

বা, $x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} = 260$

বা, $\frac{6x + 4x + 3x}{6} = 260$

বা, $\frac{13x}{6} = 260$

বা, $x = \frac{260 \times 6}{13}$

$\therefore x = 120$

$\therefore y = \frac{2 \times 120}{3}$ [x এর মান বসিয়ে]

$= 80$

$\therefore z = \frac{120}{2}$ [x এর মান বসিয়ে]

$= 60$

∴ ক পায় 120 টাকা, খ পায় 80 টাকা, গ পায় 60 টাকা (Ans.)

২৩. একটি দ্রব্য x% ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায়, 3x% লাভে বিক্রয় করলে তার চেয়ে 18x টাকা বেশি পাওয়া যায়। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ছিল?

সমাধান: মনে করি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য y টাকা।

∴ x% ক্ষতিতে, ক্ষতি হয় $(y \times x\%)$ টাকা

$= y \times \frac{x}{100}$ টাকা

$= \frac{xy}{100}$ টাকা

∴ x% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $(y - \frac{xy}{100})$ টাকা

3x% লাভে, লাভ হয় $(y \times 3x\%)$ টাকা

$= (y \times \frac{3x}{100})$ টাকা $= \frac{3xy}{100}$ টাকা

∴ 3x% লাভে বিক্রয়মূল্য $(y + \frac{3xy}{100})$ টাকা

প্রশ্নমতে, $(y + \frac{3xy}{100})(y - \frac{xy}{100}) = 18x$

বা, $y + \frac{3xy}{100} - y + \frac{xy}{100} = 18x$

বা, $\frac{3xy}{100} + \frac{xy}{100} = 18x$

বা, $\frac{4xy}{100} = 18x$

বা, $y = \frac{18x \times 100}{4x}$

বা, $y = 450$

∴ দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 450 টাকা। (Ans.)

২৪. একটি কলম 11 টাকায় বিক্রয় করলে 10% লাভ হয়। কলমটির ক্রয় মূল্য কত?

সমাধান: মনে করি, কলমটির ক্রয়মূল্য P টাকা

এখন, 10% লাভে,

কলমটির ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $(100 + 10)$ টাকা বা 110 টাকা

∴ কলমটির ক্রয়মূল্য 1 টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{110}{100}$ টাকা

∴ কলমটির ক্রয়মূল্য P টাকা হলে বিক্রয়মূল্য $\frac{11 \times P}{10}$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $\frac{11P}{10} = 11$

বা, $11P = 11 \times 10$

বা, $P = \frac{11 \times 10}{11}$

$\therefore P = 10$

∴ কলমটির ক্রয়মূল্য 10 টাকা।

২৫. একটি খাতা 36 টাকায় বিক্রয় করায় যত ক্ষতি হয়, 72 টাকায় বিক্রয় করলে তার দ্বিগুণ লাভ হতো, খাতাটির ক্রয়মূল্য কত?

সমাধান:

মনে করি, খাতাটির বিক্রয়মূল্য x টাকা

36 টাকায় বিক্রয় করলে ক্ষতি হয় $(x - 36)$ টাকা।

আবার, 72 টাকায় বিক্রয় করলে লাভ হয় $(72 - x)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $2(x - 36) = 72 - x$

বা, $2x - 72 = 72 - x$

বা, $2x + x = 72 + 72$

বা, $3x = 144$

বা, $x = \frac{144}{3}$

$\therefore x = 48$

∴ খাতাটির ক্রয়মূল্য 48 টাকা।

২৬. মুনাফার একই হারে 300 টাকার 4 বছরের সরল মুনাফা ও 400 টাকার 5 বছরের সরল মুনাফা একত্রে 148 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত?

সমাধান: আমরা জানি, $I = Pnr$

যেখানে, $I = n$ বছরান্তে সরল মুনাফা, $P =$ মূলধন, $n =$ সময়, $r =$ মুনাফার হার

মনে করি, $x\%$ মুনাফা হারে 300 টাকার 4 বছরের সরল মুনাফা ও 400 টাকার 5 বছরের সরল মুনাফা একত্রে 148 টাকা।

$\therefore 4 \times 300 \times x\% + 5 \times 400 \times x\% = 148$

বা, $4 \times 300 \times \frac{x}{100} + 5 \times 400 \times \frac{x}{100} = 148$

বা, $12x + 20x = 148$

বা, $32x = 148$

বা, $x = \frac{148}{32}$

$\therefore x = 4.625$

∴ মুনাফার হার 4.625% (Ans.)

২৭. 4% হার মুনাফায় কোনো টাকার 2 বছরের মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হলে, মুলধন কত?

সমাধান: দেওয়া আছে, মুনাফার হার, $r = 4\% = \frac{4}{100}$

বিনিয়োগ সময়, $n = 2$ বছর

ধরি, মূলধন $= P$ টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি হারে আসলসহ মুনাফা, $C = P(1 + r)^n$

∴ চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা, $I' = P(1 + r)^n - P$

আবার, সরল মুনাফা, $I = Prn$

প্রশ্নমতে, $I' - I = 1$

বা, $P(1 + r)^n - P - Prn = 1$

বা, $P(1+\frac{4}{100})^2 - P - P \times \frac{4}{100} \times 2 = 1$

বা, $P(\frac{104}{100})^2 - P - P \times \frac{8}{100} = 1$

বা, $P \times 1.0816 - P - P \times 0.08 = 1$

বা, $P(1.0816 - 1 - 0.08) = 1$

বা, $P = \frac{1}{0.0016}$

$\therefore P = 625$
$\therefore$ মূলধন = 625 টাকা (Ans.)

২৮. কোনো আসল 3 বছরে সরল মুনাফাসহ 460 টাকা এবং 5 বছরে সরল মুনাফাসহ 600 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার কত?
সমাধান: মনে করি, মূলধন P টাকা

মুনাফার হার $= x\% = \frac{x}{100}$

১ম শর্তমতে, $P(1+ 3.\frac{x}{100}) = 460$

বা, $P(\frac{100+3x}{100}) = 460$

$\therefore \frac{P}{100}(100 + 3x) = 460$ ... (i)

২য় শর্তমতে, $P(1+5.\frac{x}{100}) = 600$

বা, $P(\frac{100+5x}{100}) = 600$

$\therefore \frac{P}{100}(100 + 5x) = 600$ ... (ii)

(ii) নং সমীকরণকে (i) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{\frac{P}{100}(100+5x)}{\frac{P}{100}(100+3x)} = \frac{600}{460}$$

বা, $\frac{(100+5x)}{(100+3x)} = \frac{30}{23}$

বা, $2300 + 115x = 3000 + 90x$

বা, $115x - 90x = 3000 - 2300$

বা, $25x = 700$

বা, $x = \frac{700}{25}$

$\therefore x = 28$
$\therefore$ বার্ষিক মুনাফার হার 28% (Ans.)

২৯. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সরল মুনাফায় কত টাকা 13 বছরে সবৃদ্ধিমূল 990 টাকা হবে?
সমাধান: আমরা জানি, $A = P(1 + nr)$

মনে করি, মূলধন = P টাকা

এখানে, $n = 13$ বছর

$r = 5\% = \frac{5}{100}$

$A = 990$ টাকা

প্রশ্নমতে, $990 = P(1+ 13 \times \frac{5}{100})$

বা, $990 = P(\frac{100+65}{100})$

বা, $990 = P\times \frac{165}{100}$

বা, $P = \frac{990\times100}{165}$

বা, $P = 600$

$\therefore$ মূলধন 600 টাকা (প্রায়) (Ans.)

৩০. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা আর মুনাফায় কত টাকা 12 বছরে সবৃদ্ধিমূল 1280 টাকা হবে?

সমাধান: আমরা জানি, $A = P(1 + nr)$

মনে করি, মূলধন = P টাকা

এখানে, $n = 12$ বছর

$r= 5\% = \frac{5}{100}$

$A = 1280$ টাকা

প্রশ্নমতে, $1280 = P(1+ 12 \times \frac{5}{100})$

বা, $1280 = P(\frac{100+60}{100})$

বা, $1280 = P\times \frac{160}{100}$

বা, $P = \frac{1280\times100}{160}$

বা, $P = 800$

$\therefore$ মূলধন 800 টাকা (Ans.)

৩১. 5% হার মুনাফায় 8000 টাকার 3 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, মূলধন $P = 8000$ টাকা

মুনাফার হার $r= 5\% = \frac{5}{100}$

সময় $n = 3$ বছর

আমরা জানি, সরল মুনাফা $I = Pnr$

$= (8000 \times 3 \times \frac{5}{100})$ টাকা [মান বসিয়ে]

$= 1200$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় মুনাফাসহ আসল C টাকা হলে,

$C = P (1 + r)^n$

$= 8000 (1 + \frac{5}{100})^3$ (মান বসিয়ে

$= 8000 (\frac{105}{100})^3$

$= 8000 (1.05)^3$

$= 9261$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা $(9261 – 8000)$ টাকা $= 1261$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ও সরল মুনাফার পার্থক্য $(1261 - 1200)$ টাকা $= 61$ টাকা (Ans.)

৩২. মিষ্টির উপর মূল্য সংযোজন কর (VAT) x%। একজন বিক্রেতা ভ্যাটসহ P টাকার মিষ্টি বিক্রয় করলে তাকে কত ভ্যাট দিতে হবে? $x = 15$, $P = 2300$ হলে, ভ্যাটের পরিমাণ কত?

সমাধান: ধরি, P টাকার মিষ্টিতে VAT-এর পরিমাণ y টাকা।

VAT বাদে মিষ্টির বিক্রয় মূল্য $(P - y)$ টাকা

এবং x% হারে ভ্যাটের পরিমাণ $\{(P - y)$ এর $x\%\}$ টাকা

$= \{(P - y)$ এর $\frac{x}{100}\}$ টাকা

$= \frac{x(P-y)}{100}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $y = \frac{x(P-y)}{100}$

বা, $100y = x(P\text{-}y)$ [আড়গুণন করে]

বা, $100\,y = Px - xy$

বা, $100\,y + xy = Px$

বা, $y\,(100 + x) = Px$

বা, $y = \frac{Px}{(100+x)}$

$\therefore x = 15, P = 2300$ হলে, $y = \frac{2300 \times 15}{100 + 15} = \frac{2300 \times 15}{115} = 300$

$\therefore$ ভ্যাট $\frac{Px}{(100+x)}$ টাকা; ভ্যাটের পরিমাণ 300 টাকা। (Ans.)

৩৩. কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুনাত্তক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 3.
ক. সংখ্যাটিকে x চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।
খ. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. প্রমাণ কর $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$

সমাধান:

ক. মনে করি, সংখ্যাটি x

$\therefore$ x-এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{1}{x}$

প্রশ্নমতে, $x + \frac{1}{x} = 3$ (Ans.)

খ. 'ক' হতে পাই, $x + \frac{1}{x} = 3$

এখন, $(x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 4.x.\frac{1}{x}$

$= (3)^2 - 4$ [মান বসিয়ে]

$= 9 - 4 = 5$

$\therefore (x - \frac{1}{x})^2 = 5$

$\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

আবার, $x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})^3 + 3.x.\frac{1}{x}(x - \frac{1}{x})$

$= (\sqrt{5})^3 + 3.\sqrt{5}$

$= 5.\sqrt{5} + 3.\sqrt{5}$

$= 8.\sqrt{5}$

$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = 8.\sqrt{5}$ (Ans.)

গ. ক' ও 'খ' হতে পাই,

$x+\frac{1}{x}=3$ এবং $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$

এখন $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3.x.\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})$

$=(3)^3-3.3$ [মান বসিয়ে]

$=27-9$

$=18$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=18$ ... ... (i)

এবং $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2.x.\frac{1}{x}$

$=(\sqrt{5})^2+2$ [মান বসিয়ে]

$=5+2=7$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=7$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ গুণ করে,

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=18\times 7$$

বা, $x^5+\frac{x^3}{x^2}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^5}=126$

বা, $x^5+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}=126$

বা, $\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=126$

বা, $x^5+\frac{1}{x^5}+3=126$ [মান বসিয়ে]

বা, $x^5+\frac{1}{x^5}=126-3$

বা, $x^5+\frac{1}{x^5}=123$

$\therefore x^5+\frac{1}{x^5}=123$ (প্রমাণিত)

৩৪. কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার 100 গুণ চাঁদা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু 4 জন সদস্য চাদা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 500 টাকা বেড়ে গেল।

ক. সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং মোট চাঁদার পরিমাণ A হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ. মোট চাদার $\frac{1}{4}$ অংশ 5% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা 4% হারে 2 বছরের জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. এখানে, সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং মোট চাঁদার পরিমাণ A

প্রত্যেকের চাদার পরিমাণ $=100\times x$ টাকা $=100x$ টাকা।

$\therefore x$ জনের চাঁদার পরিমাণ $=100x\times x$ টাকা $=100x^2$ টাকা

তাহলে, নির্ণেয় সম্পর্ক, $A=100x^2$ (Ans.)

খ. 4 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায়, $(x - 4)$ জনের প্রত্যেকের চাদার পরিমাণ হবে $(100x + 500)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $(x - 4)(100x+500) = 100x^2$

বা, $100x^2 + 500x - 400x - 2000 = 100x^2$

বা, $100x = 2000$

বা, $x = \frac{2000}{100}$

বা, $x = 20$

সমিতির সদস্য সংখ্যা = 20 জন

এবং মোট চাঁদার পরিমাণ = $100x^2$ টাকা

$= 100 \times (20)^2$ টাকা

$= 100 \times 400$ টাকা

$= 40,000$ টাকা

সদস্য সংখ্যা 20 জন এবং মোট চাদার পরিমাণ 40,000 টাকা (Ans.)

গ. মোট চাঁদার $\frac{1}{4}$ অংশ = (40,000 টাকা এর $\frac{1}{4}$) = 10,000 টাকা

অবশিষ্ট টাকার পরিমাণ = (40,000 – 10,000) টাকা = 30,000 টাকা

১ম ক্ষেত্রে মুনাফা = Pnr = $(10,000 \times 2 \times \frac{5}{100})$ টাকা = 10,000 টাকা

[P = 10,000 টাকা, n = 2 বছর, $r = 5\% = \frac{5}{100}$ টাকা]

২য় ক্ষেত্রে মুনাফা = Pnr = $(30,000 \times 2 \times \frac{4}{100})$ টাকা = 2400 টাকা

[P = 30,000 টাকা, n = 2 বছর, $r = 4\% = \frac{4}{100}$ টাকা]

মোট মুনাফা = (1000 + 2400) টাকা = 3400 টাকা (Ans.)

৩৫. বনভোজনে যাওয়ার জন্য একটি বাস 2400 টাকায় ভাড়া করা হলো এবং শর্ত হলো প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবে। 10 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া ৪ (আট) টাকা বৃদ্ধি পেল।
ক. মাথাপিছু বর্ধিত ভাড়ার পরিমাণ, না আসা যাত্রী সংখ্যার শতকরা কত তা নির্ণয় কর।
খ. বাসে যাওয়া যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া নির্ণয় কর।
গ. বাসভাড়ার সমপরিমাণ টাকার 5% হার মুনাফায় 13 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।
সমাধান:

ক. বর্ধিত ভাড়া ৪ টাকা।

না আসা যাত্রী সংখ্যা 10 জন

বর্ধিত ভাড়া, না আসা যাত্রী সংখ্যার $= \frac{8}{10} \times 100 = 80$

Ans. 80%

খ. ধরি, বাসের যাত্রী সংখ্যা = x

জন প্রতি ভাড়া = $\frac{2400}{x}$ টাকা

সব যাত্রী উপস্থিত থাকলে যাত্রী সংখ্যা হত (x + 10) জন

তখন জনপ্রতি ভাড়া হত $\frac{2400}{x+10}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{2400}{x} - \frac{2400}{x+10} = 8$

বা, $\frac{2400(x+10)-2400x}{x(x+10)} = 8$

বা, $8x(x + 10) = 2400(x + 10) - 2400x$

বা, $8x(x + 10) = 2400(x + 10 - x)$

বা, $8x(x + 10) = 2400 \times 10$

বা, $8x(x + 10) = 24000$

বা, $8(x^2 + 10x) -24000 = 0$

বা, $8(x^2 + 10x - 3000) = 0$

বা, $x^2 + 10x - 3000 = 0$ [উভয়পক্ষকে 8 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 + 60x - 50x - 3000 = 0$

বা, $x(x + 60) - 50(x + 60) = 0$

বা, $(x + 60)(x -50) = 0$

হয়, $x + 60 = 0$

অর্থাৎ, $x = - 60$

অথবা, $x- 50 = 0$

বা, $x = 50$

যেহেতু x যাত্রী সংখ্যা নির্দেশ করে। অতএব, তা কখনোই ঋণাত্মক হতে পারে না।

$x = 50$

অর্থাৎ, বাসে 50 জন যাত্রী গিয়েছিল।

জন প্রতি ভাড়া = $\frac{2400}{50}$ টাকা = 48 টাকা

মাথাপিছু ভাড়া 48 টাকা (Ans.)

গ. দেওয়া আছে, মুনাফার হার, $r = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$

বাস ভাড়ার সমপরিমাণ টাকা হলো আসল

আসল, P = 2400 টাকা

সময়, n = 13 বছর

আমরা জানি,

সরল মুনাফা, $I = Pnr = (2400 \times 13 \times 0.05)$ টাকা = 1560 টাকা

আবার, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = $P(1 + r)^n - P = 2400(1 + 0.05)^{13} - 2400$

$= 2400(1.05)^{13} - 2400$

$= 4525.56 - 2400$

= 2125.56 টাকা (প্রায়)

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ও সরল মুনাফার পার্থক্য,

(2125.56 – 1560) টাকা = 565.56 টাকা (প্রায়) (Ans.)

৩৬. দাঁড় বেয়ে একটি খালের A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে যেয়ে ফিরে আসতে হবে। দাঁড়ের বেগ ধ্রুব হলে স্রোত থাকলে সময় বেশি লাগবে না স্রোত না থাকলে সময় বেশি লাগবে?

সমাধান:

মনে করি, দাঁড়ের বেগ ঘন্টায় x কি.মি., স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y কি.মি. এবং A ও B এর মধ্যবর্তী দূরত্ব d কি.মি.

তাহলে, স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় (x + y) কি.মি.

স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় (x – y) কি.মি.

এখন, স্রোতের অনুকূলে,

(x + y) কি.মি. যেতে সময় লাগে 1 ঘণ্টা

$\therefore$ 1 কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{1}{x+y}$ ঘণ্টা

$\therefore$ d কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{d}{x+y}$ ঘণ্টা

স্রোতের প্রতিকূলে,

(x – y) কি.মি. যেতে সময় লাগে 1 ঘণ্টা

$\therefore$ 1 কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{1}{x-y}$ ঘণ্টা

$\therefore$ d কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{d}{x-y}$ ঘণ্টা

ধরি, স্রোত থাকলে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে গিয়ে ফিরে আসতে সময় লাগে, t_1 ঘণ্টা

$\therefore t_1 = \frac{d}{x+y} + \frac{d}{x-y}$

বা, $t_1 = \frac{dx-dy+dx+dy}{(x+y)(x-y)}$

বা, $t_1 = \frac{2dx}{x^2-y^2}$ .... (i)

আবার স্রোত না থাকলে অর্থাৎ স্থির পানিতে x কি.মি. যেতে সময় লাগে 1 ঘণ্টা

x কি.মি. যেতে সময় লাগে 1 ঘণ্টা

$\therefore$ 1 কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{1}{x}$ ঘণ্টা

$\therefore$ d কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{d}{x}$ ঘণ্টা

তাহলে, d কি.মি. ফিরে আসতে সময় লাগে $\frac{d}{x}$ ঘণ্টা

ধরি, স্রোতহীন অবস্থায় A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে গিয়ে ফিরে আসতে সময় লাগে t_2 ঘণ্টা

$\therefore t_2 = \frac{d}{x} + \frac{d}{x}$

বা, $t_2 = \frac{2d}{x}$ .... (ii)

(ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{2d}{x}}{\frac{2dx}{x^2-y^2}}$

বা, $\frac{t_2}{t_1} = \frac{2d}{x} \times \frac{x^2-y^2}{2dx}$

বা, $\frac{t_2}{t_1} = \frac{x^2-y^2}{x^2}$

বা, $\frac{t_2}{t_1} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$

বা, $\frac{t_2}{t_1} = 1 - \frac{y^2}{x^2}$

এখানে, দাঁড়ের বেগ x > স্রোতের বেগ y

$\therefore x^2 > y^2$

$\therefore (1 - \frac{y^2}{x^2}) < 1$

$\therefore \frac{t_2}{t_1} < 1$

$\therefore t_2 < t_1$

∴ স্রোত থাকলে সময় বেশি লাগবে।

৩৭. একটি মাঠে ধ্রুব হারে ঘাস বৃদ্ধি পায়। 17টি গরু 30 দিনে সব ঘাস খেয়ে ফেলতে পারে। তবে 19টি গরুর লাগে 24 দিন। একদল গরু 6 দিন ঘাস খাওয়ার পর 4 টি গরু বিক্রয় করা হলে ঘাস খাওয়া শেষ করতে আরও 2 দিন লাগলো। দলটিতে শুরুতে কতগুলো গরু ছিল?

সমাধান: মনে করি, শুরুতে মাঠে ঘাস ছিল x পরিমাণ,

প্রতিদিন ঘাস বৃদ্ধি পায় y পরিমাণ

এবং প্রতিটি গরু প্রতিদিন r পরিমাণ ঘাস খায়।

∴ 30 দিনে ঘাসের পরিমাণ হয় x + 30y

17 টি গরু 30 দিন খায় 17×30×r পরিমাণ ঘাস

= 510r পরিমাণ ঘাস

∴ ১ম শর্তানুসারে, x + 30y =510r ......(i)

আবার, 24 দিনে ঘাসের পরিমাণ হয় x + 24y

19টি গরু 24 দিনে খায় 19×24×r পরিমাণ ঘাস

= 456r পরিমাণ ঘাস

∴ ২য় শর্তানুসারে, x + 24y = 456r...... (ii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

x + 30y – x – 24y = 510r – 456r

বা, 6y = 54r

বা, $y = \frac{54r}{6}$

বা, y = 9r

y এর মান (i)নং এ বসিয়ে পাই,

x + 30 × 9r = 510r

বা, x = 510r – 270r

বা, x =240r

ধরি, দলটিতে শুরুতে গরুর সংখ্যা ছিল C

তাহলে, ৩য় শর্তানুসারে,

x + 8y = 6×C×r+ 2(C – 4) × r

বা, 240 r + 8×9r = 6×C×r + 2(C – 4) × r

বা, 240r+ 72r = 6×C×r +2(C – 4) ×r

বা, 312r = 6×C×r + 2(C – 4) ×r

বা, 312 = 6×C+2(C – 4) [উভয় পক্ষকে r দ্বারা ভাগ করে]

বা, $312 = 6C + 2C - 8$

বা, $8C = 312 + 8$

বা, $8C = 320$

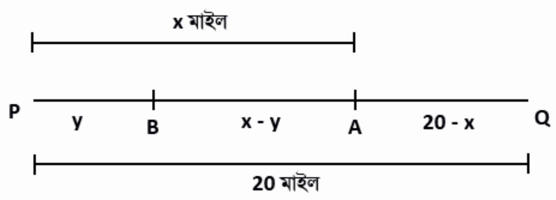
বা, $C = \frac{320}{8}$

$\therefore C = 40$

$\therefore$ দলটিতে শুরুতে গরু ছিল 40 টি (Ans.)

৩৮. দুই ভাইয়ের একটি প্রশিক্ষিত ঘোড়া ছিল যা যেকোনো নির্দেশ পালন করতে পারে। দুই ভাই একই সময়ে বাসা থেকে রওয়ানা হয়ে 20 মাইল দূরে একটি বৈশাখী মেলায় যেতে চায়। ঘোড়া যেকোনো মুহূর্তে মাত্র একজন ভাইকে বহন করতে পারে। ভাইদের বেগ ঘণ্টায় 4 মাইল এবং ঘোড়ার বেগ ঘণ্টায় (মানুষসহ কিংবা ছাড়া) 10 মাইল হলে সর্বনিম্ন কত সময়ে তারা মেলায় পৌছতে পারবে? প্রত্যেক ভাই কতটা পথ হাঁটবে?

সমাধান:



ধরি, একই সময়ে বাসা P হতে ১ম ভাই ঘোড়ায় ও ২য় ভাই হেঁটে রওনা হলো। ঘোড়াটি PA = x মাইল। দূরে A বিন্দুতে ১ম ভাইকে নামিয়ে দিয়ে ২য় ভাইকে যখন নিতে আসলো ততক্ষণে ২য় ভাই PB = y মাইল পথ হেঁটে B বিন্দুতে পৌঁছায়।

এখানে, $AB = PA - PB = (x - y)$ মাইল।

২য় ভাইয়ের হেঁটে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $PB = y$ মাইল

এই সময়ে ঘোড়ার অতিক্রান্ত দুরত্ব $= PA + AB$

$= (x + x - y)$ মাইল

$= (2x - y)$ মাইল

শর্তানুসারে, $\frac{y}{4} = \frac{2x-y}{10}$

বা, $8x - 4y = 10y$

বা, $8x = 14y$

$\therefore x = \frac{7}{4}y$............(i)

সর্বনিম্ন সময়ে পৌছানোর জন্য ঘোড়াটি যতক্ষণে ১ম ভাইকে A বিন্দুতে নামিয়ে ২য় ভাইকে B বিন্দু থেকে নিয়ে মেলা q এ পৌছায় ততক্ষণে ১ম ভাইকে মেলায় পৌছাতে হবে।

১ম ভাইয়ের হেঁটে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $AQ = PQ - PA$

$= (20 - x)$ মাইল

এই সময়ে ঘোড়ার অতিক্রান্ত দূরত্ব $= AB + BA + AQ$

$= \{2(x - y) + 20 - x\}$ মাইল

$= (x - 2y + 20)$ মাইল

শর্তানুসারে,

$\frac{20-x}{4} = \frac{x-2y+20}{10}$

বা, $4x - 8y + 80 = 200 - 10x$

বা, $14x - 8y = 120$

বা, $14 \times \frac{7}{4} y - 8y = 120$

বা, $\frac{49}{2} y - 8y = 120$

বা, $49y - 16y = 240$

বা, $33y = 240$

$\therefore y = \frac{240}{33} = \frac{80}{11}$

(i) নং থেকে পাই, $x = \frac{7}{4} \times \frac{80}{11} = \frac{140}{11}$

$\therefore$ ১ম ভাইয়ের হেঁটে অতিক্রান্ত দূরত্ব $(20 - \frac{140}{11})$ মাইল

$= \frac{220-140}{11}$ মাইল $= \frac{80}{11}$ মাইল $= 7\frac{3}{11}$ মাইল

সুতরাং ২য় ভাইয়ের হেঁটে অতিক্রান্ত দূরত্ব $7\frac{3}{11}$ মাইল যেহেতু দুই ভাই একত্রে মেলায় পৌছায়।

$\therefore$ মোট প্রয়োজনীয় সময় = ঘোড়াটির PA দূরত্ব অতিক্রান্ত করতে প্রয়োজন সময় + ১ম ভাইয়ের হেঁটে AB দূরত্ব অতিক্রান্ত করতে প্রয়োজনীয় সময় $(\frac{x}{10} + \frac{20-x}{4})$ ঘন্টা $=$ $(\frac{140}{11\times11} + \frac{80}{11\times4})$ ঘন্টা

$= \frac{34}{11}$ ঘন্টা

$= 3\frac{1}{11}$ ঘণ্টা

উত্তর: $3\frac{1}{11}$ ঘণ্টা, $7\frac{3}{11}$ মাইল।

অধ্যায় ৪ | ৪.১ সূচক ও লগারিদম
Exponents and Logarithms

সরল কর: (১-৮)

১. $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$

সমাধান:

$$\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}} = \frac{7^{3-3}}{3^{1-4}} = \frac{7^0}{3^{-3}} = \frac{1}{3^{-3}}$$

$$= 1 \times 3^3 = 27$$

(Ans.)

২. $\frac{\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

সমাধান:

$$\frac{\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{(7^2)^{\frac{1}{3}} \times (7)^{\frac{1}{3}}}{(7)^{\frac{1}{2}}} = (7)^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$$

$$= (7)^{\frac{4+2-3}{6}} = (7)^{\frac{3}{6}} = (7)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} \text{ (Ans.)}$$

৩. $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$

সমাধান:

$$(2^{-1} + 5^{-1})^{-1} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{5})^{-1} = (\frac{5+2}{10})^{-1} = (\frac{7}{10})^{-1} = \frac{10}{7} \quad \text{(Ans.)}$$

৪. $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

সমাধান:

$$(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1} = (2 \times \frac{1}{a} + 3 \times \frac{1}{b})^{-1}$$

$$= (\frac{2}{a} + \frac{3}{b})^{-1} = (\frac{2b+3a}{ab})^{-1}$$

$$= \frac{ab}{2b+3a} = \frac{ab}{3a+2b} \quad \text{(Ans.)}$$

৫. $(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b})^2$

সমাধান:

$$\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2 = (a^{2+2}.b^{-1-1})^2 = (a^4.b^{-2})^2$$

$$= a^8b^{-4} = \frac{a^8}{b^4} \quad \text{(Ans.)}$$

৬. $\sqrt{x^{-1}y}.\sqrt{y^{-1}z}.\sqrt{z^{-1}x},$

$(x > 0, y > 0, z > 0)$

সমাধান:

$$\sqrt{x^{-1}y}.\sqrt{y^{-1}z}.\sqrt{z^{-1}x}$$

$$= (x^{-1}y)^{\frac{1}{2}}.(y^{-1}z)^{\frac{1}{2}}.(z^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x^{-1}y.y^{-1}z.z^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x^{-1+1}.y^{1-1}.z^{1-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$= (x^0.y^0.z^0)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 \times 1 \times 1)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{(Ans.)}$$

সূত্রসমূহঃ

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(ab)^n = a^n \times b^n$
4. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
9. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

৭. $\frac{2^{n+4}-4.2^{n+1}}{2^{n+2}\div 2}$

সমাধান:

$$\frac{2^{n+4}-4.2^{n+1}}{2^{n+2}\div 2}=\frac{2^n.2^4-4.2^n.2^1}{2^{n+2}\div 2^1}$$
$$=\frac{2^n.16-8.2^n}{2^{n+2-1}}=\frac{2^n.(16-8)}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{2^n\times 8}{2^n\times 2^1}=\frac{8}{2}=4\ \text{(Ans.)}$$

৮. $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}}\div\frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

সমাধান:

$$\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}}\div\frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}=\frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}}\div\frac{(3^2)^{m+1}}{3^{(m+1)(m-1)}}=\frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}}\div\frac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}}$$
$$=\frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}}\times\frac{3^{m^2-1}}{3^{2m+2}}=3^{m+1+m^2-1-m^2+m-2m-2}=3^{2m-2m-2}=3^{-2}$$
$$=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}\ \text{(Ans.)}$$

প্রমাণ কর: (৯-১৫)

৯. $\frac{4^n-1}{2^n-1}=2^n+1$

সমাধান:

$$L.H.S=\frac{4^n-1}{2^n-1}=\frac{(2^2)^n-1}{2^n-1}=\frac{(2^n)^2-1}{2^n-1}=\frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n-1}$$
$$=2^n+1=R.H.S$$

$\therefore\frac{4^n-1}{2^n-1}=2^n+1\ \ (Proved)$

১০. $\frac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.6^p}{3^{p-2}.6^{2p+2}.10^p.15^q}=\frac{1}{50}$

সমাধান:

$$L.H.S=\frac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.6^p}{3^{p-2}6^{2p+2}.10^p.15^q}$$
$$=\frac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.(2\times 3)^p}{3^{p-2}.(2\times 3)^{2p+2}.(5\times 2)^p.(3\times 5)^q}$$
$$=\frac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.2^p.3^p}{3^{p-2}.2^{2p+2}.3^{2p+2}.5^p.2^p.3^q.5^q}$$
$$=2^{2p+1+p-2p-2-p}.3^{2p+q+p-p+2-2p-2-q}.5^{p+q-p-q}=2^{-1}.3^0.5^0=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 1\times 1$$
$$=\frac{1}{2}=R.H.S$$

$\therefore\frac{2^{p+1}.3^{2p-q}.5^{p+q}.6^q}{6^p.10^{q+2}.15^p}=\frac{1}{50}\ \ (Proved)$

১১. $(\frac{a^l}{a^m})^n.(\frac{a^m}{a^n})^l.(\frac{a^n}{a^l})^m=1$

সমাধান:

$$L.H.S=(\frac{a^l}{a^m})^n.(\frac{a^m}{a^n})^l.(\frac{a^n}{a^l})^m=\frac{a^{ln}}{a^{mn}}.\frac{a^{lm}}{a^{ln}}.\frac{a^{mn}}{a^{lm}}$$
$$=a^{ln+lm+mn-mn-ln-lm}$$
$$=a^0=1=R.H.S$$

$\therefore(\frac{a^l}{a^m})^n.(\frac{a^m}{a^n})^l.(\frac{a^n}{a^l})^m=1\ \ (Proved)$

১২. $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$

সমাধান:

$$L.H.S = \frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}}$$
$$= a^{p+q-2r}.a^{q+r-2p}.a^{r+p-2q}$$
$$= a^{p+q-2r+q+r-2p+r+p-2q}$$
$$= a^{2r-2r+2p-2p+2q-2q}$$
$$= a^0 = 1 = R.H.S$$

$\therefore \frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$ $(Proved)$

১৩. $(\frac{x^a}{x^b})^{\frac{1}{ab}}.(\frac{x^b}{x^c})^{\frac{1}{bc}}.(\frac{x^c}{x^a})^{\frac{1}{ca}} = 1$

সমাধান:

$$L.H.S = (\frac{x^a}{x^b})^{\frac{1}{ab}}.(\frac{x^b}{x^c})^{\frac{1}{bc}}.(\frac{x^c}{x^a})^{\frac{1}{ca}} = (x^{a-b})^{\frac{1}{ab}}.(x^{b-c})^{\frac{1}{bc}}.(x^{c-a})^{\frac{1}{ca}} = x^{\frac{a-b}{ab}}.x^{\frac{b-c}{bc}}.x^{\frac{c-a}{ca}}$$
$$= x^{\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}} = x^{\frac{ca-cb+ab-ac+bc-ab}{abc}} = x^{\frac{0}{abc}} = x^0 = 1 = R.H.S$$

$\therefore (\frac{x^a}{x^b})^{\frac{1}{ab}}.(\frac{x^b}{x^c})^{\frac{1}{bc}}.(\frac{x^c}{x^a})^{\frac{1}{ca}} = 1$ $(Proved)$

১৪. $(\frac{x^a}{x^b})^{a+b}.(\frac{x^b}{x^c})^{b+c}.(\frac{x^c}{x^a})^{c+a} = 1$

সমাধান:

$$L.H.S = (\frac{x^a}{x^b})^{a+b}.(\frac{x^b}{x^c})^{b+c}.(\frac{x^c}{x^a})^{c+a}$$
$$= \left(x^{a-b}\right)^{a+b}.\left(x^{b-c}\right)^{b+c}.(x^{c-a})^{c+a}$$
$$= x^{(a-b)(a+b)}.x^{(b-c)(b+c)}.x^{(c-a)(c+a)} = x^{a^2-b^2}.x^{b^2-c^2}.x^{c^2-a^2}$$
$$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$$
$$= x^0 = 1 = R.H.S$$

$\therefore (\frac{x^a}{x^b})^{a+b}.(\frac{x^b}{x^c})^{b+c}.(\frac{x^c}{x^a})^{c+a} = 1$

$(Proved)$

১৫. $(\frac{x^p}{x^q})^{p+q-r}.(\frac{x^q}{x^r})^{q+r-p}.(\frac{x^r}{x^p})^{r+p-q} = 1$

সমাধান:

$$L.H.S = \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r}.\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p}.\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$$
$$= (x^{p-q})^{p+q-r}.(x^{q-r})^{q+r-p}.(x^{r-p})^{r+p-q}$$
$$= x^{(p-q)(p+q-r)}.x^{(q-r)(q+r-p)}.x^{(r-p)(r+p-q)}$$
$$= x^{(p-q)(p+q)-r(p-q)}.x^{(q-r)(q+r)-p(q-r)}.x^{(r-p)(r+p)-q(r-p)}$$
$$= x^{p^2-q^2-pr+qr}.x^{q^2-r^2-pq+qr}.x^{r^2-p^2-qr+pq}$$
$$= x^{p^2-q^2-pr+qr+q^2-r^2-pq+qr+r^2-p^2-qr+pq}$$
$$= x^0 = 1 = R.H.S$$

$\therefore (\frac{x^p}{x^q})^{p+q-r}.(\frac{x^q}{x^r})^{q+r-p}.(\frac{x^r}{x^p})^{r+p-q} = 1$ $(Proved)$

১৬. যদি $a^x = b,\ b^y = c, c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

সমাধান: দেয়া আছে, $a^x = b,\ b^y = c,\ c^z = a$

এখন, $c^z = a$

বা, $(b^y)^z = a$ $[\because b^y = c]$

বা, $b^{yz} = a$

বা, $(a^x)^{yz} = a$ $[\because a^x = b]$

বা, $a^{xyz} = a$
বা, $a^{xyz} = a^1$
$\therefore xyz = 1$ (দেখানো হলো)

সমাধান কর: (১৭-২০)

১৭. $4^x = 8$

সমাধান: $4^x = 8$
বা, $(2^2)^x = 2^3$
বা, $2^{2x} = 2^3$

$\therefore 2x = 3$
বা, $x = \frac{3}{2}$
নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{3}{2}$

১৮. $2^{2x+1} = 128$

সমাধান: $2^{2x+1} = 128$
বা, $2^{2x+1} = 2^7$

$\therefore 2x + 1 = 7$
বা, $2x = 7 - 1$
বা, $x = \frac{6}{2}$
বা, $x = 3$
নির্ণেয় সমাধান: $x = 3$

১৯. $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

সমাধান: $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$
বা, $(3^{\frac{1}{2}})^{x+1} = (3^{\frac{1}{3}})^{2x-1}$
বা, $3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{2x-1}{3}}$

$\therefore \frac{x+1}{2} = \frac{2x-1}{3}$
বা, $3(x + 1) = 2(2x - 1)$
বা, $3x + 3 = 4x - 2$
বা, $4x - 2 = 3x + 3$
বা, $4x - 3x = 3 + 2$
বা, $x = 5$
নির্ণেয় সমাধান: $x = 5$

২০. $2^x + 2^{1-x} = 3$

সমাধান: $2^x + 2^{1-x} = 3$
বা, $2^x + \frac{2^1}{2^x} = 3$
বা, $a + \frac{2}{a} = 3$ [ধরি, $2^x = a$]
বা, $\frac{a^2+2}{a} = 3$
বা, $a^2 + 2 = 3a$
বা, $a^2 - 3a + 2 = 0$
বা, $a^2 - 2a - a + 2 = 0$
বা, $a(a - 2) - 1(a - 2) = 0$
বা, $(a - 2)(a - 1) = 0$

হয়, $a - 2 = 0$
বা, $a = 2$
বা, $2^x = 2^1$

$\therefore x = 1$

অথবা, $a - 1 = 0$
বা, $a = 1$
বা, $2^x = 2^0$
$\therefore x = 0$

নির্ণেয় সমাধান: $x = 0,1$

২১. $P = x^a, Q = x^b$ এবং $R = x^c$
ক. $P^{bc}.Q^{-ca}$ এর মান নির্ণয় কর।
খ. $(\frac{P}{Q})^{a+b} \times (\frac{Q}{R})^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. দেখাও যে, $(\frac{P}{Q})^{a^2+ab+b^2} \times (\frac{Q}{R})^{b^2+bc+c^2} \times (\frac{R}{P})^{c^2+ca+a^2} = 1$

সমাধান:
ক. দেয়া আছে, $P = x^a, Q = x^b$
প্রদত্ত রাশি $= P^{bc}.Q^{-ca}$
$= (x^a)^{bc}.(x^b)^{-ca}$
$= x^{abc}.x^{-abc}$
$= x^{abc-abc}$
$= x^0$
$= 1 \quad (\text{Ans.})$

খ. দেয়া আছে, $P = x^a, Q = x^b$ এবং $R = x^c$
প্রদত্ত রাশি $= (\frac{P}{Q})^{a+b} \times (\frac{Q}{R})^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$

$= (\frac{x^a}{x^b})^{a+b} \times (\frac{x^b}{x^c})^{b+c} \div 2(x^c x^a)^{a-c}$

$= (x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \div 2(x^{a+c})^{a-c}$

$= x^{(a-b)(a+b)} \times x^{(b-c)(b+c)} \div 2x^{(a+c)(a-c)}$

$= x^{a^2-b^2} \times x^{b^2-c^2} \div 2x^{a^2-c^2}$

$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2} \div 2x^{a^2-c^2}$

$= x^{a^2-c^2} \div 2x^{a^2-c^2}$

$= \frac{x^{a^2-c^2}}{2x^{a^2-c^2}}$

$= \frac{1}{2}.x^{a^2-c^2-a^2+c^2}$

$= \frac{1}{2}.x^0$

$= \frac{1}{2} \times 1$

$= \frac{1}{2} \quad (\text{Ans.})$

গ. $L.H.S = \left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= \left(x^{a-b}\right)^{a^2+ab+b^2}.\left(x^{b-c}\right)^{b^2+bc+c^2}.(x^{c-a})^{c^2+ca+a^2}$

$= x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)}.x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)}.x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$= x^{a^3-b^3}.x^{b^3-c^3}.x^{c^3-a^3}$

$= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3} = x^0 = 1 = R.H.S$

$\therefore (\frac{P}{Q})^{a^2+ab+b^2} \times (\frac{Q}{R})^{b^2+bc+c^2} \times (\frac{R}{P})^{c^2+ca+a^2} = 1$ (*Showed*)

২২. $X = (2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}, Y = \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}};$

যেখানে $x > 0$ এবং $p, q, r > 0$. এবং $Z = \frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}$

ক. X এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $Y + \sqrt[3]{64} = 5$

গ. প্রমাণ কর যে, $Y \div Z = 25$

সমাধান:

ক. দেয়া আছে, $X = (2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

$$= (2 \times \frac{1}{a} + 3 \times \frac{1}{b})^{-1} = (\frac{2}{a} + \frac{3}{b})^{-1} = (\frac{2b + 3a}{ab})^{-1} = \frac{ab}{2b + 3a} = \frac{ab}{3a + 2b} \text{ (Ans.)}$$

খ. দেয়া আছে, $Y = \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}}$

$$= \sqrt[pq]{x^{p-q}} \times \sqrt[qr]{x^{q-r}} \times \sqrt[rp]{x^{r-p}}$$

$$= x^{\frac{p-q}{pq}} \times x^{\frac{q-r}{qr}} \times x^{\frac{r-p}{rp}}$$

$$= x^{\frac{p-q}{pq}+\frac{q-r}{qr}+\frac{r-p}{rp}}$$

$$= x^{\frac{r(p-q)+p(q-r)+q(r-p)}{pqr}}$$

$$= x^{\frac{rp-qr+pq-rp+qr-pq}{pqr}}$$

$$= x^{\frac{0}{pqr}} = x^0 = 1$$

বামপক্ষ $= Y + \sqrt[3]{64} = 1 + 4 = 5 =$ ডানপক্ষ

$\therefore Y + \sqrt[3]{64} = 5$ (*Showed*)

গ. দেয়া আছে,

$$Z = \frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}} = \frac{5^{m+1}}{5^{m^2-m}} \div \frac{(5^2)^{m+1}}{5^{(m+1)(m-1)}} = \frac{5^{m+1}}{5^{m^2-m}} \div \frac{5^{2m+2}}{5^{m^2-1}}$$

$$= \frac{5^{m+1}}{5^{m^2-m}} \times \frac{5^{m^2-1}}{5^{2m+2}} = 5^{m+1+m^2-1-m^2+m-2m-2} = 5^{2m-2m-2} = 5^{-2}$$

$$= \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

'খ' হতে প্রাপ্ত $Y = 1$

বামপক্ষ $= Y \div Z = 1 \div \frac{1}{25} = 1 \times \frac{25}{1} = 25 =$ ডানপক্ষ

$\therefore Y \div Z = 25$ (দেখানো হলো)

অধ্যায় ৪ — ৪.২ সূচক ও লগারিদম
Exponents and Logarithms

১। মান নির্ণয় কর:

ক. $\log_3 81$

সমাধান: $\log_3 81 = \log_3 3^4$

$= 4\log_3 3$

$= 4 \times 1 \quad [\log_a a = 1]$

$= 4 \;(Ans.)$

খ. $\log_5 \sqrt[3]{5}$

সমাধান: $\log_5 \sqrt[3]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}\log_5 5 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \;(Ans.)$

গ. $\log_4 2$

সমাধান: $\log_4 2 = \log_4 (4)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_4 4 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \;(Ans.)$

ঘ. $\log_{2\sqrt{5}} 400$

সমাধান: $\log_{2\sqrt{5}} 400$

$= \log_{2\sqrt{5}} (20)^2$

$= \log_{2\sqrt{5}} (2 \times 2 \times 5)^2$

$= \log_{2\sqrt{5}} \left\{\left(2\sqrt{5}\right)^2\right\}^2$

$= \log_{2\sqrt{5}} \left(2\sqrt{5}\right)^4 = 4\log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5}$

$= 4 \times 1 = 4 \;(Ans.)$

ঙ. $\log_5(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5})$

সমাধান: $\log_5(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5})$

$= \log_5\left(5^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{2}}\right) \quad [\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}]$

$= \log_5 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$

$= \log_5 5^{\frac{2+3}{6}} = \log_5 5^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}\log_5 5$

$= \frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6} \;(Ans.)$

২। x এর মান নির্ণয় কর:

ক. $\log_5 x = 3$

সমাধান: $\log_5 x = 3$

$\therefore x = 5^3 \quad [x = \log_a N$ হলে, $a^x = N]$

অতএব, $x = 125 \;(Ans.)$

খ. $\log_x 25 = 2$

সমাধান: $\log_x 25 = 2$

$\therefore 25 = x^2$

বা, $x^2 = 25$

বা, $x^2 = 5^2$

$\therefore x = 5 \;(Ans.)$

সূত্রসমূহঃ

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a^M = M$
4. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
5. $\log_a(\frac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$
6. $\log_a M^N = N\log_a M$
7. $\log_a M = \log_a b \times \log_b M$
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
9. যদি $a^x = M$ হয়, তবে $x = \log_a M$

গ. $\log_x \frac{1}{16} = -2$

সমাধান: $\log_x \frac{1}{16} = -2$

$\therefore \frac{1}{16} = x^{-2}$

বা, $\frac{1}{16} = \frac{1}{x^2}$

বা, $x^2 = 16$

বা, $x^2 = 4^2$

$\therefore x = 4 \ (Ans.)$

৩. দেখাও যে,

ক. $5\log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$

সমাধান:

বামপক্ষ $= 5\log_{10} 5 - \log_{10} 25$

$= \log_{10} 5^5 - \log_{10} 5^2$

$= \log_{10}(\frac{5^5}{5^2})$

$= \log_{10} 5^{5-2}$

$= \log_{10} 5^3$

$= \log_{10} 125 =$ ডানপক্ষ

$\therefore 5\log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$

[দেখানো হলো]

খ. $\log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \log_{10} \frac{50}{147}$

$= \log_{10} 50 - \log_{10} 147$

$= \log_{10}(2 \times 5 \times 5) - \log_{10}(3 \times 7 \times 7)$

$= \log_{10}(2 \times 5^2) - \log_{10}(3 \times 7^2)$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 5^2 - \log_{10} 3 - \log_{10} 7^2$

$= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7$ [দেখানো হলো]

গ. $3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$

সমাধান:

বামপক্ষ $= 3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5$

$= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 5$

$= \log_{10} 8 + \log_{10} 9 + \log_{10} 5$

$= \log_{10}(8 \times 9 \times 5)$

$= \log_{10} 360 =$ ডানপক্ষ

$\therefore 3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$ [দেখানো হলো]

৪. সরল কর:

ক. $7\log_{10}\frac{10}{9} - 2\log_{10}\frac{25}{24} + 3\log_{10}\frac{81}{80}$

সমাধান:

$= \log_{10}(\frac{10}{9})^7 - \log_{10}(\frac{25}{24})^2 + \log_{10}(\frac{81}{80})^3$

$= \log_{10}\{\left(\frac{10}{9}\right)^7 \div \left(\frac{25}{24}\right)^2 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3\}$

$= \log_{10}\{\left(\frac{10}{9}\right)^7 \times \left(\frac{24}{25}\right)^2 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3\}$

$= \log_{10}\{\left(\frac{2\times 5}{3^2}\right)^7 \times \left(\frac{2^3\times 3}{5^2}\right)^2 \times \left(\frac{3^4}{2^4\times 5}\right)^3\}$

$= \log_{10}\{\frac{2^7\times 5^7}{3^{14}} \times \frac{2^6\times 3^2}{5^4} \times \frac{3^{12}}{2^{12}\times 5^3}\}$

$= \log_{10}(2^{7+6-12} \times 3^{2+12-14} \times 5^{7-4-3})$

$= \log_{10}(2^1 \times 3^0 \times 5^0)$

$= \log_{10}(2\times 1\times 1)$

$= \log_{10} 2 \quad (Ans.)$

খ. $\log_7(\sqrt[5]{7}.\sqrt{7}) - \log_3(\sqrt[3]{3}) + \log_4 2$

$= \log_7(7^{\frac{1}{5}}.7^{\frac{1}{2}}) - \log_3(3^{\frac{1}{3}}) + \log_4(4)^{\frac{1}{2}}$

$= \log_7(7^{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}}) - \log_3(3^{\frac{1}{3}}) + \log_4(4)^{\frac{1}{2}}$

$= (\frac{1}{5}+\frac{1}{2})\log_7 7 - \frac{1}{3}\log_3 3 + \frac{1}{2}\log_4 4$

$= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)\times 1 - \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1$

$= \frac{2+5}{10} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{7}{10} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{21-10+15}{30}$

$= \frac{26}{30}$

$= \frac{13}{15} \quad (Ans.)$

গ. $\log_e\frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e\frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e\frac{c^3d^3}{a^3} - 3\log_e b^2c$

$= \log_e(\frac{a^3b^3}{c^3} \times \frac{b^3c^3}{d^3} \times \frac{c^3d^3}{a^3}) - 3\log_e b^2c$

$= \log_e(\frac{b^3\times b^3}{c^3}) - 3\log_e b^2c$

$= \log_e(b^{3+3}\times c^3) - 3\log_e b^2c$

$= \log_e(b^6\times c^3) - 3\log_e b^2c$

$= \log_e(b^2c)^3 - 3\log_e b^2c$

$= 3\log_e b^2c - 3\log_e b^2c$

$= 0 \quad (Ans.)$

৫. $x = 2, \ y = 3, \ z = 5, \ w = 7$
ক. $\sqrt{y^3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর।
খ. $w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. দেখাও যে, $\frac{\log\sqrt{y^3}+y\log x-\frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy)-\log z} = \log_y\sqrt{y^3}$

সমাধান:
ক. দেয়া আছে, $y = 3$

$\therefore$ $\sqrt{y^3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ $= \log_3\sqrt{y^3}$

$= \log_3\sqrt{3^3}$

$= \log_3(3^3)^{\frac{1}{2}}$

$= \log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}\log_3 3$

$= \frac{3}{2} \quad (Ans.)$

খ. দেয়া আছে, $x = 2, \ y = 3, \ z = 5, \ w = 7$

প্রদত্ত রাশি $= w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$

$= 7\log\frac{2\times5}{3^2} - 2\log\frac{5^2}{2^2\times3} + 3\log\frac{3^4}{2^4\times5}$

$= \log\ (\frac{2\times5}{3^2})^7 - \log(\frac{5^2}{2^2\times3})^2 + \log(\frac{3^4}{2^4\times5})^3$

$= \log\ \{(\frac{2\times5}{3^2})^7 \div (\frac{5^2}{2^2\times3})^2 \times (\frac{3^4}{2^4\times5})^3\}$

$= \log\ \{(\frac{2\times5}{3^2})^7 \times (\frac{2^2\times3}{5^2})^2 \times (\frac{3^4}{2^4\times5})^3\}$

$= \log\ \{\frac{2^7\times5^7}{3^{14}} \times \frac{2^4\times3^2}{5^4} \times \frac{3^{12}}{2^{12}\times5^3}\}$

$= \log\ (2^{7+4-12} \times 3^{2+12-14} \times 5^{7-4-3})$

$= \log\ (2^{-1} \times 3^0 \times 5^0)$

$= \log\ (\frac{1}{2} \times 1 \times 1)$

$= \log\frac{1}{2} \quad (Ans.)$

গ. দেয়া আছে, $x = 2,\ \ y = 3,\ \ z = 5$

বামপক্ষ $= \frac{\log\sqrt{y^3}+y\log x-\frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy)-\log z}$

$$= \frac{\log\sqrt{3^3}+3\log 2-\frac{3}{2}\log(2\times 5)}{\log(2\times 3)-\log 5}$$

$$= \frac{\log(3^3)^{\frac{1}{2}}+3\log(4)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\log 10}{\log 6-\log 5}$$

$$= \frac{\log 3^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\log 4-\frac{3}{2}\log 10}{\log\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log 3+\frac{3}{2}\log 4-\frac{3}{2}\log 10}{\log\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log(3\times 4\div 10)}{\log\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log(12\div 10)}{\log\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log\frac{12}{10}}{\log\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log\frac{6}{5}}{\log\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{3}{2}.1$$

$$= \frac{3}{2}.\log_3 3 \quad [\because 1 = \log_a a]$$

$$= \log_3 3^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_3\sqrt{3^3}$$

$$= \log_y\sqrt{y^3}$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\log\sqrt{y^3}+y\log x-\frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy)-\log z} = \log_y\sqrt{y^3}$

[দেখানো হলো]

অধ্যায় ৪ | ৪.৩ সূচক ও লগারিদম Exponents and Logarithms

১। কোন শর্তে $a^{\circ} = 1$?

ক. $a = 0$ খ. $a \neq 0$ গ. $a > 0$ ঘ. $a \neq 1$

ব্যাখ্যা: কারণ শুন্য সূচক এর সংজ্ঞা অনুযায়ী 0° অসংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ , এখানে a এর মান 0 হতে পারবেনা।

২। $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. $\sqrt[6]{5}$ খ. $(\sqrt[3]{5})^3$ গ. $(\sqrt{5})^3$ ঘ. $\sqrt[3]{25}$

ব্যাখ্যা: $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5.5} = \sqrt[3]{25}$

৩। কোন শর্তে $\log_a a = 1$?

ক. $a > 0.$ খ. $a \neq 1$ গ. $a > 0, a \neq 1$ ঘ, $a \neq 0, a > 1$

৪। $\log_x 4 = 2$ হলে, x এর মান কত?

ক. 2 খ. ± 2 গ. 4 ঘ. 10

ব্যাখ্যা: $\log_x 4 = 2$ হলে $x^2 = 4$ বা, $x^2 = 2^2 \therefore x = 2$

৫। একটি সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে লেখার জন্য শর্ত কোনটি?

ক. $1 < a < 10$ খ. $1 \leq a \leq 10$

গ. $1 \leq a < 10$ ঘ. $1 < a \leq 10$

ব্যাখ্যা: $800 = 8 \times 10^2$

$1000 = 10 \times 10^2 = 1 \times 10^3$

অর্থাৎ $a \times 10^n$ আকারের সংখ্যায় a এর মান 10 এর সমান বা 10 এর চেয়ে বড় হলে, a এর মান 10 অপেক্ষা ছোট তৈরি করে ঘাত এর সঙ্গে যোগ করতে হবে।

৬. $a > 0, b > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হলে-

i. $\log_a b \times \log_b a = 1$

ii. $\log_a M^r = \mathrm{M} \log_a r$

iii. $\log_a(\sqrt[3]{a}.\sqrt{a}) = \frac{5}{6}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i ও iii ঘ) ii ও iii

ব্যাখ্যা:

i. $\log_a b \times \log_b a = \log_a b \times \frac{1}{\log_a b} = 1$

ii. সঠিক নয়। কারণ, $\log_a M^r = \mathrm{r} \log_a M$

ii. $\log_a(\sqrt[3]{a}.\sqrt{a}) = \log_a(a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}) = \log_a(a^{\frac{2+3}{6}}) = \log_a a^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}\log_a a = \frac{5}{6}$

MCQ Answers:
১। খ
২। ঘ
৩। গ
৪। ক
৫। গ
৬। গ
৭। ঘ
৮। ঘ
৯। গ
১০। ক

৭. 0.0035 এর সাধারণ লগের পূর্ণক কত?

ক. 3 খ. 1 গ. $\bar{2}$ ঘ. $\bar{3}$

ব্যাখ্যা: $0.0035 = 3.5 \times 10^{-3}$

$\therefore$ 0.0035 এর সাধারণ লগের পূর্ণক = – 3 বা, $\bar{3}$

0.0225 সংখ্যাটি বিবেচনা করে (৮-১০)নং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

৮. সংখ্যাটির a^n আকার নিচের কোনটি?

ক. $(2.5)^2$ খ. $(0.015)^2$ গ. $(1.5)^2$ ঘ. $(.15)^2$

ব্যাখ্যা: $(.15)^2 = 0.15 \times 0.15 = 0.0225$

৯. সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ নিচের কোনটি?

ক. 225×10^{-4} খ. 22.5×10^{-3} গ. 2.25×10^{-2} ঘ. $.225 \times 10^{-1}$

ব্যাখ্যা: $0.0225 = 2.25 \times 10^{-2}$

১০. সংখ্যাটির সাধারণ লগের পূর্ণ কত?

ক. $\bar{2}$ খ. $\bar{1}$ গ. 0 ঘ. 2

ব্যাখ্যা: $0.0225 = 2.25 \times 10^{-2}$

$\therefore$ 0.0225 এর সাধারণ লগের পূর্ণক = -2 বা, $\bar{2}$

১১. বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ কর:

(ক) 6530 (খ) 60.831 (গ) 0.000245 (ঘ) 37500000 (ঙ) 0.00000014

সমাধান:

(ক) $6530 = 6.530 \times 1000 = 6.530 \times 10^3$ (Ans.)

(খ) $60.831 = 6.0831 \times 10 = 6.0831 \times 10^1$ (Ans.)

(গ) $0.000245 = \frac{245}{100000} = \frac{245}{10^6} = 245 \times 10^{-6} = 2.45 \times 10^2 \times 10^6 = 2.45 \times 10^{-4}$ (Ans.)

(ঘ) $37500000 = 3.7500000 \times 10000000 = 3.75 \times 10^7$ (Ans.)

(ঙ) $0.00000014 = \frac{14}{100000000} = \frac{14}{10^8} = 14 \times 10^{-8} = 1.4 \times 10^1 \times 10^{-8} = 14 \times 10^{-7}$ (Ans.)

১২. সাধারণ দশমিক রূপে প্রকাশ কর:

(ক) 10^5 (খ) 10^{-5} (গ) 2.53×10^4 (ঘ) 9.813×10^{-3} (ঙ) 3.12×10^{-5}

সমাধান:

(ক) $10^5 = 1 \times 100000 = 100000$ (Ans.)

(খ) $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0.00001$ (Ans.)

(গ) $2.53 \times 10^4 = 2.53 \times 10000 = 25300$ (Ans.)

(ঘ) $9.813 \times 10^{-3} = \frac{9.813}{10^3} = \frac{9.813}{1000} = 0.009813$ (Ans.)

(ঙ) $3.12 \times 10^{-5} = \frac{3.12}{10^5} = \frac{3.12}{100000} = 0.0000312$ (Ans.)

১৩. নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক বের কর (ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে):

(ক) 4820 (খ) 72.245 (গ) 1.734 (ঘ) 0.045 (ঙ) 0.000036

সমাধান: লগের পূর্ণ নির্ণয়:

	N	N এর $a \times 10^n$ আকার	সূচক	দশমিকের বামের অংশের অঙ্ক সংখ্যা বা, ডানের অংশের শুরুতে শূন্য সংখ্যা	পূর্ণক
(ক)	4820	4.820×10^3	3	4	$4 - 1 = 3$
(খ)	72.245	7.2245×10^1	1	2	$2 - 1 = 1$
(গ)	1.734	1.734×10^0	0	1	$1 - 1 = 0$
(ঘ)	0.045	4.5×10^{-2}	−2	1	$-(1+1) = -2 = \bar{2}$
(ঙ)	0.000036	3.6×10^{-5}	−5	4	$-(4+1) = -5 = \bar{5}$

১৪. ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর:

(ক) 27 (খ) 63.147 (গ) 1.405 (ঘ) 0.0456 (ঙ) 0.000673

সমাধান:

(ক) $\log 27 = 1.43136$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$\therefore \log 27$ এর পূর্ণক 1 এবং অংশক 0.43136 (Ans.)

(খ) $\log 63.147 = 1.80035$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$\therefore \log 63.147$ এর পূর্ণক 1 এবং অংশক 0.80035 (Ans.)

(গ) $\log 1.405 = 0.14767$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$\therefore \log 1.405$ এর পূর্ণক = 0 এবং অংশক 0.14767 (Ans.)

(ঘ) $0.0456 = 4.56 \times 10^{-2}$

$\therefore \log (0.0456) = \log(4.56 \times 10^{-2}) = \log 4.56 - 2$

সংখ্যাটি লগের পূর্ণক = -2 বা $\bar{2}$

সংখ্যাটির লগের অংশক $\log 4.56 = 0.65896$

$\therefore$ 0.0456 এর লগের পূর্ণক = -2 বা $\bar{2}$

এবং অংশক 0.65896 (Ans.)

(ঙ) $0.000673 = 6.73 \times 10^{-4}$

$\therefore \log (0.000673) = \log(6.73 \text{ x } 10^{-4}) = \log 6.73 - 4$

সংখ্যাটির লগের পূর্ণক = -4 বা $\bar{4}$

সংখ্যাটির লগের অংশক log 6.73 = 0.82802

∴ 0.000673 এর লগের পূর্ণক – 4 বা $\bar{4}$

এবং অংশক 0.82802 (Ans.)

১৫. গুণফলের/ভাগফলের সাধারণ লগ (আসন্ন পাঁচ দশমিক খান পর্যন্ত) নির্ণয় কর:

(ক) 5.34 × 8.7

সমাধান: log (5.34 × 8.7)

= log 5.34 + log 8.7

= 0.72754 + 0.93952 [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

= 1.66706 (Ans.)

(খ) 0.79 × 0.56

সমাধান: log (0.79 × 0.56)

= log 0.79 + log 0.56

= – 0.1023729 + (– 0.2518119)

= – 0.35418 (Ans.)

(গ) 22.2642 ÷ 3.42

সমাধান: log (22.2642 ÷ 3.42)

= log 22.2642 – log 3.42

= 1.34761 – 0.53403 [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

= 0.81358 (Ans.)

(ঘ) 0.19926 ÷ 32.4

সমাধান: log (0.19926 ÷ 32.4)

= log 0.19926 – log 32.4

= – 0.70057 – 1.51054

= –2.21111 (Ans.)

১৬. যদি log2 = 0.30103, log3 = 0.47712 এবং log7 = 0.84510 হয়, তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় কর:

(ক) log 9 (খ) log 28 (গ) log 42

সমাধান:

(ক) $\log 9 = \log 3^2 = 2\log 3 = 2 \times 0.47712 = 0.95424$ (Ans.)

সূচক ও লগারিদম

(খ) $\log 28 = \log (4 \times 7) = \log4 + \log7 = \log 2^2 + \log7$

$= 2\log2 + \log7 = 2 \times 0.30103 + 0.84510$

$= 0.60206 + 0.84510 = 1.44716$ (Ans.)

(গ) $\log 42 = \log (2 \times 3 \times 7) = \log2 + \log3 + \log 7$

$= 0.30103 + 0.47712 + 0.84510 = 1.62325$ (Ans.)

১৭. দেওয়া আছে, $x = 1000$ এবং $y = 0.0625$

ক. x কে $a^n b^n$ আকারে প্রকাশ কর, যেখানে a ও b মৌলিক সংখ্যা।

খ. x ও y এর গুণফলকে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ কর।

গ. xy এর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে, $x = 1000$ এবং $y = 0.0625$

$x = 1000 = 8 \times 125 = 2^3 \times 5^3 = 2^3 . 5^3$ (Ans.)

খ. $xy = 1000 \times 0.0625 = 62.5 = 6.25 \times 10 = 6.25 \times 10^1$ (Ans.)

গ. 'খ' হতে পাই, $xy = 62.5$

এখানে, $62.5 = 6.25 \times 10^1$

$\therefore$ xy এর সাধারণ লগের পূর্ণক 1 এবং অংশক $= \log 6.25 = 0.79588$ (Ans.)

অধ্যায় ৫ ৫.১

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ
Equations in One Variable

সমাধান কর: (১-৮)

1. $\frac{ay}{b}-\frac{by}{a}=a^2-b^2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{ay}{b}-\frac{by}{a}=a^2-b^2$

বা, $\frac{a^2y-b^2y}{ab}=a^2-b^2$

বা, $\frac{y(a^2-b^2)}{ab}=a^2-b^2$

বা, $y(a^2-b^2)=ab(a^2-b^2)$

বা, $y=ab$ [উভয়পক্ষকে (a^2-b^2) দ্বারা ভাগ করে যেখানে $(a^2-b^2)\neq 0$]

$\therefore y=ab$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $y=ab$

2. $(z+1)(z-2)=(z-4)(z+2)$

সমাধান: দেওয়া আছে, $(z+1)(z-2)=(z-4)(z+2)$

বা, $z^2-2z+z-2=z^2+2z-4z-8$

বা, $z^2-z-2=z^2-2z-8$

বা, $z^2-z-z^2+2z=-8+2$ [পক্ষান্তর করে]

$\therefore z=-6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $z=-6$

3. $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{25}{5x+4}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{25}{5x+4}$

বা, $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{10+15}{5x+4}$

বা, $\frac{4}{2x+1}+\frac{9}{3x+2}=\frac{10}{5x+4}+\frac{15}{5x+4}$

বা, $\frac{4}{2x+1}-\frac{10}{5x+4}=\frac{15}{5x+4}-\frac{9}{3x+2}$

বা, $\frac{4(5x+4)-10(2x+1)}{(2x+1)(5x+4)}=\frac{15(3x+2)-9(5x+4)}{(5x+4)(3x+2)}$

বা, $\frac{20x+16-20x-10}{(2x+1)(5x+4)}=\frac{45x+30-45x-36}{(5x+4)(3x+2)}$

বা, $\frac{6}{(2x+1)(5x+4)}=\frac{-6}{(5x+4)(3x+2)}$

বা, $\frac{1}{(2x+1)(5x+4)}=\frac{-1}{(5x+4)(3x+2)}$ [উভয়পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{1}{(2x+1)}=\frac{-1}{(3x+2)}$ [উভয়পক্ষকে$(5x+4)$ দ্বারা গুণ করে যেখানে $(5x+4)\neq 0$]

বা, $3x+2=-2x-1$

বা, $3x+2x=-1-2$

বা, $5x=-3$

$$\therefore x=\frac{-3}{5}$$

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান:** $x=-\frac{3}{5}$

4. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

বা, $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$ [পক্ষান্তরকরে]

চলক (Variable):
আমরা জানি, $x+3=5$ একটি সমীকরণ। এটি সমাধান করতে হলে আমরা অজ্ঞাত রাশি x এর মান বের করি। এখানে অজ্ঞাত রাশি x একটি চলক। আবার, $x+a=5$ সমীকরণটি সমাধান করতে হলে, আমরা x এর মান নির্ণয় করি, a এর মান নয়। এখানে x কে চলক ও a কে ধ্রুবক হিসাবে ধরা হয়। এক্ষেত্রে x এর মান a এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। তবে a এর মান নির্ণয় করতে হলে, আমরা লিখবো $a=5-x$; অর্থাৎ a এর মান x এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। এখানে a চলক ও x ধ্রুবক হিসাবে বিবেচিত।

এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ: যে সমীকরণে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়। যেমন, $x+3=5$, $x^2-5x+b=0$, $2y^2+5y-3=0$ ইত্যাদি।

বা, $\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}$

বা, $\frac{x+2-x-1}{x^2+x+2x+2} = \frac{x+4-x-3}{x^2+3x+4x+12}$

বা, $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x^2+7x+12}$

বা, $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 2$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 + 7x - x^2 - 3x = 2 - 12$ [পক্ষান্তরকরে]

বা, $4x = -10$

বা, $x = -\frac{10}{4}$

বা, $x = -\frac{5}{2}$

∴ **নির্ণেয় সমাধান:** $x = -\frac{5}{2}$

5. $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a}{x-a-b} + \frac{b}{x-a-b}$

বা, $\frac{a}{x-a} - \frac{a}{x-a-b} = \frac{b}{x-a-b} - \frac{b}{x-b}$ [পক্ষান্তরকরে]

বা, $\frac{a(x-a-b)-a(x-a)}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{b(x-b)-b(x-a-b)}{(x-b)(x-a-b)}$

বা, $\frac{ax-a^2-ab-ax+a^2}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{bx-b^2-bx+ab+b^2}{(x-b)(x-a-b)}$

বা, $\frac{-ab}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{ab}{(x-b)(x-a-b)}$

বা, $\frac{-1}{(x-a)(x-a-b)} = \frac{1}{(x-b)(x-a-b)}$ [উভয়পক্ষকে ab দ্বারাভাগকরে]

বা, $\frac{-1}{x-a} = \frac{1}{x-b}$ [$(x-a-b)$দ্বারা গুণ করে যেখানে$(x-a-b) \neq 0$]

বা, $x - a = -x + b$ [আড়গুণন করে]

বা, $x + x = a + b$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x = a + b$

∴ $x = \frac{a+b}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{a+b}{2}$

6. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0$

বা, $\left(\frac{x-a}{b} - 1\right) + \left(\frac{x-b}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-3a-3b}{a+b} + 2\right) = 0$

বা, $\frac{x-a-b}{b} + \frac{x-b-a}{a} + \frac{x-3a-3b+2a+2b}{a+b} = 0$

বা, $\frac{x-a-b}{b} + \frac{x-b-a}{a} + \frac{x-a-b}{a+b} = 0$

বা, $(x-a-b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right) = 0$

বা, $(x-a-b) = 0$ [x বর্জিত রাশি বলে $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right) \neq 0$]

∴ $x = a + b$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = a + b$

7. $\frac{x-a}{a^2-b^2}=\frac{x-b}{b^2-a^2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{x-a}{a^2-b^2}=\frac{x-b}{b^2-a^2}$

বা, $\frac{x-a}{a^2-b^2}=\frac{x-b}{-(a^2-b^2)}$

বা, $x-a=-(x-b)$ [উভয়পক্ষকে (a^2-b^2) দ্বারা গুণ করে]

বা, $x-a+x-b=0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x=a+b$ [পক্ষান্তর করে]

$$\therefore x=\frac{a+b}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=\frac{a+b}{2}$

8. $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $(3+\sqrt{3})z+2=5+3\sqrt{3}$

বা, $(3+\sqrt{3})z=5+3\sqrt{3}-2$

বা, $(3+\sqrt{3})z=\ 3\sqrt{3}+3$

বা, $z=\frac{3\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}}$

বা, $z=\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})}$

$$\therefore z=\sqrt{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $z=\sqrt{3}$

সমাধান সেট নির্ণয় কর: (9 -14)

9. $2x+\sqrt{2}=3x-4-3\sqrt{2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x+\sqrt{2}=3x-4-3\sqrt{2}$

বা, $2x-3x=-4-3\sqrt{2}-\sqrt{2}$

বা, $-x=-4-4\sqrt{2}$

বা, $-x=-4(1+\sqrt{2})$

বা, $x=4(1+\sqrt{2})$[উভয়পক্ষকে(-1) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S=\{4(1+\sqrt{2})\}$

10. $\frac{z-2}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{z-2}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

বা, $\frac{z-1-1}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

বা, $\frac{z-1}{z-1}-\frac{1}{z-1}=2-\frac{1}{z-1}$

বা, $1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}=2$

বা, $1=2$

কিন্তু এটি সম্ভব নয়।

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের কোনো সমাধান নেই।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S=\emptyset$

11. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{x+1+x}{x(x+1)}=\frac{2}{x-1}$

বা, $\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{2}{x-1}$

বা, $(2x+1)(x-1)=2(x^2+x)$ [আড়গুণন করে]

বা, $2x^2+x-2x-1=2x^2+2x$

বা, $2x^2+x-2x-2x^2-2x=1$

বা, $-3x=1$

$\therefore x = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

12. $\frac{m}{m-x} + \frac{n}{n-x} = \frac{m+n}{m+n-x}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{m}{m-x} + \frac{n}{n-x} = \frac{m+n}{m+n-x}$

বা, $\frac{m}{m-x} + \frac{n}{n-x} = \frac{m}{m+n-x} + \frac{n}{m+n-x}$

বা, $\frac{m}{m-x} - \frac{m}{m+n-x} = \frac{n}{m+n-x} - \frac{n}{n-x}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $m\left\{\frac{1}{m-x} - \frac{1}{m+n-x}\right\} = n\left\{\frac{1}{m+n-x} - \frac{1}{n-x}\right\}$

বা, $m\left\{\frac{(m+n-x)-(m-x)}{(m-x)(m+n-x)}\right\} = n\left\{\frac{(n-x)-(m+n-x)}{(m+n-x)(n-x)}\right\}$

বা, $m\left\{\frac{m+n-x-m+x}{(m-x)(m+n-x)}\right\} = n\left\{\frac{n-x-m-n+x}{(n-x)(m+n-x)}\right\}$

বা, $\frac{mn}{(m-x)(m+n-x)} = \frac{-mn}{(n-x)(m+n-x)}$

বা, $\frac{1}{(m-x)(m+n-x)} = \frac{-1}{(m-x)(m+n-x)}$ [উভয়পক্ষকে mn দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{1}{m-x} = \frac{-1}{n-x}$ [উভয়পক্ষকে$(m+n-x)$ দ্বারা গুণ করে যেখানে $(m+n-x) \neq 0$]

বা, $-m + x = n - x$ [আড়গুণন করে]

বা, $x + x = m + n$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2x = m + n$

$$\therefore x = \frac{m+n}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{\frac{m+n}{2}\right\}$

13. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3}$

বা, $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}$

বা, $\frac{x+3-x-2}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+5-x-4}{(x+4)(x+5)}$

বা, $\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+4)(x+5)}$

বা, $(x+4)(x+5) = (x+2)(x+3)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 + 9x + 20 = x^2 + 5x + 6$

বা, $x^2 + 9x - x^2 - 5x = 6 - 20$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $4x = -14$

বা, $x = -\frac{14}{4}$

$$\therefore x = -\frac{7}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

14. $\frac{2t-6}{9} + \frac{15-2t}{12-5t} = \frac{4t-15}{18}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{2t-6}{9} + \frac{15-2t}{12-5t} = \frac{4t-15}{18}$

বা, $\frac{2t-6}{9} - \frac{4t-15}{18} = -\frac{15-2t}{12-5t}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{4t-12-4t+15}{18} = \frac{2t-15}{12-5t}$

বা, $\frac{3}{18} = \frac{2t-15}{12-5t}$

বা, $\frac{1}{6} = \frac{2t-15}{12-5t}$
বা, $12t - 90 = 12 - 5t$ [আড়গুণন করে]
বা, $12t + 5t = 12 + 90$ [পক্ষান্তর করে]
বা, $17t = 102$
বা, $t = \frac{102}{17}$

$\therefore t = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{6\}$

14(ii). $\frac{x+2b^2+c^2}{a+b} + \frac{x+2c^2+a^2}{b+c} + \frac{x+2a^2+b^2}{c+a} = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{x+2b^2+c^2}{a+b} + \frac{x+2c^2+a^2}{b+c} + \frac{x+2a^2+b^2}{c+a} = 0$

বা, $\frac{x+a^2+2c^2}{b+c} + \frac{x+b^2+2a^2}{c+a} + \frac{x+c^2+2b^2}{a+b} + (b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$

[$\because (b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$, $\therefore$ বামপক্ষে উক্ত রাশিটি যোগ করলে সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকবে।]

বা, $\frac{x+a^2+2c^2}{b+c} + (b-c) + \frac{x+b^2+2a^2}{c+a} + (c-a) + \frac{x+c^2+2b^2}{a+b} + (a-b) = 0$

বা, $\frac{x+a^2+2c^2+(b-c)(b+c)}{b+c} + \frac{x+b^2+2a^2+(c-a)(c+a)}{c+a} + \frac{x+c^2+2b^2+(a-b)(a+b)}{a+b} = 0$

বা, $\frac{x+a^2+2c^2+b^2-c^2}{b+c} + \frac{x+b^2+2a^2+c^2-a^2}{c+a} + \frac{x+c^2+2b^2+a^2-b^2}{a+b} = 0$

বা, $\frac{x+a^2+b^2+c^2}{b+c} + \frac{x+a^2+b^2+c^2}{c+a} + \frac{x+a^2+b^2+c^2}{a+b} = 0$

বা, $(x + a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) = 0$

বা, $(x + a^2 + b^2 + c^2) = 0$ [x বর্জিত রাশি বলে $\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \neq 0$]

$\therefore x = -(a^2 + b^2 + c^2)$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $S = \{-(a^2 + b^2 + c^2)\}$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (16-23):

15. একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার $\frac{2}{5}$ গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 98 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, একটি সংখ্যা $= x$
$\therefore$ অপর সংখ্যাটি $= x$ এর $\frac{2}{5} = \frac{2x}{5}$
প্রশ্নমতে, $x + \frac{2x}{5} = 98$
বা, $\frac{5x+2x}{5} = 98$
বা, $\frac{7x}{5} = 98$
বা, $7x = 98 \times 5$ [আড়গুণন করে]
বা, $7x = 490$
বা, $x = \frac{490}{7}$
$\therefore x = 7$
$\therefore$ একটি সংখ্যা70
এবং অপর সংখ্যাটি $\frac{2\times70}{5} = 28$

উত্তরঃ 70 এবং 28

16. একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 1; লব থেকে 2 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যাবে তা $\frac{1}{6}$ এর সমান। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ভগ্নাংশটির লব $= x$ তাহলে, হর $= x + 1$

∴ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{x+1}$
প্রশ্নমতে,

$$\frac{x-2}{x+1+2} = \frac{1}{6}$$

বা, $\frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}$
বা, $6(x-2) = x+3$ [আড়গুণন করে]
বা, $6x - 12 = x + 3$
বা, $6x - x = 3 + 12$
বা, $5x = 15$
বা, $x = \frac{15}{5}$
∴ $x = 3$
∴ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{x+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

উত্তরঃ $\frac{3}{4}$

17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9, অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম হবে। সংখ্যাটি কত?
সমাধান: মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি = x
তাহলে, দশক স্থানীয় অঙ্কটি $= 9 - x$
∴ সংখ্যাটি $= 10 \times$ দশক স্থানীয় অঙ্ক $+$ একক স্থানীয় অঙ্ক

$$= 10(9-x) + x$$
$$= 90 - 10x + x$$
$$= 90 - 9x$$

অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি $= 10x + (9-x) = 9x + 9$
প্রশ্নমতে, $9x + 9 = 90 - 9x - 45$
বা, $9x + 9x = 45 - 9$ [পক্ষান্তরকরে]
বা, $18x = 36$
বা, $x = \frac{36}{18}$
∴ $x = 2$
∴ সংখ্যাটি $= 90 - 9x$

$$= 90 - 9 \times 2$$
$$= 72$$

উত্তরঃ 72

18. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। দেখাও যে, সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাতগুণ।
সমাধান: মনে, একক স্থানীয় অঙ্ক = x
তাহলে, দশক স্থানীয় অঙ্ক = 2x
∴ সংখ্যাটি $= 10 \times 2x + x = 20x + x = 21x$
অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি $= x + 2x = 3x$
অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ $= 3x \times 7 = 21x$
∴ সংখ্যাটি = অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ। (দেখানো হলো)

১৯. একজন ক্ষুদ্র ব্যবসায়ী 5600 টাকা বিনিয়োগ করে এক বছর পর কিছু টাকার উপর 5% এবং অবশিষ্ট টাকার উপর 4% লাভ করলেন। মোট 256 টাকা লাভ করলে, তিনি কত টাকার উপর 5% লাভ করলেন?

সমাধান: মনে করি,

5% হারে বিনিয়োগ করেন x টাকা

∴ 4% হারে বিনিয়োগ করেন (5600 – x) টাকা

5% হারে x টাকার 1 বছরের মুনাফা $= x \times 1 \times \frac{5}{100}$ টাকা $= \frac{x}{20}$ টাকা

4% হারে (5600 – x) টাকার 1 বছরের মুনাফা

$= (5600 - x) \times 1 \times \frac{4}{100}$ টাকা

$= \frac{5600-x}{25}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{x}{20} + \frac{5600-x}{25} = 256$

বা, $\frac{5x + 22400 - 4x}{100} = 256$

বা, $\frac{x + 22400}{100} = 256$

বা, $x + 22400 = 25600$

বা, $x = 25600 - 22400$

বা, x = 3200

∴ 5% হারে বিনিয়োগ করেন 3200 টাকা। Ans.

২০. একটি বালিকা বিদ্যালয়ের একটি শ্রেণিকক্ষে প্রতিবেঞ্চে 6 জন করে ছাত্রী বসালে 2টি বেঞ্চ খালি থাকে। কিন্তু প্রতি বেঞ্চি 5 জন করে ছাত্রী বসালে 6 জন ছাত্রীকে দাড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা কয়টি?

সমাধান: মনে করি,

শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা x

প্রতি বেঞ্চে 6 জন করে বসলে 2টি বেঞ্চ খালি থাকে।

∴ শ্রেণির ছাত্রীসংখ্যা = 6(x – 2)

আবার, প্রতি বেঞ্চে 5 জন করে বসলে 6 ছাত্রীর পঁড়িয়ে থাকতে হয়।

∴ শ্রেণির ছাত্রীসংখ্যা = 5x +6

প্রশ্নমতে,

6(x – 2) = 5x +6

বা, 6x – 12 = 5x + ৫

বা, 6x – 5x = 6 + 12

বা, x = 18

∴ শ্রেণির বেঞ্চের সংখ্যা 18

২১. একটি লঞ্চে যাত্রীসংখ্যা 47; মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়ার দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু 30 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 1680 টাকা হলে, কেবিনের যাত্রীসংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করি, কেবিনের যাত্রীসংখ্যা = x

∴ ডেকের যাত্রীসংখ্যা = 47– x

ডেকের মাথাপিছু ভাড়া 30 টাকা

∴ কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া = (30×2) টাকা = 60 টাকা

∴ কেবিন থেকে প্রাপ্ত মোট ভাড়া = 60x টাকা

এবং ডেক থেকে প্রাপ্ত মোট ভাড়া = 30 (47 – x) টাকা

প্রশ্নমতে, 60x + 30(47 – x) = 1680

বা, 60x +1410 – 30x = 1680

বা, 30x = 1680–1410

বা, $30x = 270$

বা, $x = \frac{270}{30}$

বা, $x = 30$

বা, $x = 9$

$\therefore$ কেবিনের যাত্রীসংখ্যা $= 9$ Ans.

২২. মোট 120টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হলে, কোন প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা কয়টি?

সমাধান: মনে করি, পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা x

$\therefore$ পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $(120 - x)$

x টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা $= \frac{x}{4}$ টাকা

আবার, $(120 - x)$ টি পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা $= \frac{120 - x}{2}$ টাকা

শর্তমতে, $\frac{x}{4} + \frac{120 - x}{2} = 35$

বা, $\frac{x + 240 - 2x}{4} = 35$

বা, $\frac{240 - x}{4} = 35$

বা, $240 - x = 140$

বা, $-x = 140 - 240$

বা, $-x = -100$

$\therefore x = 100$

$\therefore$ পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 100

এবং পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $(120 - 100) = 20$

Ans: পঁচিশ পয়সার মুদ্রা 100 টি এবং পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা 20টি।

২৩. একটি গাড়ি ঘন্টায় 60 কি.মি. বেগে কিছু পথ এবং ঘন্টায় 40 কি.মি. বেগে অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করলো। গাড়িটি মোট 5 ঘন্টায় 240 কি.মি. পথ অতিক্রম করলে, ঘণ্টায় 60 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছে?

সমাধান: মনে করি,

60 কি.মি. বেগে গমন করে x ঘণ্টা

$\therefore$ 40 কি.মি. বেগে গমন করে $(5 - x)$ ঘন্টা

60 কি.মি. বেগে x ঘণ্টায় অতিক্রম করে $60x$ কি.মি.

40 কি.মি. বেগে $(5 - x)$ ঘণ্টায় অতিক্রম করে $40(5 - x)$ কি.মি.

প্রশ্নমতে, $60x + 40(5 - x) = 240$

বা, $60x + 200 - 40x = 240$

বা, $20x = 240 - 200$

বা, $20x = 40$

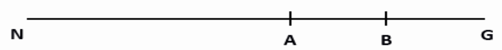
বা, $x = \frac{40}{20}$

$\therefore x = 2$

$\therefore$ 60 কি.মি. বেগে অতিক্রম করে (60×2) কি.মি. $= 120$ কি.মি. (Ans)

২৪. ঢাকার নিউমার্কেট থেকে গাবতলির দূরত্ব 12 কি.মি.। সজল নিউমার্কেট থেকে রিক্সায় ঘন্টায় 6 কি.মি. বেগে এবং কাজল একই স্থান থেকে পায়ে হেঁটে ঘণ্টায় 4 কি.মি. বেগে গাবতলির দিকে রওয়ানা হলো। সজল গাবতলি পৌছে সেখানে 30 মিনিট বিশ্রাম নিয়ে আবার নিউমার্কেটের দিকে একই বেগে রওয়ানা হলো। তারা নিউমার্কেট থেকে কত দূরে মিলিত হবে?

সমাধান:



মনে করি, N ও G যথাক্রমে নিউমার্কেট ও গাবতলির অবস্থান।

তাহলে নিউমার্কেট থেকে গাবতলির দূরত্ব, NG = 12 কি.মি.

দেওয়া আছে, সজলের গতিবেগ ঘণ্টায় 6 কি.মি. এবং কাজলের গতিবেগ ঘণ্টায় 4 কি.মি.

আমরা জানি, দুরত্ব = বেগ × সময়

নিউমার্কেট থেকে গাবতলি যেতে সজলের প্রয়োজনীয় সময় $= \frac{\text{দুরত্ব}}{\text{বেগ}}$

$= \frac{12}{6}$ ঘন্টা

= 2 ঘন্টা

সজল গাবতলিতে বিশ্রাম নেয় 30 মিনিট।

এখন, 2 ঘন্টা 30 মিনিট $= (2+\frac{30}{60})$ ঘন্টা $= (2+\frac{1}{2})$ ঘন্টা

তাহলে, 2 ঘন্টা 30 মিনিটে কাজলের অতিকান্ত দুরত্ব = বেগ × সময় $= 4 \times 2\frac{1}{2}$ কি.মি.

$= 4 \times \frac{5}{2}$ কি.মি. = 10 কি.মি.

ধরি, 2 ঘন্টা 30 মিনিটে কাজল চিত্রের A বিন্দুতে পৌছে।

তাহলে, NA = 10 কি.মি.

∴ বাকি পথ, AG = NG – NA = (12–10) কি.মি. = 2 কি.মি.

আবার ধরি, কাজল, A বিন্দু থেকে x কি.মি. দুরত্বে B বিন্দুতে সজলের সাথে মিলিত হয়।

তাহলে, AB = x কি.মি.

∴ GB = (2–x) কি.মি.

x কি.মি. অতিক্রম করতে কাজলের সময় লাগে $\frac{x}{4}$ ঘণ্টা

এবং (2 – x) কি.মি. অতিক্রম করতে সজলের সময় লাগে $\frac{2-x}{6}$ ঘণ্টা

প্রশ্নমতে,

$$\frac{x}{4} = \frac{2-x}{6}$$

বা, 6x = 8 – 4x

বা, 6x + 4x = 8

বা, 10x = 8

বা, $x = \frac{8}{10}$

বা, $x = \frac{4}{5}$

∴ নিউমার্কেট থেকে গাবতলির দিকে $(10+\frac{4}{5})$ কি.মি.

$= \frac{50+4}{5}$ কি.মি. $= \frac{54}{5}$ কি.মি. $= 10\frac{4}{5}$ কি.মি. দূরত্বে মিলিত হবে।

উত্তর: $10\frac{4}{5}$ কি.মি.।

২৫. একটি স্টিমারের যাত্রী সংখ্যা 376 জন। ডেকের যাত্রীর সংখ্যা কেবিনের যাত্রীর সংখ্যার তিনগুণ। ডেকের যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া 60 টাকা এবং মোট ভাড়া প্রাপ্তি 33840 টাকা।

(ক) ডেকের যাত্রী সংখ্যা x ধরে সমীকরণ তৈরি কর।

(খ) ডেকে যাত্রী ও কেবিনে যাত্রীর সংখ্যা কত?

(গ) কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া কত?

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে,

ডেকের যাত্রী সংখ্যা x

যেহেতু ডেকের যাত্রী সংখ্যা কেবিনের যাত্রীর সংখ্যার তিনগুণ

∴ কেবিনের যাত্রী সংখ্যা ডেকের যাত্রী সংখ্যার এক তৃতীয়াংশ।

∴ কেবিনের যাত্রী সংখ্যা $\frac{x}{3}$

প্রশ্নানুসারে, $x + \frac{x}{3} = 376$

খ) 'ক' হতে পাই,

$\frac{3x+x}{3} = 376$

বা, $4x = 1128$

বা, $x = \frac{1128}{4}$

বা, $x = 282$

∴ ডেকের যাত্রী সংখ্যা 282

∴ কেবিনের যাত্রী সংখ্যা $\frac{282}{3} = 94$

Ans. ডেকের যাত্রী 282 জন এবং কেবিনের যাত্রী 94 জন।

গ) দেওয়া আছে,

ডেকের যাত্রীর মাথাপিছু ভাড়া 60 টাকা

'খ' হতে পাই,

ডেকের যাত্রী সংখ্যা 282

এবং কেবিনের যাত্রী সংখ্যা 94

∴ ডেকের মোট ভাড়া (60×282) টাকা $= 16,920$ টাকা

মোট ভাড়া প্রাপ্তি 33840 টাকা

∴ কেবিনের মোট ভাড়া $= (33840 - 16920)$ টাকা $= 16920$ টাকা

∴ কেবিনের মাথাপিছু ভাড়া $(16920 \div 94)$ টাকা $= 180$ টাকা

Ans: 180 টাকা।

অধ্যায় ৫ ৫.২ এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ Equations in One Variable

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

1. x কে চলক ধরে $a^2x + b = 0$ সমীকরণটির ঘাত নিচের কোনটি?

ক. 3 খ. 2 গ. 1 ঘ. 0

ব্যাখ্যাঃ $a^2x + b = 0$ সমীকরণের চলক x এর সর্বোচ্চ ঘাত 1। সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটির ঘাত 1।

2. নিচের কোনটি অভেদ?

ক. $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 4x$
খ. $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$
গ. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2ab$
ঘ. $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. $(x-4)^2 = 0$ সমীকরণের মূল কয়টি?

ক. 1টি খ. 2টি গ. 3টি ঘ. 4টি

ব্যাখ্যাঃ প্রদত্ত সমীকরণ $(x-4)^2 = 0$
বা, $(x-4)(x-4) = 0$
$\therefore x = 4, 4$
সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের মূল 2 (দুই) টি।
তাছাড়া, n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণের মূল সংখ্যা n।

4. $x^2 - x - 12 = 0$, সমীকরণের মূলদ্বয় নিচের কোনটি?

ক. 3, 4 খ. 3, −4 গ. −3, 4 ঘ. −3, −4

ব্যাখ্যাঃ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - x - 12 = 0$
বা, $x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$
বা, $x(x-4) + 3(x-4) = 0$
বা, $(x-4)(x+3) = 0$
$\therefore x = -3, 4$

5. $3x^2 - x + 5 = 0$ সমীকরণে x এর সহগ কত?

ক. 3 খ. 2 গ. 1 ঘ. −1

ব্যাখ্যাঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $3x^2 - x + 5 = 0$
$\therefore 3x^2 + (-1)x + 5 = 0$
এখানে, x এর সহগ −1।

6. দুইটি বীজগাণিতিক রাশি x ও y এর গুণফল xy = 0 হলে

i. $x = 0$ অথবা $y = 0$
ii. $x = 0$ এবং $y \neq 0$
iii. $x \neq 0$ এবং $y = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

ব্যাখ্যাঃ দুইটি বীজগাণিতীয় রাশির গুণফল শুন্য হলে, তবে রাশিদ্বয়ের যে কোনটি অথবা উভয়টি শুন্য হবে।

7. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ সমীকরণের সমাধান সেট নিচের কোনটি?

ক. $\{a, b\}$ খ. $\{a, -b\}$ গ. $\{-a, b\}$ ঘ. $\{-a, -b\}$

ব্যাখ্যাঃ প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 - (a+b)x + ab = 0$
বা, $x^2 - ax - bx + ab = 0$
বা, $x(x-a) - b(x-a) = 0$
বা, $(x-a)(x-b) = 0$

MCQ Answers:
১। গ
২। খ
৩। খ
৪। গ
৫। ঘ
৬। ঘ
৭। ক
৮। ঘ
৯। গ
১০। ক

এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations in One Variable):
$ax^2 + bx + c = 0$ [যেখানে, a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$] আকারের সমীকরণকে এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ একটি দ্বিমাত্রিক বহুপদী। সমীকরণের ডানপক্ষ শূন্য ধরা হয়।

$\therefore x = a, b$
$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান সেট, $S = \{a, b\}$

দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্ক একক স্থানীয় অঙ্কের দিগুণ। এই তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

8. একক স্থানীয় অঙ্ক x হলে, সংখ্যাটি কত?

ক. $2x$ খ. $3x$ গ. $12x$ ঘ. $21x$

ব্যাখ্যাঃ দেয়া আছে, একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্কটি 2x
সুতরাং, সংখ্যাটি $10.2x + x = 20x + x = 21x$

9. অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি কত হবে?

ক. $3x$ খ.$4x$ গ.$12x$ ঘ.$21x$

ব্যাখ্যাঃ অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি $= 10.x + 2x = 10x + 2x = 12x$

10. $x = 2$ হলে, মূল সংখ্যার সাথে স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যার পার্থক্য কত?

ক. 18 খ. 20 গ. 34 ঘ. 36

ব্যাখ্যাঃ সংখ্যা দুইটির পার্থক্য $= 21x - 12x = 9x = 9 \times 2 = 18$

সমাধান কর (11-17):

11. $(y+5)(y-5) = 24$

সমাধান: দেয়া আছে, $(y+5)(y-5) = 24$
বা, $(y)^2 - (5)^2 = 24$
বা, $y^2 - 25 = 24$
বা, $y^2 = 24 + 25$
বা, $y^2 = 49$
বা, $\sqrt{y^2} = \sqrt{49}$ [বর্গমূল করে]
$\therefore y = \pm 7$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $y = 7$ অথবা -7

12. $(\sqrt{2}x + 3)(\sqrt{3}x - 2) = 0$

সমাধান: দেয়া আছে, $(\sqrt{2}x + 3)(\sqrt{3}x - 2) = 0$
$\therefore \sqrt{2}x + 3 = 0$ অথবা, $\sqrt{3}x - 2 = 0$
বা, $\sqrt{2}x = -3$ বা, $\sqrt{3}x = 2$
বা, $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ বা, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$
বা, $x = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ বা, $x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}$
$\therefore x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\therefore x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ অথবা $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

13. $2(z^2 - 9) + 9z = 0$

সমাধান: দেয়া আছে, $2(z^2 - 9) + 9z = 0$
বা, $2z^2 - 18 + 9z = 0$
বা, $2z^2 + 9z - 18 = 0$
বা, $2z^2 + 12z - 3z - 18 = 0$
বা, $2z(z+6) - 3(z+6) = 0$
$\therefore (z+6)(2z-3) = 0$

হয়, $z + 6 = 0$ অথবা, $2z - 3 = 0$
$\therefore z = -6$ $\therefore z = \frac{3}{2}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $z = -6$ অথবা $\frac{3}{2}$

14. $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=2$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=2$

বা, $\frac{3}{2z+1}+\frac{4}{5z-1}=1+1$

বা, $\frac{3}{2z+1}-1=1-\frac{4}{5z-1}$

বা, $\frac{3-2z-1}{2z+1}=\frac{5z-1-4}{5z-1}$

বা, $\frac{2-2z}{2z+1}=\frac{5z-5}{5z-1}$

বা, $5(z-1)(2z+1)+2(z-1)(5z-1)=0$ [আড়গুণন করে]

বা, $(z-1)(10z+5+10z-2)=0$

$\therefore (z-1)(20z+3)=0$

হয়, $z-1=0$ অথবা, $20z+3=0$

$\therefore z=1$ বা, $20z=-3$

$\therefore z=-\frac{3}{20}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $z=1$ অথবা $-\frac{3}{20}$

15. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$

বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=1-\frac{x-2}{x+2}$

বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=\frac{x+2-x+2}{x+2}$

বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=\frac{4}{x+2}$

বা, $\frac{3(x-2)}{x-6}=\frac{2}{x+2}$

বা, $3(x-2)(x+2)=2(x-6)$ [আড়গুণন করে]

বা, $3(x^2-4)=2x-12$

বা, $3x^2-12=2x-12$

বা, $3x^2-12-2x+12=0$

বা, $3x^2-2x=0$

$\therefore x(3x-2)=0$

হয়, $x=0$ অথবা, $3x-2=0 \therefore x=\frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=0$ অথবা $\frac{2}{3}$

16. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$

বা, $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=\frac{b}{x}-\frac{a}{x}$

বা, $\frac{bx-ax}{ab}=\frac{b-a}{x}$

বা, $\frac{x(b-a)}{ab}=\frac{b-a}{x}$

বা, $x^2(b-a)=ab(b-a)$[আড়গুণন করে]

বা, $x^2=ab$

$\therefore x=\pm\sqrt{ab}$ [বর্গমূল করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=-\sqrt{ab}$ অথবা $\sqrt{ab}$

17. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

বা, $\frac{x-a}{x-b}-\frac{b}{a}+\frac{x-b}{x-a}-\frac{a}{b}=0$

বা, $\frac{a(x-a)-b(x-b)}{a(x-b)}+\frac{b(x-b)-a(x-a)}{b(x-a)}=0$

বা, $\frac{ax-a^2-bx+b^2}{a(x-b)}+\frac{bx-b^2-ax+a^2}{b(x-a)}=0$

বা, $\frac{ax-bx-a^2+b^2}{a(x-b)}-\frac{ax-bx-a^2+b^2}{b(x-a)}=0$

বা, $(ax-bx-a^2+b^2)\left\{\frac{1}{a(x-b)}-\frac{1}{b(x-a)}\right\}=0$

বা, $\{x(a-b)-(a+b)(a-b)\}\left\{\frac{1}{a(x-b)}-\frac{1}{b(x-a)}\right\}=0$

হয়, $x(a-b)-(a+b)(a-b)=0$

বা, $x(a-b)=(a+b)(a-b)$

$\therefore x=a+b$

অথবা, $\frac{1}{a(x-b)}-\frac{1}{b(x-a)}=0$

বা, $\frac{1}{a(x-b)}=\frac{1}{b(x-a)}$

বা, $a(x-b)=b(x-a)$

বা, $ax-ab=bx-ab$

বা, $ax-bx=0$

বা, $x(a-b)=0$

$\therefore x=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=0$ অথবা $a+b$

সমাধান সেট নির্ণয় কর (18 - 22):

18. $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+1}=2$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{3}{x}+\frac{4}{x+1}=2$

বা, $\frac{3(x+1)+4x}{x(x+1)}=\frac{2}{1}$

বা, $2x(x+1)=3(x+1)+4x$ [আড়গুণন করে]

বা, $2x^2+2x=3x+3+4x$

বা, $2x^2-5x-3=0$

বা, $2x^2-6x+x-3=0$

বা, $2x(x-3)+1(x-3)=0$

$\therefore (x-3)(2x+1)=0$

হয়, $x-3=0$ অথবা, $2x+1=0$

$\therefore x=3$ $\quad\quad$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S=\left\{3,-\frac{1}{2}\right\}$

19. $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$

সমাধানt দেয়া আছে, $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=5$

বা, $\frac{x+7}{x+1}+\frac{2x+6}{2x+1}=3+2$

বা, $\frac{x+7}{x+1}-3=2-\frac{2x+6}{2x+1}$

বা, $\frac{x+7-3x-3}{x+1}=\frac{4x+2-2x-6}{2x+1}$

বা, $\frac{-2x+4}{x+1}=\frac{2x-4}{2x+1}$

বা, $\frac{-2(x-2)}{x+1} = \frac{2(x-2)}{2x+1}$
বা, $-(2x+1)(x-2) = (x-2)(x+1)$ [আড়গুণন করে]
বা, $(x-2)(x+1) + (2x+1)(x-2) = 0$
বা, $(x-2)(x+1+2x+1) = 0$
$\therefore (3x+2)(x-2) = 0$

হয়, $3x+2=0$ অথবা, $x-2=0$
বা, $3x = -2$ $\therefore x = 2$
$\therefore x = -\frac{2}{3}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$

20. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$
সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$

বা, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b} - \frac{1}{x}$

বা, $\frac{b+a}{ab} = \frac{x-(a+b+x)}{x(a+b+x)}$

বা, $\frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{ax+bx+x^2}$

বা, $\frac{1}{ab} = \frac{-1}{ax+bx+x^2}$
বা, $-ab = ax+bx+x^2$ [আড়গুণন করে]
বা, $x^2+ax+bx+ab = 0$
বা, $x(x+a)+b(x+a) = 0$
$\therefore (x+a)(x+b) = 0$

হয়, $x+a=0$
$\therefore x = -a$

অথবা, $x+b=0$
$\therefore x = -b$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{-a, -b\}$

21. $x+\frac{1}{x} = 2$
সমাধান: দেয়া আছে, $x+\frac{1}{x} = 2$
বা, $\frac{x^2+1}{x} = 2$
বা, $x^2+1 = 2x$ [আড়গুণন করে]
বা, $x^2-2x+1 = 0$
বা, $(x-1)^2 = 0$
বা, $x-1 = 0$
$\therefore x = 1$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{1\}$

22. $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2} = 2$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2} = 2$

বা, $\frac{(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)} = 2$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1} = 2$

বা, $\frac{6x^2+2}{4x} = \frac{2}{1}$
বা, $6x^2+2 = 8x$ [আড়গুণন করে]

বা, $6x^2 - 8x + 2 = 0$
বা, $3x^2 - 4x + 1 = 0$
বা, $3x^2 - 3x - x + 1 = 0$
বা, $3x(x-1) - 1(x-1) = 0$

$\therefore (3x-1)(x-1) = 0$

হয়, $3x - 1 = 0$ অথবা, $x - 1 = 0$
$\therefore x = \frac{1}{3}$ $\therefore x = 1$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর: (23-34)

23. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 15 এবং এদের গুণফল 56; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্ক = x
$\therefore$ দশক স্থানীয় অঙ্ক $= 15 - x$
$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10(15-x) + x$

$= 150 - 10x + x$
$= 150 - 9x$

প্রশ্নমতে, $x(15-x) = 56$
বা, $15x - x^2 - 56 = 0$
বা, $-(x^2 - 15x + 56) = 0$
বা, $x^2 - 15x + 56 = 0$
বা, $x^2 - 7x - 8x + 56 = 0$
বা, $x(x-7) - 8(x-7) = 0$
বা, $(x-7)(x-8) = 0$
হয়, $x - 7 = 0$ অথবা, $x - 8 = 0$
$\therefore x = 7$ $\therefore x = 8$
$\therefore$ x = 7 হলে সংখ্যাটি $= (150 - 9.7) = 150 - 63 = 87$
$\therefore$ x = 8 হলে সংখ্যাটি $= (150 - 9.8) = 150 - 72 = 78$
$\therefore$ সংখ্যাটি 87 অথবা 78।

24. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি. ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 3 সে.মি.। ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

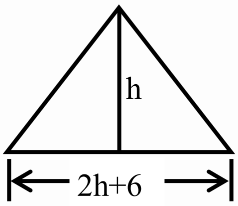
সমাধান: মনে করি,
অতিভুজ ভিন্ন ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = x সে.মি.
$\therefore$ অপর বাহুর দৈর্ঘ্য $= (x+3)$ সে.মি.
পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$x^2 + (x+3)^2 = (15)^2$

বা, $x^2 + x^2 + 6x + 9 = 225$
বা, $2x^2 + 6x + 9 - 225 = 0$
বা, $2x^2 + 6x - 216 = 0$
বা, $x^2 + 3x - 108 = 0$
বা, $x^2 + 12x - 9x - 108 = 0$
বা, $x(x+12) - 9(x+12) = 0$
$\therefore (x+12)(x-9) = 0$
হয়, $x + 12 = 0$ অথবা, $x - 9 = 0$
$\therefore x = -12$ $\therefore x = 9$
যেহেতু বাহুর দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারেনা,
সুতরাং, $x = -12$ গ্রহণযোগ্য নয়।
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য = 9 সে.মি.
এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য $= (9+3)$ সে.মি. $= 12$ সে.মি.

25. একটি ত্রিভুজের ভুমি তার উচ্চতার দিগুণ অপেক্ষা 6 সে.মি. বেশি। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 810 বর্গ সে.মি. হলে, এর উচ্চতা কত?

সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির উচ্চতা = ঐ সে.মি.
প্রশ্নমতে, ভুমি = $(2h + 6)$ সে.মি.



আমরা জানি, $\frac{1}{2} \times$ ভুমি $\times$উচ্চতা = ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
অর্থাৎ, $\frac{1}{2}(2h + 6)h = 810$
বা, $(h + 3)h = 810$
বা, $h^2 + 3h = 810$
বা, $h^2 + 3h - 810 = 0$
বা, $h^2 + 30h - 27h - 810 = 0$
বা, $h(h + 30) - 27(h + 30) = 0$
বা, $(h + 30)(h - 27) = 0$
হয়, $h + 30 = 0$ অথবা, $h - 27 = 0$
$\therefore h = -30$ $\quad\quad$ $\therefore h = 27$
যেহেতু উচ্চতা ঋণাত্মক হতে পারেনা, সুতরাং, উচ্চতা $= -30$ গ্রহণযোগ্য নয়।
$\therefore$ উচ্চতা 27 সে.মি.

26. একটি শ্রেণিতে যত জন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তার সহপাঠীর সংখ্যার সমান টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট 420 টাকা চাঁদা উঠল। ঐ শ্রেণিতে ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত এবং প্রত্যেকে কত টাকা করে চাঁদা দিল?

সমাধান: মনে করি, ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা = x জন
$\therefore$ প্রত্যেক শিক্ষার্থীর সহপাঠীর সংখ্যা = $(x - 1)$ জন
অর্থাৎ প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ = $(x - 1)$ টাকা
প্রশ্নমতে, $x(x - 1) = 420$
বা, $x^2 - x = 420$
বা, $x^2 - x - 420 = 0$
বা, $x^2 - 21x + 20x - 420 = 0$
বা, $x(x - 21) + 20(x - 21) = 0$
বা, $(x - 21)(x + 20) = 0$

হয়, $x - 21 = 0$ $\quad\quad$ অথবা, $x + 20 = 0$
$\therefore x = 21$ $\quad\quad$ $\therefore x = -20$ [গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারেনা]
$\therefore$ ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা 21 জন।
এবং প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ = $(21 - 1)$ টাকা = 20 টাকা। (Ans)

27. একটি শ্রেণিতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে, প্রত্যেকে তত পয়সার চেয়ে আরও 30 পয়সা বেশি করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 70 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?

সমাধান: মনে করি, ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা = x জন।
$\therefore$ প্রত্যেকে চাঁদা দেয়= $(x + 30)$ পয়সা।
$\therefore$ মোট চাঁদা দেয় = $x(x + 30)$ পয়সা।
আবার, মোট চাঁদা দেয় = 70 টাকা।
= (70×100) পয়সা
= 7000 পয়সা

প্রশ্নমতে, $x(x+30)=7000$
বা, $x^2+30x-7000=0$
বা, $x^2+100x-70x-7000=0$
বা, $x(x+100)-70(x+100)=0$
বা, $(x+100)(x-70)=0$

হয়, $x+100=0$ অথবা, $x-70=0$
$\therefore x=-100$ $\therefore x=70$
এখানে ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারেনা।
$\therefore x=-100$ গ্রহণযোগ্য নয়।
$\therefore x=70$
সুতরাং, ঐ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা = 70 জন। (Ans)

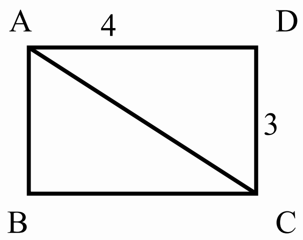
28. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে 9 বেশি।
ক. চলক x এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যাটি স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ।
খ. সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
গ. প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি সেন্টিমিটারে কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে তবে ঐ আয়তক্ষেত্রটিi কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কর্ণটিকে কোনো বর্গের বাহু ধরে বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:
ক. মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক = x
$\therefore$ দশক স্থানীয় অঙ্ক = $(7-x)$
$\therefore$ সংখ্যাটি = $10(7-x)+x$
$=70-10x+x$
$=70-9x$

$\therefore$ অঙ্ক দুইটির স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি = $10x+(7-x)$
$=10x+7-x$
$=9x+7$(Ans)

খ. প্রশ্নমতে, $70-9x=(9x+7)-9$
বা, $-9x-9x=7-9-70$
বা, $-18x=-72$
বা, $x=\frac{-72}{-18}$
$\therefore x=4$
$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি = $70-9.4=70-36=34$ (Ans)

গ. তথ্যমতে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AD=4$ সে.মি.
$\therefore$ প্রস্থ CD= 3 সে.মি.
সুতরাং, নির্ণেয় আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য,



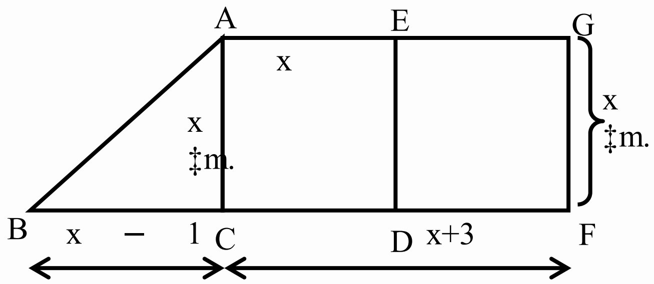
$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}$ সে.মি. [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$=\sqrt{4^2+3^2}$ সে.মি.
$=\sqrt{16+9}$ সে.মি.
$=\sqrt{25}$ সে.মি.
$=5$ সে.মি.

∴ আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.
সুতরাং, বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.
∴ বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2} \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য
$= 5\sqrt{2}$ সে.মি.

আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = 5 সে.মি. এবং বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= 5\sqrt{2}$ সে.মি. (Ans)

29. একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমির উচ্চতা যথাক্রমে $(x-1)$ সে.মি. ও x সে.মি. এবং একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিভুজটির উচ্চতার সমান। আবার, একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $(x+3)$ সে.মি. ও প্রস্থ সে.মি.।
ক. একটি মাত্র চিত্রের মাধ্যমে তথ্যগুলো দেখাও।
খ. ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল10 বর্গ সে.মি. হলে এর উচ্চতা কত?
গ. ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্রও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারাবাহিক অনুপাত বের কর।

সমাধান:
ক.



এখানে ABC হলো সমকোণী ত্রিভুজ যার ভুমি, $BC = (x-1)$ সে.মি.
উচ্চতা, $AC = x$ সে.মি.
ACDE হলো বর্গক্ষেত্র যার বাহুর দৈর্ঘ্য,
$AC = CD = DE = AE = x$ সে.মি.
$ACFG$ হলো আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য $= (x+3)$ সে.মি.
এবং প্রস্থ = x সে.মি. (Ans)

খ. আমরা জানি, $\frac{1}{2} \times$ ভুমি $\times$ উচ্চতা= ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$\therefore \frac{1}{2}(x-1).x = 10$$

বা, $(x-1)x = 20$ [আড়গুণন করে]
বা, $x^2 - x - 20 = 0$ [পক্ষান্তর করে]
বা, $x^2 - 5x + 4x - 20 = 0$
বা, $x(x-5) + 4(x-5) = 0$
বা, $(x-5)(x+4) = 0$

হয়, $x - 5 = 0$ অথবা, $x + 4 = 0$
$\therefore x = 5$ $\therefore x = -4$, যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ, দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারেনা।
∴ উচ্চতা= 5 সে.মি. (Ans)

গ. প্রদত্ত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = 10 বর্গ সে.মি.
প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 5^2$বর্গ সে.মি. [$x = 5$ সে.মি.]
$= 25$ বর্গ সে.মি.
প্রদত্ত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 5(5+3)$ বর্গ সে.মি.
$= 5 \times 8$ বর্গ সে.মি.
$= 40$ বর্গ সে.মি.

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারাবাহিক অনুপাত =
$10:25:40 = 2:5:8$ [অনুপাতের প্রতিটি রাশিকে 5 দ্বারা ভাগ করে] (Ans)

30. একটি জমির ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। জমিটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে এবং প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকবে। আবার জমিটির মাঝখানে 20 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁকা হলো| বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে একটি জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা এর অর্ধেকের চেয়ে 2 সে.মি. কম।
ক. জমিটির দৈর্ঘ্যকে x এবং প্রস্থকে y ধরে তথ্যগুলোকে সমীকরণে প্রকাশ কর।
খ. জমিটির পরিসীমা নির্ণয় কর।
গ. বৃত্তটির জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:
ক. দেয়া আছে, জমিটির দৈর্ঘ্য= x মিটার
জমিটির প্রস্থ= y মিটার
∴ জমির ক্ষেত্রফল= xy বর্গমিটার
$\therefore xy = 192 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$
আবার দৈর্ঘ্য 4মিটার কমালেও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে নতুন ক্ষেত্রফল $(x-4)(y+4)$ বর্গমিটার
$\therefore (x-4)(y+4) = 192 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$ বর্গমিটার

খ. (ii) নং হতে পাই,
$$(x-4)(y+4) = 192$$
বা, $xy + 4x - 4y - 16 = 192$
বা, $192 + 4x - 4y - 16 = 192$ [i নং হতে প্রাপ্ত]
বা, $4x - 4y = 192 - 192 + 16$
বা, $4(x-y) = 16$
বা, $x - y = 4$
$$\therefore x = 4 + y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$$
x এর মান i নং এ বসিয়ে পাই
$$(4+y)y = 192$$
বা, $4y + y^2 - 192 = 0$
বা, $y^2 + 16y - 12y - 192 = 0$
বা, $y(y+16) - 12(y+16) = 0$
বা, $(y+16)(y-12) = 0$

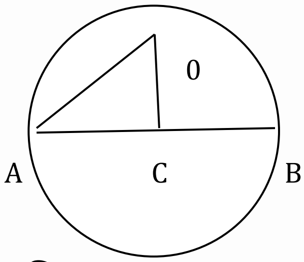
হয়, $y + 16 = 0$ অথবা, $y - 12 = 0$
$\therefore y = -16$ $\therefore y = 12$

এখন, $y = -16$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারেনা।
∴প্রস্থ = 12 মিটার

y এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই,
$x = (4+12)$ মিটার = 16 মিটার
∴ দৈর্ঘ্য = 16 মিটার

∴ জমিটির পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য +প্রস্থ) একক
$= 2(16+12)$ মিটার
= 56 মিটার (Ans)

গ. মনে করি, জ্যাটির দৈর্ঘ্য, AB = x সে.মি.
∴ অর্ধ জ্যা, AC = $\frac{x}{2}$ সে.মি.



$\therefore$ OC = $(\frac{x}{2}$ - 2) সে.মি.

ব্যাসার্ধ, AO = 10 সে.মি. [$\because$ ব্যাস = 20 সে.মি.]
সমকোণী ত্রিভুজ AOC হতে পাই,
$AC^2 + OC^2 = AO^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
বা, $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{2} - 2)^2 = 10^2$
বা, $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2.\frac{x}{2}.2 + 4 = 100$
বা, $2\frac{x^2}{4} - 2x + 4 - 100 = 0$
বা, $\frac{x^2}{2} - 2x - 96 = 0$
বা, $x^2 - 4x - 192 = 0$
বা, $x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$
বা, $x(x-16) + 12(x-16) = 0$
বা, $(x-16)(x+12) = 0$

হয়, $x - 16 = 0$ অথবা, $x + 12 = 0$
$\therefore x = 16$ $\therefore x = -12$, যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ, দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারেনা।
$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য = 16 সে.মি. (Ans)

৩২. নাবিলের বয়স যখন শুভর বর্তমান বয়সের সমান ছিল তখন শুভর যে বয়স ছিল নাবিলের বর্তমান বয়স আর দ্বিগুণ। শুভর বয়স যখন নাবিলের বর্তমান বয়সের সমান হবে তখন তাদের দুইজনের বয়সের যোগফল 63 হলে প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত?

সমাধান:

ধরি, নাবিলের বর্তমান বয়স x বছর,

শুভর বর্তমান বয়স y বছর এবং n বছর পূর্বে নাবিলের বয়স শুভর বর্তমান বয়সের সমান ছিল। তাহলে, y = x – n .... (i)

2(y – n) = x ....(ii)

এবং y + n + x + n = 63 ....(iii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, n = x – y ... .(iv)

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

x – 2y +2n = 0

2n = 2y – x .... (v)

(iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

x + y + 2n = 63

বা, x + y + 2y – x = 63 [(v) থেকে 2n = 2y – x বসিয়ে]

বা, 3y = 63

বা, y = 21

(v) – (iv) × 2 থেকে পাই,

$2n = 2y - x$

$2n = 2x - 2y$

(–) (–) (+)

$0 = -3x + 4y$

বা, $3x - 4y = 0$

বা, $3x - 4 \times 21 = 0$

বা, $3x = 84$

বা, $x = \frac{84}{3}$

$\therefore x = 28$

∴ নাবিলের বর্তমান বয়স 28 বছর এবং শুভর বর্তমান 21 বছর। (Ans)

৩৩. বাসে ওঠার লাইনে সোহাগের পিছনে যতজন দাঁড়িয়ে আছে সামনে তার থেকে দুইজন বেশি দাঁড়িয়ে আছে। তার পিছনে যতজন দাড়িয়ে আছে সম্পূর্ণ লাইনে তার তিনগুণ যাত্রী। লাইনে কতজন যাত্রী দাঁড়িয়ে আছে।

সমাধান: মনে করি, সোহাগের পিছনে x জন যাত্রী দাঁড়িয়ে আছে।

∴ সোহাগের সামনে $(x + 2)$ জন যাত্রী দাঁড়িয়ে আছে।

প্রশ্নানুসারে, $x + x + 2 + 1 = 3x$

বা, $2x + 3 = 3x$

বা, $3 = 3x - 2x$

$\therefore x = 3$

লাইনে মোট যাত্রী আছে (3×3) জন বা 9 জন।

Ans: 9 জন।

৩৪. সবুজ 3:30 টার সময় বাসা থেকে ড্রয়িং ক্লাসে গেল। সে যখন স্কুল থেকে বাসায় ফিরছিল তখনও মিনিটের কাঁটা খাড়া নিচের দিকে ছিল কিন্তু 3:30 টার তুলনায় দুইটি কাঁটার মধ্যে দূরত্ব 15 ডিগ্রি কম ছিল। সবুজ স্কুল থেকে বাসায় কখন ফিরেছিল?

সমাধান: সময় ঘড়ির মিনিটের কাটার অবস্থান হবে 6 টার দাগ বরাবর এবং ঘণ্টার কাটার অবস্থান হবে 3 ও 4 টার দাগের মাঝ বরাবর।

∴ মিনিটের ও ঘন্টার কাটার মধ্যে ব্যবধান হবে $(30 - 17\frac{1}{2})$ ঘর $= 12\frac{1}{2}$ ঘর

আমরা জানি, কাটা দুইটির

ব্যবধান 1 ঘর হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ হয় $6°$

∴ ব্যবধান $12\frac{1}{2}$ ঘর হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ হয় $(6 \times 12\frac{1}{2})°$

$$= (6 \times \frac{25}{2})° = 75°$$

এখন, মিনিটের ও ঘন্টার কাটার মধ্যবর্তী কোণ $30°$ কম হলে

এদের মধ্যবর্তী কোণ হয় $(75 - 30)° = 45°$

কেন্দ্রে $6°$ কোণের জন্য কাটা দুইটির মধ্যে ব্যবধান হয় 1 ঘর

∴ কেন্দ্রে $1°$ কোণের জন্য কাটা দুইটির মধ্যে ব্যবধান হয় $\frac{1}{6}$ ঘর

∴ কেন্দ্রে 45° কোণের জন্য কাটা দুইটির মধ্যে ব্যবধান হয় $\frac{1\times45}{6}$ ঘর

$$= \frac{15}{2} \text{ ঘর} = 7\frac{1}{2} \text{ ঘর}$$

সবুজ বাসায় ফেরার সময় মিনিটের কাটার অবস্থান খাড়া নিচের দিকে অর্থাৎ 6 টার দাগ বরাবর। সুতরাং ঘণ্টার কাটার অবস্থান হবে মিনিটের কাটা অপেক্ষা $7\frac{1}{2}$ ঘর পিছনে।

∴ ঘন্টার কাটার অবস্থান হবে 4 ও 5 টার দাগের মাঝ বরাবর।

∴ সময় হবে 4:30 টা।

∴ সবুজ বাসায় ফিরেছিল 4:30 টার সময়।

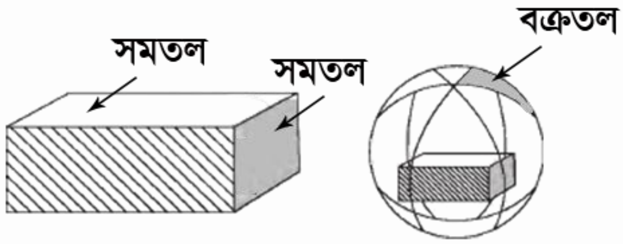
অধ্যায় ৬ ৬.১ **রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ**
Lines, Angles and Triangles

১. স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণ দাও।

সমাধান:

স্থান (Space): আমাদের চারপাশে বিস্তৃত জগত (Space) সীমাহীন। এর বিভিন্ন অংশ জুড়ে রয়েছে ছোট বড় নানা রকম বস্তু। ছোট বড় বস্তু বলতে বালুকণা, আলপিন, পেন্সিল, কাগজ, বই, চেয়ার, টেবিল, ইট, পাথর, বাড়িঘর, পাহাড়, পৃথিবী, গ্রহ-নক্ষত্র সবই বোঝানো হয়। বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান ধারণার উদ্ভব।

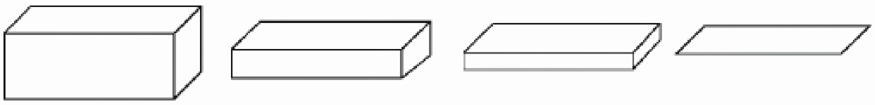
তল (Surface):



চিত্র: ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণা

ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল (Surface) নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন: একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি তলের প্রতিরূপ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাক্সের পৃষ্ঠতল ও গোলকের উপর তল ভিন্ন প্রকারের। প্রথমটি সমতল (Plane surface), দ্বিতীয়টি বক্রতল (Curved Surface)।

তল দ্বিমাত্রিক (Two-dimensional)



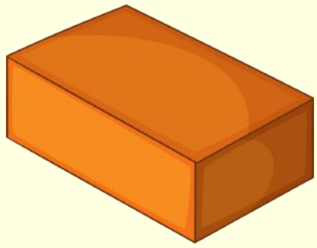
চিত্র: ঘনবস্তুর ধারণা থেকে তলের ধারণা

তল দ্বিমাত্রিক: এর শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কোনো বেধ নাই। একটি বাক্সের দুইটি মাত্রা ঠিক রেখে তৃতীয় মাত্রা ক্রমশ হ্রাস করে শুন্যে পরিণত করলে, বাক্সটির পৃষ্ঠবিশেষ মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণায় আসা যায়।

রেখা (Line): দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে একটি রেখা (Line) উৎপন্ন হয়। যেমন- বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠতল বাক্সের একাধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি সরলরেখা (Straight line)। একটি লেবুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি বক্ররেখা (Curved line) উৎপন্ন হয়। রেখা একমাত্রিক (One-dimensional)

চিত্র: তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণা

রেখা একমাত্রিক: এর শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও বেধ নাই। বাক্সের একটি পৃষ্ঠতলের প্রস্থ ক্রমশ হ্রাস পেয়ে সম্পূর্ণ শূন্য হলে, ঐ তলের একটি রেখা মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণায় আসা যায়।



চিত্র: ইট

চিত্র: বল

চিত্র: কাগজ

বিন্দু (Point): দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়, অর্থাৎ দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু (Point) দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাক্সের দুইটি ধার-রেখা বাক্সের এক কোণায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।
বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নাই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেয়ে অবশেষে শূন্য হলে, একটি বিন্দু মাত্র অবশিষ্ট থাকে। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্ত্বা (Entity) বলে গণ্য করা হয়।

চিত্র: রেখার ধারণা থেকে বিন্দুর ধারণা

ইউক্লিড প্রদত্ত তল, রেখা ও বিন্দুর সংজ্ঞা
পূর্বে তল, রেখা ও বিন্দু সম্পর্কে যে ধারণা দেওয়া হলো, তা তল, রেখ ও বিন্দুর সংজ্ঞা নয়- বর্ণনা মাত্র। এই বর্ণনায় মাত্রা বলতে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, বেধ ইত্যাদি ধারণা ব্যবহার করা হয়েছে, যেগুলো সংজ্ঞায়িত নয়। ইউক্লিড তার 'ইলিমেন্টস' গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের শুরুতেই বিন্দু, রেখা ও তলের যে "সংজ্ঞা" উল্লেখ করেছেন তা-ও আধুনিক দৃষ্টি অনুসারে অসম্পূর্ণ। ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি বর্ণনা নিম্নরূপঃ

১. যার কোনো অংশ নাই, তাই বিন্দু।
২. রেখার প্রান্ত বিন্দু নেই।
৩. যার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, তাই রেখা।
৪. যে রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলো একই বরাবরে থাকে, তাই সরলরেখা।
৫. যার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, তাই তল।
৬. তলের প্রান্ত হলো রেখা।
৭. যে তলের সরলরেখাগুলো তার ওপর সমভাবে থাকে, তাই সমতল।

২. ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা কর।
সমাধান: ইউক্লিড প্রদত্ত পাঁচটি স্বীকার্য হলো-
স্বীকার্য-১: একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।
স্বীকার্য-২: খন্ডিত রেখাকে যথেচ্ছভাবে বাড়ানো যায়।
স্বীকার্য-৩: যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।
স্বীকার্য-৪: সকল সমকোণ পরস্পর সমান।
স্বীকার্য-৫: একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করলে যেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

৩. পাঁচটি আপতন স্বীকার্য বর্ণনা কর।
সমাধান:
আপতন স্বীকার্য: বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থানকে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। এ সংক্রান্ত ৫টি স্বীকার্যকে আপতন স্বীকার্য বলে।

স্বীকার্য-১. জগত (Space) সকল বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।

এই স্বীকার্য থেকে আমরা লক্ষ করি যে, প্রত্যেক সমতল ও প্রত্যেক সরলরেখা এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে বিন্দু। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়। যেমন: কোনো বিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত অথবা, সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ বিন্দু দিয়ে যায়। একইভাবে, একটি সরলরেখা একটি সমতলের উপসেট হলে সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত অথবা, সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায় এ রকম বাক্য দ্বারা তা বর্ণনা করা হয়।

সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য-২. দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।

স্বীকার্য-৩. একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।

স্বীকার্য-৪. কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য-৫.

(ক) জগতে (space) একাধিক সমতল বিদ্যমান।

(খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।

(গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

৪. দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান:

দূরত্ব স্বীকার্য: জ্যামিতিতে দূরত্বের ধারণাও একটি প্রাথমিক ধারণা। এজন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

(ক) P ও Q বিন্দুযুগল একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে থাকে। সংখ্যাটিকে P বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(খ) P ও Q ভিন্ন বিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধনাত্মক। অন্যথায়, $PQ = 0$.

(গ) P ও Q থেকে এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ, $PQ = QP$.

৫. রুলার স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান:

রুলার স্বীকার্য: কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এমনভাবে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো বিন্দু P, Q এর জন্য $PQ = |a - b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

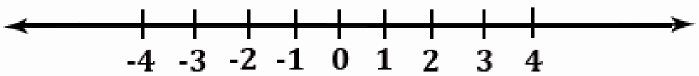
এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P কে a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়। উপরোক্ত স্বীকার্যটির নাম রুলার স্বীকার্য।

৬. সংখ্যারেখা বর্ণনা কর।

সমাধান:

সংখ্যারেখা: বাস্তব সংখ্যাকে সরল রেখার উপর বিন্দুর সাহায্যে চিত্রের মাধ্যমে দেখানো যায়। যে রেখায় বিন্দুর সংখ্যার এক-এক মিল দেখানো হয়, তাকে সংখ্যারেখা বলে।

যেমন: নিম্নের সংখ্যারেখায় $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ সংখ্যার অবস্থান দেখানো হলো।



৭. রুলার স্থাপন স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

সমাধান:

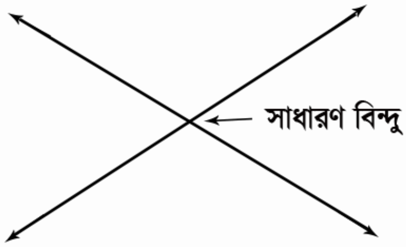
রুলার স্থাপন স্বীকার্য: কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0 এবং অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 1 ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এজন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে, যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক 0 (শূন্য) এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়। একে রুলার স্থাপন

স্বীকার্য বলা হয়।

৮. পরস্পরছেদী সরলরেখা ও সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা দাও।

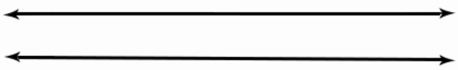
সমাধান:

পরস্পরছেদী সরলরেখা: দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে পরস্পরছেদী বলা হয়, যদি উভয়রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে।

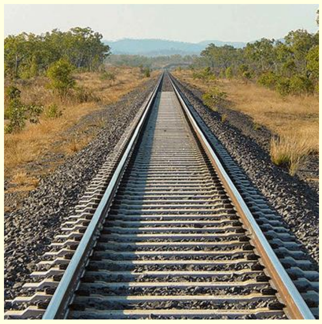


চিত্র: পরস্পরছেদী সরলরেখা

সমান্তরাল রেখা: একই সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে সমান্তরাল বলা হয়, যদি তাদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে।



চিত্র: সমান্তরাল রেখা



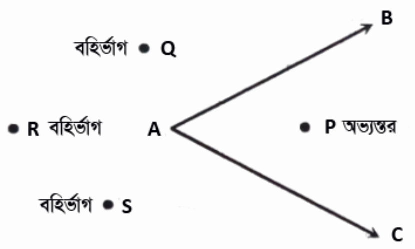
চিত্র: রেললাইন

অধ্যায় ৬ ৬.২ রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ
Lines, Angles and Triangles

১. কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

সমাধান:

কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ: চিত্রে, P বিন্দু $\angle BAC$ এর অভ্যন্তরে এবং Q, S ও R বিন্দুগুলো তার বহির্ভাগে অবস্থিত।



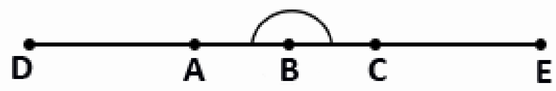
কোণের অভ্যন্তর: কোনো নির্দিষ্ট কোণের অভ্যন্তরে অবস্থিত সমতলস্থ সকল বিন্দুর সেটকে কোণের অভ্যন্তর বলা হয়। উপরের চিত্রের $\angle BAC$ এর অভ্যন্তর $\overrightarrow{AB}$ এর C পার্শ্বে এবং $\overrightarrow{AC}$ এর B পার্শ্বে অবস্থিত সমতলের সকল বিন্দুর সেট।

কোণের বহির্ভাগ: কোনো নির্দিষ্ট কোণের অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় সমতলস্থ এমন সকল বিন্দুর সেটকে তার বহির্ভাগ বলা হয়। উপরের চিত্রের $\angle BAC$ এর $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর উপরস্থ বা অভ্যন্তরে নয় অর্থাৎ বহির্ভাগের সমতলস্থ সকল বিন্দুর সেট।

কোণটির অভ্যন্তরের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং বহির্ভাগের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

২. যদি একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।

সমাধান:

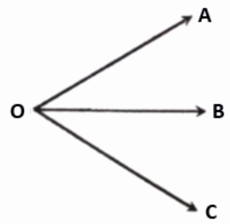


মনে করি, DE একটি সরলরেখা এবং এর উপর A, B, C তিনটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু।
তাহলে, A, B, C বিন্দু তিনটি দ্বারা উৎপন্ন কোণের নাম $\angle ABC$ এবং $\angle ABC$ একটি সরলকোণ। এই কোণের পরিমাপ $180°$। সুতরাং সরল রেখাস্থ প্রত্যেকটি বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলো প্রত্যেকে সরল কোণ।

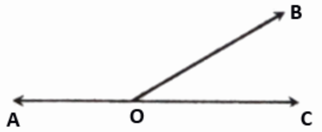
৩. সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও এবং এর বাহুগুলো চিহ্নিত কর।

সমাধান:

সন্নিহিত কোণ: সমতলস্থ দুইটি কোণের যদি (১) একই শীর্ষবিন্দু থাকে, (২) একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং (৩) তাদের অভ্যন্তরদ্বয়ের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে কোণদ্বয়ের একটিকে অপরটির সন্নিহিত কোণ বলা হয় এবং সাধারণ বাহু ব্যতীত অপর দুই বাহুকে তাদের বহিঃস্থ বাহু বলা হয়।



চিত্র-১



চিত্র-২

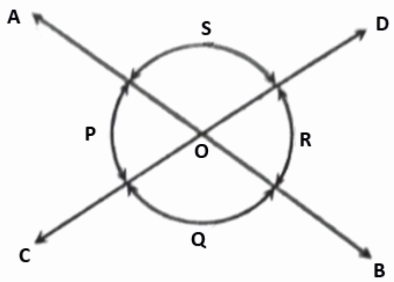
চিত্রে, $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ সন্নিহিত কোণদ্বয়ের একই শীর্ষবিন্দু O, একটি সাধারণ বাহু OB এবং কোণদ্বয়ের অভ্যন্তরে কোনো সাধারণ বিন্দু নাই।
OA এবং OC কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহু।
মন্তব্যঃ কোনো রশ্মি তার প্রান্তবিন্দুতে একটি সরলরেখার সঙ্গে মিলিত হলে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয় তারাও সন্নিহিত কোণ (চিত্র-২ দ্রষ্টব্য)
এক্ষেত্রে বহিঃস্থ বাহুদ্বয় OA এবং OC একই সরলরেখা AC এর অংশ।

৪. চিত্রসহ সংজ্ঞা দাও: বিপ্রতীপ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ।

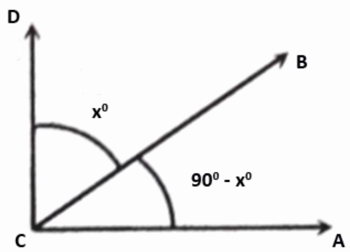
সমাধান:

বিপ্রতীপ কোণ: দুইটি কোণের একটির বাহুদ্বয় অপরটির বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মি হলে, কোণ দুইটিকে বিপ্রতীপ কোণ বলা হয়।

চিত্রে, $\angle P$ এবং $\angle R$ একযুগল বিপ্রতীপ কোণ যা AB এবং CD এর ছেদের ফলে উৎপন্ন হয়েছে। একইভাবে, চিত্রে $\angle Q$ এবং $\angle S$ আরেক যুগল বিপ্রতীপ কোণ একই সরলরেখাদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন।

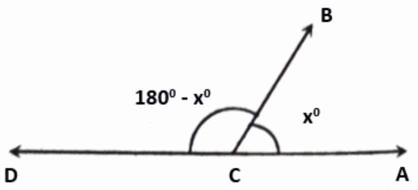


পূরক কোণ: দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে কোণ দুইটিকে পরস্পরের পূরক কোণ বলা হয়।



চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle BCD$ পরস্পর পূরক কোণ।

সম্পূরক কোণ: দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 180° হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পরের সম্পূরক কোণ বলা হয়।



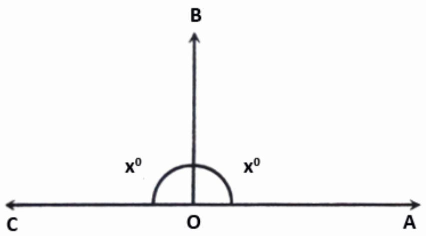
চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle BCD$ পরস্পর সম্পূরক কোণ।

মন্তব্য: দুইটি সম্পূরক কোণ সন্নিহিত হলে তারা রৈখিক যুগল কোণ হয়। এরূপ সম্পূরক কোণ দুইটির একটিকে অপরটির রৈখিক সম্পূরক বলা হয়।

সমকোণ: একটি কোণ যদি তার এক বাহ ও অপর বাহুর বিপরীত বাহু বিপরীত রশ্মি দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান হয়, তবে কোণটিকে সমকোণ বলা হয়। চিত্রে, $\angle AOB$ সমকোণ।

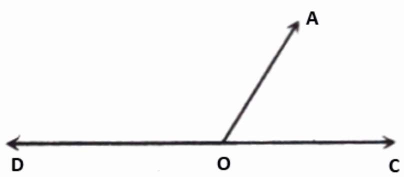
উল্লেখ্য যে, দুইটি কোণ সমান অর্থ তাদের ডিগ্রি পরিমাপ সমান।

লক্ষণীয় যে, পাশের চিত্রে $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ রৈখিক যুগল কোণ এবং কোণ যোজন স্বীকার্য অনুযায়ী $\angle AOB + \angle BOC =$ সরলকোণ $\angle AOC$
সুতরাং, $\angle AOB = x°$ হলে সরলকোণ স্বীকার্য $x + x = 180°$ বা, $x = 90°$



অতএব দেখা যাচ্ছে যে, সমকোণের ডিগ্রি পরিমাপ $90°$।

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ: এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়।

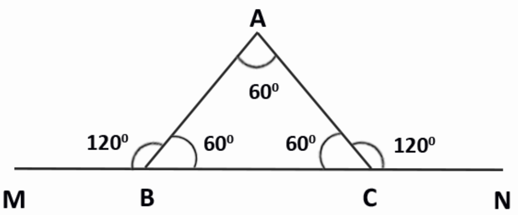


উপরের চিত্রে, $\angle AOC$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle AOD$ স্থূলকোণ। উল্লেখ্য যে, $\angle AOC < \angle AOD$ এবং $\angle AOD > \angle AOC$ দ্বারা কোণগুলোর ডিগ্রি পরিমাপের তুলনাই বোঝায়।

১. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হলো। কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব?
ক) ৫ সেমি,, ৬ সেমি, ও ৭ সে.মি
খ) ৩ সে.মি., ৪ সেমি, ও ৭ সে মি
গ) ৫ সে.মি., ৭ সে.মি. ও ১৪ সে.মি
ঘ) ২ সে.মি., ৪ সে.মি. ও ৮ সে.মি.

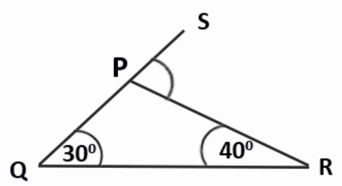
ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
$5+6>7$, $3+4=7$, $5+7<14$, $2+4<8$

২. সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের বিয়োগফল কত?
ক) 0°   খ) 120°   গ) 180°   ঘ) 240°
ব্যাখ্যা:



$\angle ABE - \angle ACN = 120° - 120° = 0°$

৩. চিত্রে, $\angle RPS$ এর মান কত?



ক) 40° খ) 70°   গ) 90°   ঘ) 110°

ব্যাখ্যা: $\angle PQR + \angle QRP + \angle QPR = 180°$

বা, $30° + 40° + \angle QPR = 180°$

বা, $\angle QPR = 180° - 70°$

বা, $\angle QPR = 110°$

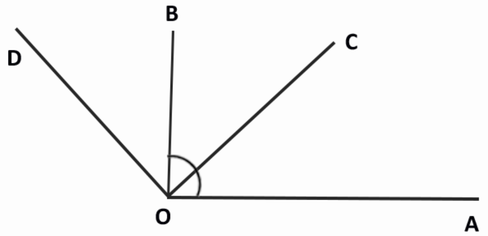
এখন $\angle QPS$ সরল কোণ।

$\therefore \angle QPR + \angle RPS = 180°$

বা, $110° + \angle RPS = 180°$
বা, $\angle RPS = 70°$

MCQ Answers:
১। ক
২। ক
৩। খ
৪। গ
৫। ঘ
৬। খ
৭। গ
৮। গ

৪.



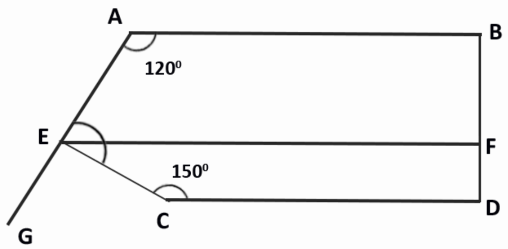
উপরের চিত্রে—

i. ∠AOC একটি সূক্ষ্মকোণ
ii. ∠AOB একটি সমকোণ
iii. ∠AOD একটি প্রবৃদ্ধকোণ
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i খ) ii গ) i, ii ঘ) ii, iii

ব্যাখ্যা: (iii) সঠিক নয়; দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে।
∴ ∠AOD একটি স্থূলকোণ।

৫. একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে মিলে যায় তবে-

i. ত্রিভুজ দুটি সর্বসম
ii. ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহু সমান
iii. অনুরূপ কোণ সমান
নিচের কোনটি সঠিক?
ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii



চিত্রে AB || EF || CD এবং BD⊥CD
প্রদত্ত চিত্রের আলোকে (৬-৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

৬. ∠AEF এর মান কত?

ক) 30° খ) 60° গ) 240° ঘ) 270°

ব্যাখ্যা:

∠ABF+ ∠BFE +∠AEF+∠BAE = 360°
বা, 90°+ 90° +∠AEF+120° = 360°
বা, ∠AEF = 360° - 300°
বা, ∠AEF = 60°

৭. ∠BFE এর মান নিচের কোনটি?

ক) 30° খ) 60° গ) 90° ঘ) 120°

৮. ∠CEF + ∠CEG = কত?

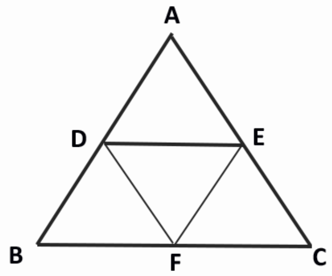
ক) 30° খ) 60° গ) 180° ঘ) 120°

ব্যাখ্যা: ∠AEG = 180°
বা, ∠AEF+ ∠CEF+ ∠CEG = 180°
বা, 60°+ ∠CEF+ ∠CEG = 180°

বা, EFEG= 180°
বা, ∠CEF + ∠CEG= 180° – 60°
বা, ∠CEF + ∠CEG= 120°

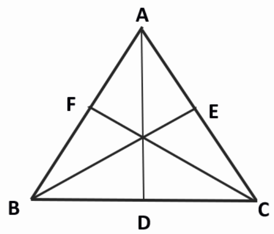
৯. প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ΔABC সমবাহু। অর্থাৎ $AB = BC = CA$। D,E,F যথাক্রমে AB, AC এবং BC বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু। D, E; E, F এবং যোগ করলে ΔDEF উৎপন্ন হবে।
প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDEF সমবাহু।
প্রমাণঃ
(১) ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা DE
$\therefore DE = \frac{1}{2} BC$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক]
(২) আবার, ΔABC-এর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখা DF
$\therefore DF = \frac{1}{2} AC$ [একই কারণে]
(৩) অনুরূপভাবে, $EF = \frac{1}{2} AB$
(৪) কিন্তু দেওয়া আছে, ΔABC সমবাহু। অর্থাৎ, $AB = BC = AC$ বা, $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC$
$\therefore EF = DE = DF$ [$EF = \frac{1}{2} AB$, $DE = \frac{1}{2} BC$ এবং $DF = \frac{1}{2} AC$]
$\therefore \Delta DEF$ সমবাহু। (প্রমাণিত)

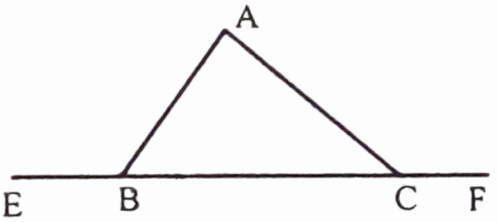
১০. প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC সমবাহু অর্থাৎ $AB = BC = CA$. ΔABC-এর মধ্যমাত্রয় AD, BE এবং CF.
প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = BE = CF$
প্রমাণ:
(১)ΔABD ও ΔACF এর মধ্যে
$AB = AC$, [$\because \Delta ABC$ সমবাহু]
$BD = AF$ [সমান সমান বাহুর অর্ধেক বলে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle A$ [$\because$ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান]
$\therefore \Delta ABD = \Delta ACF$ [$\because$ উভয় ত্রিভুজের দুই বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান]
অতএব, $AD = CF$ .... (i)
(২) অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $BE = CF$ .... (ii)
(৩) এখন, (i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $AD = BE = CF$ (প্রমাণিত)

১১. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর BC বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করায় দুইটি বহিঃস্থ কোণ যথাক্রমে $\angle ABE$ এবং $\angle ACF$ উৎপন্ন হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABE + \angle ACF > 2$ সমকোণ।

প্রমাণ:

(১) ΔABC-এর বহিঃস্থ $\angle ABE = \angle A + \angle C$.......... (i) [$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

(২) আবার, ΔABC-এর বহিঃস্থ $\angle ACF = \angle A + \angle B$........ (ii) [একই কারণে]

(৩) (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

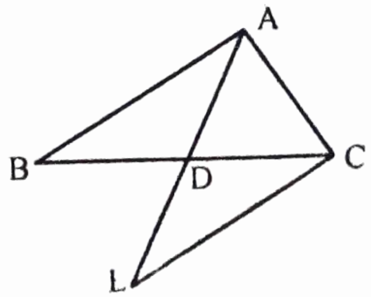
$\angle ABE + \angle ACF = \angle A + \angle B + \angle C + \angle A$

বা, $\angle ABE + \angle ACF = 180° + \angle A$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

$\therefore \angle ABE + \angle ACF > 2$ সমকোণ বা $180°$ (প্রমাণিত)

১২. ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D. A, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$.

অঙ্কন: AD কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, $DE = AD$ হয়। E, C যোগ করি।

প্রমাণ:

(১) ΔABD এবং ΔECD-এ

$BD = CD$ [$\because$ D, AC এর মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে]

$AD = DE$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDC$ [বিপ্রতীপ কোণ সমান]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ECD$ [$\because$ দুইটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান]

সুতরাং $AB = CE$ ... ... (i)

(২) এখন, ΔAEC-এ,

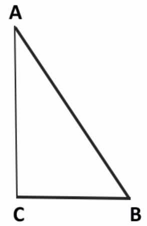
$AC + CE > AE$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $AC + AB > AD + DE$ [(i) নং থেকে $AB = CE$]

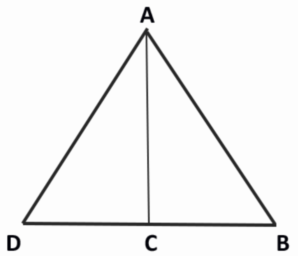
বা, $AB + AC > AD + AD$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে, $DE = AD$]

$\therefore AB + AC > 2AD$ (প্রমাণিত)

১৩. চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$. প্রমাণ কর যে, $AB = 2BC$.



সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: চিত্রানুসারে, ΔACB-এ $\angle C =$ এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = 2BC$.

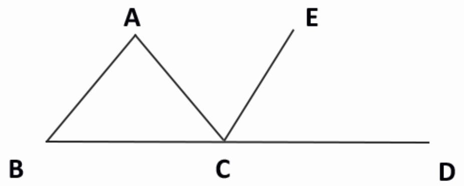
অঙ্কন: BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যাতে $BC = CD$ হয়। A, D যোগ করি।
প্রমাণ:
(১) দেওয়া আছে, $\angle C = 90°$
$\therefore \angle B + \angle A = 90°$
বা, $2\angle A + \angle A = 90°$ [$\because \angle B = 2\angle A$]
বা, $3\angle A = 90°$
$\therefore \angle A = 30°$ অর্থাৎ $\angle BAC = 30°$

(২) আবার, $\angle B = 2\angle A = 2 \times 30° = 60°$

(৩) ΔABC ও ΔACD-এ
$BC = CD$ [অঙ্কনানুসারে]
$AC = AC$ [সাধারণ বাহু]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ACD$ [প্রত্যেকে সমকোণ]
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ACD$
$\therefore \angle BAC = \angle CAD = 30°$
তাহলে, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$
$= 30° + 30° = 60°$

(৪) ΔABD-এ
$\angle ABD + \angle BAD + \angle ADB = 180°$
বা, $60° + 60° + \angle ADB = 180°$
বা, $120° + \angle ADB = 180°$.
$\therefore \angle ADB = 60°$
সুতরাং ΔABD সমবাহু ত্রিভুজ।
$\therefore AB = BD$
বা, $AB = BC + CD$
বা, $AB = BC + BC$ [$\because BC = CD$]
$\therefore AB = 2BC$ (প্রমাণিত)

১৪. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় বহিঃস্থ $\angle ACD$ উৎপন্ন হয়েছে। $\angle ACD$, ত্রিভুজটির $\angle ACB$ এর সংলগ্ন বহিঃস্থ কোণ। কাজেই, $\angle BAC$ এবং $\angle ABC$ বহিঃস্থ $\angle ACD$ এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$.
অঙ্কন: C বিন্দু দিয়ে BA বাহুর সমান্তরাল করে CE রশ্মি টানি।
প্রমাণ:

(১) BA || CE এবং AC ছেদক। [অকন অনুসারে]

$\therefore \angle BAC = \angle ACE$ ... ... (i) [একান্তর কোণ বলে]

(২) আবার, BA || CE এবং BD ছেদক।

$\therefore \angle ABC = \angle ECD$ ... ... (ii) [অনুরূপ কোণ বলে]

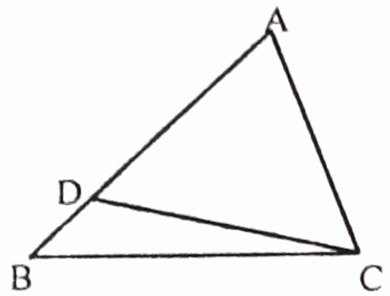
(৩) (i) নং + (ii) নং থেকে পাই,

$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$

বা, $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ [$\because \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$]

$\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$ (প্রমাণিত)

১৫. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এ $AB > AC$
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB - AC < BC$
অঙ্কন: AB থেকে $AD = AC$ কেটে নিই। C, D যোগ করি।
প্রমাণ:
(১) ΔACD-এ $AD = AC$.
$\therefore \angle ACD = \angle ADC$

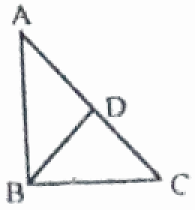
(২) আবার, ΔACD-এ বহিঃস্থ
$\angle BDC >$ অন্তঃস্থ $\angle ACD$ [ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ
কোণদ্বয়ের যে কোনটি অপেক্ষা বৃহত্তর]
$\therefore \angle BDC > \angle ADC$ ...... (i)

(৩) আবার, ΔBDC-এ, বহিঃস্থ $\angle ADC >$ অন্তঃস্থ $\angle BCD$...... (ii)
$\therefore \angle BDC > \angle BCD$

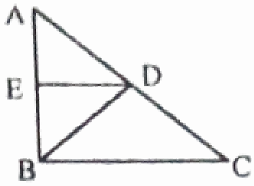
(৪) এখন, ΔBDC-এ $\angle BDC > \angle BCD$

$\therefore$ BD < BC
[কোনও ত্রিভুজের দুইটি কোণ অসমান হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
বা, AB - AD <BC
$\therefore$ AB - AC < BC [$\because$ AD = AC] (প্রমাণিত)

১৬. চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, BD = $\frac{1}{2}$ AC.

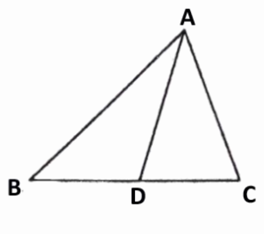


সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। B, D যোগ করা হলো।
প্রমাণ করতে হবে যে, BD = AC
প্রমাণ: ΔABC-এ $\angle$ABC= এক সমকোণ।
আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।
সুতরাং, $\angle$ABC কে এমন একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ চিন্তা করি যেখানে,
AC ব্যাস এবং B অর্ধবৃত্তস্থ একটি বিন্দু।
দেওয়া আছে, D, AC এর মধ্যবিন্দু।
D বৃত্তের কেন্দ্র। ফলে DB হবে অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ।
সুতরাং, BD = $\frac{1}{2}$ AC [$\because$ ব্যাসার্ধ = $\frac{1}{2}$ $\times$ ব্যাস] (প্রমাণিত)

১৭. ΔABC এ AB > AC এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle$ADB স্থূলকোণ।
সমাধান:



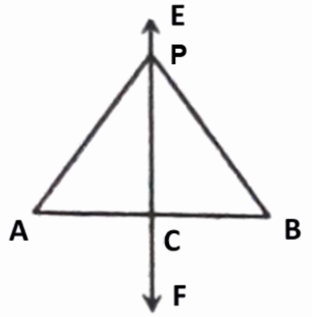
বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ AB > AC এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle$ADB স্থূলকোণ।

প্রমাণঃ
(১) ΔABC-এ AB> AC
$\therefore$ $\angle C > \angle B$ [ত্রিভুজের দুইটি বাহু অসমান হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর]
বা, $\angle C+\frac{1}{2}\angle A > \angle B +\frac{1}{2}\angle A$ [উভয়পক্ষে $\frac{1}{2}\angle A$ যোগ করে]

(২) আবার, ΔACD-এ বহিঃস্থ $\angle ADB$ = অন্তঃস্থ বিপরীত
$(\angle C+\frac{1}{2}\angle A)$

(৩) এবং ΔABD-এ বহিঃস্থ $\angle ADC$ = অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle B+\frac{1}{2}\angle A)$
$\therefore \angle ADB > \angle ADC$ [$\because \angle C+\frac{1}{2}\angle A > \angle B+\frac{1}{2}\angle A$]
যেহেতু কোণ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং অসমান,
$\therefore 90° < \angle ADB < 180°$
$\therefore \angle ADB$ স্থূলকোণ। (প্রমাণিত)

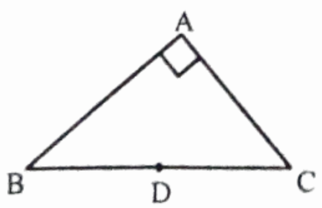
১৮. প্রমাণ কর যে, কোনো রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, EF রেখাংশ AB রেখাংশটিকে C বিন্দুতে লম্বদ্বিখণ্ডিত করে। লম্বদ্বিখণ্ডক EF এর উপস্থিত P একটি বিন্দু এবং AB এর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A এবং B.
A, P; B, P যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, P হতে A এবং B বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী
অর্থাৎ $PA = PB$
প্রমাণ:
(১) $\angle PCA = \angle PCB$ = এক সমকোণ [$\because$ EF, AB কে C বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে]
(২) এবার, ΔAPC ও ΔBPC-এ $AC = BC$ [$\because$ EF, AB কে C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
PC সাধারণ বাহু
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ACP$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BCP$ [$\because$ প্রত্যেকে সমকোণ]
$\therefore \Delta APC \cong \Delta BPC$
$\therefore PA = PB$ (প্রমাণিত)

১৯. ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ = এক সমকোণ। BC বাহুর মধ্যবিন্দু D.
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।
খ. দেখাও যে, $AB + AC > 2AD$
গ. প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2}BC$

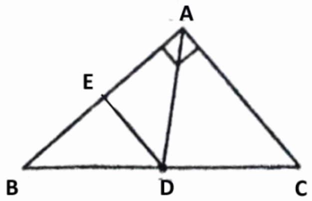
সমাধান:
ক.



প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ΔABC- ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ. ১২ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ.



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC- এর $\angle A$ = এক সমকোণ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু। A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = \frac{1}{2}BC$

অঙ্কনঃ AB এর মধ্যবিন্দু E নিই। D, E যোগ করি।

প্রমাণঃ

(১) ΔABC- এ E এবং D যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু

$\therefore DE \parallel AC$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]

$\therefore \angle BAC$ = অনুরুপ $\angle BED$ = এক সমকোণ।

(২) এখন, ΔAED ও ΔBED-এর মধ্যে

$AE = BE$ [E, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\angle AED$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BED$ [প্রত্যেকে সমকোণ]

এবং $DE = DE$ [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta AED \cong \Delta BED$

$\therefore AD = BD$

(৩) কিন্তু, $BD = \frac{1}{2}BC$

$\therefore AD = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)

২০. ΔABC এর D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

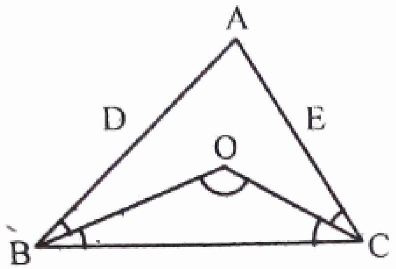
ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

সমাধান:

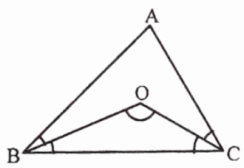
ক.



এখানে, ΔABC এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AC এর মধ্যবিন্দু E। $\angle B$.এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

খ. গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.৩ এর উপপাদ্য-১৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৯

গ.



দেওয়া আছে, ত্রিভুজ ABC এর $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অর্থাৎ, BO এবং CO যথাক্রমে $\angle ABC$ এবং $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

প্রমাণঃ

(১) ΔABC-এ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90°$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore \frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90°-\frac{1}{2}\angle A$ .....(i)

(২) ΔBOC-এ $\angle BOC+\angle OBC+\angle OCB=180°$

বা, $\angle BOC+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=180°$ [$\because$ BO এবং CO রেখা যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

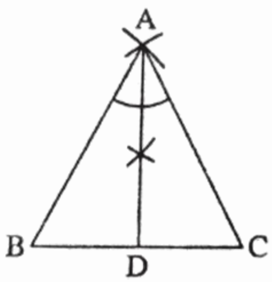
বা, $\angle BOC+90°-\frac{1}{2}\angle A=180°$ [(i) নং হতে]

বা, $\angle BOC=180°-90°+\frac{1}{2}\angle A$

$\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$ (প্রমাণিত)

২১. প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখন্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব।

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle A$ -এর সমদ্বিখন্ডক AD ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD=CD$ এবং $AD\perp BC$

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$

ধাপ ২. ΔABD ও ΔACD-এ

$AB=AC$; [ΔABC-এর সমান সমান বাহু]

$AD=AD$; [সাধারণ বাহু]

অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD=$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD$; [ধাপ ১ হতে]

$\therefore \Delta ABD\cong\Delta ACD$

$\therefore BD=CD$ এবং $\angle ADB=\angle ADC$

ধাপ ৩. ধাপ-২ হতে পাই,

$\angle ADB=\angle ADC$

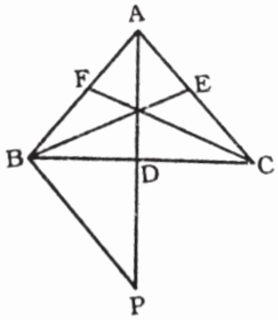
কিন্তু এরা রৈখিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান।

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$

$\therefore AD\perp BC$ (প্রমাণিত)

২২. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC- এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD + BE + CF < AB + BC + CA$

অঙ্কন: AD কে P পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $PD = AD$ হয়।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔPBD ও ΔACD -এ

$BD = CD$; [$\because$ AD মধ্যমা]

$PD = AD$; [অঙ্কন অনুসারে]

অন্তর্ভুক্ত $\angle PDB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ADC$; [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta PBD = \Delta ACD$

$\therefore PB = AC$

ধাপ ২. ΔAPB -এ

$AB + PB > AP$

বা, $AB + AC > AD + PD$

বা, $AB + AC > AD + AD$

বা, $AB + AC > 2AD$ ... (i)

ধাপ ৩. অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

$AB + BC > 2BE$ ... ... (ii)

এবং $BC + AC > 2CF$ ... ... (iii)

ধাপ ৪. (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$AB + AC + AB + BC + BC + AC > 2AD + 2BE + 2CF$

বা, $2AB + 2BC + 2AC > 2AD + 2BE + 2CF$

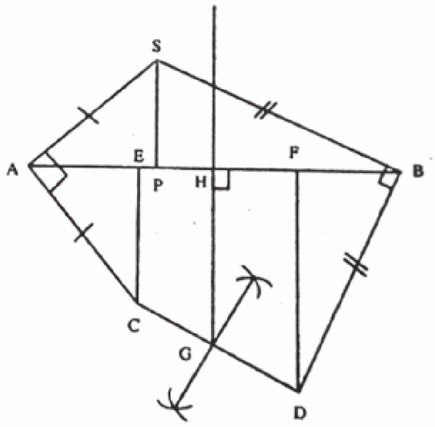
বা, $2(AB + BC + AC) > 2(AD + BE + CF)$

বা, $AB + BC + AC > AD + BE + CF$

$\therefore AD + BE + CF < AB + BC + AC$ (প্রমাণিত)

২৩. এক পরিশ্রমী পিতা তার একমাত্র পুত্রকে ডেকে বললেন যে তিনি তার উপার্জিত অর্থ দিয়ে স্বর্ণ ক্রয় করে পার্শ্ববর্তী বনে লুকিয়ে রেখেছেন। স্বর্ণের অবস্থান সম্পর্কে পুত্র জিজ্ঞাসা করাতে তিনি জানালেন যে বনে একই রকম দেখতে দুইটি বৃক্ষ। A ও B এবং একটি পাথর S রয়েছে। S থেকে A তে পৌছতে সমদূরত্ব লম্বালম্বিভাবে গিয়ে সে C বিন্দু পাবে। এবার আবার S থেকে B তে এসে একইভাবে লম্বালম্বি সমদূরত্ব অতিক্রম করে D বিন্দু পাবে। এবার CD রেখার মধ্যবিন্দুতে স্বর্ণ পাওয়া যাবে। পুত্র বৃক্ষ A ও B পেলেও দুর্ভাগ্যজনকভাবে S পেল না। সে কী স্বর্ণ খুঁজে পাবে? কীভাবে?

সমাধান:



মনে করি, পাথরের অবস্থান S. S থেকে A তে এসে সেখান থেকে লম্বভাবে সমদূরত্বে C তে পৌছল। আবার S থেকে B তে এসে সেখান থেকে লম্বভাবে সমদূরত্বে D তে পৌছল। C, D যোগ করি এবং CD এর মধ্যবিন্দু G নির্ণয় করি। A, B যোগ করে G থেকে AB এর উপর GH লম্ব আঁকি। আবার C, D ও S বিন্দু থেকে AB এর উপর যথাক্রমে CE, DF ও SP লম্ব আঁকি।

এখন, ΔAPS এ

$\angle ASP + \angle PAS = 90°$

আবার, $\angle PAS + \angle PAC = 90°$

$\therefore \angle ASP + \angle PAS = \angle PAS + \angle PAC$

বা, $\angle ASP = \angle PAC$

$\therefore \angle ASP = \angle EAC$

এখন, ΔAPS ও ΔEAC এ

$\angle ASP = \angle EAC$

$\angle APS = \angle AEC$ [উভয়ে সমকোণ]

এবং $AS = AC$ [সমদূরত্ব]

$\Delta APS \cong \Delta EAC$ [কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

$\therefore AP = CE$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $BP = DF$

এখন, $AB = AP + BP = CE + DF$

যেহেতু, $CE \parallel GH \parallel DF$ এবং G, CD এর মধ্যবিন্দু। সুতরাং H, EF এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ ট্রাপিজিয়াম ECDF-এ $GH = \frac{1}{2}(CE + DF) = \frac{1}{2}AB$

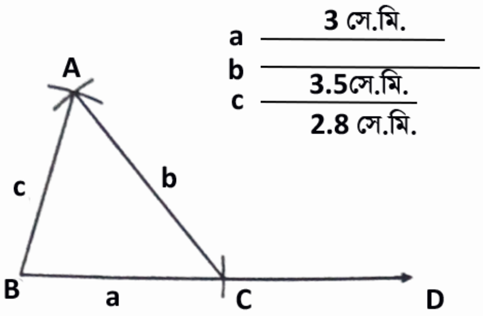
সুতরাং S বিন্দুর যে কোনো অবস্থানের জন্য GH, AB এর অর্ধেক। অর্থাৎ GHএর অবস্থান নির্দিষ্ট।

অধ্যায় ৭ ৭.১ ব্যবহারিক জ্যামিতি Practical Geometry

১। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর:

(ক) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.8 সে.মি.,

সমাধান :



দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে a=3 সে.মি., b= 3.5 সে.মি. এবং c=2.8 সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি BD থেকে BC = a কেটে নিই।

(২) B ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

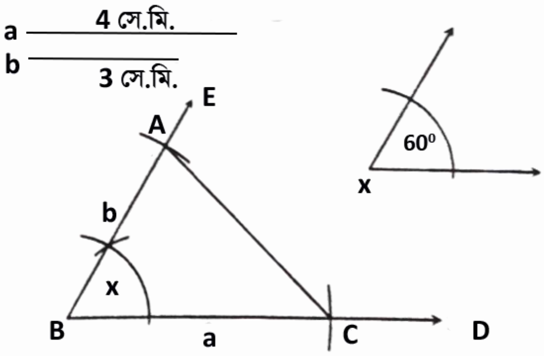
(৪) A, B ও A, C যোগ করি। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, AB = c, BC = a এবং AC=b

∴ ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(খ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে. মি., 3 সে.মি, এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে a = 4 সে.মি., b = 3 সে.মি. এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ ∠x= 60° । ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি BD থেকে BC= a = 4 সে.মি. কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে ∠CBE = ∠x = 60° আঁকি।

(২) BE থেকে BA = b = 3 সে.মি., কেটে নিই।

(৩) A,C যোগ করি। তাহলে, ΔABC-ই উদিষ্ট ত্রিভুজ।

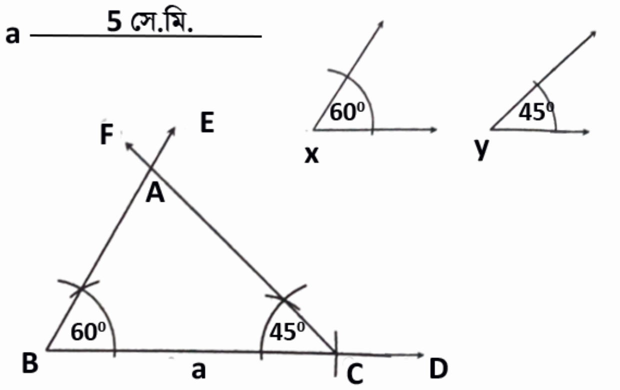
প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে, $BC = a$, $AB = b$ এবং

$\angle ABC = \angle x = 60°$

∴ ΔABC -ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(গ) দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.

সমাধান:



দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $\angle x = 60°$ ও $\angle y = 45°$ এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য a=5 সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোন রশ্মি BD থেকে $BC = a = 5$ সে.মি. কেটে নিই।

(২) B বিন্দুতে $\angle CBE = \angle x = 60°$ এবং C বিন্দুতে $\angle BCF = \angle y = 45°$ আঁকি।

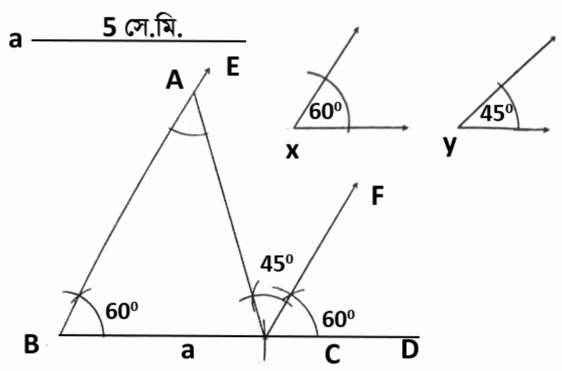
(৩) মনে করি, BE ও CF পরপর A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $BC = a = 5$ সে.মি., $\angle ABC = \angle x = 60°$ এবং $\angle ACB = \angle y = 45°$।

∴ ΔABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(ঘ) দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং 45° কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি.।

সমাধান:



দেয়া আছে, একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে $\angle x = 60°$ ও $\angle y = 45°$ এবং 45° কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 5$ সে. মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি BD থেকে $BC = a = 5$ সে.মি, কেটে নিই।

(২) BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle CBE = \angle x = 60°$ ও $\angle DCF = \angle x = 60°$ আঁকি। (৩) CF রশ্মির যে পাশে B বিন্দু আছে ঐ পাশে C বিন্দুতে $\angle FCA = \angle y = 45°$ আঁকি।

(৪) মনে করি, CA, BE কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\angle ABC = \angle FCD = 60°$ [অনুরূপ কোণ]।

সুতরাং BE | CF, BD তাদের ছেদক।

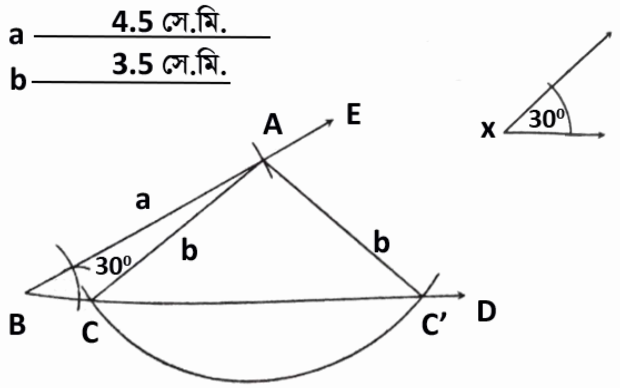
অতএব $\angle ACF = \angle CAB = 45°$ [একান্তর কোণ]।

সুতরাং BE || CF, AC তাদের ছেদক। $\angle CAB = 45°$ এর বিপরীত বাহু BC =5 সে. মি.।

∴ ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(ঙ) দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30°।

সমাধান:



দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a = 4.5 সে. মি. ও b = 3.5 সে. মি এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ $\angle x = 30°$ । ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি BD নিই। BD রশ্মির B বিন্দুতে $\angle DBE = \angle x = 30°$ আকি।

(২) BE থেকে BA = a = 4.5 সে.মি, কেটে নিই।

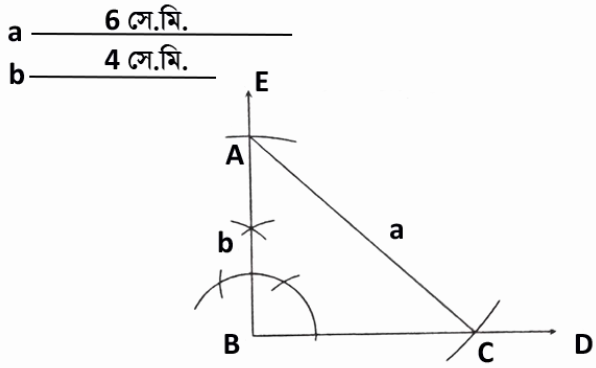
(৩) এখন, A কে কেন্দ্র করে b = 3.5 সে.মি. ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনেকরি, বৃত্তচাপটি BD কে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) A, C এবং AC′ যোগ করি। তাহলে, ΔABC অথবা ΔABC'-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে AB = a = 45 সেমি। AC অথবা AC' প্রত্যেকেই b = 3.5 সে.মি, এর সমান এবং দ্বিতীয় বাহু AC অথবা AC' এর বিপরীত কোণ $\angle ABC$ অথবা $\angle ABC'$ প্রত্যেকে $\angle x = 30°$ এর সমান। অতএব, ΔABC ও ΔABC' নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(চ) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 4 সে. মি.

সমাধান:



দেওয়া আছে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a = 6$ সে.মি. ও $b = 4$ সে.মি.। সমকোণী ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো একটি রশ্মি BD নিই। BD এর B বিন্দুতে BE লম্ব আঁকি।

(২) BE থেকে $BA = b = 4$ সে.মি. কেটে নিই। A কে কেন্দ্র করে $a = 6$ সে.মি. এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) মনে করি, বৃত্তচাপটি BD কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

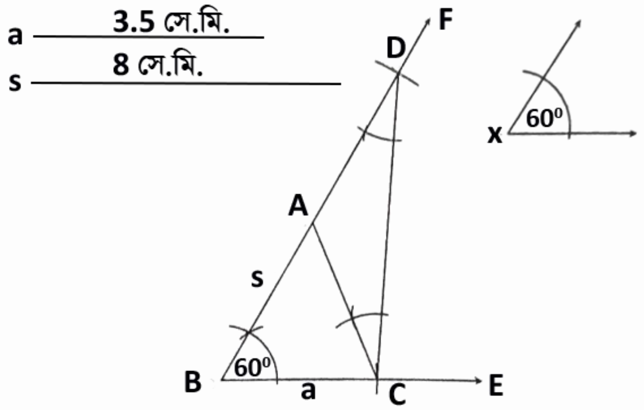
(৪) A, C যোগ করি। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, অতিভুজ $AC = a = 6$ সে.মি., ও অপর বাহু $AB = b = 4$ সে.মি.। অতএব ΔABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

২. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

(ক) ভূমি 3.5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60° ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 8 সে.মি.।

সমাধান:



দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের ভূমি $a = 3.5$ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 60°$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি $s = 8$ সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অংকনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a = 35$ সে. মি. কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle CBF = \angle x = 60°$ আঁকি।

(২) BF থেকে $BD = s = 8$ সে. মি. কেটে নিই।

(৩) C,D যোগ করি। CD রেখাংশের C বিন্দুতে $\angle DCA = \angle BDC$ আঁকি।

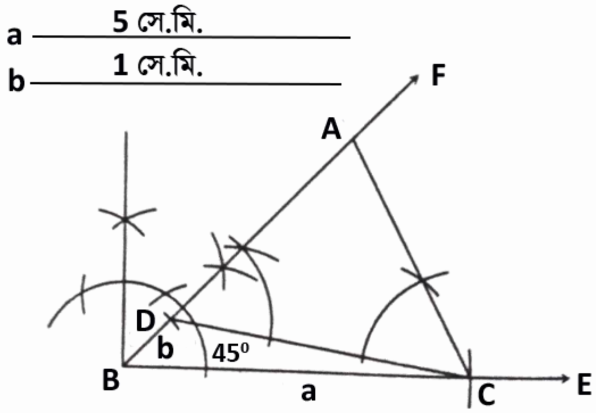
(৪) মনে করি, CA, BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: ΔACD-এ $\angle ACD = \angle ADC$। অতএব $AC = AD$ এখন, ΔABC-এ $AB + AC = AB + AD = BD = 8$ সে.মি.। অঙ্কন অনুসারে, $BC = a = 3.5$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \angle x = 60°$।

সুতরাং, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভজ।

(খ) ভূমি 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 45° ও তার বাহুর অন্তর 1 সে.মি.।

সমাধান:



দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের ভূমি $a = 5$ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 45°$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর $b = 1$ সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a = 5$ সে. মি. কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x = \angle CBF$ আকি।

(২) BF রশ্মি থেকে $BD = b = 1$ সে.মি. কেটে নিই।

(৩) C, D যোগ করি। CD রেখাংশের C বিন্দুতে $\angle FDC$ সমান করে $\angle DCA$ আঁকি।

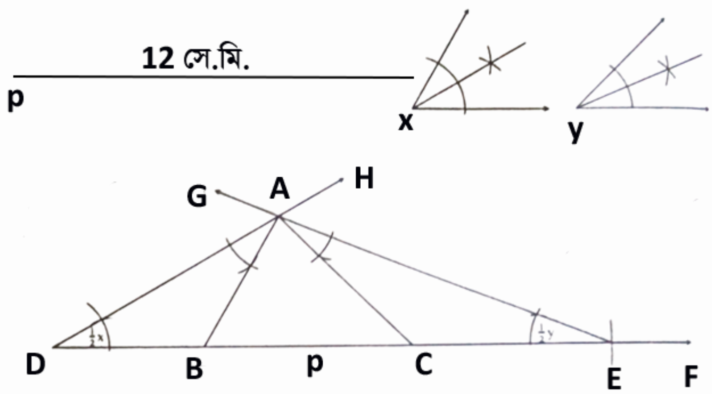
(৪) মনে করি, CA, BF কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, $BC = a = 5$ সে.মি, অপর দুই বাহুর অন্তর $BD = b = 1.$ সে.মি., ΔACD এ $\angle ADC = \angle ACD$। সুতরাং, $AC = AD$। ΔABC -এ $AB - AC = AB - DA = BD = b = 1$ সে. মি.।

ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

(গ) ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে 60° ও 45° এবং পরিসীমা 12 সে. মি.।

সমাধান:



দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ যথাক্রমে $\angle x = 60°$, $\angle y = 45°$ এবং পরিসীমা $p = 12$ সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি DF থেকে $DE = p = 12$ সে.মি. কেটে নিই। DE রেখাংশের D ও E $\frac{1}{2}\angle x$ ও $\frac{1}{2}\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle EDH$ ও $\angle DEG$ আঁকি।

(২) মনে করি, DH ও EG পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে

(৩) এখন, A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান করে $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান করে $\angle EAC$ আঁকি।

(৪) মনে করি, AB ও AC, DE কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণঃ ΔADB-এ $\angle ADB = \angle DAB$। সুতরাং, $AB = DB$। অনুরূপভাবে, $AC = CE$

ΔABC-এ $AB + BC + AC = DB+BC+CE = DE = p = 12$ সে.মি.

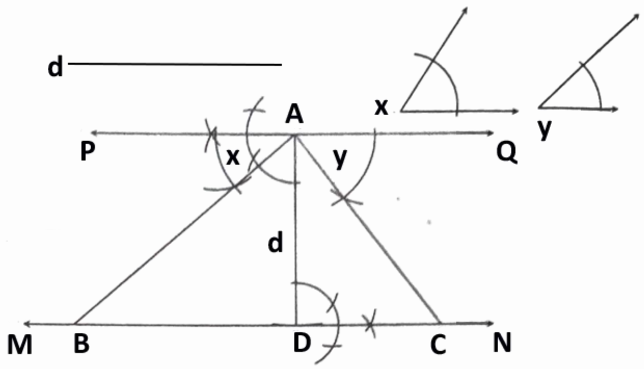
$\angle ABC = \angle ADB + \angle BAD = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

অনুরুপভাবে, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y$

সুতরাং, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

৩। একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



মনে করি, ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে $\angle x$ ও $\angle y$ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো একটি রেখাংশ $AD = d$ নিই। AD রেখাংশের A ও D বিন্দুতে যথাক্রমে PAQ এবং MDN লম্ব আঁকি

(২) PQ রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x = \angle PAB$ এবং $\angle y = \angle QAC$ আঁকি।

(৩) মনেকরি, AB ও AC রেখাংশ MN রেখাকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

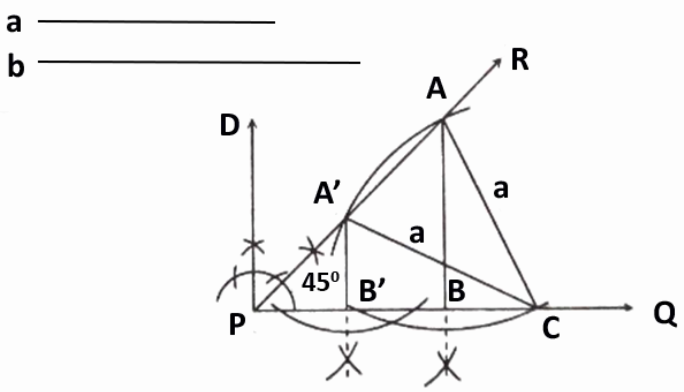
প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, $AD = d$. PQ এবং MN রেখাংশ উভয়ই AD এর উপর অঙ্কিত লম্ব। সুতরাং $PQ \parallel MN$ অতএব, $\angle PAB = \angle ABC = \angle x$ [একান্তর কোণ]

আবার, $\angle QAC = \angle ACB = \angle y$ [একান্তর কোণ]

$\therefore \Delta ABC$-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

৪. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান :



মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি PQ থেকে PC = b কেটে নিই। PC রেখাংশের P বিন্দুতে ∠CPR = 45° আঁকি।

(২) C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে PR এর উপর একটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) মনেকরি, বৃত্তচাপটি PR কে A ও A' বিন্দুতে ছেদ করে। A ও A' থেকে PC-এর উপর যথাক্রমে AB এবং A'B' লম্ব আঁকি

(৪) এখন A, C এবং A', C যোগ করি। তাহলে, ΔABC অথবা ΔA'B'C-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, অতিভুজ CA অথবা CA' = a

AB ⊥ PC, অতএব ∠ABC = 90°. অনুরূপভাবে ∠A'B'C = 90°

আবার, ∠APB অথবা ∠A' PB' = 45° অতএব ∠PAB = 45°

অথবা, PA'B' = 45°

∴ AB = PB এবং A'B' = PB'

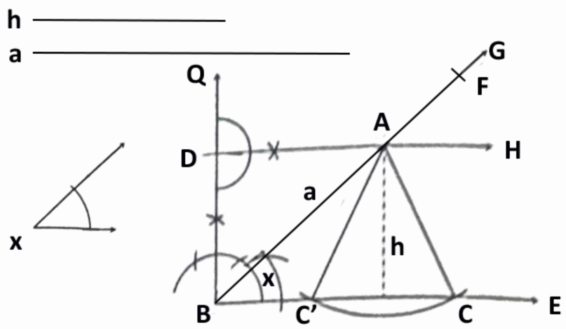
ΔABC -এ AB + BC = PB + BC = PC = b;

আবার, ΔA'B'C-এর A'B' + B'C = PB' + B'C = PC = b

∴ ΔABC অথবা ΔA'B'C নির্ণেয় সমকোণী ত্রিভুজ।

৫। ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



মনে করি, ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ ∠x, উচ্চতা h এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি BE এর B বিন্দুতে ∠EBG = ∠x আঁকি। BG রশ্মি থেকে BF = a কেটে নিই। (২) BE রশ্মির B বিন্দুতে BQ লম্ব আঁকি।

(৩) BQ থেকে BD = h কেটে নিই। D বিন্দুতে DH লম্ব আঁকি। মনে করি, DH, BG কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) A কে কেন্দ্র করে AF এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপটি BE কে C' ও C' বিন্দুতে ছেদ করে।

(৫) A, C এবং A, C' যোগ করি। তাহলে, ΔABC ও ΔABC'-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, ∠ABC = ∠x অথবা ∠ABC' = ∠x

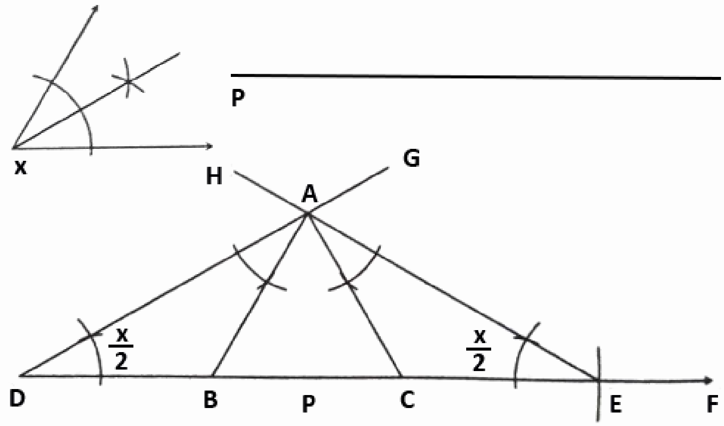
AC = AC' = AF

AB + AC = AB + AF = BF = a অথবা, AB+ AC' = AB + AF = BF = a

অতএব, ΔABC অথবা ΔABC'-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৬। সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা p দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) DF রশ্মি থেকে $DE = p$ কেটে নিই। $\angle x = 60°$ আঁকি।

(২) $\angle x$ কে সমদ্বিখন্ডিত করি। D ও E বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle x$ এর সমান করে $\angle EDG$ এবং $\angle DEH$ আঁকি। (৩) মনেকরি, DG ও EH পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE = \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x$ এবং $\angle AED = \angle EAC = \frac{1}{2}\angle x$ আঁকি।

(৪) মনেকরি, AB ও AC, DE কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\angle ADB = \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x$ সুতরাং $AB = DB$। অনুরূপভাবে, $AC = FC$।

$AB + BC + AC = DB + BC + CE = DE = p.$

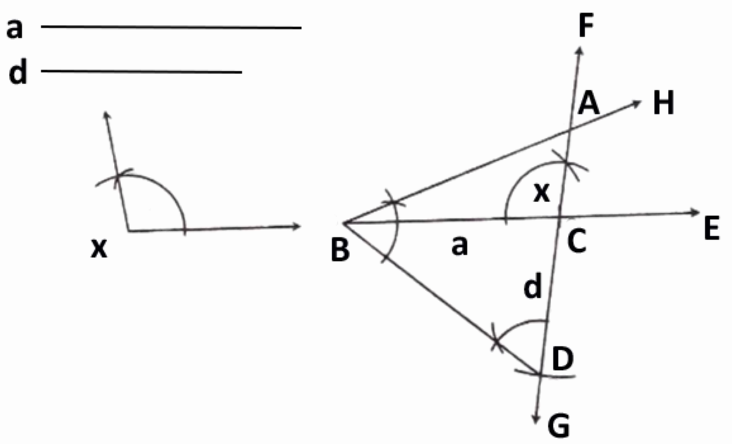
$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x = 60°$

$\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x = 60°$

$\angle BAC = 60°$। সুতরাং, ΔABC নির্ণেয় সমবাহু ত্রিভজ।

৭. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি স্থূলকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



মনে করি, একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমিসংলগ্ন স্থূলকোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণঃ (১) যে কোনো রশ্মি BE থেকে $a = BC$ কেটে নেই। (২) C বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle BCF$ আঁকি এবং FC কে G পর্যন্ত বর্ধিত করি। (৩) CG রশ্মি থেকে $d = CD$ অংশ কেটে নিই। (৪) B, D যোগ করি। (৫) BD রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle CDB$ এর সমান $\angle DBH$ আঁকি। মনেকরি, BH রশ্মি CF রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ। প্রমাণঃ ΔABD-এ $\angle ADB = \angle DBA$ (অঙ্কনানুসারে) $AB = AD$ $AB - AC = AD - AC = CD = d$ এখন ΔABC-এ $BC = a$ এবং $\angle ACB =$ স্থূলকোণ। $\therefore \Delta ABC$-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।	

অধ্যায় ৭ ৭.২

ব্যবহারিক জ্যামিতি
Practical Geometry

১. সমকোণী ত্রিভূজের অপর দুইটি কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকলে নিম্নের কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব।

ক. 63° ও 36° খ. 30° ও 70°

গ. 40° ও 50° ঘ. 80° ও 20°

ব্যাখ্যা: সমকোণী ত্রিভুজে একটি কোণ সমকোণ। বাকি দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ হবে। সূতরাং (40° + 50°) বা 90°।

২. একটি ত্রিভূজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি. ও 9 সে.মি. হলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি?

ক. 4 সে.মি. খ. 5 সে.মি. গ. 6 সে.মি. ঘ. 13 সে.মি.

ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

৩. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 18 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?

ক. 36 বর্গ সে.মি. খ. 81 বর্গ সে.মি. গ. 162 বর্গ সে.মি. ঘ. 324 বর্গ সে.মি.

ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 18 \times 18 = 162$ বর্গ সে.মি.

৪. নির্দিষ্ট একটি চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব যদি দেয়া থাকে—

i. চারটি বাহু ও একটি কোণ

ii. তিনটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

iii. দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. ii গ. i, ii ঘ. i, ii ও iii

৫. রম্বসের-

i. চারটি বাহু পরস্পর সমান

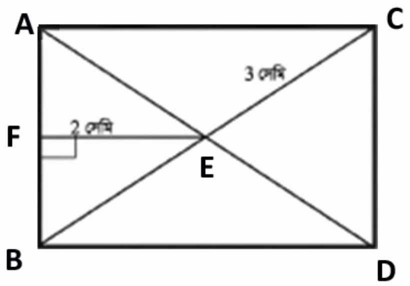
ii. বিপরীত কোণ সমান

iii. কর্ণদ্বয় পস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i, ii খ. i, iii গ. ii, iii ঘ. i, ii ও iii

MCQ Answers:
১। গ
২। গ
৩। গ
৪। ঘ
৫। ঘ
৬। খ
৭। খ
৮। ক



চিত্রে EF =2 সে.মি., DE = 3 সে.মি.। ABCD একটি আয়ত। উপরের তথ্যের আলোকে (৬-৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৬. BF দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক. 1 খ. $\sqrt{5}$ গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 5

ব্যাখ্যা: আমরা জানি,

আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

BE = DE = 3 সে.মি.

ΔBEF সমকোণী ত্রিভুজে, $BF^2 + FE^2 = BF^2$

বা, $BF^2 = BF^2 - FE^2$

বা, $BF^2 = 3^2 - 2^2$

বা, $BF^2 = 5$

৭. AB = কত সে.মি.?

ক. 2 খ. $2\sqrt{5}$ গ. $5\sqrt{2}$ ঘ. 10

ব্যাখ্যা: $AB = 2 \times BF = 2\sqrt{5}$ সে.মি.

৮. ABCD এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক. $8\sqrt{5}$ খ. 20 গ. $12\sqrt{5}$ ঘ. $32\sqrt{5}$

ব্যাখ্যা: AC= BD = BE + DE = 3+ 3 = 6 সে.মি.

$\therefore BC=\sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16} = 4$

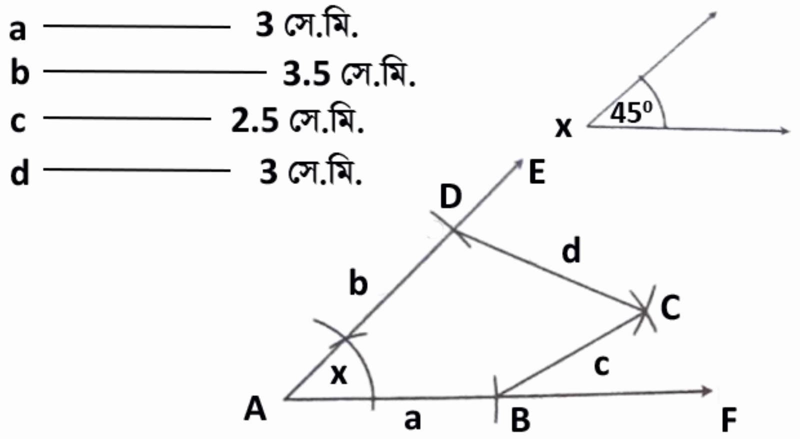
$\therefore$ ABCD এর ক্ষেত্রফল $= AB \times BC = 2\sqrt{5} \times 4$

$= 8\sqrt{5}$ বর্গ সে.মি.

৯। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর:

(ক) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3 সে.মি, এবং একটি কোণ 45°।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু যথাক্রমে a = 3 সে.মি., b = 3.5 সে.মি., c = 2.5 সে.মি. ও d = 3 সে.মি. এবং একটি কোণ ∠x = 45°। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণঃ

(১) যেকোনো রশ্মি AF থেকে AB = a=3 সে.মি. কেটে নিই। A বিন্দুতে ∠BAE = ∠x = 45° আঁকি।

(২) AE থেকে AD = b = 3.5 সে.মি. কেটে নিই।

(৩) এখন, B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c = 2.5 সে.মি. এবং d = 3 সে.মি. ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠BAD এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আক।

(৪) মনেকরি, বৃত্তাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

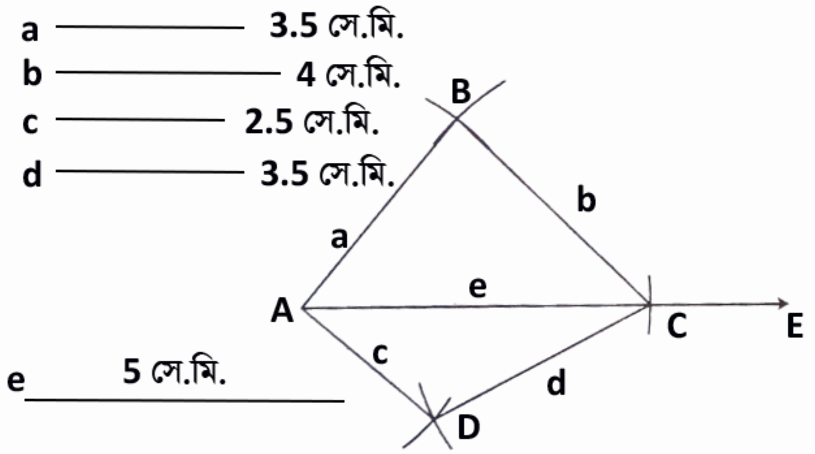
(৫) B, C ও D, C যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, AB = a=3 সে.মি., BC = c=25 সে.মি., CD = d = 3 সেমি., AD = b = 3.5 সেমি. এবং ∠BAD = ∠x = 45°।

∴ ABCD-ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(খ) চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি., 4 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং একটি কর্ণ 5 সে.মি.।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি চতুর্ভুজের বাহু চারটি যথাক্রমে a = 3.5 সে.মি., b = 4 সে.মি., c = 2.5 সে.মি. ও d = 3.5 সে.মি. এবং একটি কর্ণ e= 5 সে.মি. দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে। অকনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি AE থেকে AC = e= 5 সে.মি. কেটে নিই।

(২) A ও C কে কেন্দ্র করে a =3.5 সে.মি. এবং b = 4 সে.মি. ব্যাসার্ধ নিয়ে AC এর একই

পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনেকরি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) আবার, A ও C কে কেন্দ্র করে c =2.5 সে.মি. এবং d = 3.5 সে.মি. ব্যাসার্ধ নিয়ে AC এর যে পাশে B বিন্দু তার বিপরীত পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

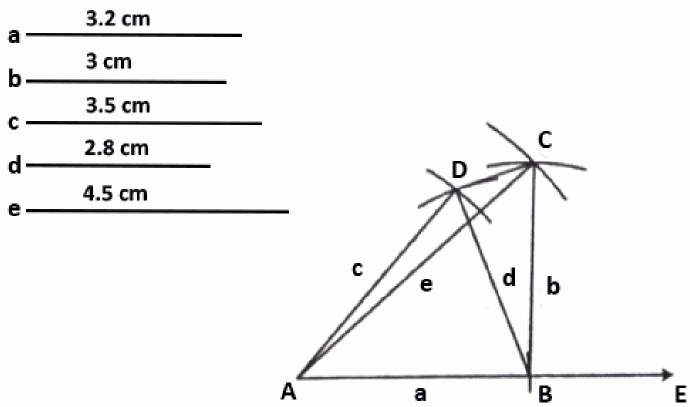
(৪) এখন, A, B; B, C; C, D এবং A, D যোগ করি। তাহলে ABCD-ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, AC কর্ণ = e= 5 সে.মি., AB=a = 3.5 সে.মি., BC=b = 4 সে.মি., AD = c = 2.5 সে.মি. ও CD=d = 3.5 সে.মি.।

সুতরাং, ABCD-ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(গ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি., 3 সে.মি., 3.5 সে.মি, এবং দুইটি কর্ণ 2.8 সে.মি., ও 4.5 সে.মি.।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহ a = 3.2 সে.মি. b = 3 সে.মি., C = 3.5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ 2.8 সে.মি., ও 4.5 সে.মি. দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি AE থেকে AB = a = 3.2 সে.মি, কেটে নিই।

(২) A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c = 3.5 সে.মি. ও d = 2.8 সে.মি, ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) মনে করি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। D, A এবং D, B যোগ করি।

(৪) আবার, A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে e = 4.5 সে.মি, এবং b = 3 সে.মি, ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

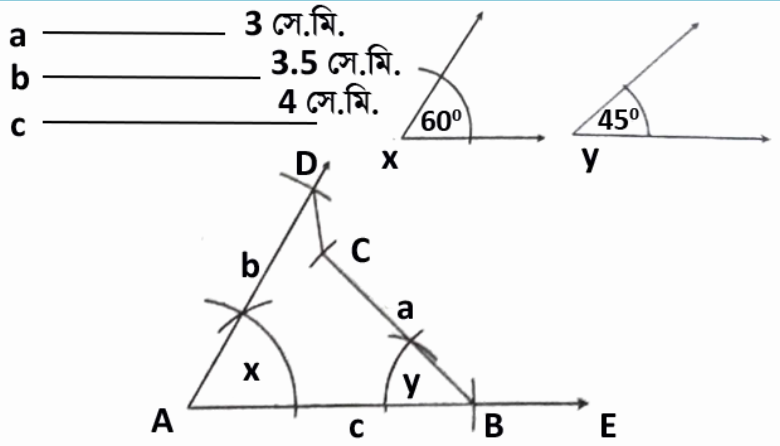
(৫) মনেকরি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। C, A; C, B এবং C, D যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, AB = a = 3.2 সে.মি., BC = b = 3 সে.মি., AD = c = 3.5 সে.মি এবং কর্ণ AC = 4.5 সে.মি., ও কর্ণ BD = d = 2.8 সে.মি.।

সুতরাং, ABCD-ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

(ঘ) তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 4 সে.মি. এবং দুইটি কোণ 60° ও 45°।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে $a = 3$ সে.মি., $b = 3.5$ সে.মি., $c = 4$ সে.মি, এবং দুইটি কোণ $\angle x = 60°$ এবং $\angle y = 45°$। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি AE থেকে $AB = c = 4$ সে.মি, কেটে নিই। A বিন্দুতে $\angle BAD = \angle x = 60°$ এবং B বিন্দুতে $\angle ABC = \angle y = 45°$ আঁকি।

(২) $AD = b = 3.5$ সে.মি, এবং $BC = a = 3$ সে.মি. কেটে নিই ।

(৩) D, C যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

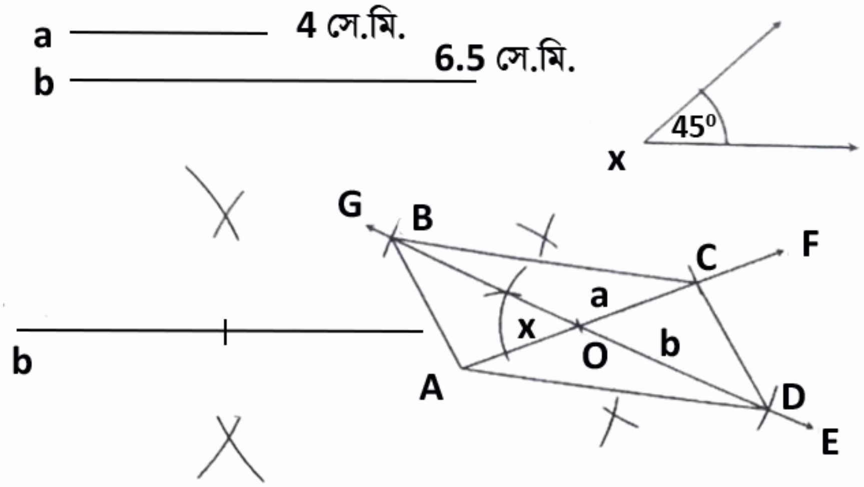
প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, $AB = c = 4$ সে.মি., $BC = a = 3$ সে.মি., $AD = b = 3.5$ সে.মি. এবং $\angle BAD = \angle x = 60°$ ও $\angle ABC = \angle y = 45°$

অতএব, ABCD-ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ ।

১০. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে সামান্তরিক অঙ্কন করঃ

(ক) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 6.5 সে.মি, এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 45°।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a = 4$ সে.মি. ও $b = 6.5$ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x = 45°$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি AF থেকে $AC = a = 4$ সে.মি. কেটে নিই। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি।

(২) O বিন্দুতে $\angle AOG = \angle x = 45°$ আঁকি।

(৩) OG এর বিপরীত রশ্মি OE আঁকি।

(৪) কর্ণ b কে সমদ্বিখণ্ডিত করি। OG এবং OE থেকে; $\frac{1}{2}$b এর সমান করে OB এবং OD অংশ কেটে নিই।

(৫) এখন, A, B, B, C; C, D এবং D, A যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

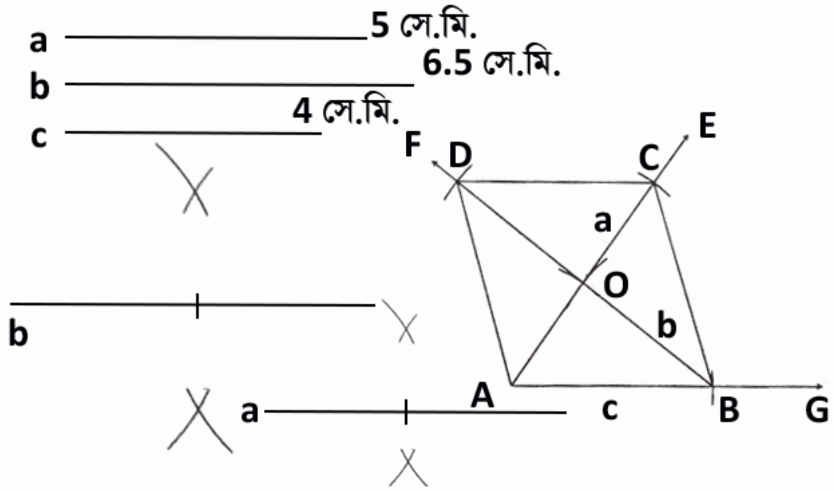
প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, AC = a = 4 সে.মি.।

$BD = OB + OD = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$ এবং $\angle AOB = \angle x = 45°$

অতএব, ABCD-ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

(খ) একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি, এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., 6.5 সে.মি.।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, সামান্তরিকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য c = 4 সে.মি, এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a = 5 সে.মি. ও b = 6.5 সে.মি. দেয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) a = 5 সে.মি, ও, b = 6.5 সে.মি., বিশিষ্ট কর্ণদ্বয়কে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করি।

(২) যেকোনো রশ্মি AG থেকে AB = c = 4 সে.মি কেটে নিই।

(৩) A ও B কে কেন্দ্র করে $\frac{1}{2}$a এবং $\frac{1}{2}$b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একটি পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৪) মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O; B, O যোগ করি। AO কে AE বরাবর এবং BO কে BF বরাবর বর্ধিত করি।

(৫) OB থেকে $\frac{1}{2}a = OC$ এবং OF থেকে $\frac{1}{2}b = OD$ অংশ কেটে নিই।

(৬) A, D; D, C ও B, C যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: ΔAOB ও ΔCOD এ, $AO = OC = \frac{1}{2}a$, $BO = OD = \frac{1}{2}b$ [অঙ্কন অনুসারে] এবং, অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB = \angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

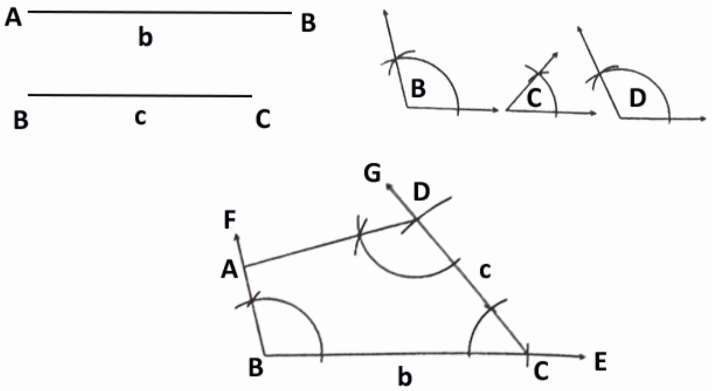
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$

$\therefore AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle CDO$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

∴ AB ও CD সমান ও সমান্তরাল। অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল। অতএব, ABCD- ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

১১. ABCD চর্তুভুজের AB ও BC বাহু এবং ∠B, ∠C ও ∠D কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB = b, BC = c এবং ∠B, ∠C ও ∠D দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = b কেটে নিই। B বিন্দুতে ∠CBF = ∠B এবং C বিন্দুতে ∠BCG = ∠C আঁকি।

(২) CG থেকে CD = c কেটে নিই।

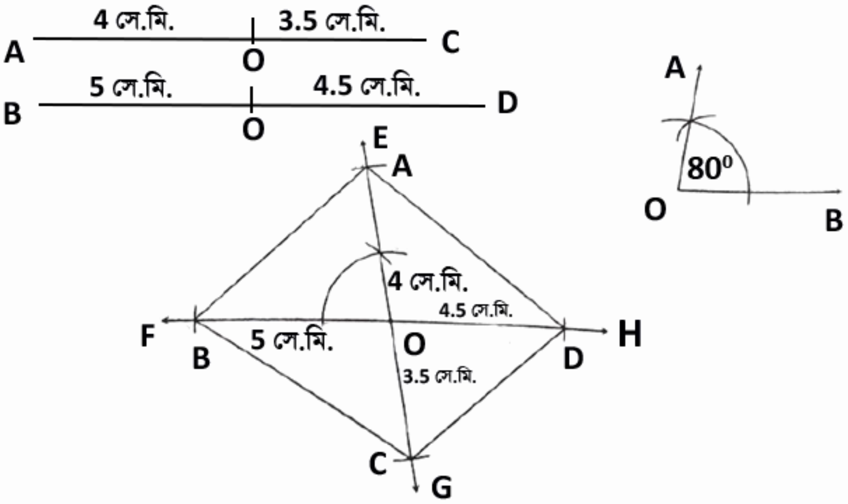
(৩) D বিন্দুতে ∠CDA = ∠D আঁকি।

(৪) মনে করি, DA, BF কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, BC = b, CD = c এবং ∠ABC =∠B, ∠BCD = ∠C ও ∠CDA = ∠D
সুতরাং, ABCD-ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

১২. ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ যথাক্রমে OA = 4 সে.মি, OB =5 সে.মি., OC = 3.5 সে.মি., OD = 4.5 সে.মি. ও ∠AOB = 80°. চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু এবং কর্ণ দুইটির খণ্ডিতাংশ চারটি যথাক্রমে OA = 4 সে.মি, OB =5 সে.মি., OC = 3.5 সে.মি., OD = 4.5 সে.মি. ও ∠AOB = 80°। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) O বিন্দু দিয়ে FH রশ্মি আঁকি। OF থেকে OB = 5 সে.মি. এবং OH থেকে OD = 4.5 সে.মি., কেটে নিই।

(২) ∠BOA = 80° আঁকি।

(৩) OA কে উভয়দিকে E ও G পর্যন্ত বর্ধিত করি।

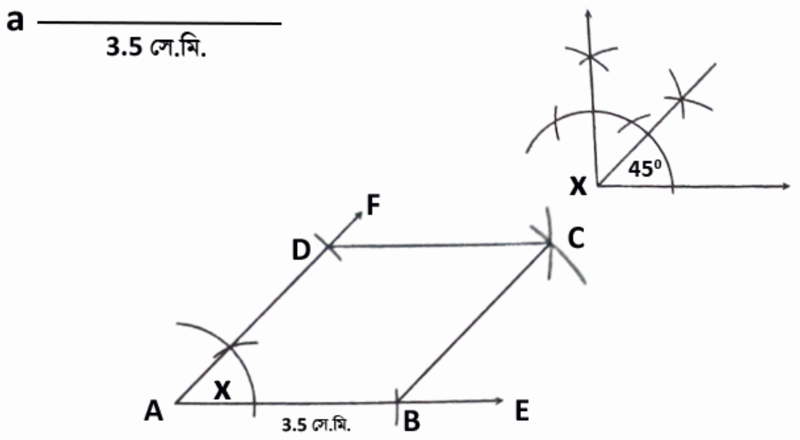
(৪) OE থেকে OA = 4 সে.মি এবং OG থেকে OC = 3.5 সে.মি. কেটে নেই।

(৫) এখন, A, B; B, C; C, D এবং D, A যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে, OA+OC = AC, OB+OD = BD এর ∠AOB = 80°। অতএব, ABCD-ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

১৩. রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি. ও একটি কোণ 45°; রম্বসটি আঁক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে.মি. এবং একটি কোণ ∠x = 45°। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যে কোন রশ্মি AE থেকে AB = a = 3.5 সে.মি. কেটে নিই। A বিন্দুতে ∠BAF = 45° আঁকি। (২) AF রশ্মি থেকে AD = a =3.5 সে.মি. কেটে নিই।

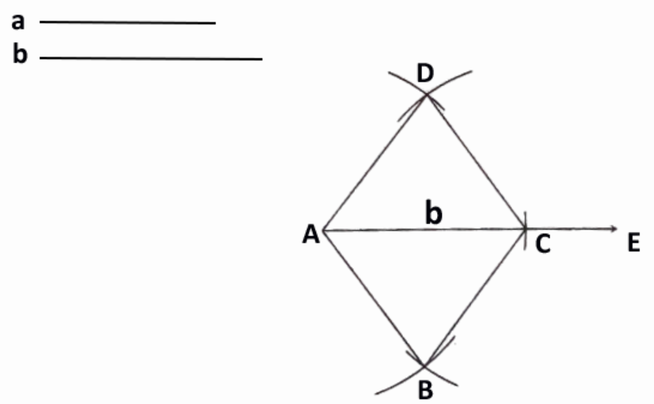
(৩) B ও D কে কেন্দ্র করে a = 3.5 সে.মি. ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠BAD কোণের অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে c বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) এখন, B, C এবং D, C যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে, AB = BC = CD = DA = a= 3.5 সে.মি. এবং ∠BAD = 45°। অতএব, ABCD-ই নির্ণেয় রম্বস।

১৪. রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, রম্বসের কর্ণের দৈর্ঘ্য b ও বাহুর দৈর্ঘ্য a দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি AE থেকে b এর সমান করে AC অংশ কেটে নিই।

(২) AC এর A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

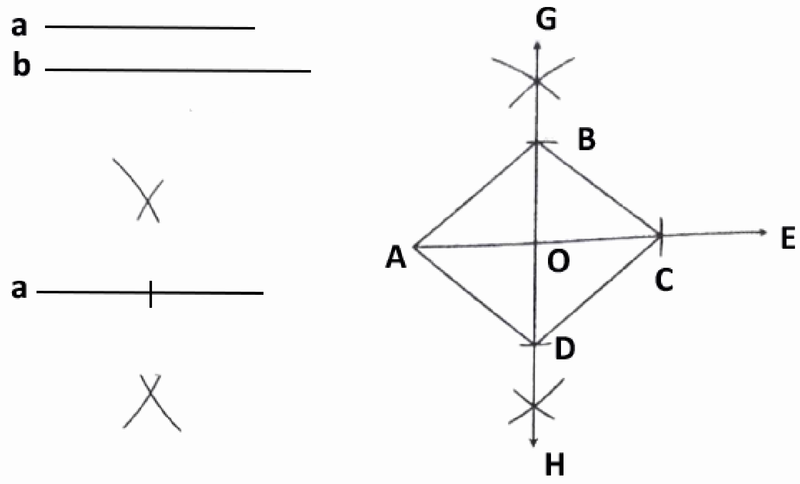
(৪) আবার, A ও C বিন্দকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AC এর যে পাশে D বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, A, B; A, D; B, C ও C, D যোগ করি। ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে AB = BC= CD = DA = a এবং কর্ণ AC = b। অতএব ABCD-ই নির্ণেয় রম্বস।

১৫. রম্বসের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABCD রম্বসের কর্ণ দুইটি a ও b দেওয়া আছে। রম্বসাটি আঁকতে হবে। অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি AE থেকে b এর সমান করে AC কেটে নিই।

(২) AC এর লম্বসমদ্বিখন্ডক GH রশ্মি আঁকি যা AC কে O বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) OG ও OH রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}$a এর সমান করে OB ও OD কেটে নিই।

(৪) A, B; A, D; C, B ও C, D যোগ করি। তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

প্রমাণ: যেহেতু $OB \perp AC$ এবং $OD \perp AC$

সেহেতু $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90°$

এখানে, $AO=OC = \frac{b}{2}$ এবং $OB = OD = \frac{a}{2}$

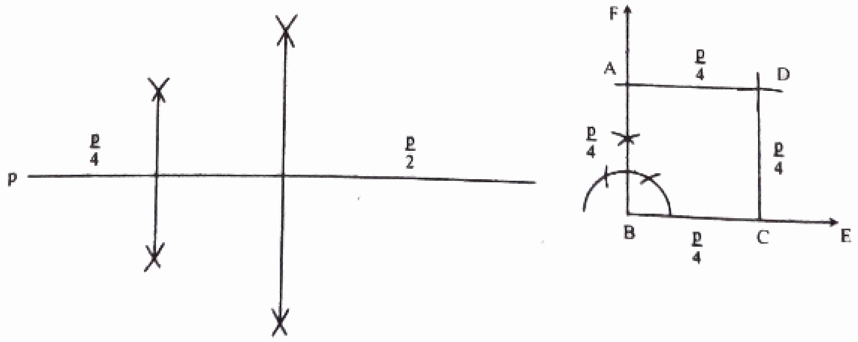
ΔOBC সমকোণী ত্রিভুজে, $BC=\sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

অনুরূপভাবে, $AB = CD = DA = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$\therefore$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে এবং প্রত্যেকটি বাহু সমান বলে ABCD চতুর্ভুজটি একটি রম্বস।

১৬. বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা p দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁকতে হবে। অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি BE হতে BC = কেটে নিই।

(২) BE রশ্মির B বিন্দুতে $\angle EBF = 90°$ আঁকি।

(৩) BF হতে $BA = \frac{p}{4}$ নিই।

(৪) A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{p}{4}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle EBF$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

(৫) A, D এবং C, D যোগ করি। তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ: ABCD চতুর্ভুজে,

$AB=BC= CD = DA = \frac{p}{4}$ এবং $\angle ABC = 90°$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

এবং $AB+ BC + CD + DA = \frac{p}{4} + \frac{p}{4} + \frac{p}{4} + \frac{p}{4} = 4 \times \frac{p}{4} = p$

অতএব, ABCD-ই উদ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র। (প্রমাণিত)

১৭. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5 সে.মি., ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., উপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

গ. ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

সমাধান:

ক. মনে করি, অপর বাহুর দৈর্ঘ্য x সে.মি.।

সুতরাং, সমকোণী ত্রিভুজটিতে পিথাগোরাসের উপপাদ্য হতে পাই,

$5^2 = 4^2 + x^2$

বা, $x^2 = 25 - 16$

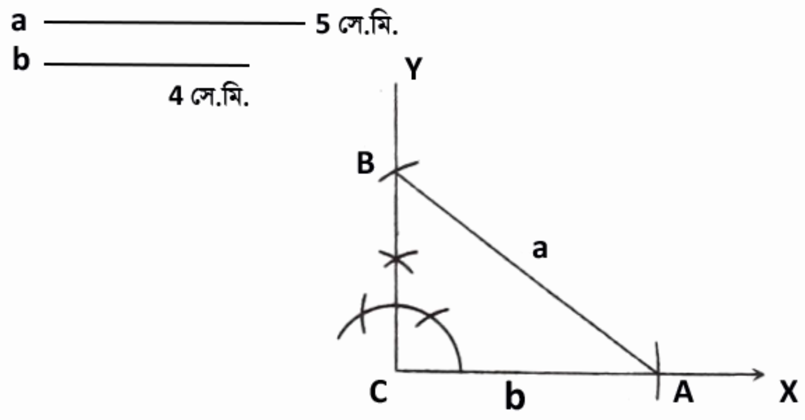
বা, $x^2 = 9$

বা, $x = \sqrt{9}$

$\therefore x = 3$ সে.মি.

$\therefore$ অপর বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি.।

খ.



মনে করি, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য a= 5 সে.মি. এবং এক বাহুর দৈর্ঘ্য b = 4 সে.মি.। সমকোণী ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো একটি রশ্মি CX হতে CA = b = 4 সে.মি. কেটে নিই।

(২) CA এর C বিন্দুতে CY লম্ব আঁকি।

(৩) A কে কেন্দ্র করে অতিভুজ a = 5 সে.মি. এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা CY কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) A, B যোগ করি। অতএব ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ. খ-এ অঙ্কিত ΔABC এর পরিসীমা = AB+ BC + CA

= (5+3+4) সে.মি. = 12 সে.মি.

এখন এমন একটি বর্গ আঁকতে হবে যার পরিসীমা ΔABC এর পরিসীমার সমান।

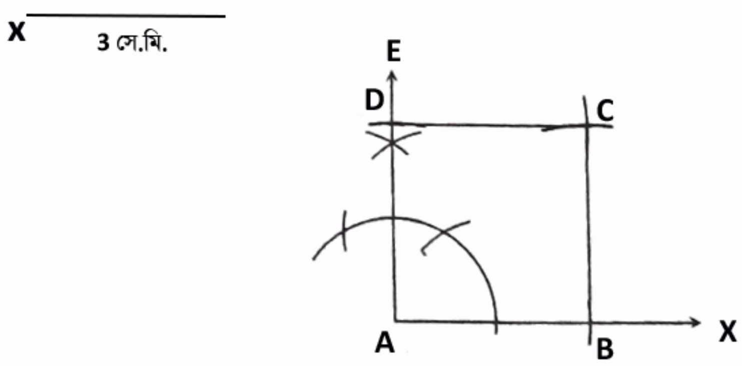
∴ বর্গের পরিসীমা = 12 সে.মি.।

বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে

$4a = 12$ বা, $a = \frac{12}{4}$

∴ $a = 3$ সে.মি.

সুতরাং, বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি.।



মনে করি, কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য x = 3 সে.মি. দেওয়া আছে। বর্গটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণঃ

(১) যেকোনো রশ্মি AX হতে AB =x নিই। AB এর উপর A বিন্দুতে AE লম্ব আঁকি।

(২) AE হতে AD =x নিই। এখন B ও D কে কেন্দ্র করে x এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠BAD এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) B, C ও D, C যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট বর্গ।

১৮. ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে.মি, BC = 5 সে.মি, ∠A = 85°, ∠B= 80° ও ∠C = 95°

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

ক. ∠D এর মান নির্ণয় কর।

খ. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

গ. প্রদত্ত বাহু দুইটিকে একটি সামান্তরিকের বাহু এবং ∠B= 80° ধরে, সামান্তরিকটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে, ∠A = 85°, ∠B= 80° ও ∠C = 95°

আমরা জানি, চতুর্ভুজের চার কোণের সামষ্টি দুই সমকোণ।

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

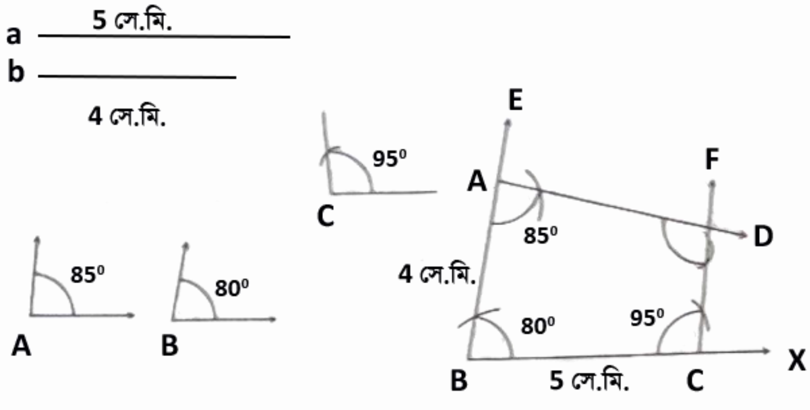
বা, $\angle D = 360° - (\angle A + \angle B + \angle C)$

বা, $\angle D = 360° - (85° + 80° + 95°)$

বা, $\angle D = 360° - 260°$

$\angle D = 100°$

খ.



মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে.মি. = a, BC = 5 সে.মি. = b, ∠A = 85°, ∠B= 80° ও ∠C = 95° দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

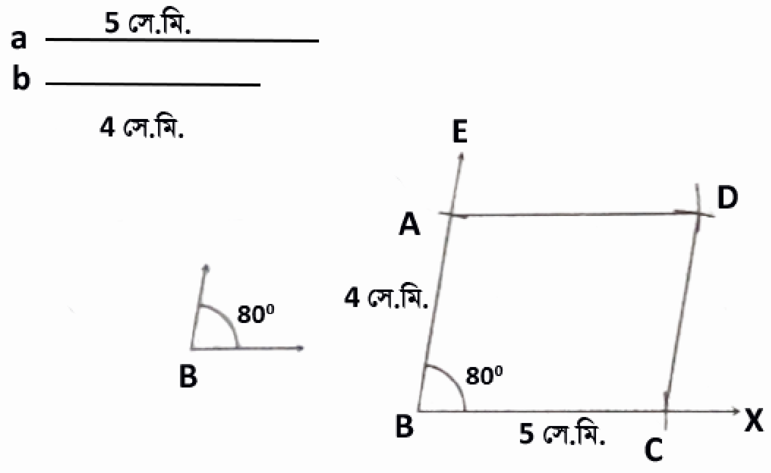
(১) যেকোনো রশ্মি BX থেকে BC = b কেটে নেই।

এখন B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে ∠CBE = ৪) এবং ∠BCF = 95 আঁকি।

(২) BE রশ্মি থেকে BA = a কেটে নেই এবং A বিন্দুতে ∠BAG = 85° আঁকি। মনে করি, AG ও CF রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) সুতরাং, AB = 4 সে.মি., BC = 5 সে.মি. এবং ∠A = 85°, ∠B= 80° ও ∠C = 95° তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

গ.



মনে করি, ABCD সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু AB = 4 সে.মি. = a, BC = 5 সে.মি. = b এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ ∠B= 80° দেয়া আছে। ABCD সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি BX থেকে BC = a কেটে নিই। BC এর B বিন্দুতে ∠CBE = 80° আঁকি।

(২) BE রশ্মি থেকে BA = a কেটে নিই। এখন A ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে b ও a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠ABC এর অভ্যন্তরে দুই বৃত্তচাপ আঁকি।

(৩) মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A, D এবং C, D যোগ করি। (৪) সূতরাং BC = AD = 5 সে.মি, এবং BA = CD = 4 সে.মি, তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

১৯. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. ও 6 সে.মি., এবং বৃহত্তম বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ ∠x = 60° ও ∠y = 50°

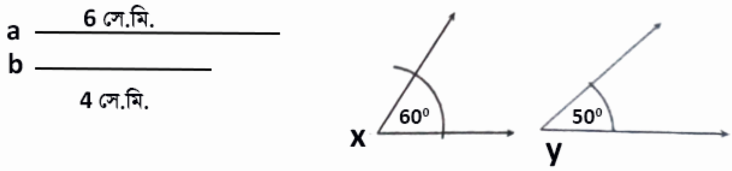
ক. প্রদত্ত তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ট্রাপিজিয়ামটি আঁক (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

গ. উদ্দীপকের বাহু দুটিকে সামান্তরিকের দুটি কর্ণ ও ∠y কে অন্তর্ভুক্ত কোণ বিবেচনা করে সামান্তরিকটি আঁক (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)।

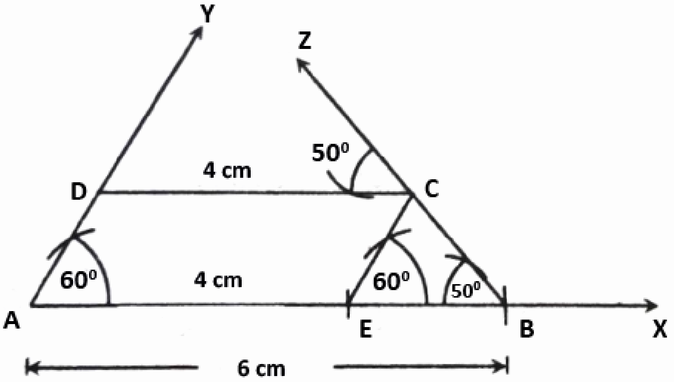
সমাধান:

ক.



দেওয়া আছে, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় a = 6 সে.মি. এবং b = 4 সে.মি. যেখানে a>b এবং বৃহত্তম বাহু সংলগ্ন কোণদ্বয় ∠x = 60° ও ∠y = 50°

খ.



অঙ্কনের বিরণ:

(১) যে কোনো রশ্মি AX থেকে $AB = a = 6$ সে.মি. নেই।

(২) AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x = 60°$ এর সমান $\angle BAY$ এবং B বিন্দুতে $\angle y = 50°$ এর সমান $\angle ABZ$ আঁকি।

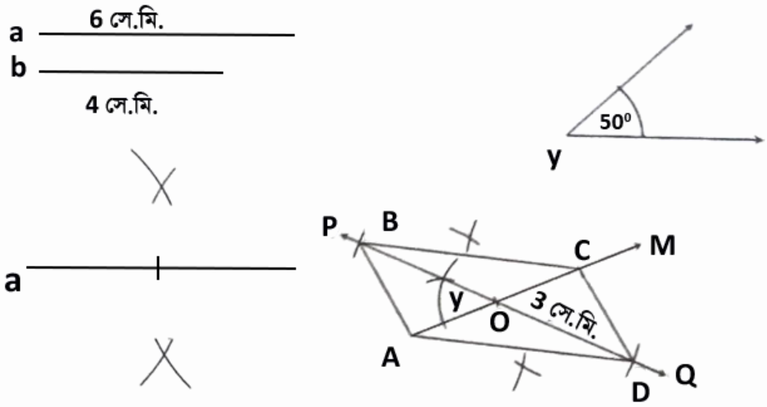
(৩) আবার AB রেখাংশ থেকে $AE = b = 4$ সে.মি. কেটে নেই।

(৪) E বিন্দুতে $EC \parallel AY$ আঁকি যা BZ রশ্মিকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৫) আবার $CD \parallel BA$ আঁকি যা AY রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট ট্রাপিজিয়াম।

গ.



মনে করি, একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $b = 4$ সে. মি, ও $a = 6$ সে.মি, এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y = 50°$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

(১) যেকোনো রশ্মি AM থেকে $AC = b = 4$ সে.মি, কেটে নিই। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি।

(২) O বিন্দুতে $\angle AOP = \angle y = 50°$ আঁকি।

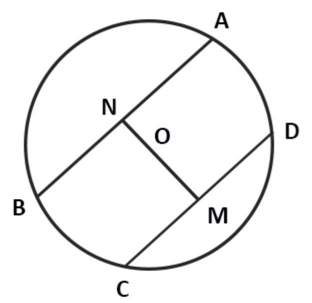
(৩) OP এর বিপরীত রশ্মি OQ আঁকি।

(৪) কর্ণ a কে সমদ্বিখণ্ডিত করি। OP এবং OQ থেকে $\frac{1}{2}a$ এর সমান করে OB এবং OD অংশ কেটে নিই।

(৫) এখন, A, B, B, C; C, D এবং D, A যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রশ্ন-১। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত। এর AB ও CD সমান্তরাল জ্যা-দ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। N, M যোগ করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

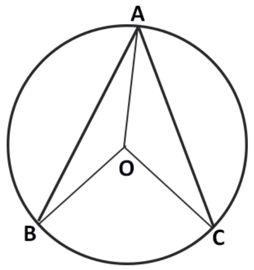
অঙ্কন: O, N এবং O, M যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু N. $\therefore$ ON $\perp$ AB	[বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা-এর ওপর লম্ব]
(২) আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যা এর মধ্যবিন্দু M. $\therefore$ OM $\perp$ CD অর্থাৎ, ON ও OM, O বিন্দু হতে যথাক্রমে AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব। সুতরাং, ON এবং OM একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ, MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব। (প্রমাণিত)	[বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব]

প্রশ্ন-২। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, AB = AC.

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AB ও AC দুইটি জ্যা। O, A যোগ করা হল। AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ OA এর সাথে সমান কোণ $\angle OAB$ ও $\angle OAC$ উৎপন্ন করে অর্থাৎ $\angle OAB = \angle OAC$. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$.

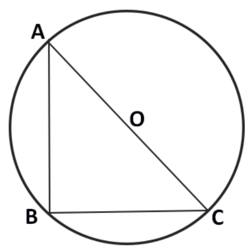
অঙ্কন: O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB-এ, $OA = OB$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
$\therefore \angle OBA = \angle OAB$	[সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]
(২) আবার, ΔAOC-এ, $OA = OC$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
$\therefore \angle OCA = \angle OAC$	
এখন, $\angle OAB = \angle OAC$	[দেওয়া আছে]
$\therefore \angle OBA = \angle OCA$	
(৩) এখন, ΔAOB ও ΔAOC-এর মধ্যে, $OB = OC$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
$\angle OAB = \angle OAC$ এবং $\angle OBA = \angle OCA$	
$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$	
সুতরাং, $AB = AC$.	
(প্রমাণিত)	

প্রশ্ন-৩। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান:



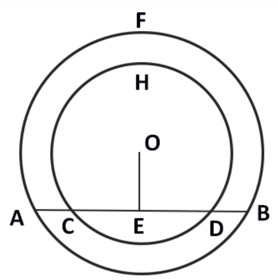
বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, সমকোণী ΔABC-এর $\angle ABC =$ এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ। শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। মনে করি, এই বৃত্তের কেন্দ্র O. প্রমাণ করতে হবে যে, O, AC-এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) দেওয়া আছে, $\angle ABC$ = এক সমকোণ ∴ $\angle ABC$, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। ∴ A, B, C বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাস AC.	[অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]
(২) সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাস AC, এর ওপর অবস্থিত এবং এবং $OA = OC$ ∴ O, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। (দেখানো হলো)	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

প্রশ্ন-৪। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির জ্যা AB অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = BD.

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, AFB ও CHD উভয় বৃত্তের কেন্দ্র O. AFB বৃত্তের জ্যা AB, বৃত্ত CHD কে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD.

অঙ্কন: $OE \perp AB$ টানি।

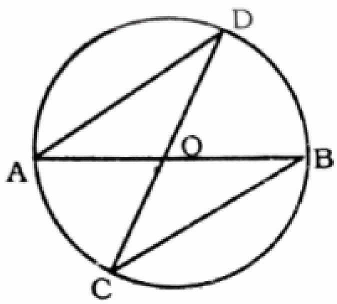
প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) AFB বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OE \perp$ জ্যা AB. ∴ $AE = BE$ ... ... (i)	[বৃত্তের কেন্দ্র হতে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) আবার, CHD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OE \perp$ জ্যা CD. ∴ $CE = DE$ ... ... (ii)	
(৩) সমীকরণ (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $AE - CE = BE - DE$ বা, $AC = BD$ ∴ $AC = BD$. (প্রমাণিত)	[$AE - CE = AC$ এবং $BE - DE = BD$]

(৬) এখন (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, BP+ PE = DQ + QE ∴ BE = DE .... (iii) আবার, AB = CD .... (iv) (৭) (iv) নং হতে (iii) নং বিয়োগ করে পাই, AB – BE = CD – DE ∴AE = CE ... ... (v) সুতরাং (iii) নং এবং (v) নং থেকে দেখা যাচ্ছে যে, জ্যাদ্বয়ের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান। (দেখানো হলো)	

৬. দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি AB, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস। AD ও BC যথাক্রমে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু A ও B থেকে বিপরীত দিকে দুটি জ্যা এবং AD = BC. প্রমাণ করতে হবে যে, AD || CB.

অঙ্কন: O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔAOD এবং ΔBOC-এ

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OD = OC [একই কারণে]

এবং AD = CB [কল্পনা]

∴ ΔAOD ≅ ΔBOCH [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

∴ ∠OAD = ∠OBC

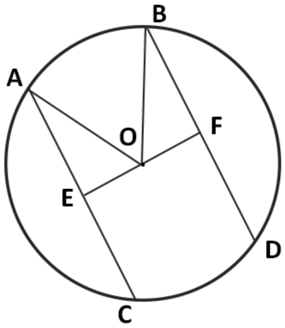
অর্থাৎ, ∠BAD = ∠ABC

ধাপ ২. কিন্তু ∠BAD ও ∠ABC একান্তর কোণ

সুতরাং, AD || CB. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-৭। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যাটি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান:



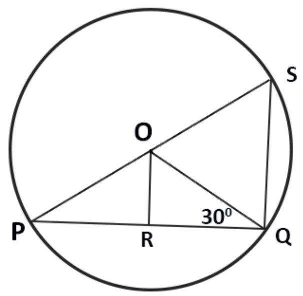
বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ও CD এর দুইটি জ্যা এবং $AB > CD$. OE এবং OF কেন্দ্র O হতে যথাক্রমে AB ও CD এর ওপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $OE < OF$.

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য জ্যা-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।	
$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB.$	[O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OE \perp AB$]
$\therefore CF = DF = \frac{1}{2}CD$	[O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OF \perp CD$]
(২) এখন, দেয়া আছে, $AB > CD$	
বা, $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD$	[উভয় পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]
বা, $AE > CF$	[$AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$]
$\therefore AE^2 > CF^2$	[উভয় পক্ষকে বর্গ করে]
(৩) এখন, সমকোণী ΔOAE এবং সমকোণী ΔOCF-এর,	
অতিভুজ যথাক্রমে OA এবং OC	
$OA^2 = OE^2 + AE^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
এবং $OC^2 = OF^2 + CF^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
(৪) কিন্তু, $OA = OC$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
তাহলে, $OA^2 = OC^2$	
অর্থাৎ, $OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$	
বা, $AE^2 - CF^2 = OF^2 - OE^2$ ..... (i)	
(৫) যেহেতু $AE^2 > CF^2$	
বা, $AE^2 - CF^2 > 0$	
বা, $OF^2 - OE^2 > 0$	
বা, $OF^2 > OE^2$	
বা, $OF > OE$	
বা, $OE < OF$.	
অর্থাৎ, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যাটি ক্ষুদ্রতম জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর। (দেখানো হলো)	

প্রশ্ন-৮। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা $PQ = x$ সে. মি. এবং $OR \perp PQ$.



ক. $\angle QOS$ কোণের পরিমাণ কত?

খ. প্রমাণ কর যে, PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।

গ. $OR = (\frac{x}{2} - 2)$ সে. মি. হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে, $\angle OQP = 30°$

যেহেতু, $OP = OQ$

সেহেতু, ΔOPQ-এ, $\angle OQP = 30° = \angle OPQ$

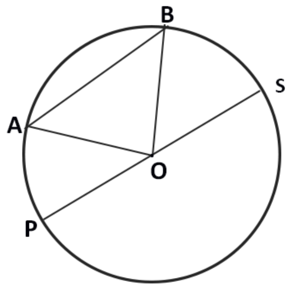
$\therefore \angle QOS = 2 \times \angle SPQ$ [$\because$ ব�ৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ = 2 × বৃত্তস্থ কোণ]

$= 2 \times \angle OPQ$

$= 2 \times 30°$

$\therefore \angle QOS = 60°$ (Ans.)

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।



অঙ্কন: ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা AB নেই। প্রমাণ করতে হবে যে, $PS > AB$। O, A; O, B যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) APSB বৃত্তের, PS জ্যাটি ব্যাস। $\therefore OP = OS = OB = OA$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
(২) ΔAOB-এ, $OA + OB > AB$ বা, $OP + OS > AB$ $\therefore PS > AB$ সুতরাং, PS জ্যাটি বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। (প্রমাণিত)	[আমরা জানি, ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর] [যেখানে PS একটি জ্যা]

গ. এখানে, $PQ = x$ সে. মি. এবং $OR \perp PQ$

$OP = OQ$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore PR = QR = \frac{x}{2}$ সে.মি. এবং $\angle OQR = 30°$

এখন ΔOQR-এ $\tan \angle OQR = \frac{OR}{QR}$

বা, $\tan 30° = \frac{\frac{x}{2}-2}{\frac{x}{2}}$ [দেওয়া আছে, $OR = (\frac{x}{2} - 2)$ সে.মি.]

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{x-4}{2}}{\frac{x}{2}}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x-4}{2} \times \frac{2}{x}$

বা, $x = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$

বা, $x - \sqrt{3}x = -4\sqrt{3}$

বা, $x(1 - \sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$

বা, $x = \frac{-4\sqrt{3}}{-(\sqrt{3}-1)}$

বা, $x = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

বা, $x = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$

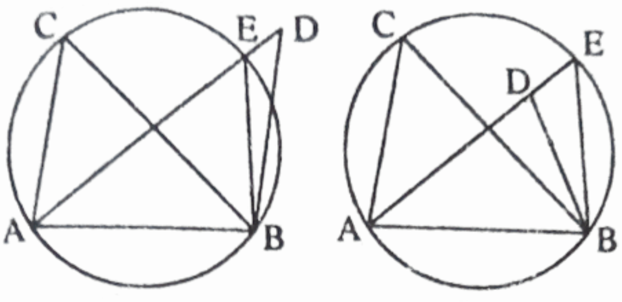
বা, $x = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}$

বা, $x = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$

বা, $x = 6 + 2\sqrt{3}$ (Ans.)

৯. প্রমাণ কর যে, দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করলে, বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।

সমাধান:



চিত্র-১ চিত্র-২

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, A ও B বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ AB এর একই পাশে C ও D বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে। অর্থাৎ $\angle ACB = \angle ADB$। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C এবং D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন: A, B, C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় বলে A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়ে একটি বৃত্ত আঁকা যায়। মনে করি, AD রেখাংশ (চিত্র-১) অথবা AD এর বর্ধিতাংশ (চিত্র-২)বৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। B, E যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু A, B, E এবং C বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

∴ ∠ACB = ∠AEB; [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ]

ধাপ ২. দেওয়া আছে, ∠ACB = ∠ADB

ধাপ ৩. ∠AEB = ∠ADB;

কিন্তু ইহা অসম্ভব,

কারণ চিত্র-১ এ ∠AEB > ∠ADB; [∵ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির যে কোনোটি অপেক্ষা বৃহত্তর]

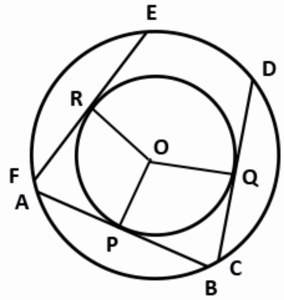
আবার, চিত্র-২ এ ∠ADB > ∠AEB

সুতরাং E ও D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না।

∴ A, B, C, D কিদু চারটি সমবৃত্ত।

১০. প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB, CD ও EF তিনটি সমান জ্যা। AB, CD এবং EF এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R। প্রমাণ করতে হবে যে, P, Q এবং R বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন: O, P; O, Q এবং O, R যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু বৃত্তের জ্যা এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর উপর লম্ব।

∴ OP ⊥ AB

ধাপ ২. অনুরূপে, OQ ⊥ CD এবং OR ⊥ EF.

ধাপ ৩. কেন্দ্র O হতে AB, CD এবং EF এর লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে OP, OQ এবং OR।

যেহেতু AB = CD = EF

∴ OP = OQ = OR; [যেহেতু বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী]

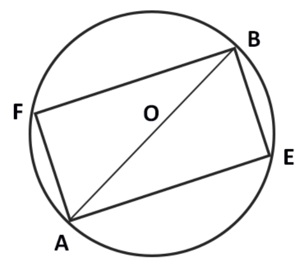
ধাপ ৪. এখন O কে কেন্দ্র করে OP বা OQ বা OR এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলে

P, Q, R বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, P, Q এবং R বিন্দু তিনটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-১১। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান হয়।

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, AEBF বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB ব্যাস। AB ব্যাসের প্রান্তদ্বয় A ও B হতে এর বিপরীত দিকে অঙ্কিত AE ও BF জ্যা-দ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। প্রমাণ করতে হবে যে, $AE = BF$.

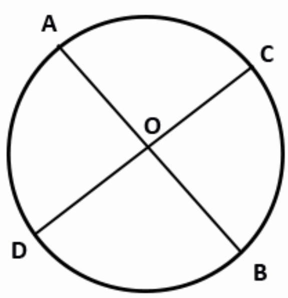
অঙ্কন: A, F এবং B, E যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) AB বৃত্তের ব্যাস।	
$\therefore \angle AEB =$ এক সমকোণ।	[অর্ধবৃত্তস্থকোণ বলে]
এবং $\angle AFB =$ এক সমকোণ।	[অর্ধবৃত্তস্থকোণ বলে]
(২) এখন ΔAEB এবং ΔAFB -এ	
$\angle AEB = \angle AFB$	[সমকোণ বলে]
$\angle BAE = \angle ABF$	[একান্তর কোণ বলে]
এবং AB বাহু সাধারণ ।	
$\therefore \Delta AEB \cong \Delta AFB$	
$\therefore AE = BF.$ (দেখানো হলো)	

১২. প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে এদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, O বিন্দুটি বৃত্তটির কেন্দ্র।

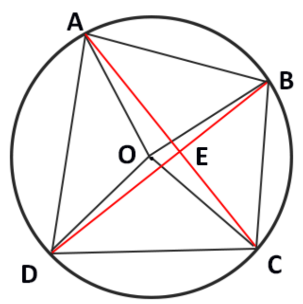
প্রমাণ: যেহেতু AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। সুতরাং $OA = OB$ এবং $OC = OD$ কিন্তু ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করতে পারে না। $\therefore$ AB ও CD উভয়ই ব্যাস $\therefore$ OA বা OB বা OC বা OD বৃত্তটির ব্যাসার্ধ। $\therefore$ O বিন্দুটি বৃত্তটির কেন্দ্র। (প্রমাণিত)	

অধ্যায় ৮ ৮.২

বৃত্ত
Circle

প্রশ্ন-১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

সমাধান:



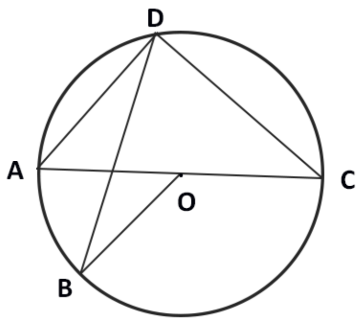
বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। এর AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, O; B, O; C, O এবং D, O যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAED-এ বহিঃস্থ $\angle AEB$ = অন্তঃস্থ $(\angle ADE + \angle EAD)$ অর্থাৎ, $\angle AEB = \angle ADB + \angle CAD$ (২) আবার, AB চাপের ওপর অবস্থিত $\angle ADB$ বৃত্তস্থ কোণ এবং $\angle AOB$ কেন্দ্রস্থ কোণ। $\therefore \angle AOB = 2\angle ADB$ (৩) আবার, CD চাপের ওপর অবস্থিত $\angle CAD$ বৃত্তস্থ কোণ এবং $\angle COD$ কেন্দ্রস্থ কোণ। $\therefore \angle COD = 2\angle CAD$ (৪) $\therefore \angle AOB + \angle COD = 2\angle ADB + 2\angle CAD$ $= 2(\angle ADB + \angle CAD)$ $= 2\angle AEB$ $\therefore \angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$ (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

প্রশ্ন-২। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে, $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

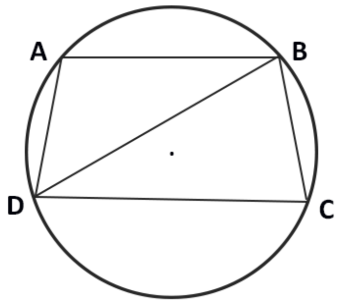
অঙ্কন: A, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। বা, $\angle ADC =$ এক সমকোণ। (২) কিন্তু, আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। $\therefore \angle ADC =$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সুতরাং, $AC =$ বৃত্তের ব্যাস। অর্থাৎ, বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাস AC এর ওপর অবস্থিত। $\therefore$ A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত। (প্রমাণিত)	[দেয়া আছে]

প্রশ্ন-৩। দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

সমাধান:



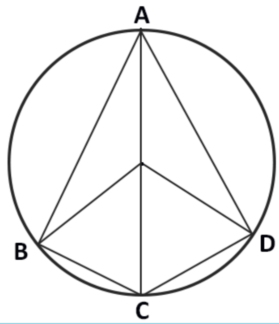
বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ABCD বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের বাহুদ্বয় যথাক্রমে AB ও CD. সুতরাং, এর তির্যক বাহুদ্বয় হল AD ও BC. প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = BC$.

অঙ্কন: B, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ABCD ট্রাপিজিয়ামে, $AB \parallel CD$ এবং BD ছেদক $\therefore \angle ABD = \angle BDC$ অর্থাৎ, AD চাপের ওপর বৃত্তস্থ কোণ = BC চাপের ওপর বৃত্তস্থ কোণ বা, চাপ $AD =$ চাপ BC. বা, জ্যা $AD =$ জ্যা BC $\therefore AD = BC$. (প্রমাণিত)	[কল্পনা অনুসারে] [একান্তর কোণ] [বৃত্তে সমান সমান চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান] [বৃত্তে সমান সমান চাপ সমান সমান জ্যা ছিন্ন করে]

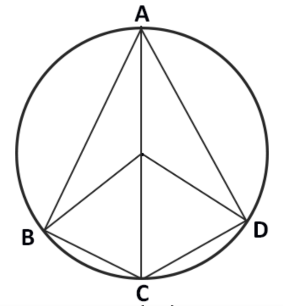
প্রশ্ন-৪। চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OB = 2.5$ সে. মি.



ক. ABCD বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।
খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$
গ. AC ও BD পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$

সমাধান:
ক. দেওয়া আছে,
বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OB = r = 2.5$ সে. মি.
$\therefore$ ABCD বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi r$ সে. মি.
$= 2 \times 3.1416 \times 2.5$ সে. মি.
$= 15.708$ সে. মি. (প্রায়) (Ans.)

খ.

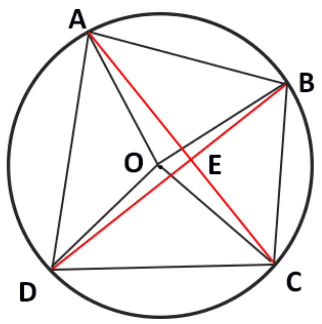


দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের একই উপচাপ BD এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAD$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$. প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$
অঙ্কন: দেওয়া আছে, AD রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AC আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAOB এর বহিঃস্থকোণ $\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO$	[বহিঃস্থকোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
(২) ΔAOB এ $OA = OB$ অতএব, $\angle BAO = \angle ABO$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
(৩) ধাপ (১) ও (২) থেকে $\angle BOC = 2\angle BAO$	[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোন দুইটি সমান]
(৪) একইভাবে ΔAOD থেকে $\angle DOC = 2\angle DAO$	
(৫) ধাপ (৩) ও (৪) থেকে $\angle BOC + \angle DOC = 2\angle BAO + 2\angle DAO$ অর্থাৎ, $\angle BOD = 2\angle BAD$ বা, $2\angle BAD = \angle BOD$ $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$ (প্রমাণিত)	

গ.

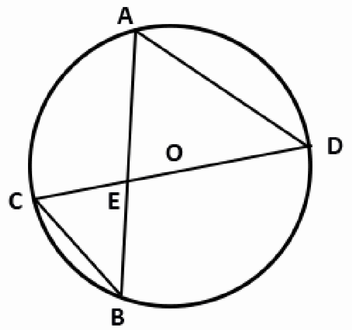


বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তলিখিত চতুর্ভুজ। এর AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, 0; B, O; C, O এবং D, O যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\ \angle AEB$.

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔAED-এ বহিঃস্থ $\angle AEB$ $=$ অন্তঃস্থ $(\angle ADE + \angle EAD)$ অর্থাৎ, $\angle AEB = \angle ADB + \angle CAD$ (২) আবার, AB চাপের ওপর অবস্থিত $\angle ADB$ বৃত্তস্থ কোণ এবং $\angle AOB$ কেন্দ্রস্থ কোণ। $\therefore \angle AOB = 2\ \angle ADB$ (৩) আবার, CD চাপের ওপর অবস্থিত $\angle CAD$ বৃত্তস্থ কোণ এবং $\angle COD$ কেন্দ্রস্থ কোণ। $\therefore \angle COD = 2\ \angle CAD$ (৪) $\angle AOB + \angle COD = 2\ \angle ADB + 2\ \angle CAD$ $= 2(\angle ADB + \angle CAD)$ $= 2\ \angle AEB$ $\therefore \angle AOB + \angle COD = 2\ \angle AEB$ (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।]

৫. ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

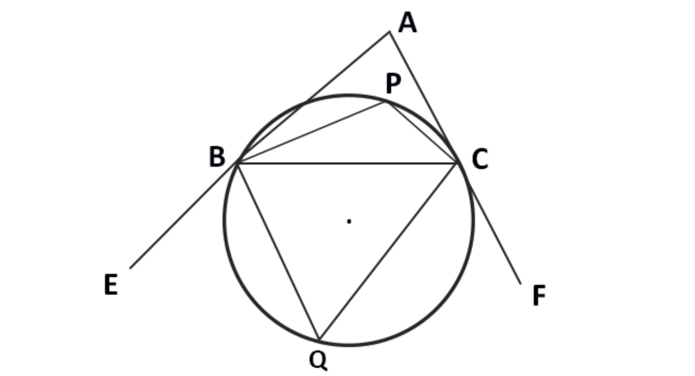


বিশেষ নির্বচন: দেয়া আছে, ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E ছেদ করেছে। A, D এবং B, C যোগ করি। দেখাতে হবে যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

প্রমাণ: ধাপ ১. AC চাপের উপর দণ্ডায়মান দুটি বৃত্তস্থ কোণ $\angle ABC$ এবং $\angle ADC$ $\therefore \angle ABC = \angle ADC$ [একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান] $\therefore \angle EBC = \angle ADE$ ধাপ ২. BD চাপের উপর দন্ডায়মান দুটি বৃত্তস্থ কোণ $\angle BCD$ এবং $\angle BAD$ $\therefore \angle BCE = \angle EAD$ [একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান] ধাপ ৩. ΔAED ও ΔBEC- এ $\angle ADE = \angle EBC$ [ধাপ ১ হতে] $\angle EAD = \angle BCE$ [ধাপ ২ হতে] $\angle AED = \angle BEC$ [বিপ্রতীপ কোণ] $\therefore \Delta AED$ ও ΔBEC সদৃশকোণী।	

প্রশ্ন-১। ΔABC-এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহিঃদ্বিখন্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান:



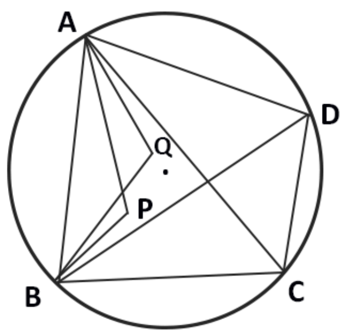
বিশেষ নির্বাচন: ΔABC-এ $\angle B$ ও $\angle C$ -এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BP ও CP, P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। AB বাহুকে E পর্যন্ত এবং AC বাহুকে F পর্যন্ত বর্ধিত করায় যথাক্রমে $\angle EBC$ এবং $\angle FCB$ বহিঃস্থ কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে। $\angle EBC$ এবং $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় অর্থাৎ $\angle B$ এবং $\angle C$ এর বহিঃদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BQ এবং CQ, Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) $\angle ABC + \angle EBC = 2$ সমকোণ বা, $\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle EBC = 1$ সমকোণ। বা, $\angle PBC + \angle QBC = 1$ সমকোণ বা, $\angle PBQ = 1$ সমকোণ। ..... (i) তদ্রুপ, $\angle PCQ = 1$ সমকোণ .... (ii)	[রৈখিক যুগল কোণ] [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে] [$\because$ BP, $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক $\therefore \frac{1}{2}\angle ABC = \angle PBC$ এবং BQ, $\angle EBC$-এর সমদ্বিখণ্ডক $\therefore \frac{1}{2}\angle EBC = \angle QBC$]
(২) (i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই, $\angle PBQ + \angle PCQ = 2$ সমকোণ $\therefore$ চতুর্ভুজ BPCQ-এ $\angle PBQ + \angle PCQ = 2$ সমকোণ অর্থাৎ, চতুর্ভুজ BPCQ এর দুটি বিপরীত কোণ $\angle PBQ$ এবং $\angle PCQ$ পরস্পর সম্পূরক। $\therefore$ B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)	

প্রশ্ন-২। ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিকণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান:



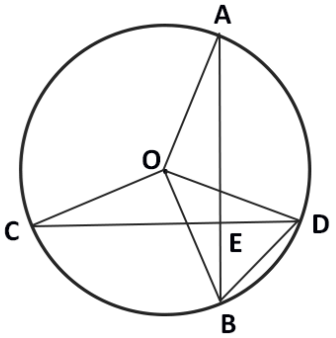
বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। A, B ; B, C; C, D ; D, A এবং A, C ও B, D যোগ করা হলো। ∠CAB এবং ∠CBA এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে AP ও BP পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। আবার, ∠DBA এবং ∠DAB-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BQ ও AQ পরপর Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।
প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) BP, ∠CBA-এর সমদ্বিখণ্ডক। $\therefore \angle ABP = \frac{1}{2}\angle CBA$ (২) AP, ∠CAB-এর সমদ্বিখণ্ডক। $\therefore \angle BAP = \frac{1}{2}\angle CAB$	[দেয়া আছে]
(৩) এখন, ΔABP-এ $\angle ABP + \angle BAP + \angle APB = 180°$ বা, $\frac{1}{2}\angle CBA + \frac{1}{2}\angle CAB + \angle APB = 180°$ বা, $\angle CBA + \angle CAB + 2\angle APB = 360°$ বা, $\angle CBA + \angle CAB + \angle ACB + 2\angle APB$ $= 360° + \angle ACB$ বা, $180° + 2\angle APB = 360° + \angle ACB$ বা, $2\angle APB = 180° + \angle ACB$ $\therefore \angle ACB = 2\angle APB - 180°$ .... (i) একইভাবে, $\angle ADB = 2\angle AQB - 180°$ .... (ii)	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ] [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে] [উভয়পক্ষে ∠ACB যোগ করে] [∵ ΔABC এর তিন কোণের সমষ্টি 180°]
(8) কিন্তু, ∠ACB এবং ∠ADB উভয়ই AB চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle ACB = \angle ADB$ বা, $2\angle APB - 180° = 2\angle AQB - 180°$ বা, $2\angle APB = 2\angle AQB$ $\therefore \angle APB = \angle AQB$ এখন, ∠APB এবং ∠AQB কোণদ্বয় A, B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা AB এর একই পার্শ্বস্থ দুই বিন্দু P ও Q-এ উৎপন্ন এবং সমান। ∴ A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)	[(i) নং ও (ii) নং হতে পাই]

প্রশ্ন-৩। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ।

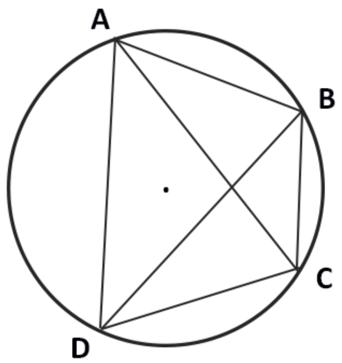
সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত E বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। A, O এবং D, O যোগ করায় $\angle AOD$ উৎপন্ন হয়। আবার, O, C এবং O, B যোগ করায় $\angle BOC$ উৎপন্ন হয়।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।
অঙ্কন: B, D যোগ করি।
প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) একই চাপ AD-এর ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABD$. $\therefore \frac{1}{2}\angle AOD = \angle ABD$ অর্থাৎ, $\angle AOD = 2\angle ABD$ ... ... (i) অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\therefore \angle BOC = 2\angle BDC$ ... ... (ii)	[বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]
(২) (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $\angle AOD + \angle BOC = 2\angle ABD + 2\angle BDC$ বা, $\angle AOD + \angle BOC = 2(\angle ABD + \angle BDC)$ বা, $\angle AOD + \angle BOC =$ $2(\angle EBD + \angle EDB)$ ... ... (iii) এখন, ΔEBD-এর $\angle EBD + \angle EDB = 1$ সমকোণ ... ... (iv)	[কারণ $AB \perp CD$ বলে $\angle BED$ = এক সমকোণ]
(৩) (iv) নং এর মান (iii) নং-এ বসিয়ে পাই, $\angle AOD + \angle BOC = 2 \times 1$ সমকোণ $\therefore \angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)	

প্রশ্ন-৪। ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BC = CD.
সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC

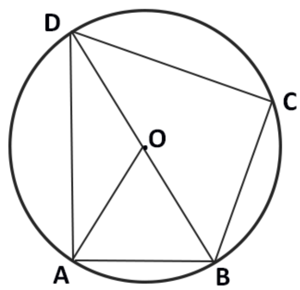
রেখা, ∠BAD-এর সমদ্বিখন্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, BC = CD.

অঙ্কন: B, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। ∴ A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। AC, ∠BAD এর সমদ্বিখণ্ডক ∴ ∠BAC =∠DAC ... ... (i)	[চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে এর শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত] [দেওয়া আছে]
(২) এখন, একই চাপ CD-এর ওপর বৃত্তস্থ ∠DAC এবং বৃত্তস্থ ∠DBC. ∴ ∠DAC = ∠DBC ... ... (ii)	[বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান]
(৩) আবার, একই চাপ BC-এর ওপর বৃত্তস্থ ∠BAC এবং ∠BDC. ∴ ∠BAC = ∠BDC বা, ∠DAC = ∠BDC বা, ∠DBC = ∠BDC	[(i) নং থেকে] [(ii) নং থেকে]
(৪) অর্থাৎ ΔBCD-এর, ∠BDC = ∠DBC ∴ BC = CD (প্রমাণিত)	[সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

প্রশ্ন-৫। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.5 সে. মি., AB = 3 সে.মি. এবং BD, ∠ADC এর সমদ্বিখণ্ডক।



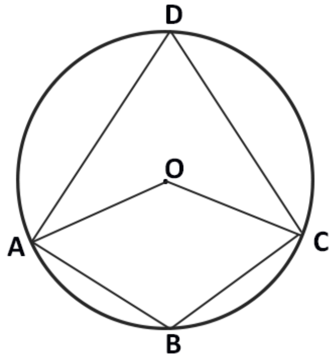
ক. AD দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
খ. প্রমাণ কর যে, ∠ADC + ∠ABC = 180°
গ. প্রমাণ কর যে, AB = BC.

সমাধান:

ক. ΔABD-এর
∠BAD = 90° [BD ব্যাস এবং ∠BAD অর্ধবৃত্তস্থ]
এবং BD = বৃত্তের ব্যাস = 2 × ব্যাসার্ধ = (2 × 2.5) সে.মি. = 5 সে.মি.
এবং AB = 3 সে.মি.

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$AD^2 + AB^2 = BD^2$
বা, $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2}$
$= \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$
∴ AD = 4 সে.মি.
AD এর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. (Ans.)

খ.



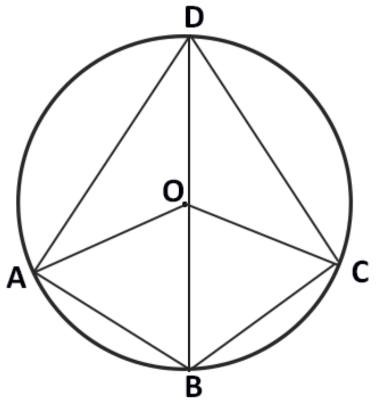
দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তঃলিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$।

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) একই চাপ ADC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ABC$) অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\ \angle ABC$	[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(২) আবার, একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ADC$) অর্থাৎ $\angle AOC = 2\angle ADC$ $\therefore \angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$ কিন্তু, $\angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC =$ চার সমকোণ $\therefore 2(\angle ABC + \angle ADC) =$ চার সমকোণ $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180°$ (প্রমাণিত)	[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

গ.



দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে AB ও CD দুইটি জ্যা এবং BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = BC$

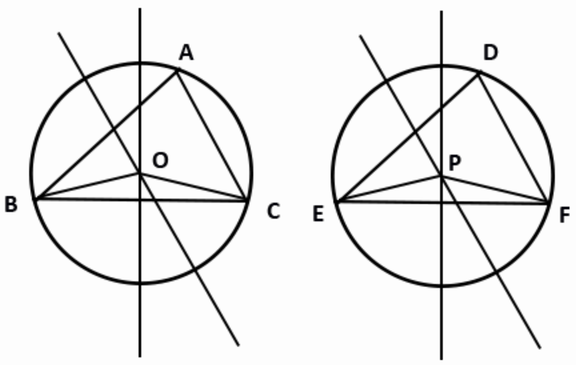
অঙ্কন: O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) এখানে, BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক। $\therefore \angle ADB = \angle BDC$ বা, $2\angle ADB = 2\angle BDC$ $\therefore \angle AOB = \angle BOC$	[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
(২) এখন, ΔABO ও ΔCBO এর মধ্যে, $OA = OC$ $OB = OB$ $\therefore \angle AOB = \angle BOC$ $\therefore \Delta ABO \cong \Delta CBO$ $\therefore AB = BC$ (প্রমাণিত)	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [সাধারণ বাহু]

৬. সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শির:কোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, এদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ও ΔDEF এর ভূমিদ্বয় সমান। শীর্ষকোণদ্বয় $\angle A$ ও $\angle D$ এবং $\angle A + \angle D =$ দুই সমকোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয়ও সমান।

অঙ্কন: BC ও AB এর লম্ব দ্বিখন্ডক আঁকি, যা O বিন্দুতে ছেদ করে। EF ও ED এর লম্বদ্বিখণ্ডক আঁকি, যা P বিন্দুতে ছেদ করে। O এবং P কেন্দ্র করে OB এবং PE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুইটি বৃত্ত আঁকি। O, B; O, C; P, E এবং P, F যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 2\angle BAC$ [একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

এবং কেন্দ্রস্থ $\angle EPF = 2\angle EDF$

ধাপ ২. $\angle BOC + \angle EPF = 2(\angle BAC + \angle EDF)$

বা, $\angle BOC + \angle EPF = 2 \times$ দুই সমকোণ [$\because \angle A + \angle D =$ দুই সমকোণ]

$\therefore \angle BOC + \angle EPF =$ চার সমকোণ।

ধাপ ৩. আবার, $\angle BOC +$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOC =$ চার সমকোণ।

বা, $\angle BOC +$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOC = \angle BOC + \angle EPF$

বা, প্রবৃদ্ধ $\angle BOC = \angle EPF$ [$\angle BOC$ বিয়োগ করে]

$\therefore$ চাপ BAC = চাপ EF

এবং $\angle EPF$ + প্রবৃদ্ধ $\angle EPF$ = চার সমকোণ

বা, $\angle EPF$ + প্রবৃদ্ধ $\angle EPF = \angle BOC + \angle EPF$

বা, প্রবৃদ্ধ $\angle EPF = \angle BOC$ [$\angle EPF$ বিয়োগ করে]

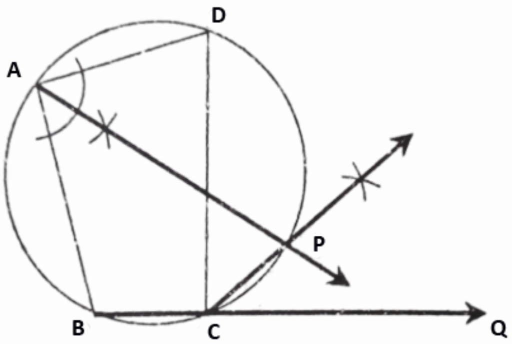
$\therefore$ চাপ EDF = চাপ BC

ধাপ ৪. এখন, চাপ BC + চাপ BAC = চাপ EDF + চাপ EF

$\therefore$ ΔABC-এর পরিবৃত্ত = ΔDEF-এর পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৭. প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখন্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপর ছেদ করে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক AP এবং $\angle BCD$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক CP পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, P বিন্দুটি বৃত্তের ওপর অবস্থিত।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে,

$\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ]

ধাপ ২. $\angle BCD + \angle DCQ$ = দুই সমকোণ [রৈখিক যুগল কোণ]

ধাপ ৩. $\angle BAD + \angle BCD = \angle BCD + \angle DCQ$ [ধাপ ১ ও ধাপ ২ হতে]

বা, $\angle BAD = \angle DCQ$

বা, $\frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}\angle DCQ$ [$\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

ধাপ ৪. $\angle DAP = \angle BAD$ এবং $\angle DCP = \frac{1}{2}\angle DCQ$ [AP ও CP যথাক্রমে $\angle BAD$ ও $\angle DCQ$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle DAP = \angle DCP$ [$\because \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}\angle DCQ$]

ধাপ ৫. $\angle BAD + \angle BCD$ = দুই সমকোণ [ধাপ ১ হতে]

বা, $\angle BAP + \angle DAP + \angle BCD$ = দুই সমকোণ [$\because \angle BAD = \angle DAP + \angle BAP$]

বা, $\angle BAP + \angle DCP + \angle BCD$ = 2 সমকোণ [$\because \angle DAP = \angle DCP$]

বা, $\angle BAP + (\angle DCP + \angle BCD)$ = দুই সমকোণ

বা, $\angle BAP + \angle BCP$ = দুই সমকোণ [$\because \angle DCP + \angle BCD = \angle BCP$]

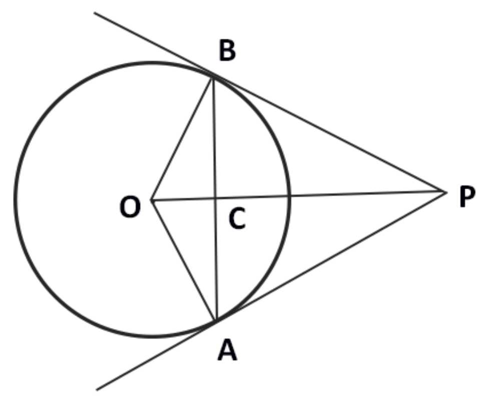
$\therefore$ ABCP বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

অর্থাৎ P বিন্দুটি বৃত্তের ওপরে অবস্থিত।

অধ্যায় ৮ ৮.৪ বৃত্ত Circle

প্রশ্ন-১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহি:স্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শক PA ও PB বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। A, B যোগ করায় AB স্পর্শ-জ্যা পাওয়া গেল। P, O যোগ করা হল। OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OP স্পর্শ-জ্যা AB এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

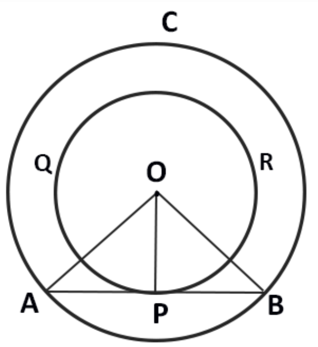
প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA এবং PB দুটি স্পর্শক। $\therefore PA = PB$	[$\because$ বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান]
(২) এখন, ΔOAP এবং ΔOBP-এ, $PA = PB$ $OA = OB$ এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। যেখানে অতিভুজ OP = অতিভুজ OP $\therefore \Delta OAP \cong \Delta OBP$ সুতরাং, $\angle AOP = \angle BOP$ অর্থাৎ, $\angle AOC = \angle BOC$ .... (i)	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [ত্রিভজদ্বয়ের তিনটি অনুরুপ বাহু পরস্পর সমান]
(৩) এখন, ΔOAC এবং ΔOBC-এ, $OA = OB$ OC উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOC$ $\Delta OAC \cong \Delta OBC$ $\therefore AC = BC$ ... ... (ii) এবং $\angle OCA = \angle OCB$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [উভয় ত্রিভুজের দুটি অনুরূপ বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয় সমান]
(৪) কিন্তু, এরা রৈখিক যুগল কোণ বলে প্রত্যেকেই সমকোণ। $\therefore \angle OCA = \angle OCB = 1$ সমকোণ অর্থাৎ, $OP \perp AB$........... (iii)	

(৫) (ii) নং এবং (iii) নং থেকে পাই, AC = BC অর্থাৎ C স্পর্শ-জ্যা AB এর মধ্যবিন্দু এবং $OP \perp$ স্পর্শ-জ্যা AB. ∴ OP স্পর্শ-জ্যা AB- এর লম্বদ্বিখণ্ডক। (প্রমাণিত)	

প্রশ্ন-২। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ABC এবং PQR দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ABC বৃত্তটি বৃহত্তর। বৃহত্তর ABC বৃত্তের AB জ্যাটি ক্ষুদ্রতর PQR বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB জ্যাটি স্পর্শ বিন্দু P তে সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে অর্থাৎ, P, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু বা PA = PB.

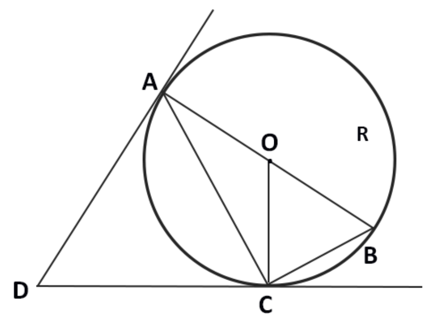
অঙ্কন: O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) PQR বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক AB এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। ∴ $AB \perp OP$ অর্থাৎ, $\angle OPA = \angle OPB$ = এক সমকোণ।	[বৃত্তের কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]
(২) এখন, সমকোণী ΔOAP এবং সমকোণী ΔOBP-এ, অতিভুজ OA = অতিভুজ OB এবং OP সাধারণ বাহু। ∴ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ সুতরাং, PA = PB অর্থাৎ, P, AB এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অন্য একটি অনুরূপ বাহু পরস্পর সমান]

প্রশ্ন-৩। **AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।**

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, AB একটি বৃত্তের ব্যাস এবং BC বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। বৃত্তটির কেন্দ্র O। বৃত্তের A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। A, C যোগ করায় ACD ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔACD সমবাহু।

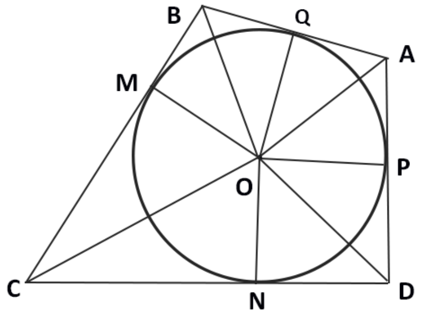
অঙ্কন: O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔOBC-এ, $OB = OC$ এবং $BC = OB$ $\therefore OB = BC = OC$ অর্থাৎ ΔOBC সমবাহু। $\angle OBC = \angle OCB = \angle BOC = 60°$ $\therefore \angle ABC = 60°$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [দেওয়া আছে, জ্যা BC বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান] [সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ 60°]
(২) আবার, A বিন্দুতে AD একটি স্পর্শক এবং AC স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা $\therefore \angle DAC = \angle ABC$ $\therefore \angle DAC = 60°$	[একান্তর বৃত্তাংশ কোণ বলে]
(৩) আবার, D বিন্দু হতে AD এবং DC বৃত্তের দুটি স্পর্শক বলে $AD = DC$ $\therefore \Delta ADC$-এ $AD = DC$, $\therefore \angle ACD = \angle DAC = 60°$	[ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]
(৪) এখন, ΔACD-এর, $\angle ACD + \angle CAD + \angle ADC = 180°$ বা, $60° + 60° + \angle ADC = 180°$ বা, $\angle ADC = 180° - 120°$ $\therefore \angle ADC = 60°$	[ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180° এর সমান]
(৫) সুতরাং ধাপ-২, ৩ ও ৪ নং থেকে দেখা যাচ্ছে যে, ΔACD এর প্রতিটি কোণ 60° আবার, যেহেতু প্রতিটি কোণ সমান সেহেতু প্রতিটি কোণের বিপরীত বাহুও সমান অর্থাৎ $CD = AD = AC$. $\therefore \Delta ACD$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। (প্রমাণিত)	

প্রশ্ন-৪। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

সমাধান:



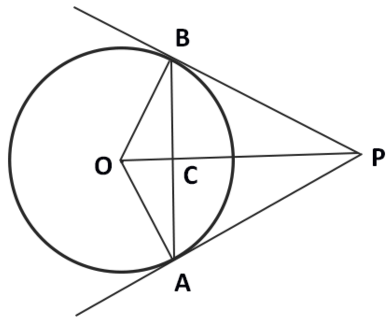
বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD পরিলিখিত চতুর্ভুজ। AD, AB, BC এবং CD বাহুগুলো বৃত্তকে যথাক্রমে P, Q, M এবং N বিন্দুতে স্পর্শ করে। O, A; O, B; O, C; O, D যোগ করা হল। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD$ এবং $\angle BOC$ পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ এবং $\angle COD$ এবং $\angle AOB$ পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ $\angle COD + \angle AOB =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন: O, M; O, N: O, P; O, Q যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে P ও Q বিন্দুতে AP ও AQ দুটি স্পর্শক এবং OP ও OQ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। $\therefore AP \perp OP$ এবং $AQ \perp QQ$ $\therefore \angle APO =$ এক সমকোণ $= \angle AQO$	[বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব]
(২) এখন, সমকোণী ΔAOP এবং সমকোণী ΔAOQ-এ, অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OA $OP = OQ$ $\Delta AOP = \Delta AOQ$ সুতরাং, $\angle AOP = \angle AOQ$ ... ... (i)	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
(৩) অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BOM = \angle BOQ$........ (ii) $\angle COM = \angle CON$ ... ... (iii) এবং $\angle DOP = \angle DON$ ... ... (iv)	
(৪) (i) নং, (ii) নং, (iii) নং ও (iv) নং যোগ করে পাই, $(\angle AOP + \angle DOP) + (\angle BOM + \angle COM) =$ $(\angle AOQ + \angle BOQ) + (\angle CON + \angle DON)$ $\therefore \angle AOD + \angle BOC = \angle AOB + \angle COD$ ... ... (v)	
(৫) আবার, $\angle AOB + \angle COD + \angle AOD + \angle BOC = 4$ সমকোণ। বা, $(\angle AOB + \angle COD) + (\angle AOB + \angle COD) =$ 4 সমকোণ বা, $2(\angle AOB + \angle COD) = 4$ সমকোণ। $\therefore \angle AOB + \angle COD = 2$ সমকোণ। এবং $\angle AOD + \angle BOC = 2$ সমকোণ। $\therefore$ কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। (প্রমাণিত)	[চারটি সরলরেখা সাধারণ বিন্দুতে 360° কোণে আবদ্ধ থাকে] [(v) নং থেকে]

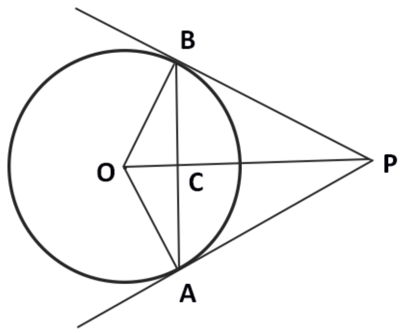
প্রশ্ন-৫। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক।
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র আঁক।
খ. প্রমাণ কর যে, PA = PB
গ. প্রমাণ কর যে, OP রেখাংশ স্পর্শ-জ্যা এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।
সমাধান:
ক.



চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে অঙ্কিত দুটি স্পর্শক PA ও PB বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

খ. পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৪ এর উপপাদ্য ২৬, পৃষ্ঠা-১৬৫

গ.



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শক PA ও PB বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। A, B যোগ করায় AB স্পর্শ-জ্যা পাওয়া গেল। P, O যোগ করা হল। OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, OP স্পর্শ-জ্যা AB এর লম্বদ্বিখণ্ডক।
অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

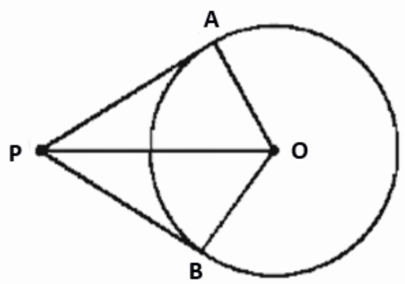
প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA এবং PB দুটি স্পর্শক। ∴ PA = PB	[বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান]
(২) এখন, ΔOAP এবং ΔOBP-এ, PA = PB OA = OB এবং OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। ∴ ΔOAP ≅ ΔOBP ∴ ∠AOP = ∠BOP অর্থাৎ, ∠AOC = ∠BOC .... (i)	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [ত্রিভুজদ্বয়ের তিনটি অনুরূপ বাহু পরস্পর সমান]
(৩)এখন, ΔOAC এবং ΔOBC-এ, OA = OB এবং OC উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।	

অন্তর্ভুক্ত $\angle AOC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOC$ $\therefore \Delta OAC \cong \Delta OBC$ $\therefore$ AC = BC .... (ii) (৪) কিন্তু, এরা রৈখিক যুগল কোণ বলে প্রত্যেকেই সমকোণ। $\therefore \angle OCA = \angle OCB = 1$ সমকোণ। অর্থাৎ, $OP \perp AB$ .... (iii) (৫) (ii) নং এবং (iii) নং থেকে পাই, AC = BC অর্থাৎ C স্পর্শ-জ্যা AB এর মধ্যবিন্দু এবং $OP \perp$ স্পর্শ-জ্যা AB. $\therefore$ OP স্পর্শ-জ্যা AB এর লম্বদ্বিখণ্ডক। (প্রমাণিত)	[উভয় ত্রিভুজের দুটি অনুরূপ বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয় সমান]

৬. দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। O, P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ:

১। যেহেতু, স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

$\therefore PA \perp OA$ এবং $PB \perp OB$

$\therefore \Delta AOP$ ও ΔBOP সমকোণী।

২। ΔAOP ও ΔBOP সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ

OP = অতিভুজ OP [সাধারণ বাহু]

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$

$\therefore \angle APO = \angle BPO$

$\therefore$ PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে। (প্রমাণিত)

অধ্যায় ৮ ৮.৫

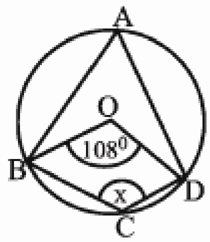
বৃত্ত Circle

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ-

ক) সূক্ষ্মকোণ খ) সমকোণ গ) স্থূল কোণ ঘ) পূরককোণ

২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে x এর মান কত?



ক) 126° খ) 108° গ) 72° ঘ) 54°

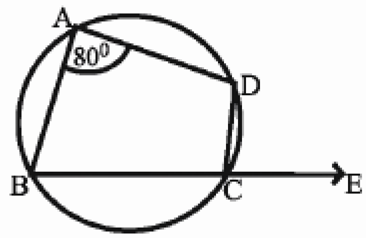
ব্যাখ্যা: $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2} \times 108° = 54°$

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180°$

বা, $54° + \angle BCD = 180°$

$\therefore \angle BCD = 126°$

৩. পাশের চিত্রের $\frac{1}{2}\angle ECD$ = কত ডিগ্রী?



ক 40° খ) 50° গ) 80° ঘ) 100°

ব্যাখ্যা: $\angle BAD + \angle BCD = 180°$

বা, $80° + \angle BCD = 180°$

$\therefore \angle BCD = 100°$

$\therefore \angle ECD = 180° - 100° = 80°$

$\therefore \frac{1}{2}\angle ECD = 40°$

৪. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিস্পর্শ করে। তাদের একটির ব্যাস ৪ সে.মি. এবং অপরটির ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. হলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

ক) 0 সে.মি. খ) 4 সে. মি. গ) ৪ সে. মি. ঘ) 12 সে মি.

ব্যাখ্যা: দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

৫. O কেন্দ্র বিশিষ্ট কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক PQ ও PR টানা হলে ΔPQR হবে—

i. সমবাহু

ii. সমদ্বিবাহু

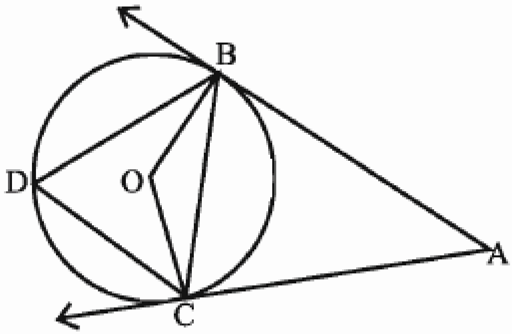
iii. সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

MCQ Answers:

১। ক
২। ক
৩। ক
৪। গ
৫। খ
৬। গ
৭। ঘ
৮। ঘ



AB ও AC রেখাদ্বয় BCD বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle BAC = 60°$
উপরের তথ্যের আলোকে (৬ -৮)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৬. $\angle BOC$ এর মান কত?

ক) $300°$ খ) $270°$ গ) $120°$ ঘ) $90°$

ব্যাখ্যা: $\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 60° = 120°$

৭. D, BDC চাপের মধ্যবিন্দু হলে—

i. $\angle BDC = \angle BAC$

ii. $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

iii. $\angle BOC = \angle DBC + \angle BCD$

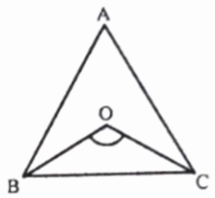
নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৮। ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হলে, $\angle BOC =$ কত ডিগ্রী?

ক) $30°$ খ) $60°$ গ) $90°$ ঘ) $120°$

ব্যাখ্যা:



$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

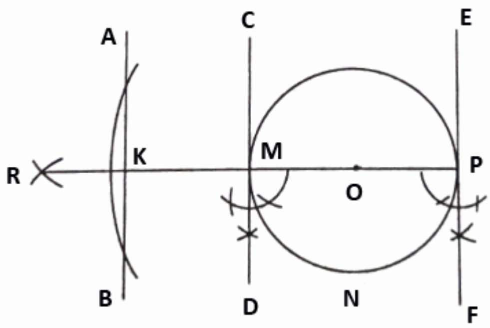
বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = 180°$

বা, $\angle BOC + \frac{1}{2} \times 60° + \frac{1}{2} \times 60° = 180°$

বা, $\angle BOC = 180° - 30° - 30°$

$\therefore \angle BOC = 120°$

৯. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট MNP একটি বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। MNP বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যা, AB সরলরেখার সমান্তরাল হবে।

অঙ্কন:

(১) O বিন্দু থেকে AB এর ওপর RO লম্ব আঁকি। OR, AB রেখাকে K বিন্দুতে এবং MNP বৃত্তকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) RO কে বর্ধিত করলে তা বৃত্তটির P বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) MP রেখার ওপর M ও P বিন্দুতে যথাক্রমে CD ও EF লম্ব টানি। তাহলে, CD বা EF-ই নির্ণেয় স্পর্শক হবে।

প্রমাণ: CD এবং EF যথাক্রমে MP এর M ও P বিন্দুতে লম্ব।

সুতরাং CD এবং EF উভয়ই যথাক্রমে M ও P বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক।

কিন্তু অঙ্কনানুসারে, $\angle OMD = \angle MKB$ = এক সমকোণ।

কিন্তু তারা অনুরূপ কোণ।

$\therefore CD \parallel AB$

আবার, $\angle OPF = \angle RKB$ = এক সমকোণ।

কিন্তু, তারা একান্তর কোণ।

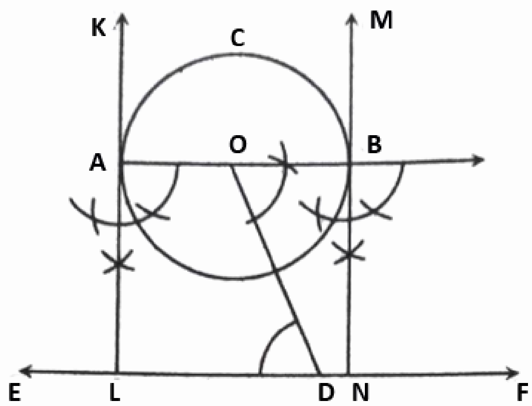
$\therefore EF \parallel AB$

অর্থাৎ, CD এবং EF স্পর্শকদ্বয় উভয়ই AB রেখার সমান্তরাল।

অতএব, CD বা EF-ই নির্ণেয় স্পর্শক। (প্রমাণিত)

১০. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর লম্ব হয়।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত। EF একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। ABC বৃত্তে এরূপ একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যা নির্দিষ্ট সরলরেখা EF এর ওপর লম্ব।

অঙ্কন: (১) EF রেখার ওপর যেকোনো বিন্দু D নিই। O, D যোগ করি।

(২) OD রেখার O বিন্দুতে $\angle EDO = \angle DOB$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে। BO কে বর্ধিত করলে তা বৃত্তটিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) AB রেখার A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে KL ও MN দুইটি লম্ব আঁকি KL ও MN লম্বদ্বয় EF কে যথাক্রমে L ও N বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, KL ও MN-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ:

(১) অঙ্কনানুসারে, $\angle EDO = \angle DOB$.

কিন্তু, তারা একান্তর কোণ।

$\therefore AB \parallel EF$

(২) আবার, $AB \parallel EF$ এবং MN ছেদক।

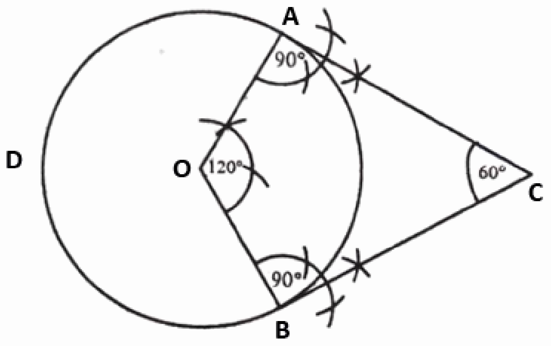
$\therefore \angle OBN = \angle BNF$ [একান্তর কোণ বলে]

$\therefore \angle BNF = 90°$ [$\because \angle OBN = 90°$]

অর্থাৎ, MN, EF এর ওপর লম্ব।

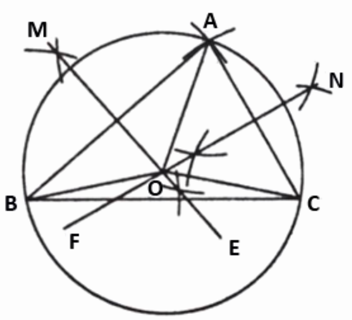
(৩) অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, KL, EF এর ওপর লম্ব। কিন্তু, MN এবং KL যথাক্রমে বৃত্তের OB এবং OA ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব।
(৪) সুতরাং MN এবং KL উভয়ই যথাক্রমে B এবং A বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক।
অতএব, MN বা KL-ই নির্ণেয় স্পর্শক। (প্রমাণিত)

১১. কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABD একটি বৃত্ত। ABD বৃত্তে এরূপ দু'টি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।
অঙ্কন: (১) OA যেকোনো ব্যাসার্ধ নিই এবং $\angle AOB = 120°$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে।
(২) OB রেখার ওপর B বিন্দুতে এবং OA রেখার ওপর A বিন্দুতে দুটি লম্ব টানি। মনে করি, এই লম্বদ্বয় C বিন্দুতে মিলিত হয়।
তাহলে, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB = 60°$ হবে।
প্রমাণ:
(১) চতুর্ভুজ OACB এর, $\angle AOB = 120°$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle OBC = 90°$ [$\because OB \perp BC$]
এবং $\angle OAC = 90°$ [$\because OA \perp AC$]
(২) এখন, চতুর্ভুজ OACB- এর,
$\angle ACB + \angle AOB + \angle OAC + \angle OBC = 360°$ [$\because$ চতুভুর্জের চার কোণের সমষ্টি 360°]
বা, $\angle ACB + 120° + 90° + 90° = 360°$
বা, $\angle ACB = 360° - 300°$
$\therefore \angle ACB = 60°$
(৩) আবার, প্রদত্ত বৃত্তের OB ব্যাসার্ধ এবং পরিধিস্থ B বিন্দুতে $BC \perp OB$.
$\therefore$ BC স্পর্শক।
(৪) তদ্রুপ, প্রদত্ত বৃত্তের OA ব্যাসার্ধ এবং পরিধিস্থ A বিন্দুতে $AC \perp OA$.
$\therefore$ AC স্পর্শক।
অতএব, AC ই ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB = 60°$ (প্রমাণিত)

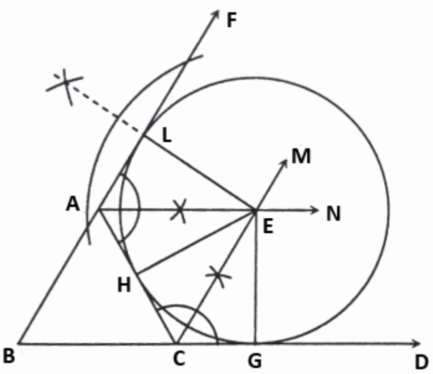
১২. 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC = 4.5 সে.মি., AC = 3 সে.মি., AB = 4 সে.মি.। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে এবং তিনটি ব্যাসার্ধ করতে হবে।
অঙ্কন: (১) AB ও AC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN যে আঁকি। তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
(২) পরিশেষে, O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকি। তাহলে এই বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত। প্রমাণ: A, O; B, O এবং C, O যোগ করি।
O বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।
$\therefore OA = OB$, একইভাবে, $OA = OC$.
$\therefore OA = OB = OC$
সুতরাং, O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়ে যাবে।
অতএব, এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)
ব্যাসার্ধ নির্ণয়: A হতে BC এর ওপর AD লম্ব আঁকি। AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।
ΔABC এর পরিসীমা = AB+ BC+ AC = 4+3+ 4.5 = 11.5 সে.মি.
$\therefore$ অর্ধ পরিসীমা $s = \frac{11.5}{2} = 5.75$ সে.মি.
$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s - AB)(s - BC)(s - CA)}$
$= \sqrt{5.75(5.75 - 4)(5.75 - 3)(5.75 - 4.2)}$
$= \sqrt{5.75 \times 1.75 \times 2.75 \times 1.25}$
$= \sqrt{34.58}$ বর্গ সে.মি. $= 5.88$ বর্গ সে.মি.
আবার, AABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$
বা, $\frac{1}{2} \times 4.5 \times AD = 5.88$
$\therefore AD = 2.61$ সে.মি.
কিন্তু আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, তার পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ শীর্ষ হতে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান (ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য)।
$\therefore AB.\ AC = 2R.\ AD$ [ধরি, ব্যাসার্ধ AO = R সে.মি., $\therefore$ ব্যাস = 2R সে.মি.]
বা, $4.5 \times 3 = 2R \times 2.61$
$\therefore R = 2.59$
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.59 সে. মি (প্রায়) (Ans.)

১৩. 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহিবৃত্ত আঁক।

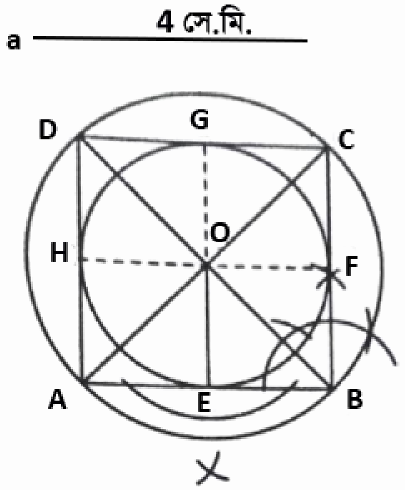
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.। এই ত্রিভুজের CA বাহুকে স্পর্শ করে একটি বহিবৃত্ত আঁকতে হবে এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।
অঙ্কন: (১) BC ও BA বাহুকে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি।
(২) ∠DCA এবং ∠FAC এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে CM ও AN রশ্মি আঁকি এবং মনে করি, তারা E বিন্দুতে ছেদ করে। E থেকে AC এর ওপর EH লম্ব আঁকি।

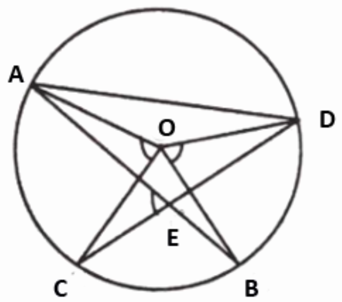
(৩) পরিশেষে, E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।
(৪) তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত হবে।
প্রমাণ: E হতে BD ও BF এর ওপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি। E বিন্দুটি $\angle DCA$ এর সমদ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।
$\therefore EH = EG$, একইভাবে, $EH = EL$
$\therefore EH = EG = EL$
সুতরাং, E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে। আবার, EH, EG ও EL এর একটি প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে CA, CD এবং AF রেখাংশ তিনটি লম্ব। সুতরাং, বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।
অতএব, HGL বৃত্তটিই নির্ণেয় বহিবৃত্ত হবে। (প্রমাণিত)

১৪. একটি বর্গের অন্তবৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD একটি বর্গ। এই বর্গের অন্তবৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।
অঙ্কন: (১) A, C এবং B, D যোগ করি। AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
(২) O হতে AB এর ওপর OE লম্ব টানি।
(৩) O-কে কেন্দ্র করে OE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।
(৪) বৃত্তটি AB, BC, CD ও DA বাহুগুলোকে যথাক্রমে E, F, G ও H বিন্দুতে স্পর্শ করে।
(৫) তাহলে, EFGH-ই নির্ণেয় অন্তবৃত্ত।
(৬) আবার, O-কে কেন্দ্র করে OA-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি বর্গের শীর্ষবিন্দু A, B, C ও D দিয়ে যায়। এই বৃত্তই, ABCD বর্গের নির্ণেয় পরিবৃত্ত।
প্রমাণ: যেহেতু, বর্গের কর্ণ ইহার কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং O বিন্দু হতে AB, BC, CD, DA বাহুর দূরত্ব (লম্বদূরত্ব) সমান। সেহেতু, O কে কেন্দ্র করে OE ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি AB, BC, CD, DA বাহুকে স্পর্শ করবে।
অতএব, EFGH-ই নির্ণেয় অন্তবৃত্ত। আবার, বর্গের কর্ণদ্বয় সমান এবং তারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং, $OA = OB = OC = OD$।
সুতরাং, O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C, D বিন্দু দিয়ে যায়।
অতএব, ABCD-ই নির্ণেয় পরিবৃত্ত। (প্রমাণিত)।

১৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনেকরি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, D; O, B ও O, C যোগ করা হল। AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle AOC$ এবং $\angle BOD$ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$. অঙ্কন: A, D যোগ করি।

প্রমাণ:

(১) বৃত্তের AC চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADC$ [বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

বা, $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$... (i)

(২) আবার, বৃত্তের BD চাপের ওপর দণ্ডায়মান।

কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$.

বা, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$........ (ii) [একই কারণে]

(৩) এখন, ΔADE এর বহিঃস্থ $\angle AEC$ এবং ইহার অন্তঃস্থ দুই বিপরীত $\angle ADE$ ও $\angle DAE$

অর্থাৎ, $\angle ADE + \angle DAE = \angle AEC$ [ত্রিভুজের যেকোনো বহিঃস্থ কোণ ইহার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।]

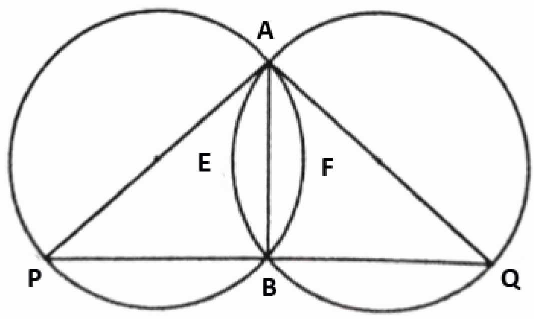
বা, $\angle AEC = \angle ADC + \angle BAD$

বা, $\angle AEC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOD$ [(i) এবং (ii) নং থেকে]

$\therefore \angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$. (প্রমাণিত)

১৬. দুইটি সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

সমাধান:



মনে করি, APBF এবং AQBE সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্ত। AB তাদের সাধারণ জ্যা। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখা APBF বৃত্তকে P বিন্দুতে ও AQBE বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

A, P এবং A, Q যোগ করা হল।

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ:

(১) APBF এবং AQBE সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা AB.

$\therefore$ চাপ AFB = চাপ AEB [সমান সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে।]

(২) আবার, সমান সমান চাপ AEB এবং AFB এর ওপর দণ্ডায়মান যথাক্রমে, বৃত্তস্থ $\angle APB$ এবং বৃত্তস্থ $\angle AQB$ [সমান সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে সমান সমান চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।]

সুতরাং, $\angle APB = \angle AQB$

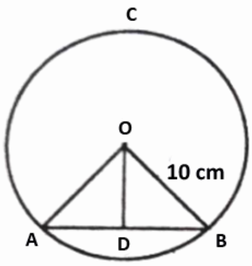
অর্থাৎ, $\angle APQ = \angle AQP$

(৩) এখন, ΔAPQ-এ $\angle APQ = \angle AQP$

$\therefore$ AP= AQ [ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

অর্থাৎ, ΔPAQ সমদ্বিবাহু। (প্রমাণিত)

১৭. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা AB = x সে.মি. OD⊥AB
পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:



ক. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

গ. OD = $(\frac{x}{2} - 2)$ সে.মি. হলে x এর মান নির্ণয় কর।

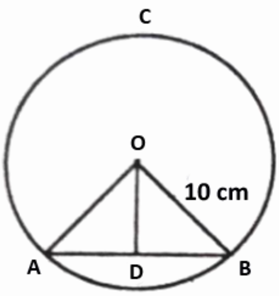
সমাধান:

ক. আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

$= 3.1416 \times (10)^2$ [ব্যাসার্ধ OB = 10cm]

$= 314.16$ cm^2

খ.



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে AB জ্যা। OD⊥AB. প্রমাণ করতে হবে যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

অঙ্কন: O, A যোগ করি।

প্রমাণ:

(১) ΔAOB-এ OA = OB [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$ [ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান]

(২) এখন, ΔOAD ও ΔOBD এ

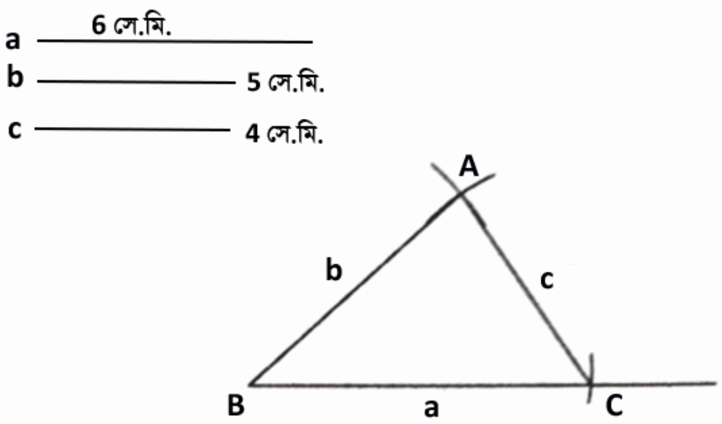
$\angle ODA = \angle ODB$ [যেহেতু OD⊥AB সেহেতু উভয়েই সমকোণ]

$\angle OAD = \angle OBD$ এবং OD সাধারণ বাহু

সুতরাং, $\Delta OAD \cong \Delta OBD$ [কোণ-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore AD=BD$
অতএব, D, AB এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

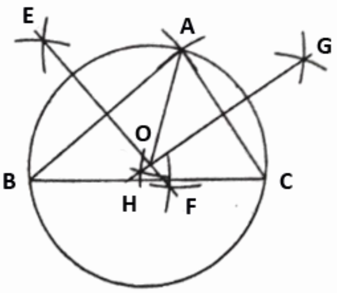
গ. যেহেতু D, AB এর মধ্যবিন্দু সেহেতু
$AD = BD$ এবং $BD = AD = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$ [$\because AB = x$ সে.মি.]
ΔODE এ $\angle ODB$ এক সমকোণ
এবং $OB = 10$ cm, $OD = (\frac{x}{2} - 2)$, $DB = \frac{x}{2}$
এখন, ΔODB এ পীথাগোরাসের উপপাদ্য হতে পাই,
$OB^2 = OD^2 + DB^2$
বা, $(10)^2 = (\frac{x}{2} - 2)^2 + (\frac{x}{2})^2$
বা, $\frac{x^2}{4} - 2.\frac{x}{2}.2 + (2)^2 + \frac{x^2}{4} = 100$
বা, $2.\frac{x^2}{4} - 2x + 4 = 100$
বা, $\frac{x^2}{2} - 2x + 4 = 100$
বা, $x^2 - 4x + 8 = 200$ [উভয়পক্ষে 2 দ্বারা গুণ করে]
বা, $x^2 - 4x + 8 - 200 = 0$
বা, $x^2 - 4x - 192 = 0$
বা, $x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$
বা, $x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$
বা, $(x - 16)(x + 12) = 0$
হয়, $x - 16 = 0$
বা, $x = 16$
অথবা $x + 12 = 0$
বা $x = -12$ [$x \neq -12$ কারণ, x দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে]
$\therefore x = 16$ (Ans.)

১৮. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি. 5 সেমি ও 6 সে.মি.।
ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।
খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।
গ. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যে কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে স্পর্শকদ্বয়ের দুরত্ব সমান হয়।
সমাধান:
ক.



উপরে অঙ্কিত ABC ত্রিভুজই হলো নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ.

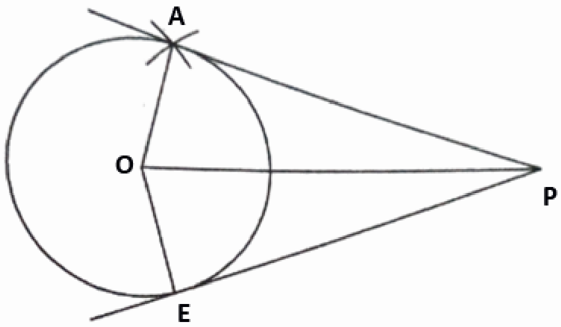


ΔABC এ BC = 6 সে.মি., AB = 5 সে.মি., AC = 4 সে.মি. ΔABC এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন: AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EP ও GH রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আকি। তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

গ.



'খ' থেকে প্রাপ্ত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ OA নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এখন এই বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে ঐ বৃত্তের উপর PA ও PE দুইটি স্পর্শক আঁকি। দেখাতে হবে যে, PA = PE. অঙ্কন: O, E এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ: বৃত্তের A বিন্দুতে PA একটি স্পর্শক এবং OA স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সুতরাং $OA \perp PA$ অর্থাৎ $\angle PAO$ = এক সমকোণ।

আবার, বৃত্তের E বিন্দুতে PE একটি স্পর্শক এবং OE স্পর্শকবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সুতরাং $OE \perp PE$ অর্থাৎ $\angle PEO$ = এক সমকোণ।

এখন, PAO এবং PEO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

OA = OE [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

এবং অতিভূজ OP উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

$\Delta PAO \cong \Delta PEO$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং PA= PE (দেখানো হলো)

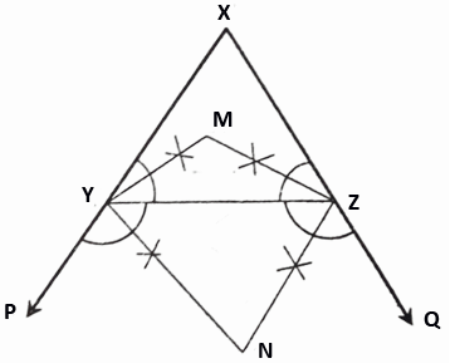
১৮. চিত্রে YM ও ZM যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অদ্বিখন্ডক এবং YN ও ZN যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

ক. দেখাও যে, $\angle MYZ+\angle NYZ = 90°$

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$

গ. প্রমাণ কর যে, Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: চিত্র থেকে দেখাতে হবে যে, $\angle MYZ + \angle NYZ = 90°$

প্রমাণ:

$\angle XYZ + \angle PYZ = 180°$ [রৈখিকযুগল কোণ]

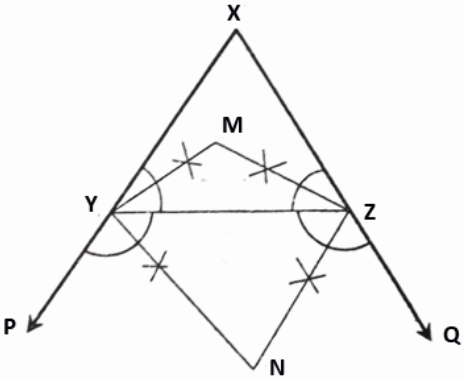
বা, $\frac{1}{2}\angle XYZ + \frac{1}{2}\angle PYZ = \frac{1}{2} \times 180°$ [$\frac{1}{2}$ যারা গুণ করে]

বা, $\frac{1}{2}\angle XYZ + \frac{1}{2}\angle PYZ = 90°$

বা, $\angle MYZ + \angle NYZ = 90°$ [YM ও YN যথাক্রমে $\angle Y$ এর সমদ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle MYZ + \angle NYZ = 90°$ (প্রমাণিত)

খ.



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔXYZ-এর $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YN ও ZN. প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔXYZ-এ

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180°$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

ধাপ ২. ΔNYZ -এ

$\angle YNZ + \angle NYZ + \angle NZY = 180°$

বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}\angle NYZ + \frac{1}{2}\angle NZY = 180°$ [$\because$ $\angle Y$ও $\angle Z$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YNও ZN]

বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Z) + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y) = 180°$ [$\because$ ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ অন্তস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y + \angle Z + \angle X) = 180°$

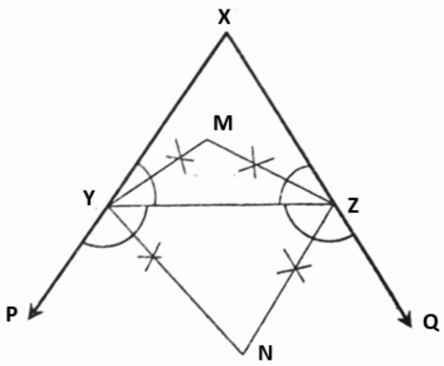
বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(180° + \angle X) = 180°$

বা, $\angle YNZ + 90° + \frac{1}{2}\angle X = 180°$

বা, $\angle YNZ = 180° - 90° - \frac{1}{2}\angle X$

$\therefore \angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$ (প্রমাণিত)

গ.



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔXYZ-এর $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YM ও ZM এবং বহির্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YN ও ZN.

প্রমাণ করতে হবে যে, Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\angle XZY + \angle QZY = 180°$ [রৈখিক যুগল কোণ]

বা, $\frac{1}{2}\angle XZY + \frac{1}{2}\angle QZY = \frac{1}{2} \times 180°$ [$\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{1}{2}\angle XZY + \frac{1}{2}\angle QZY = 90°$

বা, $\angle MZY + \angle NZY = 90°$ [$\because$ MZ ও NZ যথাক্রমে $\angle Z$ এর অন্তর্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle MZN = 90°$.....(i)

ধাপ ২. 'ক' হতে পাই,

$\angle MYZ + \angle NYZ = 90°$

$\therefore \angle MYN = 90°$ ....(ii)

ধাপ ৩. সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করি,

$\angle MZN + \angle MYN = 90° + 90°$

$\therefore \angle MZN + \angle MYN = 180°$

$\therefore$ MYNZ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ [কারণ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°]

$\therefore$ Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত (প্রমাণিত)

অধ্যায় ৯ ৯.১

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত Trigonometric Ratio

১। নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য-মিথ্যা বাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক। tanA মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম

সমাধান: উক্তিটি মিথ্যা।

যুক্তিঃ উদাহরণস্বরূপ: $\tan 60° = \sqrt{3} = 1.73$ (প্রায়) > 1

সুতরাং, "tanA মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম" উক্তিটি মিথ্যা।

খ। cotA হলো cot এবং A এর গুণফল।

সমাধান: উক্তিটি মিথ্যা৷

যুক্তিঃ cot হলো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ এবং A হলো কোণের মান৷

cotA প্রতীকটি A কোণের কোট্যানেজেন্ট অনুপাতকে বুঝায়। A বাদে cot কোনও আলাদা অর্থ বহন করে না।

গ। A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$

সমাধান: $\sec A = \frac{12}{5}$

বা, $\frac{1}{\cos A} = \frac{12}{5}$

বা, $\cos A = \frac{5}{12}$

বা, $A = \cos^{-1}\frac{5}{12}$

বা, $A = 65.37^{o}$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

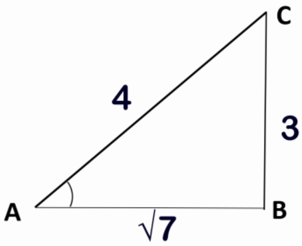
ঘ। cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

সমাধান: উক্তিটি মিথ্যা।

যুক্তিঃ cos হলো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত cosine এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

২। $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর৷

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$



অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু $= 3$,

অতিভুজ $= 4$

$\therefore$ সন্নিহিত বাহু $= \sqrt{4^2 - 3^2}$

$= \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

সুতরাং, $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $\sec A = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\cot A = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{4}{3}$

৩। দেওয়া আছে, 15 cotA = 8, sinA ও secA এর মান বের কর৷

সমাধান: দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$

বা, $\cot A = \frac{8}{15}$

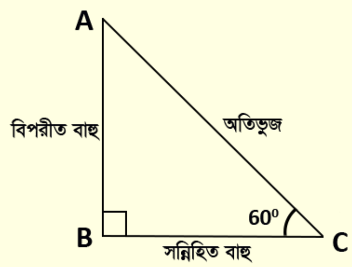
সূত্রসমূহঃ

Part: 1

1. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
2. $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
3. $\cos(-\theta) = \cos\theta$
4. $\sec(-\theta) = \sec\theta$
5. $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
6. $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Part: 2

1. $\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$
2. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$
3. $\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$
4. $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$
5. $\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$
6. $\cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$



এখানে,

$\angle B = 90^{o}$, [সমকোণ]

$\angle C = 60^{o}$, [দেয়া আছে]

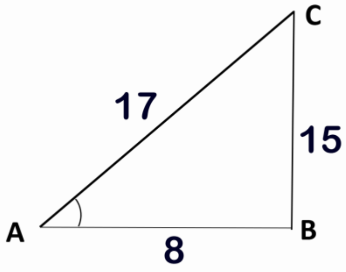
$\angle A =$ অজানা

সুতরাং,

AC = অতিভুজ [সমকোণের বিপরীত বাহু]

AB = প্রদত্ত কোণের ($\angle C$) সরাসরি বিপরীত দিকের বাহু

BC = প্রদত্ত কোণ সৃষ্টিকারী রেখাংশ (অজানা কোণের বিপরীত বাহু)



অতএব, সন্নিহিত বাহু = 8,
বিপরীত বাহু = 15

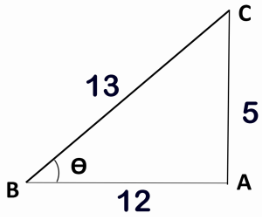
$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{15^2 + 8^2}$

$= \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

সুতরাং, $\sin A = \frac{15}{17}$, $\quad secA = \frac{17}{8}$

৪। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 13 সে.মি., BC = 12 সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের কর।

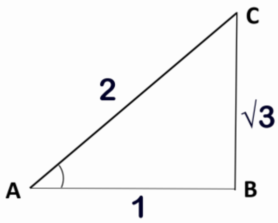
সমাধান: দেয়া আছে, AB = 13 সে.মি., BC = 12 সে.মি.



$\therefore AC = \sqrt{13^2 - 12^2}$
$= \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ সে. মি.
সুতরাং, $sin\theta = \frac{5}{13}$, $\quad \cos\theta = \frac{12}{13}$ $\quad$ ও $\tan\theta = \frac{5}{12}$

৫। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $tanA = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}sinA\ cosA = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $tanA = \sqrt{3}$



অতএব, বিপরীত বাহু $= \sqrt{3}$,
সন্নিহিত বাহু = 1

$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4} = 2$

সুতরাং, $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \cos\theta = \frac{1}{2}$

এখন, $\sqrt{3}sinA\ cosA = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

সুতরাং,বাক্যটি সত্য।

প্রমাণ কর (৬-২০):

৬. (i) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}$

Part: 3

1. $\sin\Theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\Theta}$
2. $\operatorname{cosec}\Theta = \frac{1}{\sin\Theta}$
3. $\cos\Theta = \frac{1}{\sec\Theta}$
4. $\sec\Theta = \frac{1}{\cos\Theta}$
5. $\tan\Theta = \frac{1}{\cot\Theta}$
6. $\cot\Theta = \frac{1}{\tan\Theta}$
7. $\tan\Theta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}$
8. $\cot\Theta = \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}$

Part: 4

1. $\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = 1$
বা, $\sin^2\Theta = 1 - \cos^2\Theta$
বা, $\cos^2\Theta = 1 - \sin^2\Theta$

2. $\sec^2\Theta - \tan^2\Theta = 1$
বা, $\sec^2\Theta = 1 + \tan^2\Theta$
বা, $\tan^2\Theta = \sec^2\Theta - 1$

3. $\operatorname{cosec}^2\Theta - \cot^2\Theta = 1$
বা, $\operatorname{cosec}^2\Theta = 1 + \cot^2\Theta$
বা, $\cot^2\Theta = \operatorname{cosec}^2\Theta - 1$

$= \cos^2 A + \sin^2 A$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\mathrm{cosec}^2 A} = 1$

(ii) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A}$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

(iii) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A}$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

৭. (i) $\frac{sinA}{cosecA} + \frac{cosA}{secA} = 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{sinA}{\mathrm{cosec}A} + \frac{cosA}{secA}$

$= \frac{sinA}{\frac{1}{\sin A}} + \frac{cosA}{\frac{1}{\cos A}}$

$= \left(sinA \times \frac{\sin A}{1}\right) + \left(cosA \times \frac{\cos A}{1}\right)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{sinA}{\mathrm{cosec}A} + \frac{cosA}{secA} = 1$

(ii) $\frac{secA}{cosA} - \frac{tanA}{cotA} = 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{secA}{\cos A} - \frac{tanA}{cotA}$

$= \frac{secA}{\frac{1}{secA}} - \frac{cosA}{\frac{1}{tanA}}$

$= \left(secA \times \frac{secA}{1}\right) - \left(tanA \times \frac{tanA}{1}\right)$

$= sec^2A - tan^2A$

$= 1$ = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{secA}{cosA} - \frac{tanA}{cotA} = 1$

(iii) $\frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2 A}}$

$$= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A}$$

$= \frac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A}$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

৮. (i) $\frac{tanA}{1-cotA} + \frac{cotA}{1-tanA} = secA.cosecA + 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{tanA}{1-cotA} + \frac{cotA}{1-tanA}$

$$= \frac{\frac{sinA}{cosA}}{1-\frac{cosA}{sinA}} + \frac{\frac{cosA}{sinA}}{1-\frac{sinA}{cosA}}$$

$= \frac{\frac{sinA}{cosA}}{\frac{sinA-cosA}{sinA}} + \frac{\frac{cosA}{sinA}}{\frac{cosA-sinA}{cosA}}$

$= \left(\frac{sinA}{cosA} \times \frac{sinA}{sinA-cosA}\right) + \left(\frac{cosA}{sinA} \times \frac{cosA}{cosA-sinA}\right)$

$$= \frac{\sin^2 A}{cosA(sinA - cosA)} + \frac{\cos^2 A}{sinA(cosA - sinA)}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{cosA(sinA - cosA)} - \frac{\cos^2 A}{sinA(sinA - cosA)}$$

$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{sinA.cosA(sinA-cosA)}$

$= \frac{(sinA-cosA)(\sin^2 A + sinA.cosA + \cos^2 A)}{sinA.cosA(sinA-cosA)}$

$$= \frac{\sin^2 A + sinA.cosA + \cos^2 A}{sinA.cosA}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + sinA.cosA}{sinA.cosA}$$

$$= \frac{1 + sinA.\,cosA}{sinA.\,cosA}$$

$$= \frac{1}{sinA.\,cosA} + \frac{sinA.\,cosA}{sinA.\,cosA}$$

$$= \frac{1}{sinA}.\frac{1}{cosA} + 1$$

$$= secA.\,cosecA + 1$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{tanA}{1-cotA} + \frac{cotA}{1-tanA} = secA.\,cosecA + 1$

(ii) $\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A}$

$$= \frac{1}{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} + \frac{1}{1+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 A}}$$

$$= \cos^2 A + \sin^2 A$$

= 1

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

৯. $\frac{cosA}{1-tanA} + \frac{sinA}{1-cotA} = sinA + cosA$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{cosA}{1-tanA} + \frac{sinA}{1-cotA}$

$$= \frac{cosA}{1-\frac{sinA}{cosA}} + \frac{sinA}{1-\frac{cosA}{sinA}}$$

$$= \frac{cosA}{\frac{cosA - sinA}{cosA}} + \frac{sinA}{\frac{sinA - cosA}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{cosA - sinA} + \frac{\sin^2 A}{sinA - cosA}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{cosA - sinA} - \frac{\sin^2 A}{cosA - sinA}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{cosA - sinA}$$

$$=\frac{(cosA+\ sinA)(cosA-\ sinA)}{(cosA-\ sinA)}$$

$$=cosA+\ sinA$$

$=\ sinA+cosA\ =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{cosA}{1-tanA}+\frac{sinA}{1-cotA}=sinA+cosA$
(প্রমাণিত)

১০. $tanA\sqrt{1-\sin^2 A}=sinA$

সমাধান: বামপক্ষ $=tanA\sqrt{1-\sin^2 A}$

$=tanA\sqrt{\cos^2 A}$

$$=\frac{sinA}{cosA}.cosA$$

$$=sinA$$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ tanA\sqrt{1-\sin^2 A}=sinA$
(প্রমাণিত)

১১. $\frac{secA+tanA}{cosecA+cotA}=\frac{cosecA-cotA}{secA-tanA}$

সমাধান: বামপক্ষ $=\frac{secA+tanA}{cosecA+cotA}$

$$=\frac{(secA+tanA)\times(secA-tanA)\times(cosecA-cotA)}{(cosecA+cotA)\times(cosecA-cotA)\times(secA-tanA)}$$

$$=\frac{(secA)^2-(tanA)^2}{(cosecA)^2-(cotA)^2}\times\frac{cosecA-cotA}{secA-tanA}$$

$$=\frac{\sec^2 A-\tan^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A}\times\frac{cosecA-cotA}{secA-tanA}$$

$$=\frac{1}{1}\times\frac{cosecA-cotA}{secA-tanA}$$

$$=\frac{cosecA-cotA}{secA-tanA}$$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{secA+tanA}{cosecA+cotA}=\frac{cosecA-cotA}{secA-tanA}$

১২. $\frac{cosecA}{cosecA-1}+\frac{cosecA}{cosecA+1}=2\sec^2 A$

সমাধান: বামপক্ষ $=\frac{cosecA}{cosecA-1}+\frac{cosecA}{cosecA+1}$

$$=\frac{cosecA(cosecA+1)+cosecA(cosecA-1)}{(cosecA-1)(cosecA+1)}$$

$$=\frac{\operatorname{cosec}^2 A+cosecA+\operatorname{cosec}^2 A-cosecA}{\operatorname{cosec}^2 A-1}$$

$$= \frac{2\operatorname{cosec}^2 A}{\cot^2 A}$$

$$= \frac{2.\frac{1}{\sin^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= 2\sec^2 A$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{cosecA}{cosecA-1} + \frac{cosecA}{cosecA+1} = 2\sec^2 A$

১৩. $\frac{1}{1+sinA} + \frac{1}{1-sinA} = 2\sec^2 A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1}{1+sinA} + \frac{1}{1-sinA}$

$= \frac{(1-sinA)+(1+sinA)}{(1+sinA)(1-sinA)}$

$$= \frac{1 - sinA + 1 + sinA}{1 - \sin^2 A}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 A}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= 2\sec^2 A$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1+sinA} + \frac{1}{1-sinA} = 2\sec^2 A$

১৪. $\frac{1}{cosecA-1} - \frac{1}{cosecA+1} = 2\tan^2 A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1}{cosecA-1} - \frac{1}{cosecA+1}$

$= \frac{(cosecA+1)-(cosecA-1)}{(cosecA-1)(cosecA+1)}$

$$= \frac{cosecA + 1 - cosecA + 1}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{cost}^2 A}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\cot^2 A}$$

$$= 2\tan^2 A$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{cosecA-1} - \frac{1}{cosecA+1} = 2\tan^2 A$

১৫. $\frac{sinA}{1-cosA}+\frac{1-cosA}{sinA}=2cosecA$

সমাধান: বামপক্ষ $=\frac{sinA}{1-cosA}+\frac{1-cosA}{sinA}$

$=\frac{\sin^2 A+(1-cosA)^2}{sinA(1-cosA)}$

$$=\frac{\sin^2 A+1-2cosA+\cos^2 A}{sinA(1-cosA)}$$

$$=\frac{1+1-2cosA}{sinA(1-cosA)}$$

$$=\frac{2-2cosA}{sinA(1-cosA)}$$

$$=\frac{2(1-cosA)}{sinA(1-cosA)}$$

$$=\frac{2}{sinA}$$

$$=2\times\frac{1}{sinA}$$

$$=2cosecA$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{sinA}{1-cosA}+\frac{1-cosA}{sinA}=2cosecA$

১৬. $\frac{tanA}{secA+1}-\frac{secA-1}{tanA}=0$

সমাধান: বামপক্ষ $=\frac{tanA}{secA+1}-\frac{secA-1}{tanA}$

$=\frac{\tan^2 A-(secA+1)(secA-1)}{(secA+1)tanA}$

$$=\frac{\tan^2 A-(\sec^2 A-1)}{(secA+1)tanA}$$

$$=\frac{\tan^2 A-\tan^2 A}{(secA+1)tanA}$$

$$=\frac{0}{(secA+1)tanA}$$

$$=0$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{tanA}{secA+1}-\frac{secA-1}{tanA}=0$

১৭. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

সমাধান: বামপক্ষ $=(tan\theta+sec\theta)^2$

$=(\frac{sin\theta}{cos\theta}+\frac{1}{cos\theta})^2$

$$=(\frac{sin\theta+1}{cos\theta})^2$$

$$=\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1+sin\theta)(1+sin\theta)}{(1+sin\theta)(1-sin\theta)}$$

$$= \frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}$$

= ডানপক্ষ

$\therefore\ (tan\theta + sec\theta)^2 = \frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}$

১৮. $\frac{cotA + tanB}{cotB + tanA} = cotA.tanB$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{cotA + tanB}{cotB + tanA}$

$= \frac{cotA + tanB}{\frac{1}{tanB} + \frac{1}{cotA}}$

$$= \frac{cotA + tanB}{\frac{cotA + tanB}{cotA.tanB}}$$

$$= \frac{(cotA + tanB)}{(cotA + tanB)} \times cotA.tanB$$

$$= cotA.tanB$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{cotA + tanB}{cotB + tanA} = cotA.tanB$

১৯. $\sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}} = secA - tanA$

সমাধান: বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}}$

$= \sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}} \times \sqrt{\frac{1-sinA}{1-sinA}}$

$$= \frac{(\sqrt{1-sinA})^2}{\sqrt{(1+sinA)(1-sinA)}}$$

$$= \frac{1-sinA}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1-sinA}{\sqrt{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1-sinA}{cosA}$$

$$= \frac{1}{cosA} - \frac{sinA}{cosA}$$

$$= secA - tanA$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{1-sinA}{1+sinA}} = secA - tanA$

২০. $\sqrt{\frac{secA+1}{secA-1}} = cotA + cosecA$

সমাধান: বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{secA+1}{secA-1}}$

$= \sqrt{\frac{secA+1}{secA-1}} \times \sqrt{\frac{secA+1}{secA+1}}$

$$= \frac{(\sqrt{secA+1})^2}{\sqrt{(secA-1)(secA+1)}}$$

$$= \frac{secA+1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$$= \frac{secA+1}{\sqrt{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{secA+1}{tanA}$$

$$= \frac{secA}{tanA} + \frac{1}{tanA}$$

$$= \frac{\frac{1}{cosA}}{\frac{sinA}{cosA}} + cotA$$

$$= \frac{1}{cosA} \times \frac{cosA}{sinA} + cotA$$

$$= \frac{1}{sinA} + cotA$$

$$= cotA + cotA$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{secA+1}{secA-1}} = cotA + cosecA$

২১. $cosA + sinA = \sqrt{2}cosA$ হলে, তবে প্রমাণ কর যে, $cosA - sinA = \sqrt{2}sinA$

সমাধান: দেয়া আছে, $cosA + sinA = \sqrt{2}cosA$

বা, $\sqrt{2}cosA + \sqrt{2}sinA = \sqrt{2}.\sqrt{2}cosA$

বা, $cosA + sinA + \sqrt{2}sinA = 2cosA$

বা, $\sqrt{2}sinA = 2cosA - cosA - sinA$

বা, $\sqrt{2}sinA = cosA - sinA$

বা, $cosA - sinA = \sqrt{2}sinA$

(প্রমাণিত)

২২. যদি $tanA = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $tanA = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{sinA}{cosA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{3}$

বা, $\sin^2 A \times \frac{1}{\cos^2 A} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1}{\text{cosec}^2 A} \times \sec^2 A = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{\text{cosec}^2 A}{\sec^2 A} = \frac{3}{1}$

বা, $\frac{\text{cosec}^2 A + \sec^2 A}{\text{cosec}^2 A - \sec^2 A} = \frac{3+1}{3-1}$

বা, $\frac{\text{cosec}^2 A + \sec^2 A}{\text{cosec}^2 A - \sec^2 A} = \frac{4}{2}$

বা, $\frac{\text{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\text{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \frac{2}{4}$

বা, $\frac{\text{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\text{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

২৩. $cosecA - cotA = \frac{4}{3}$ হলে, $cosecA + cotA$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $cosecA - cotA = \frac{4}{3}$

আমরা জানি, $cosec^2 A - \cot^2 A = 1$

বা, $(cosecA + cotA)(cosecA - cotA) = 1$

বা, $(cosecA + cotA) \times \frac{4}{3} = 1$

বা, $cosecA + cotA = \frac{3}{4}$ (Ans.)

২৪. $cotA = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{asinA - bcosA}{asinA + bcosA}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $cotA = \frac{b}{a}$

বা, $\frac{cosA}{sinA} = \frac{b}{a}$

বা, $\frac{sinA}{cosA} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{asinA}{bcosA} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{asinA + bcosA}{asinA - bcosA} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

বা, $\frac{asinA - bcosA}{asinA + bcosA} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (Ans.)

২৫. $cosec\theta - cot\theta = \frac{1}{x}$ যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ

ক. $cosec\theta + cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর

খ. দেখাও যে, $sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $tan\theta + cot\theta = sec\theta . cosec\theta$

সমাধান:

ক. দেয়া আছে, $cosec\theta - cot\theta = \frac{1}{x}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(cosec\theta + cot\theta)(cosec\theta - cot\theta) = 1$

বা, $(cosec\theta + cot\theta) \times \frac{1}{x} = 1$

বা, $cosec\theta + cot\theta = x$

খ. ‘ক’ থেকে পাই, $cosec\theta + cot\theta = x$

বা, $\frac{1}{sin\theta} + \frac{cos\theta}{sin\theta} = x$

বা, $\frac{1 + cos\theta}{sin\theta} = x$

বা, $\frac{(1 + cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+2cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+2cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+2cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1+2cos\theta+1}{1+2cos\theta+\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{2+2cos\theta}{1+2cos\theta+\cos^2\theta-1+\cos^2\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{2(1+cos\theta)}{2cos\theta+2\cos^2\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

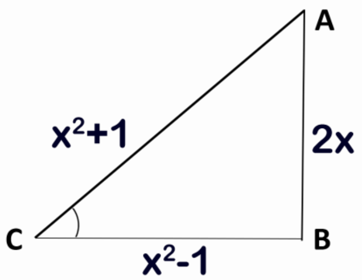
বা, $\frac{2(1+cos\theta)}{2cos\theta(1+cos\theta)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1}{cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (দেখানো হলো)

গ. ‘খ’ থেকে পাই, $sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$



$\therefore$ লম্ব $= \sqrt{(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2} = \sqrt{4x^2} = 2x$

$\therefore tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{2x}{x^2-1}$

$$cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$\therefore cosec\theta = \frac{x^2+1}{2x}$

বামপক্ষ $= tan\theta + cot\theta$

$$= \frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{2x}$$

$$= \frac{4x^2 + (x^2-1)^2}{2x(x^2-1)}$$

$$= \frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{2x(x^2-1)}$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2x(x^2-1)}$$

ডানপক্ষ $= sec\theta . cosec\theta$

$$= \frac{x^2+1}{x^2-1} \times \frac{x^2+1}{2x}$$

$$= \frac{(x^2+1)^2}{2x(x^2-1)}$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2x(x^2-1)}$$

$\therefore \ tan\theta + cot\theta = sec\theta . cosec\theta$ (প্রমাণিত)

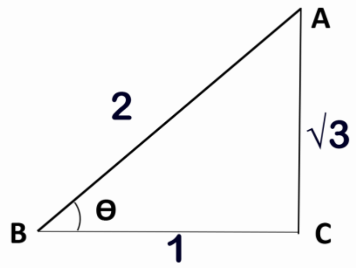
অধ্যায় ৯ 9.২ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত Trigonometric Ratio

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন (১-৭):

১। $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ. 1 গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 2

ব্যাখ্যা:



$AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$\therefore \cot\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

২। $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}$ হলে, $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ এর মান কোনটি?

ক. 3 খ. 2 গ. 1 ঘ. $\frac{1}{3}$

ব্যাখ্যা: $\cos^4\theta - \sin^4\theta$

$= (\cos^2\theta)^2 - (\sin^2\theta)^2$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

৩। $\cot(\theta - 30^0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sin\theta$ এর মান কোনটি?

ক. $\frac{1}{2}$ খ. 0 গ. 1 ঘ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ব্যাখ্যা: $\cot(\theta - 30^0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot(\theta - 30^0) = \cot 60^0$

বা, $\theta - 30^0 = 60^0$

বা, $\theta = 60^0 + 30^0$

বা, $\theta = 90^0$

$\therefore \sin 90^0 = 1$

৪। $\tan 3A = \sqrt{3}$ হলে, A এর মান কোনটি?

ক. 45° খ. 30° গ. 20° ঘ. 15°

ব্যাখ্যা: $\tan 3A = \sqrt{3}$

বা, $\tan 3A = \tan 60°$

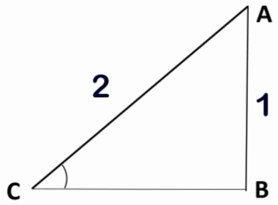
বা, $3A = 60°$ বা, $A = 20°$

৫। $0° \le \theta \le 90°$ এর জন্য $\sin\theta$ এর সর্বোচ্চ মান-

ক. -1 খ. 0 গ. $\frac{1}{2}$ ঘ. 1

MCQ Answers:
১। ক
২। ঘ
৩। গ
৪। গ
৫। ঘ
৬। গ
৭। ক

৬। চিত্রে-



(i) $\angle ACB = 30°$

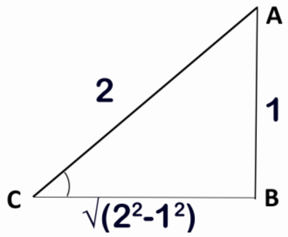
(ii) $\tan A = \sqrt{3}$

(iii) $\sin(A + C) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i　　খ. ii　　গ. i ও ii　　ঘ. ii ও iii

ব্যাখ্যা:



(i) সঠিক; $\sin \angle ACB = \frac{1}{2}$

বা, $\sin \angle ACB = \sin 30°$ বা, $\angle ACB = 30°$

(ii) সঠিক; $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

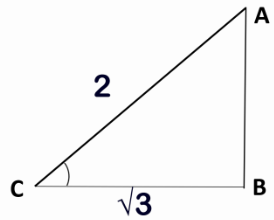
(iii) সঠিক নয়; কারণ, $(A + C) = 90°$ বা, $\sin(A + C) = \sin 90°$ বা, $\sin(A + C) = 1$

৭। ΔABC – সমকোণী ত্রিভুজে, অতিভুজ $AC = 2, AB = 1$

(i) $\cos A = \sin C$

(ii) $\cos A + \sec A = \frac{5}{2}$

(iii) $\tan C = \frac{2}{\sqrt{3}}$



নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii　　খ. ii ও iii　　গ. i ও iii　　ঘ. i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$

(i) সঠিক; $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$

বা, $C = 30°$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 30°$

বা, $A = 60°$

$\therefore \cos A = \cos 60° = \frac{1}{2}$

এবং $\sin C = \sin 30° = \frac{1}{2}$

সূত্রসমূহঃ

Part: 5

1.

$\sin 0^0 = 0$

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 90^0 = 1$

2.

$\cos 0^0 = 1$

$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\cos 90^0 = 0$

3.

$\tan 0^0 = 0$

$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 45^0 = 1$

$\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\tan 90^0 =$ অসংজ্ঞায়িত

4.

$\cot 0^0 =$ অসংজ্ঞায়িত

$\cot 30^0 = \sqrt{3}$

$\cot 45^0 = 1$

$\cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 90^0 = 0$

5.

$\sec 0^0 = 1$

$\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sec 45^0 = \sqrt{2}$

$\sec 60^0 = 2$

$\sec 90^0 =$ অসংজ্ঞায়িত

(ii) সঠিক; বামপক্ষ $= \cos A + \sec A$

$$= \frac{1}{2} + 2 = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

(iii) সঠিক নয়; কারণ, $\tan C = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

মান নির্ণয় কর (৮-১১)

৮। $\frac{1-\cot^2 60°}{1+\cot^2 60°}$

সমাধান: $\frac{1-\cot^2 60°}{1+\cot^2 60°}$

$$= \frac{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{1+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3+1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

৯। $\tan 45°.\sin^2 60°.\tan 30°.\tan 60°$

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= \tan 45°.\sin^2 60°.\tan 30°.\tan 60°$

$$= 1.(\frac{\sqrt{3}}{2})^2.\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}$$

$$= 1.\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

১০। $\frac{1-\cos^2 60°}{1+\cos^2 60°} + \sec^2 60°$

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= \frac{1-\cos^2 60°}{1+\cos^2 60°} + \sec^2 60°$

$$= \frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2} + (2)^2$$

$$= \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} + 4$$

$$= \frac{\frac{4-1}{4}}{\frac{4+1}{4}} + 4$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} + 4$$

6.

$\text{cosec } 0^0 =$ অসংজ্ঞায়িত

$\text{cosec } 30^0 = 2$

$\text{cosec } 45^0 = \sqrt{2}$

$\text{cosec } 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\text{cosec } 90^0 = 1$

$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + 4$

$= \frac{3}{5} + 4$

$= \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5}$ (Ans.)

১১। $\cos45°.\cot^2 60°.\operatorname{cosec}^2 30°$

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি = $\cos45°.\cot^2 60°.\operatorname{cosec}^2 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}.(\frac{1}{\sqrt{3}})^2.(2)^2$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{3}.4$

$= \frac{4}{3\sqrt{2}}$

$= \frac{4}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{3 \times 2}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (Ans.)

দেখাও যে, (১২-১৭):

১২। $\cos^2 30° - \sin^2 30° = \cos60°$

সমাধান: বামপক্ষ = $\cos^2 30° - \sin^2 30°$

$= (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$= \frac{3-1}{4}$

$= \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

ডানপক্ষ = $\cos60° = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos^2 30° - \sin^2 30° = \cos60°$ (দেখানো হলো)

১৩। $\sin60° \cos30° + \cos60° \sin30° = \sin90°$

সমাধান:

বামপক্ষ = $\sin60° \cos30° + \cos60° \sin30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$$= \frac{3+1}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

ডানপক্ষ $= \sin 90° = 1$

$\therefore \sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = \sin 90°$ (দেখানো হলো)

১৪। $\cos 60° . \cos 30° + \sin 60° . \sin 30° = \cos 30°$

সমাধান: বামপক্ষ $= \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$

$$= \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ডানপক্ষ $= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30° = \cos 30°$ (দেখানো হলো)

১৫। $\sin 3A = \cos 3A$. যদি $A = 15°$ হয়।

সমাধান: দেয়া আছে, $A = 15°$

বামপক্ষ $= \sin 3A$

$$= \sin(3 \times 15°)$$

$$= \sin 45°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ডানপক্ষ $= \cos 3A$

$$= \cos(3 \times 15°)$$

$$= \cos 45°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \sin 3A = \cos 3A$ (দেখানো হলো)

১৬। $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$. যদি $A = 45°$ হয়।

সমাধান: দেয়া আছে, $A = 45°$

বামপক্ষ $= \sin 2A$

$$= \sin(2 \times 45°)$$

$$= \sin 90°$$

$$= 1$$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$$= \frac{2\tan 45°}{1 + (\tan 45°)^2}$$

$$= \frac{2 \times 1}{1 + (1)^2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

$\therefore \sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (দেখানো হলো)

১৭। $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$, যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান: দেয়া আছে, $A = 30°$

বামপক্ষ $= \tan 2A$

$$= \tan(2 \times 30°)$$
$$= \tan 60°$$
$$= \sqrt{3}$$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$$= \frac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

$\therefore \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ (দেখানো হলো)

১৮। $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$
এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45°$, $B = 15°$

সমাধান: দেয়া আছে, $2\cos(A+B) = 1$

বা, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos(A+B) = \cos 60°$

$\therefore A + B = 60°$ ... ... (i)

এবং $2\sin(A-B) = 1$

বা, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin(A-B) = \sin 30°$

$\therefore A - B = 30°$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$2A = 90°$

বা, $A = 45°$

আবার, (i) থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$2B = 30°$

বা, $B = 15°$

$\therefore A = 45°, B = 15°$ (দেখানো হলো)

১৯। $\cos(A-B) = 1, 2\sin(A+B) = \sqrt{3}$
এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $\cos(A-B) = 1$

বা, $\cos(A-B) = \cos 0°$

$\therefore A - B = 0°$ ... ... (i)

এবং $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$

বা, $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(A+B) = \sin60°$
$\therefore A + B = 60°$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$2A = 60°$
বা, $A = 30°$

আবার, (ii) থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,
$2B = 60°$
বা, $B = 30°$
$\therefore A = 30°, B = 30°$ (Ans.)

২০। সমাধান কর: $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3}$

বা, $\cot A = \sqrt{3}$

বা, $\cot A = \cot 30°$

$\therefore A = 30°$ (Ans.)

২১। $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$
এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $\cot(A+B) = 1$
বা, $\cot(A+B) = \cot45°$
$\therefore A + B = 45°$ ... ... (i)

এবং $\cot(A-B) = \sqrt{3}$
বা, $\cot(A-B) = \cot30°$
$\therefore A - B = 30°$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$2A = 75°$
বা, $A = \frac{75°}{2}$
বা, $A = 37\frac{1°}{2}$

আবার, (i) থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,
$2B = 15°$
বা, $B = \frac{15°}{2}$

বা, $B = 7\frac{1°}{2}$

$\therefore A = 37\frac{1°}{2}, B = 7\frac{1°}{2}$ (Ans.)

২২। দেখাও যে, $\cos3A = 4\cos^3A - 3\cos A$
যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান: দেয়া আছে, $A = 30°$

বামপক্ষ $= cos3A$

$$= \cos(3 \times 30°)$$
$$= \cos 90°$$
$$= 0$$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$$= 4(\cos 30°)^3 - 3\cos 30°$$
$$= 4(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

$\therefore cos3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ (দেখানো হলো)

২৩। সমাধান কর: $\sin\theta + \cos\theta = 1$ যখন $0° \leq \theta \leq 90°$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = (1)^2$

বা, $\sin^2\theta + 2\sin\theta.\cos\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $1 + 2\sin\theta.\cos\theta = 1$

বা, $2\sin\theta.\cos\theta = 0$
বা, $\sin\theta.\cos\theta = 0$

হয়, $\sin\theta = 0$
বা, $\sin\theta = \sin 0°$
$\therefore \theta = 0°$

অথবা, $\cos\theta = 0$
বা, $\cos\theta = \cos 90°$
$\therefore \theta = 90°$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 0°$ অথবা, $90°$

২৪। সমাধান কর: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণ, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$

বা, $\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2 - 5\cos\theta$

বা, $\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2 - 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 1 - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$
বা, $(\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 3 = 0$
বা, $\cos\theta = -3$
কিন্তু, $\cos\theta \neq -3$, কারণ, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\cos\theta = \cos 60°$
$\therefore \theta = 60°$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 60°$

২৫। সমাধান কর: $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান:
প্রদত্ত সমীকরণ, $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$
বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$
বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$
বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$
বা, $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta - 1 = 0$
বা, $\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \cos 0°$
$\therefore \theta = 0°$
কিন্তু, $\theta \neq 0°$, কারণ, θ সূক্ষ্মকোণ

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\cos\theta = \cos 60°$
$\therefore \theta = 60°$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 60°$

২৬। সমাধান কর: $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ,
$\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$
বা, $\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$
বা, $\tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0$
বা, $(\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\tan\theta - 1 = 0$
বা, $\tan\theta = 1$
বা, $\tan\theta = \tan 45°$
$\therefore \theta = 45°$

অথবা, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$
বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$
বা, $\tan\theta = \tan 60°$
$\therefore \theta = 60°$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = 45°$ অথবা, $60°$

২৭। মান নির্ণয় কর:

$$3\cot^2 60° + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30° + 5\sin^2 45° - 4\cos^2 60°$$

সমাধান:
প্রদত্ত রাশি $= 3\cot^2 60° + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30° + 5\sin^2 45° - 4\cos^2 60°$

$$= 3.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}.(2)^2 + 5.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4.\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= 3.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.4 + 5.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{4}$$
$$= 1 + 1 + \frac{5}{2} - 1$$
$$= 1 + \frac{5}{2}$$
$$= \frac{2+5}{2}$$
$$= \frac{7}{2} \text{ (Ans.)}$$

২৮। ΔABC –এর $\angle B = 90°$, $AB = 5cm$, $BC = 12cm$

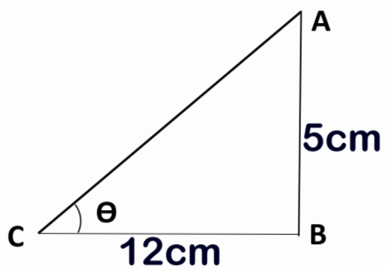
ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. $\angle C = \theta$, হলে $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta . \mathrm{cosec}^2\theta$

সমাধান:

ক.



পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore AC = 13cm$ (Ans.)

খ. এখানে, $AC = 13$

এখন, $sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$

এবং $cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

$\therefore sin\theta + cos\theta = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}$

$= \frac{5+12}{13} = \frac{17}{13}$ (Ans.)

গ. ΔABC থেকে পাই,

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$$

এবং

$$cosec\theta = \frac{1}{sin\theta} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$$

এখন, বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta$

$$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2$$
$$= \frac{169}{144} + \frac{169}{25}$$
$$= \frac{4225 + 24336}{3600}$$
$$= \frac{28561}{3600}$$

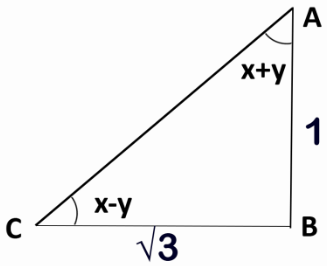
ডানপক্ষ $= \sec^2\theta . \operatorname{cosec}^2\theta$

$$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 . \left(\frac{13}{5}\right)^2$$
$$= \frac{169}{144} \times \frac{169}{25}$$
$$= \frac{28561}{3600}$$

$\therefore \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta . \operatorname{cosec}^2\theta$

(দেখানো হলো)

২৯।



ক. AC এর পরিমাণ কত?
খ. tanA + tanC এর মান নির্ণয় কর।
গ. x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore AC = 2$ একক (Ans.)

খ. প্রদত্ত রাশি $= \tan A + tan C$

$= \frac{BC}{AB} + \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (Ans.)

গ. চিত্র থেকে পাই,

$$\tan A = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

বা, $\tan(x+y) = \sqrt{3}$

বা, $\tan(x+y) = \tan 60°$

$\therefore x + y = 60° \ldots \ldots \ldots (i)$

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ বাদে অন্য দুই কোণের সমষ্টি 90°

$\therefore x + y + x - y = 90°$

বা, $2x = 90°$

বা, $x = \frac{90°}{2}$
বা, $x = 45°$
(i) নং হতে পাই, $x + y = 60°$
বা, $y = 60° - x$
বা, $y = 60° - 45°$
বা, $y = 15°$
$\therefore x = 45°, y = 15°$ $(Ans.)$

৩০। $\sin\theta = p, \cos\theta = q, \tan\theta = r$ যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।
ক. $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।
খ. $p + q = \sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\theta = 45°$
গ. $7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে, দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

সমাধান:
ক. দেয়া আছে, $\tan\theta = r$
এখন, $r = \sqrt{(3)^{-1}}$
বা, $\tan\theta = \sqrt{(3)^{-1}}$
বা, $\tan\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$
বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
বা, $\tan\theta = \tan 30°$
$\therefore \theta = 30°$ (Ans.)

খ. দেয়া আছে, $\sin\theta = p, \cos\theta = q$ এবং $p + q = \sqrt{2}$
বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$
বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$
বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$
বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2.\sqrt{2}.\cos\theta + \cos^2\theta$
বা, $1 - \cos^2\theta - 2 + 2.\sqrt{2}.\cos\theta - \cos^2\theta = 0$
বা, $-2\cos^2\theta + 2.\sqrt{2}.\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 2.\sqrt{2}.\cos\theta + 1 = 0$
বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$
বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$
বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $\cos\theta = \cos 45°$
$\therefore \theta = 45°$ (প্রমাণিত)

গ. দেয়া আছে, $\sin\theta = p, \cos\theta = q$
এখন, $7p^2 + 3q^2 = 4$
বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$
বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$
বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$
বা, $4\sin^2\theta + 3 = 4$
বা, $4\sin^2\theta = 4 - 3$
বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$
বা, $\sin\theta = \frac{1}{4}$
বা, $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{4}}$
বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ [θ সূক্ষ্মকোণ]

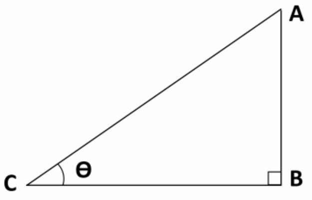
বা, $\sin\theta = \sin 30°$ $\therefore \theta = 30°$ বামপক্ষ $= \tan\theta$ $= \tan 30°$ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ $=$ ডানপক্ষ $\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (দেখানো হলো)	

অধ্যায় ১০

দূরত্ব ও উচ্চতা
Distance & Elevation

১. একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের এক তৃতীয়াংশ হলে ছায়ার প্রান্ত বিন্দুতে সূর্যের উন্নতি কোণ কত?

(ক) 18.43°   (খ) 30°   (গ) 45°   (ঘ) 60°



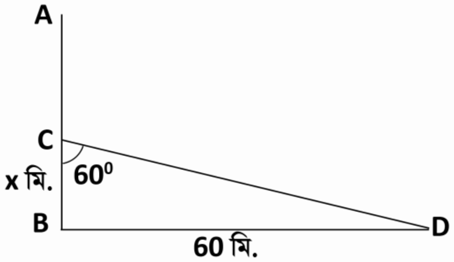
ব্যাখ্যা: ধরি, BC = h $\therefore AB = \frac{h}{3}$

$\therefore \tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$ বা, $\tan\theta = \frac{\frac{h}{3}}{h}$

বা, $\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{3})$

$\therefore \theta = 18.43°$ (প্রায়)

২. পাশের চিত্রে x এর মান নিচের কোনটি?



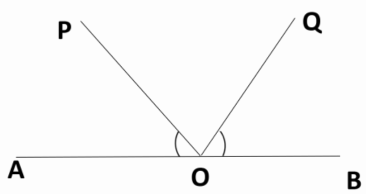
(ক) $\frac{\sqrt{3}}{60}$ (খ) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ (গ) $20\sqrt{3}$ (ঘ) $60\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $\tan 60° = \frac{BD}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{60}{x}$

বা, $x = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$ $\therefore x = 20\sqrt{3}$

৩.



ওপরের চিত্রে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ কোনটি?

(ক) ∠QOB   (খ) ∠POA   (গ) ∠QOA   (ঘ) ∠POB

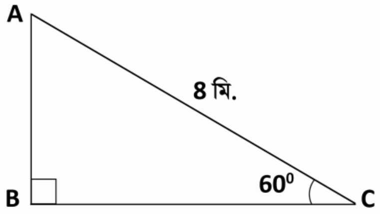
ব্যাখ্যা: AB সরলরেখার ওপরের P বিন্দুটি AB রেখার সাথে ∠POA কোণ উৎপন্ন করে। তাই, উন্নতি কোণ ∠POA.

৪. অবনতি কোণের মান কত ডিগ্রী হলে একটি খুটির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য সমান হবে?

(ক) 30°   (খ) 45°   (গ) 60°   (ঘ) 90°

MCQ Answers:
১। ক
২। গ
৩। খ
৪। খ
৫। খ
৬। ঘ
৭। ক
৮। ঘ
৯। গ

নিচের চিত্র অনুযায়ী ৫ ও ৬ প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও:



৫. BC এর দৈর্ঘ্য হবে-

(ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার (খ) 4 মিটার (গ) $4\sqrt{2}$ মিটার (ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

ব্যাখ্যা: ΔABC -এ $\cos 60° = \frac{BC}{AC}$

বা, $BC = AC \times \cos 60° = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

$\therefore BC = 4$ মিটার।

৬. AB এর দৈর্ঘ্য হবে-

(ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার (খ) 4 মিটার (গ) $4\sqrt{2}$ মিটার (ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

ব্যাখ্যা: ΔABC -এ $\sin 60° = \frac{AB}{AC}$

বা, $AB = AC \times \sin 60° = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$\therefore AB = 4\sqrt{3}$ মিটার

৭. উন্নতি কোণ-

i. 30° হলে, ভূমি > লম্ব হবে

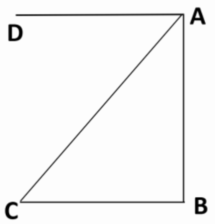
ii. 45° হলে, ভূমি = লম্ব হবে

iii. 60° হলে, লম্ব < ভূমি হবে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

৮. পাশের চিত্রে



i. $\angle DAC$ অবনতি কোণ

ii. $\angle ACB$ উন্নতি কোণ

iii. $\angle DAC = \angle ACB$

নিচের কোনটি সঠিক?

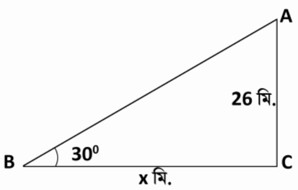
ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

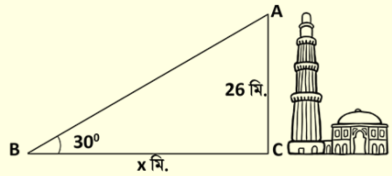
৯. ভূ-রেখার অপর নাম কী?

ক) লম্বরেখা খ) সমান্তরাল রেখা গ) শয়নরেখা ঘ) ঊর্ধ্বরেখা

১০. একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:





মনে করি, মিনারের পাদদেশ থেকে স্থানটির দূরত্ব, BC = x মিটার,
এখানে, মিনারের উচ্চতা, AC = 26 মিটার এবং B বিন্দুতে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি $\angle ABC = 30°$

ΔABC থেকে পাই, $\tan\angle ABC = \frac{AC}{BC}$

বা, $\tan 30° = \frac{26}{x}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{26}{x}$ $\quad [\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

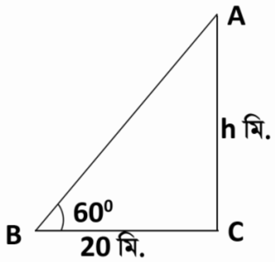
বা, $x = 26 \times \sqrt{3}$

$\therefore x = 45.033$ (প্রায়)

$\therefore$ মিনারের পাদদেশ থেকে স্থানটির দুরত্ব 45.033 মিটার (প্রায়)

১১. একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছের উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, গাছের উচ্চতা AC = h মিটার,
এখানে, গাছের পাদদেশ থেকে ভূতলের বিন্দুর দূরত্ব, BC = 20 মিটার দূরে ভূতলস্থ B বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি $\angle ABC = 60°$

ΔABC থেকে পাই,

$\tan\angle ABC = \frac{AC}{BC}$

বা, $\tan 60° = \frac{h}{20}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{20}$ $\quad [\because \tan 60° = \sqrt{3}\,]$

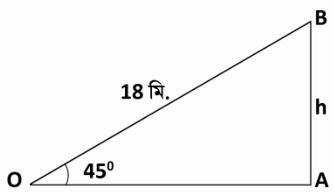
বা, $h = 20\sqrt{3}$

$\therefore h = 34.641$ (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির উচ্চতা 34.641 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১২. 18 মিটার দৈর্ঘ্য একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, ছাদের স্পর্শবিন্দু B এবং দেওয়ালের উচ্চতা AB = h মিটার। এখানে, মইয়ের দৈর্ঘ্য, OB = 18 মিটার এবং $\angle AOB = 45°$

ΔAOB থেকে পাই, $\sin\angle AOB = \frac{AB}{OB}$

বা, $\sin 45° = \frac{AB}{OB}$

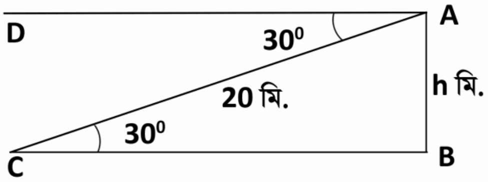
বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{18}$ $[\because \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\therefore h = \frac{18}{\sqrt{2}} = 12.728$ (প্রায়)

$\therefore$ দেওয়ালের উচ্চতা = 12.728 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১৩. একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, ঘরের ছাদের উচ্চতা, AB = h মিটার, ভূতলস্থ C বিন্দুর অবনতি $\angle CAD = 30°$ এবং AC= 20 মিটার।

$\therefore \angle CAD = \angle ACB = 30°$ (DA || BC এবং একান্তর কোন বলে)

ΔABC থেকে পাই, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin 30° = \frac{h}{20}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$ $[\because \sin 30° = \frac{1}{2}]$

বা, $2h = 20$

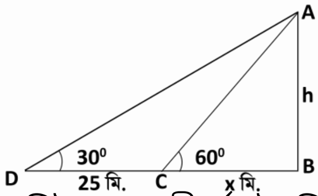
বা, $h = \frac{20}{2}$

$\therefore h = 10$

$\therefore$ ঘরের উচ্চতা 10 মিটার। (Ans.)

১৪. ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, স্তম্ভের উচ্চতা, AB = h মিটার এবং শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60°$। C বিন্দু থেকে CD = 25 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 30°$ হয়।

ধরি, BC = x মিটার।

$\therefore BD = BC + CD = (x + 25)$ মিটার

ΔABC থেকে পাই,

$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ $[\tan 60° = \sqrt{3}]$

$\therefore \ x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ……… (i)

আবার, ΔABD থেকে পাই, $\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30° = \frac{h}{x+25}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+25}$ $[\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

বা, $\sqrt{3}h = x + 25$

বা, $\sqrt{3}h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 25$ [(i) নং সমীকরণের সাহায্যে]

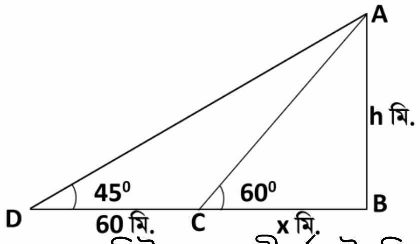
বা, $\sqrt{3}h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 25$

বা, $\frac{3h-h}{\sqrt{3}} = 25$

বা, $2h = 25\sqrt{3}$

বা, $h = \frac{25\sqrt{3}}{2}$
$\therefore h = 21.651$ (প্রায়)
$\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা 21.651 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১৫. কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
সমাধান :

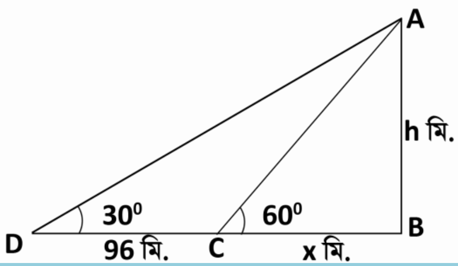


মনে করি, মিনারের উচ্চতা, AB = h মিটার এবং শীর্ষের উন্নতি $\angle ADB = 45°$। D বিন্দু থেকে CD = 60 মিটার এগিয়ে আসলে উন্নতি $\angle ACB = 60°$ হয়।

ধরি, BC = x মিটার।
$\therefore BD = BC + CD$
$= (x + 60)$ মিটার।
ΔABC থেকে পাই,
$\tan 60° = \frac{AB}{AC}$
বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ [$\tan 60° = \sqrt{3}$]
$\therefore\ x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ... ... (i)

আবার, ΔABD থেকে পাই, $\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$
বা, $\tan 45° = \frac{h}{x+60}$
বা, $1 = \frac{h}{x+60}$ [$\tan 45° = 1$]
বা, $h = x + 60$
বা, $h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 60$ [(i) নং সমীকরণের সাহায্যে]
বা, $h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 60$
বা, $\frac{\sqrt{3}h - h}{\sqrt{3}} = 60$
বা, $\sqrt{3}h - h = 60\sqrt{3}$
বা, $h(\sqrt{3} - 1) = 60\sqrt{3}$
বা, $h = \frac{60\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)}$
$\therefore h = 141.962$ (প্রায়) [ক্যালকুলেটর এর সাহায্যে]
$\therefore$ মিনারটির উচ্চতা 141.962 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১৬. একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।
সমাধান:

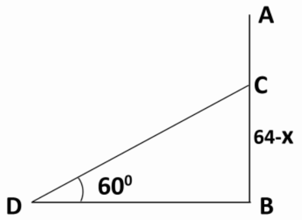


মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা, AB = h মিটার এবং টাওয়ারের উন্নতি $\angle ACB = 60°$। C বিন্দু থেকে CD = 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 30°$ হয়।

ধরি, নদীর বিস্তার BC = x মিটার।
$\therefore$ BD = BC + CD = (x + 96) মিটার।
ΔABC থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$
বা, $\tan 60° = \frac{h}{x}$
বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ [$\tan 60° = \sqrt{3}$]
$\therefore\ x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ... ... (i)
আবার, ΔABD থেকে পাই, $\tan\angle ADB = \frac{AB}{BD}$
বা, $\tan 30° = \frac{h}{x+96}$
বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+96}$ [$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$]
বা, $\sqrt{3}h = x + 96$
বা, $\sqrt{3}h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 96$ [(i) নং সমীকরণের সাহায্যে]
বা, $\sqrt{3}h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 96$
বা, $\frac{3h-h}{\sqrt{3}} = 96$
বা, $2h = 96\sqrt{3}$
বা, $h = \frac{96\sqrt{3}}{2}$
$\therefore h = 83.138$ (প্রায়)

(i) নং সমীকরণে h এর মান বসিয়ে পাই,
$$x = \frac{96\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 48$$
$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা 83.138 মিটার এবং নদীর বিস্তার 48 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১৭. 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
সমাধান:



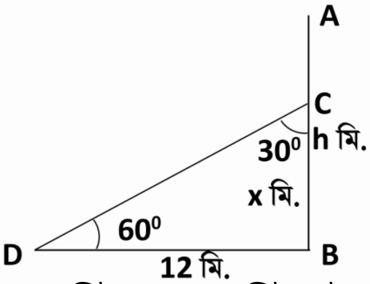
মনে করি, খুঁটিটির উচ্চতা, AB = 64 মিটার।
খুঁটিটির C বিন্দুতে x মিটার অংশ ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে $\angle BDC = 60°$ কোণ উৎপন্ন করে।
$\therefore$ AC = CD = x মিটার
$\therefore$ BC = (64 − x) মিটার

এখন, ΔBCD -এ
$\sin\angle BDC = \frac{BC}{CD}$
বা, $\sin 60° = \frac{64-X}{x}$
বা $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{64-X}{x}$
বা, $\sqrt{3}x = 128 - 2x$
বা, $(\sqrt{3} + 2)x = 128$
বা, $x = \frac{128}{\sqrt{3}+2}$

∴ x = 34.298 (প্রায়)[ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]
∴ খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য 34.298 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১৮. একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে, ভাঙা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

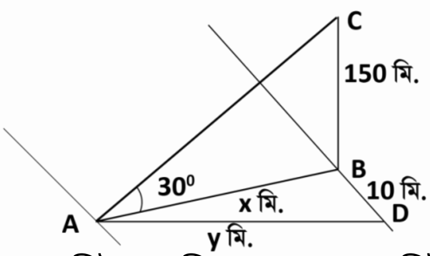


মনে করি, গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য, AB = h মিটার, BC = x মিটার উচ্চতায় ভেঙ্গে গিয়ে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভাঙ্গা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে ∠BCD = 30° উৎপন্ন করে গাছটির গোড়া থেকে BD = 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে।
এখানে, CD = AC = AB – BC = (h-x) মিটার
ΔBCD থেকে পাই,
$\tan \angle BCD = \frac{BD}{BC}$
বা, $\tan 30° = \frac{12}{x}$
বা $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12}{x}$ $\quad$ [$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$]
$\therefore x = 12\sqrt{3}$

আবার, $\sin \angle BCD = \frac{BD}{CD}$
বা, $\sin 30° = \frac{12}{(h-x)}$
বা, $\frac{1}{2} = \frac{12}{(h-x)}$ $\quad$ [$\sin 30° = \frac{1}{2}$]
বা, $h - x = 24$
বা, $h = 24 + x$
বা, $h = 24 + 12\sqrt{3}$ $\quad$ [x এর মান বসিয়ে]
∴ h = 44.785 (প্রায়)
∴ গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য 44.785 মিটার (প্রায়) (Ans.)

১৯. একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দুরে তীরে পৌছল।
(ক) উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।
(খ) নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।
(গ) লোকটির যাত্রা স্থান থেকে অবতরণের স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

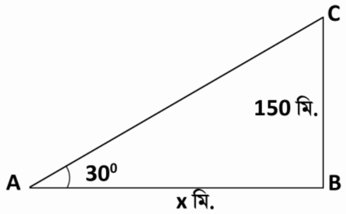
সমাধান:
(ক)



মনে করি, নদীর বিস্তার AB = x মিটার, A বিন্দুতে BC = 150 মিটার গাছে শীর্ষের উন্নতি

$\angle CAB = 30°$ এবং অপর তীরে নৌকার অবস্থান D বিন্দুতে হলে AD = y মিটার এবং BD = 10 মিটার।

(খ)



ΔABC থেকে পাই, $\tan \angle CAB = \frac{BC}{AB}$

বা, $\tan 30° = \frac{150}{x}$

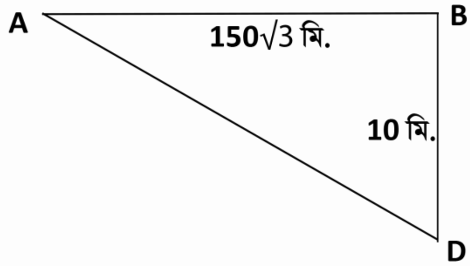
বা $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{x}$ $\qquad$ $[\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

বা, $x = 150\sqrt{3}$

$\therefore x = 259.808$ (প্রায়).

$\therefore$ নদীর বিস্তার 259.808 মিটার (প্রায়) (Ans.)

(গ)



ΔABD থেকে পাই,

পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে,

$AD^2 = AB^2 + BD^2$

$\therefore AD = \sqrt{(150\sqrt{3})^2 + 10^2}$

$= \sqrt{67500 + 100}$

$= 260$

$\therefore$ লোকটির যাত্রা স্থান থেকে অবতরণের স্থানের দূরত্ব 260 মিটার। (Ans.)

২০. 16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দণ্ডায়মান একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে রাখা হলো। ফলে এটি ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করল।

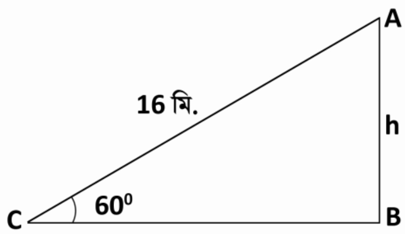
ক. উদ্দীপক অনুসারে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র অঙ্কন করো।

খ. দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

গ. দেওয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা অবস্থায় মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে ভূমি বরাবর আর কতদূর সরালে মইটি ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে?

সমাধান:

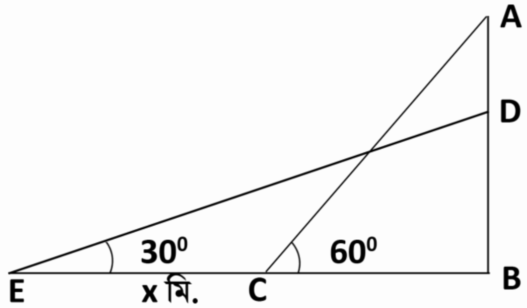
ক.



মনে করি, দেওয়ালের উচ্চতা AB = h মিটার, মইটির দৈর্ঘ্য AC = 16 মিটার এবং মইটি ভূমির সাথে $\angle ACB = 60°$ উৎপন্ন করে।

খ. ΔABC থেকে পাই,
$\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC}$
বা, $\sin60^\circ = \frac{h}{16}$
বা $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{16}$ [$\sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$]
বা, $2h = 16\sqrt{3}$
বা, $h = \frac{16\sqrt{3}}{2}$
বা, $h = 8\sqrt{3}$
$\therefore h = 13.86$ মিটার
$\therefore$ দেওয়ালের উচ্চতা 13.86 মিটার (প্রায়) (Ans.)

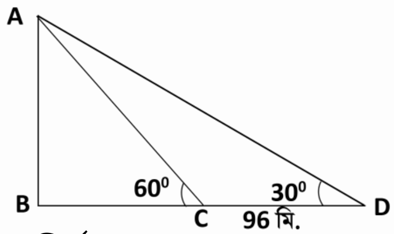
গ. 'খ' হতে পাই, $AB = 8\sqrt{3}$ মিটার



ধরি, মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে x মিটার ভূমি বরাবর সরানো হয়।
এখন, $AC = DE = 16$ মিটার
এবং $BE = BC + x$
এখানে, $BC^2 + AB^2 = AC^2$
বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2$
বা, $BC^2 = (16)^2 - (8\sqrt{3})^2$
বা, $BC^2 = 64$
$\therefore BC = 8$
$\therefore BE = 8 + x$

তাহলে, $\cos30^\circ = \frac{8+x}{16}$
বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8+x}{16}$
বা, $16 + 2x = 16\sqrt{3}$
বা, $2x = 16\sqrt{3} - 16$
বা, $x = \frac{16\sqrt{3}-16}{2}$
$\therefore x = 5.86$
অর্থাৎ, মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে ভূমি বরাবর আরও 5.86 মিটার সরাতে হবে।
(Ans.)

২১. চিত্রে, CD = 96 মিটার।



ক. $\angle CAD$ এর ডিগ্রী পরিমাপ নির্ণয় কর।
খ. BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
গ. ΔACD এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. চিত্রানুসারে,
$\angle ADC = 30°$ এবং $\angle ACB = 60°$
$\angle ACD = 180° - 60° = 120$
$\therefore \angle CAD = 180° - (120° + 30°)$
$= 180° - 150° = 30°$ (Ans.)

খ. 'ক' এর চিত্র থেকে,

মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা AB = h মিটার এবং টাওয়ারের উন্নতি $\angle ACB = 60°$। C বিন্দু থেকে CD = 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ $\angle ADB = 30°$ হয়।

ধরি, BC এর দৈর্ঘ্য x মিটার।
$\therefore BD = BC + CD = (x + 96)$ মিটার।
ΔABC থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$
বা, $\tan 60° = \frac{h}{x}$
বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ $[\tan 60° = \sqrt{3}]$
$\therefore \ x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ... ... (i)

আবার, ΔABD থেকে পাই, $\tan \angle ADB = \frac{AB}{BD}$
বা, $\tan 30° = \frac{h}{x+96}$
বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+96}$ $\quad [\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}]$
বা, $\sqrt{3}h = x + 96$
বা, $\sqrt{3}h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 96$ $\quad$ [(i) নং সমীকরণের সাহায্যে]
বা, $\sqrt{3}h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 96$
বা, $\frac{3h-h}{\sqrt{3}} = 96$
বা, $2h = 96\sqrt{3}$
বা, $h = \frac{96\sqrt{3}}{2}$
$\therefore h = 83.138$ (প্রায়)

(i) নং সমীকরণে h এর মান বসিয়ে পাই,
$$x = \frac{96\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 48$$
$\therefore$ BC এর দৈর্ঘ্য 48 মিটার।

গ. 'খ' থেকে পাই,

টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h = 48\sqrt{3}$ মিটার এবং BC = x = 48 মিটার।
দেওয়া আছে, CD = 96 মিটার।
$\therefore \Delta ABD$ এর মধ্যে,
$\sin 30° = \frac{AB}{AD}$
বা, $\frac{1}{2} = \frac{48\sqrt{3}}{AD}$
বা, $AD = 48\sqrt{3} \times 2$
বা, $AD = 96\sqrt{3}$ মিটার

আবার, ΔABC এর মধ্যে,

$\sin 60° = \frac{AB}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{48\sqrt{3}}{AC}$

বা, $AC = \frac{96\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

বা, $AC = 96$ মিটার

$\therefore \Delta ACD$ এর পরিসীমা $= (AC + CD + AD)$ একক

$= (96 + 96 + 96\sqrt{3})$ মিটার

$= (192 + 166.28)$ মিটার

$= 358.277$ মিটার (প্রায়)

(Ans.)

অধ্যায় ১১ ১১.১ বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত
Algebraic Ratio & Proportion

১. দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার এবং b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

সমাধান: ১ম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার
∴ ১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a × a বর্গমিটার
= a^2 বর্গমিটার

২য় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = b মিটার
∴ ২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = b × b বর্গমিটার
= b^2 বর্গমিটার

এখন, $\frac{\text{১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}}{\text{২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \frac{a^2}{b^2}$
১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল : ২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
$= a^2 : b^2$
Ans. $a^2 : b^2$

২. একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ r একক এবং বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য x একক।

আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গএকক
এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গএকক
প্রশ্নমতে,
$\pi r^2 = x^2$
বা, $\frac{r^2}{x^2} = \frac{1}{\pi}$
বা, $\frac{r}{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ... (i)

আবার, বৃত্তের পরিসীমা = $2\pi r$ একক
এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $4x$ একক

∴ $\frac{\text{বৃত্তের পরিসীমা}}{\text{বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা}} = \frac{2\pi r}{4x} = \frac{\pi r}{2x} = \frac{\pi}{2} \times \frac{r}{x}$

$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ [(i) নং থেকে মান বসিয়ে]
$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
∴ বৃত্তের পরিসীমা : বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $\sqrt{\pi} : 2$
Ans. $\sqrt{\pi} : 2$

৩. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3:4 এবং তাদের ল.সা.গু. 180; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সংখ্যা দুইটি 3x এবং 4x; যেখানে x, অনুপাতের সাধারণ গুণিতক।
3x এবং 4x এর ল. সা. গু. = $3 \times 4 \times x = 12x$

প্রশ্নমতে, $12x = 180$
বা, $x = \frac{180}{12}$
বা, $x = 15$

∴ ১ম সংখ্যা = $3 \times 15 = 45$
∴ ২য় সংখ্যা = $4 \times 15 = 60$
Ans. 45 ও 60

৪. একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত 1: 4, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = x
এবং উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = $4x$
মোট ছাত্র সংখ্যা = $x + 4x = 5x$

∴ অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার

$= \frac{\text{অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা}}{\text{মোট ছাত্র সংখ্যা}} \times 100\%$

$= \frac{x}{5x} \times 100\% \quad = \quad 20\%$
Ans. 20 %

৫. একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ক্রয়মূল্য = 100 টাকা
∴ 28% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (100 - 28) টাকা
= 72 টাকা

∴ $\frac{\text{বিক্রয়মূল্য}}{\text{ক্রয়মূল্য}} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25}$

∴ বিক্রয়মূল্য : ক্রয়মূল্য = 18:25

Ans. 18:25

৬. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5:2। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান: 7 বছর পূর্বে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত ছিল 5:2
ধরি, 7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল $5x$ বছর
এবং 7 বছর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল $2x$ বছর

∴ বর্তমানে পিতার বয়স = $(5x + 7)$ বছর
এবং বর্তমানে পুত্রের বয়স = $(2x+7)$ বছর

প্রশ্নমতে, $5x + 7 + 2x + 7 = 70$
বা, $7x + 14 = 70$
বা, $7x = 70 - 14$
বা, $7x = 56$
বা, $x = \frac{56}{7}$
∴ $x = 8$

∴ 5 বছর পরে পিতার বয়স হবে = $(5x + 7 + 5)$ বছর
= $(5x + 12)$ বছর
= $(5 \times 8 + 12)$ বছর
= $(40 + 12)$ বছর = 52 বছর

এবং 5 বছর পরে পুত্রের বয়স হবে = $(2x + 7 + 5)$ বছর
= $(2x + 12)$ বছর
= $(2 \times 8 + 12)$ বছর
= $(16 + 12)$ বছর = 28 বছর

∴ 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত = 52: 28
= 13:7
Ans. 13: 7

৭. যদি a : b = b : c হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

(ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

(iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$

সমাধান :

(i) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

∴ $b = ck$

এবং $a = bk = ck.k = ck^2$

বামপক্ষ $= \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

$= \frac{(ck^2)^2+(ck)^2}{(ck)^2+c^2}$

$= \frac{c^2k^4+c^2k^2}{c^2k^2+c^2} = \frac{c^2k^2(k^2+1)}{c^2(k^2+1)} = k^2$

∴ $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (প্রমাণিত)

(ii) দেওয়া আছে, a : b = b : c

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

∴ $b^2 = ac$

বামপক্ষ $= a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

$= \frac{a^2b^2c^2}{a^3} + \frac{a^2b^2c^2}{b^3} + \frac{a^2b^2c^2}{c^3}$

$= \frac{b^2c^2}{a} + \frac{a^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c}$

$= \frac{b^2c^2}{a} + \frac{(ac)^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c}$

$= \frac{ac.c^2}{a} + \frac{(b^2)^2}{b} + \frac{a^2.ac}{c}$ [মান বসিয়ে]

$= c^3 + \frac{b^4}{b} + a^3$

$= c^3 + b^3 + a^3$

$= a^3 + b^3 + c^3$

= ডানপক্ষ

∴ $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$ (প্রমাণিত)

(iii) দেওয়া আছে, a : b = b : c বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

∴ $b = ck$

এবং $a = bk = ck.k = ck^2$

বামপক্ষ $= \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}$

$= \frac{ck^2\times ck\times c(ck^2+ck+c)^3}{(ck^2\times ck + ck\times c + c\times ck^2)^3}$

$= \frac{c^3k^3\{c(k^2+k+1)\}^3}{(c^2k^3+c^2k+c^2k^2)^3}$

$= \frac{c^3k^3\times c^3(k^2+k+1)^3}{\{c^2k(k^2+1+k)\}^3}$

$= \frac{c^6k^3(k^2+k+1)^3}{c^6k^3(k^2+k+1)^3}$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$ (প্রমাণিত)

৮. সমাধান কর:

(i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

(ii) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$, $2a > b > 0$ এবং $x \neq 0$

(iii) $81 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

সমাধান:

(i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{(1-\sqrt{1-x})+(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})-(1+\sqrt{1-x})} = \frac{1+3}{1-3}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{2}{-2\sqrt{1-x}} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$

বা, $\frac{1}{1-x} = 4$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4(1-x) = 1$ [আড়গুণন করে]

বা, $4 - 4x = 1$

বা, $-4x = 1- 4$

বা, $x = \frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{3}{4}$

(ii) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$

বা, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\left(\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2 = \left(\frac{b+x}{b-x}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2} = \frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$

বা, $\frac{(a+x)^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$

বা, $\frac{a+x+a-x}{a+x-a+x} = \frac{(b+x)^2-(b-x)^2}{(b+x)^2-(b-x)^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a}{2x} = \frac{2(b^2+x^2)}{4.b.x}$ [অনুসিদ্ধান্ত ব্যবহার করে]

বা, $\frac{a}{x} = \frac{b^2+x^2}{2.b.x}$

বা, $\frac{a}{1} = \frac{b^2+x^2}{2.b}$ [x দ্বারা গুণ করে]

বা, $b^2 + x^2 = 2ab$

বা, $x^2 = 2ab - b^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{2ab - b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \pm\sqrt{2ab - b^2}$

(iii) $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

বা, $81 = \frac{1+x}{1-x} \times \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$

বা, $(9)^2 = \{(\frac{1+x}{1-x})^2\}^2$

বা, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 9$

বা, $\frac{1+x}{1-x} = \pm 3$

$\therefore \frac{1+x}{1-x} = 3$ অথবা, $\frac{1+x}{1-x} = -3$

বা, $1 + x = 3 - 3x$ বা, $1 + x = -3 + 3x$

বা, $4x = 2$ বা, $2x = 4$

বা, $x = \frac{1}{2}$ বা, $x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 2$ অথবা, $\frac{1}{2}$

৯. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, দেখাও যে,

(i) $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

(ii) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

সমাধান:

(i) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore c = dk$

$b = ck = dk.k = dk^2$

$a = bk = dk^2.k = dk^3$

বামপক্ষ $= \frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{(dk^3)^3+(dk^2)^3}{(dk^2)^3+(dk)^3} = \frac{d^3k^9+d^3k^6}{d^3k^6+d^3k^3}$

$= \frac{d^3k^6(k^3+1)}{d^3k^3(k^3+1)} = k^3$

ডানপক্ষ $= \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3} = \frac{(dk^2)^3+(dk)^3}{(dk)^3+d^3} = \frac{d^3k^6+d^3k^3}{d^3k^3+d^3}$

$= \frac{d^3k^3(k^3+1)}{d^3(k^3+1)} = k^3$

$\therefore \frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$ (দেখানো হলো)

(ii) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore c = dk$

$b = ck = dk.k = dk^2$

$a = bk = dk^2.k = dk^3$

বামপক্ষ $= (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$

$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$

$= \{d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2\}\{d^2k^4 + d^2k^2 + d^2\}$

$= d^2k^2(k^4 + k^2 + 1) \times d^2(k^4 + k^2 + 1)$

$= d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

ডানপক্ষ $= (ab + bc + cd)^2$

$= (dk^3 \times dk^2 + dk^2 \times dk + dk \times d)^2$

$= \{d^2k(k^4 + k^2 + 1)\}^2$

$= d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

$\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ (দেখানো হলো)

১০. $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2,\ a \neq b$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$x = \frac{4ab}{a+b}$

বা, $x = \frac{2a \times 2b}{a+b}$

$\therefore \frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$ এবং $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

যখন, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

তখন, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} = \frac{a+3b}{b-a}$ ... ... (i)

আবার, যখন $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

তখন, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$ ... ... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{a+3b}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b}$$

$$= \frac{a+3b}{b-a} + \frac{3a+b}{-(b-a)}$$

$$= \frac{a+3b}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$$

$$= \frac{a+3b-(3a+b)}{b-a}$$

$$= \frac{a+3b-3a-b}{b-a}$$

$$= \frac{2b - 2a}{b - a}$$

$$= \frac{2(b - a)}{b - a}$$

$$= 2$$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$ (দেখানো হলো)

১১. $x = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}+\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}-\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $(\frac{x+1}{x-1})^3 = (\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}})^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1} = \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^3+6x}{2+6x^2} = \frac{2m}{2}$

বা, $\frac{2(x^3+3x)}{2(1+3x^2)} = m$

বা, $\frac{x^3+3x}{1+3x^2} = m$

বা, $x^3 + 3x = m + 3mx^2$

$\therefore x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ (প্রমাণিত)

১২. $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$

বা, $(\frac{x+1}{x-1})^2 = (\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1} = \frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^2+2}{4x} = \frac{4a}{6b}$

বা, $\frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$

বা, $3b(x^2+1) = 4ax$

বা, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$ (প্রমাণিত)

১৩. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

বা, $\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ [একান্তরকরণ করে]

বা, $\frac{b^2+2bc+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{b^2+2bc+c^2-b^2-c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}$

[বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2bc}{b^2+c^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{c}{b^2+c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$

বা, $a^2c + b^2c = ab^2 + ac^2$

বা, $a^2c - ac^2 = ab^2 - b^2c$

বা, $ac(a-c) = b^2(a-c)$

বা, $ac = b^2$

বা, $\frac{ac}{bc} = \frac{b^2}{bc}$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

বা, $a:b = b:c$

$\therefore$ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী। (প্রমাণিত)

১৪. $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$

সমাধান : মনে করি, $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k$

$\therefore x = k(b+c),\ y = k(c+a),\ z = k(a+b),$

এখন, $y + z + x = k(c+a) + k(a+b) - k(b+c)$
$= k(c+a+a+b-b-c) = 2ak$

$$\therefore \frac{a}{y+z-x} = \frac{a}{2ak} = \frac{1}{2k}$$

আবার, $z + x - y$
$= k(a+b) + k(b+c) - k(c+a) = k(a+b+b+c-c-a) = 2bk$

$$\therefore \frac{b}{z+x-y} = \frac{b}{2bk} = \frac{1}{2k}$$

আবার, $x + y - z$

$= k(b+c) + k(c+a) - k(a+b)$
$= k(b+c+c+a-a-b) = 2ck$

$$\therefore \frac{c}{x+y-z} = \frac{c}{2ck} = \frac{1}{2k}$$

$\frac{a}{y+z-x}, \frac{b}{z+x-y}$ এবং $\frac{c}{x+y-z}$ প্রত্যেকটির অনুপাত $\frac{1}{2k}$ এর সমান।

$\therefore \frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$ (প্রমাণিত)

১৫. $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

সমাধান: মনে করি, $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = k$

$\therefore bz - cy = ak$ ……… (i)

$\therefore cx - az = bk$ ……… (ii)

$\therefore ay - bx = ck$ ……… (iii)

এখন (i) নং (ii) এবং (iii) নং সমীকরণকে যথাক্রমে a, b এবং c দ্বারা গুণ করে পাই,

$abz - acy = a^2k$

$bcx - abz = b^2k$

$acy - cbx = c^2k$

$0 = k(a^2 + b^2 + c^2)$ [যোগ করে]

$\therefore$ k $= 0$ [a,b,c ধ্রুবক হওয়ায় $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$]

তাহলে, $\frac{bz-cy}{a} = 0$

বা, $bz - cy = 0$

বা, $bz = cy$

$\therefore \frac{z}{c} = \frac{y}{b}$

আবার, $\frac{cx-az}{b} = 0$

বা, $cx - az = 0$

বা, $cx = az$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (প্রমাণিত)

১৬. $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a + b + c \neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$

বা, $\frac{a+b-c-a-b}{a+b} = \frac{b+c-a-b-c}{b+c} = \frac{c+a-b-c-a}{c+a}$

[বিয়োজন করে]

বা, $\frac{-c}{a+b} = \frac{-a}{b+c} = \frac{-b}{c+a}$

বা, $\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$

বা, $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

বা, $c = a = b$

$\therefore$ a = b = c (প্রমাণিত)

১৭. $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাত $= \frac{1}{a+b+c}$

সমাধান : মনে করি,

$\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc} = k$

$$\therefore x = k(xa + yb + zc) \;\ldots\ldots\ldots (i)$$
$$\therefore y = k(ya + zb + xc) \;\ldots\ldots\ldots (ii)$$
$$\therefore z = k(za + xb + yc) \;\ldots\ldots\ldots (iii)$$

(i) নং (ii) নং এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$x + y + z = k(xa + yb + zc + ya + zb + xc + za + xb + yc)$$

বা, $x + y + z = k\{x(a + b + c) + y(a + b + c) + z(a + b + c)\}$

বা, $x + y + z = k(a + b + c)(x + y + z)$

বা, $k(a + b + c)(x + y + z) = (x + y + z)$

বা, $k(a + b + c) = 1$

$\therefore k = \frac{1}{a+b+c}$

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান $= \frac{1}{a+b+c}$ (দেখানো হলো)

১৮. যদি $(a + b + c)p = (b + c - a)q = (c + a - b)r = (a + b - c)s$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$

সমাধান : মনে করি,

$(a + b + c)p = (b + c - a)q = (c + a - b)r = (a + b - c)s = k$

$$\therefore p(a + b + c) = k$$

বা, $p = \frac{k}{a+b+c}$

বা, $\frac{1}{p} = \frac{a+b+c}{k} \;\ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $q(b + c - a) = k$

বা, $q = \frac{k}{b+c-a}$

বা, $\frac{1}{q} = \frac{b+c-a}{k} \;\ldots\ldots\ldots (ii)$

আবার, $r(c + a - b) = k$

বা, $r = \frac{k}{c+a-b}$

বা, $\frac{1}{r} = \frac{c+a-b}{k} \;\ldots\ldots\ldots (iii)$

এবং $s(a + b - c) = k$

বা, $s = \frac{k}{a+b-c}$

বা, $\frac{1}{s} = \frac{a+b-c}{k} \;\ldots\ldots\ldots (iv)$

$(ii), (iii)$এবং (iv)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{b + c - a}{k} + \frac{c + a - b}{k} + \frac{a + b - c}{k}$$
$$= \frac{b + c - a + c + a - b + a + b - c}{k}$$
$$= \frac{a + b + c}{k} = \frac{1}{p}$$

$\therefore \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ (প্রমাণিত)

১৯. যদি $lx = my = nz$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$

সমাধান : মনে করি, $lx = my = nz = k$

$$\therefore x = \frac{k}{l}, \quad y = \frac{k}{m}, \quad z = \frac{k}{n}$$

বামপক্ষ $= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$

$$= \frac{(\frac{k}{l})^2}{\frac{k}{m} \times \frac{k}{n}} + \frac{(\frac{k}{m})^2}{\frac{k}{n} \times \frac{k}{l}} + \frac{(\frac{k}{n})^2}{\frac{k}{l} \times \frac{k}{m}}$$

$$= \frac{\frac{k^2}{l^2}}{\frac{k^2}{mn}} + \frac{\frac{k^2}{m^2}}{\frac{k^2}{nl}} + \frac{\frac{k^2}{n^2}}{\frac{k^2}{lm}}$$

$$= \left(\frac{k^2}{l^2} \times \frac{mn}{k^2}\right) + \left(\frac{k^2}{m^2} \times \frac{nl}{k^2}\right) + \left(\frac{k^2}{n^2} \times \frac{lm}{k^2}\right)$$

$$= \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2} = \text{ ডানপক্ষ}$$

$\therefore \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$ (দেখানো হলো)

২০. যদি $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে] … … …(i)

আবার, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+q}{a-q}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a+q+a-q}{a+q-a+q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{2a}{2q}$

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a}{q}$ … … …(ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a}{q}$

$\therefore \frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ (দেখানো হলো)

------0------

অধ্যায় ১১ ১১.২ বীজগাণিতিক অনুপাত ও সমানুপাত
Algebraic Ratio & Proportion

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১। a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $a^2 = bc$ খ. $b^2 = ac$ গ. $ab = bc$ ঘ. $a = b = c$

২। আরিফ ও আকিবের বয়সের অনুপাত 5:3 , আরিফের বয়স 20 বছর হলে, কত বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 7: 5 হবে?

ক. 5 বছর খ. 6 বছর গ. 8 বছর ঘ. 10 বছর

ব্যাখ্যা: মনে করি, আরিফের বয়স 5x

আকিবের বয়স 3x

প্রশ্নমতে, $5x = 20$

$\therefore x = 4$

$\therefore$ আকিবের বয়স $= (3 \times 4)$ বছর $= 12$ বছর

আবার, ধরি, y বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 7:5 হবে

$\frac{20+y}{12+y} = \frac{7}{5}$

বা, $100 + 5y = 84 + 7y$

বা, $7y - 5y = 100 - 84$

বা, $2y = 16$

$\therefore y = 8$

$\therefore$ 8 বছর পর বয়সের অনুপাত 7: 5 হবে

ΔABC এর কোণগুলোর অনুপাত 2:3:5 এবং ABCD চতুর্ভুজের কোণ চারটির অনুপাত 3: 4: 5: 6

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৩. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে উহার ক্ষেত্রফল কতগুণ হবে?

ক. 2 গুণ খ. 4 গুণ গ. 8 গুণ ঘ. 6 গুণ

ব্যাখ্যা: বর্গের কোনো এক বাহুর দৈর্ঘ্য x হলে ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গএকক

দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে বাহুর দৈর্ঘ্য $= 2x$ একক।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= (2x)^2$ বর্গ একক $= 4x^2$ বর্গ একক

৪. $x:y = 7:5$, $y:z = 5:7$ হলে $x:z =$ কত?

ক. 35:49 খ. 35:35 গ. 25:49 ঘ. 49:25

ব্যাখ্যা: $x:y = 7:5$ এবং $y : z = 5:7$

$\therefore x: z = 7:7 = (7 \times 5) : (7 \times 5) = 35:35$

৫. b, a, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে-

i. $a^2 = bc$

ii. $\frac{b}{a} = \frac{c}{a}$

iii. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. i ও ii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৬. $x:y = 2:1$ এবং $y: z = 2:1$ হলে—

i. x, y, z ক্রমিক সমানুপাতী

ii, $z: x = 1:4$

iii. $y + zx = 4yz$ নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

MCQ Answers:
১। খ
২। গ
৩। খ
৪। খ
৫। গ
৬। ঘ
৭। খ
৮। ঘ
৯। খ

ব্যাখ্যা: $x{:}y = 2{:}1$ বা, $x{:}y = 4 : 2$
$y: z = 2{:}1$
$\therefore x{:}y: z = 4: 2: 1$
$\therefore x, y, z$ ক্রমিক সমানুপাতী।
$\frac{x}{y} = 2 \quad \therefore x = 2y$
এখন, $y + zx = zx + zx = 2zx = 2z \times 2y = 4yz$

৭ $\frac{a}{x} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$ হলে, $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$ = কত?

ক. $\frac{m}{n}$ খ. $\frac{m+n}{m-n}$ গ. $\frac{m-n}{m+n}$ ঘ. $\frac{n}{m}$

ব্যাখ্যা: $\frac{a}{x} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{m^2+n^2+2mn}{m^2+n^2-2mn}$

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{(m+n)^2}{(m-n)^2}$

বা, $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} = \frac{m+n}{m-n}$

একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 36 সে. মি. এবং বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:4:5 হলে,
নিচের (৮ ও ৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
৮. ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?
ক. 5 খ. 9 গ. 12 ঘ. 15
ব্যাখ্যা: $3x + 4x + 5x = 36$

বা, $12x = 36$

বা, $x = \frac{36}{12}$

$\therefore x = 3$
$\therefore$ বৃহত্তম বাহু $= 5\times3 = 15$ সে.মি.

৯. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?
ক. 6 খ. 54 গ. 67 ঘ. 90
ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times9 \times 12 = 54$ বর্গ সে.মি.

১০. 1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?
সমাধান: 1 ঘন সে.মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম।
আমরা জানি,
1 ঘন সে.মি. পানির ওজন = 1 গ্রাম = 10 ডেসিগ্রাম
7 ডেসিগ্রাম 10 ডেসিগ্রাম এর শতকরা $= \frac{7}{10}\times 100$ ভাগ $= 70$ ভাগ
Ans. 70%

১১. ক, খ, গ, ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাবে ভাগ করে দাও যেন ক এর অংশ: খ এর অংশ = 2:3, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1:2 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3:2 হয়।
সমাধান: দেওয়া আছে, ক : খ = 2:3
খ:গ $= 1{:}2 = (1 \times 3): (2 \times 3) = 3{:}6$ [অনুপাতের উভয় রাশিকে 3 দ্বারা গুণ করে]
গ : ঘ $= 3{:}2 = (3\times 2) : (2\times 2) = 6{:}4$ [অনুপাতের উভয় রাশিকে 2 দ্বারা গুণ করে]
$\therefore$ ক : খ : গ : ঘ = 2:3:6:4

মনে করি, ক পায় $2x$ টাকা
খ পায় $3x$ টাকা
গ পায় $6x$ টাকা
এবং ঘ পায় $4x$ টাকা

প্রশ্নমতে, $2x + 3x + 6x + 4x = 300$
বা, $15x = 300$
বা, $x = \frac{300}{15}$
$\therefore x = 20$
$\therefore$ ক পায় $2x$ টাকা $= (2 \times 20)$ টাকা $= 40$ টাকা
খ পায় $3x$ টাকা $= (3\times 20)$ টাকা $= 60$ টাকা
গ পায় $6x$ টাকা $= (6\times 20)$ টাকা $= 120$ টাকা
এবং ঘ পায় $4x$ টাকা $= (4 \times 20)$ টাকা $= 80$ টাকা
Ans. ক 40 টাকা, খ 60 টাকা, গ 120 টাকা এবং ঘ 80 টাকা পায়।

১২. তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}, \frac{4}{5},$ এবং $\frac{5}{6}$ হলে, কে কয়টি মাছ পেল?
সমাধান: দেওয়া আছে, তিনজনের অংশের অনুপাত $= \frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$
ধরি, ১ম জেলে মাছ পায় $\frac{2x}{3}$ টি
$\therefore$ ২য় জেলে মাছ পায় $\frac{4x}{5}$ টি
৩য় জেলে মাছ পায় $\frac{5x}{6}$ টি

প্রশ্নমতে, $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{5} + \frac{5x}{6} = 690$
বা, $\frac{20x+24x+25x}{30} = 690$
বা, $\frac{69x}{30} = 690$
বা, $69x = 690 \times 30$
বা, $x = \frac{690 \times 30}{69}$
বা, $x = 300$
$\therefore$ ১ম জেলে মাছ পায় $\frac{2x}{3}$ টি $= \frac{2 \times 300}{3}$ টি $= 200$ টি
২য় জেলে মাছ পায় $\frac{4x}{5}$ টি $= \frac{4 \times 300}{5}$ টি $= 240$ টি
৩য় জেলে মাছ পায় $\frac{5x}{6}$ টি $= \frac{5\times 300}{6}$ টি $= 250$ টি

Ans. ১ম জেলে 200 টি, ২য় জেলে 240টি এবং ৩য় জেলে 250টি মাছ পায়।

১৩. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে.মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3:5:7 হলে, প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় কর।
সমাধান: দেওয়া আছে, ত্রিভুজটির পরিসীমা $= 45$ সে.মি.
বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত $= 3: 5:7$
ধরি, ১ম বাহুর দৈর্ঘ্য $= 3x$ সে.মি.
$\therefore$ ২য় বাহুর দৈর্ঘ্য $= 5x$ সে.মি.
এবং ৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য $= 7x$ সে.মি.
প্রশ্নমতে, $3x + 5x + 7x = 45$
বা, $15x = 45$
বা, $x = \frac{45}{15}$
$\therefore x = 3$
১ম বাহুর দৈর্ঘ্য $= 3 \times 3$ সে.মি. $= 9$ সে.মি.
২য় বাহুর দৈর্ঘ্য $= 5 \times 3$ সে.মি. $= 15$ সে.মি.
৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য $= 7 \times 3$ সে.মি. $= 21$ সে.মি.
Ans. ১ম বাহু, ২য় বাহু ও ৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি., 15 সে.মি. ও 21 সে.মি.

১৪। দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 7 এবং তাদের গ.সা.গু, 4 হলে, সংখ্যা দুইটির ল, সা, গু. কত?

সমাধান: দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5:7
এবং তাদের গ.সা.গু, $= 4$
ধরি, ১ম সংখ্যাটি $= 5x$
$\therefore$ ২য় সংখ্যাটি $= 7x$
$\therefore$ সংখ্যা দুইটির গ.সা.গু. $= x$
এবং ল.সা.গু. $= 5\times 7 \times x = 35\,x$

প্রশ্নমতে, $x = 4$
$\therefore$ সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু. $= 35 \times 4 = 140$
Ans. 140

১৫। ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী 171 রান করলে। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত 3:2 হলে কে কত রান করেছে?

সমাধান: সাকিবের রান : মুশফিকের রান
$= 3:2$
$= (3 \times 3):(2 \times 3)$ [অনুপাতের উভয় রাশিকে 3 দ্বারা গুণ করে]
$= 9:6$

মুশফিকের রান : মাশরাফীর রান = 3:2
$= (3 \times 2):(2 \times 2)$
$= 6:4$ [অনুপাতের উভয় রাশিকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ সাকিবের রান : মুশফিকের রান : মাশরাফীর রান $= 9:6:4$
মনে করি, সাকিবের রানের সংখ্যা $= 9x$
$\therefore$ মুশফিকের রানের সংখ্যা $= 6x$
এবং মাশরাফীর রানের সংখ্যা $= 4x$

প্রশ্নমতে, $9x + 6x + 4x = 171$
বা, $19x = 171$
বা, $x = \frac{171}{19}$
বা, $x = 19$

সাকিবের রানের সংখ্যা $= 9x = (9\times9) = 81$
মুশফিকুরের রানের সংখ্যা $= 6x = (6 \times 9) = 54$
এবং মাশরাফীর রানের সংখ্যা $= 4x = (4\times9) = 36$
Ans. সাকিব 81 রান, মুশফিকুর 54 রান, মাশরাফী 36 রান করেছে।

১৬. একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন করণিক এবং 3 জন পিওন আছে। একজন পিওন 1 টাকা পেলে একজন করণিক পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 150,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পায়?

সমাধান: একজন পিওন 1 টাকা পেলে একজন করণিক পায় 2 টাকা এবং একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা।
$\therefore$ কর্মকর্তা, করণিক এবং পিওন এর বেতনের অনুপাত $= 4:2:1$

ধরি, একজন কর্মকর্তার বেতন $= 4x$ টাকা
$\therefore$ একজন করণিকের বেতন $= 2x$ টাকা
এবং একজন পিওনের বেতন $= x$ টাকা

প্রশ্নমতে, $4x \times 2 + 2x \times 7 + x \times 3 = 150000$
বা, $8x + 14x + 3x = 150000$
বা, $25x = 150000$
বা, $x = \frac{150000}{25}$
$\therefore x = 6000$

একজন পিওন পায় (1×6000) টাকা বা, 6000 টাকা
একজন করণিক পায় (6000×2) বা, 12000 টাকা
একজন কর্মকর্তা পায় (6000×4) টাকা বা, 24,000 টাকা
Ans. কর্মকর্তা 24,000 টাকা, করণিক 12,000 টাকা এবং পিওন 6,000 টাকা বেতন পায়।

১৭. যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান: ধরি, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a একক
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল a^2 বর্গ একক

20% বৃদ্ধি পেলে প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য হয়
(a + a এর 20%) একক

$= (a + \frac{20a}{100})$ একক

$= (a+\frac{a}{5})$ একক

$= \frac{5a+a}{5}$ একক

$= \frac{6a}{5}$ একক

এক্ষেত্রে, বৃদ্ধিপ্রাপ্ত বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $(\frac{6a}{5})^2$ বর্গ একক

$= \frac{36a^2}{25}$ বর্গ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $(\frac{36a^2}{25} - a^2)$ বর্গ একক

$= (\frac{36a^2-25a^2}{25})$ বর্গ একক

$= \frac{11a^2}{25}$ বর্গ একক

$\therefore$ শতকরা ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি $= \frac{\text{মোট বৃদ্ধি}}{\text{মূল ক্ষেত্রফল}} \times 100$

$= \frac{\frac{11a^2}{25}}{a^2} \times 100$

$= \frac{11a^2}{25} \times \frac{1}{a^2} \times 100$

$= 44$
Ans. 44%

১৮. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

সমাধান: ধরি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = x একক এবং প্রস্থ = y একক

সুতরাং আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = xy বর্গ একক

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় x এর 10% = (x এর $\frac{10}{100}$) একক = $\frac{x}{10}$ একক

প্রস্থ হ্রাস পায় y এর 10% = (y এর $\frac{10}{100}$) একক= $\frac{y}{10}$ একক

নতুন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = $(x + \frac{10}{100})$ একক= $\frac{11x}{10}$ একক

এবং নতুন আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = $(y-\frac{y}{100})$ একক = $\frac{9y}{10}$ একক

নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(\frac{11x}{10} \times \frac{9y}{10})$ বর্গ একক

$= \frac{99xy}{100}$ বর্গ একক

ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় = $(xy-\frac{99xy}{100})$ বর্গ একক

$= (\frac{100xy-99xy}{100})$ বর্গ একক

$= \frac{xy}{100}$ বর্গ একক

শতকরা ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় = $\frac{\text{হ্রাস}}{\text{পূর্বের ক্ষেত্রফল}} \times 100$

$= \frac{\frac{xy}{100}}{xy} \times 100$

$= \frac{xy}{100 \times xy} \times 100$

$= 1$

Ans. 1% হ্রাস পায়।

১৯. একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4:7. ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 304 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পরে তার ফলন কত হবে?

সমাধান: মনে করি, সেচের আগের ফলন = 4x কুইন্টাল

তাহলে, সেচের পর ফলন = 7x কুইন্টাল

প্রশ্নমতে, $4x = 304$

বা, $x = \frac{304}{4}$

$\therefore x = 76$

$\therefore$ সেচের পর ফলন = 7x কুইন্টাল = (7×76) কুইন্টাল

= 532 কুইন্টাল

Ans. 532 কুইন্টাল।

২০. ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3:2 এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4:3 হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর।

সমাধান: ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত = 3:2

$= 1 : \frac{2}{3}$ [অনুপাতের উভয় রাশিকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

আবার, গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত = 4:3

$= 1 : \frac{3}{4}$ [অনুপাতের উভয় রাশিকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

এখন একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন অনুপাত = $1 : \frac{2}{3}$

এবং একই পরিমাণ গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত = $1 : \frac{3}{4}$

$\therefore$ সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত = $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

$= (\frac{2}{3} \times 12) : (\frac{3}{4} \times 12) =$-8: 9

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত = 8:9

Ans. 8:9

২১. একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3:4 এবং 2:5 হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান: ধরি, ১ম জমির দৈর্ঘ্য = 3x মিটার

$\therefore$ ২য় জমির দৈর্ঘ্য = 4x মিটার

এবং ১ম জমির প্রস্থ = 2y মিটার

$\therefore$ ২য় জমির প্রস্থ = 5y মিটার

১ম জমির ক্ষেত্রফল = $3x \times 2y$ বর্গ মিটার = 6xy বর্গ মিটার

প্রশ্নমতে, $6xy = 432$

বা, $xy = \frac{432}{6}$

$\therefore xy = 72$

অপর জমির ক্ষেত্রফল $= 4x \times 5y$ বর্গ মিটার

$= 20xy$ বর্গ মিটার

$= 20 \times 72$ বর্গ মিটার

$= 1440$ বর্গ মিটার
Ans. 1440 বর্গ মিটার।

২২. জেমি ও সিমি একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি 2 বছর পর মুনাফা-আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর সিমি মুনাফা-আসদে টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, জেমির ঋণের পরিমাণ x টাকা এবং সিমির পরিমাণ y টাকা

আমরা জানি, মুনাফা = মূলধন × মুনাফার হার × সময়

$\therefore$ 10% হারে জেমির ঋণের 2 বৎসরের সুদ $= (x \times \frac{10}{100} \times 2)$ টাকা
$= \frac{x}{5}$ টাকা

10% হারে সিমির ঋণের 3 বৎসরের সুদ $= (y \times \frac{10}{100} \times 3)$ টাকা
$= \frac{3y}{10}$ টাকা

জেমির মুনাফা-আসল $= (x+\frac{x}{5})$ টাকা $= (\frac{5x+x}{5})$ টাকা $= \frac{6x}{5}$ টাকা

সিমির মুনাফা-আসল $= (y+\frac{3y}{10})$ টাকা $= (\frac{10y+3y}{10})$ টাকা $= \frac{13y}{10}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{6x}{5} = \frac{13y}{10}$
বা, $60x = 65y$ [আড়গুণন করে]
বা, $\frac{x}{y} = \frac{65}{60}$
বা, $\frac{x}{y} = \frac{13}{12}$
$\therefore x:y = 13:12$

Ans. জমি ও সিমির ঋণের পরিমাণের অনুপাত 13:12

২৩. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5:12:13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.

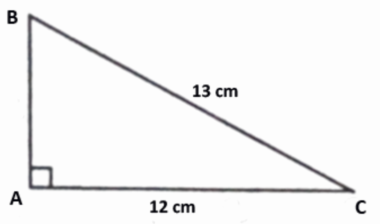
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লিখ?

খ. বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য ও ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% ও প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

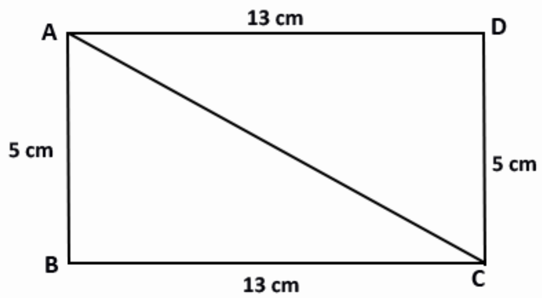
সমাধান:
ক. মনে করি, ত্রিভুজের বাহুগুলো $5x$, $12x$ ও $13x$ সে.মি.
$\therefore 5x + 12x + 13x = 30$
[যেহেতু ত্রিভুজের তিনবাহুর সমষ্টিই হলো ঐ ত্রিভুজের পরিসীমা]
বা, $30x = 30$
$\therefore x = 1$

∴ বাহুগুলো 5 সে.মি., 12 সে.মি. ও 13 সে.মি.। নিচে ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো:



যেহেতু $BC^2 = 13^2$
$=169$
$= 144 + 25$
$= 12^2 + 5^2$
$= AC^2 + AB^2$
অর্থাৎ ত্রিভুজটি পিথাগোরাসের উপপাদ্য সমর্থন করে, তাই ABC ত্রিভুজটি সমকোণী।

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত বাহুগুলোর মধ্যে বৃহত্তর বাহু = 13 সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতর বাহু = 5 সে.মি.



উপরোক্ত অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, $AD = BC = 13$ সে.মি.
ও প্রস্থ, $AB = CD = 5$ সে.মি.
যেহেতু, আয়তক্ষেত্রের প্রতিটি কোণ সমকোণ তাই পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,
ΔABC-হতে, $AC^2 = BC^2 + AB^2$
বা, $AC^2 = (13)^2 + (5)^2$
বা, $AC^2 = 169 + 25$
বা, $AC^2 = 194$
$\therefore AC = \sqrt{194}$
এখন AC-ই হলো ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণ। AC কে বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু ধরলে, ঐ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AC^2 বর্গ একক।
= 194 বর্গ সে.মি.
Ans. 194 বর্গ সে.মি.।

গ. 'খ' তে প্রাপ্ত
আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = 13 সে.মি. ও প্রস্থ = 5 সে.মি.
∴ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = (13×5) বর্গ সে.মি. = 65 বর্গ সে.মি.
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় = 13 এর 10% = (13 এর $\frac{10}{100}$) সে.মি. = $\frac{13}{10}$ সে.মি.

এবং প্রস্থ বৃদ্ধি পায় = 5 এর 20% (5 এর $\frac{20}{100}$) সে.মি. = 1 সে.মি.

∴ আয়তক্ষেত্রটির নতুন দৈর্ঘ্য $(13+\frac{13}{10})$ সে.মি. = $(\frac{130+13}{10})$সে.মি. = $\frac{143}{10}$ সে.মি.

∴ আয়তক্ষেত্রটির নতুন প্রস্থ $(5 + 1)$ সে.মি. = 6 সে.মি.
∴ আয়তক্ষেত্রের নতুন ক্ষেত্রফল $(\frac{143}{10} \times 6)$ বর্গ সে.মি.

$= 85.8$ বর্গ সে.মি.
$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $(85.8 - 65)$ বর্গ সে.মি.
$= 20.8$ সে.মি.
$\therefore$ ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পায় $(\frac{20.8}{65} \times 100)$ বর্গ সে.মি.
$= 32$ বর্গ সে.মি.
Ans. ক্ষেত্রফল শতকরা 32 বর্গ সে.মি. বৃদ্ধি পাবে।

২৪. একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত 1:4

ক. অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায় প্রকাশ কর।

খ. 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো 1 : 9. মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

গ. মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রীসংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 20 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রীসংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. মনে করি, অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা $= x$

এবং উপস্থিত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা $= 4x$ [এখানে, x ধনাত্মক আনুপাতিক ধ্রুবক]

মোট শিক্ষার্থীদের সংখ্যা $= x + 4x = 5x$

অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা মোট শিক্ষার্থীদের সংখ্যার $= \frac{\text{অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা}}{\text{মোট শিক্ষার্থীদের সংখ্যা}} \times$ 100%

$= (\frac{x}{5x} \times 100)\ \% = 20\%$

Ans. 20%

খ. 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে, উপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= (4x + 10)$ জন

এবং অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা $= (x - 10)$ জন

প্রশ্নমতে, $\frac{x - 10}{4x + 10} = \frac{1}{9}$

বা, $9x - 90 = 4x + 10$

বা, $9x - 4x = 10 + 90$

বা, $5x = 100$

$\therefore x = 20$

‘ক’ তে প্রাপ্ত মোট শিক্ষার্থীদের সংখ্যা $= 5x = (5 \times 20)$ জন $= 100$ জন

Ans. 100 জন।

গ. ‘খ’ তে প্রাপ্ত মোট ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যা 100 জন
মনে করি, ছাত্রী সংখ্যা y জন
ছাত্র সংখ্যা $= (2y - 20)$ জন

প্রশ্নমতে, $2y - 20 + y = 100$
বা, $3y - 20 = 100$
বা, $3y = 100+20$
বা, $3y = 120$
বা, $y = 40$
$\therefore$ ছাত্রীসংখ্যা 40 জন।
$\therefore$ ছাত্র সংখ্যা $(2 \times 40 - 20)$ জন $= (80 - 20)$ জন $= 60$ জন
$\therefore$ ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত $= 60 : 40 = 3:2$
Ans. 3:2

২৫. আশিক, মিজান, অনিকা ও অহনা মোট 195000 টাকা মূলধন নিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে এবং এক বছর শেষে 26500 টাকা লাভ হয়। উক্ত ব্যবসায় মূলধনে আশিকের অংশ : মিজানের অংশ = 2 :3, মিজানের অংশ : অনিকার অংশ = 4:5 এবং অনিকার অংশঃ অহনার অংশ =5:6

ক. মূলধনের সরল অনুপাত নির্ণয় কর।

খ. উক্ত ব্যবসায় প্রত্যেকের মূলধন নির্ণয় কর।

গ. বছর শেষে লভ্যাংশের 60% উক্ত ব্যবসায় বিনিয়োগ করা হলো। অবশিষ্ট লভ্যাংশ মূলধনের সরল অনুপাতে বিভক্ত হলে অহনা ও আশিকের লভ্যাংশের মধ্যে কে কত টাকা বেশি লাভ পাবে?

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে, একটি ব্যবসায় বিনিয়োগকৃত মূলধনে,

আশিকের অংশ : মিজানের অংশ = 2:3 = 8:12

মিজানের অংশ : অনিকার অংশ = 4:5 = 12:15

অনিকার অংশ ও অহনার অংশ = 5: 6 = 15:18

আশিকঃ মিজান : অনি : অহনার মূলধনের অংশ

= 8:12:15:18 (Ans)

খ. 'ক' থেকে পাই,
আশিকঃ মিজান : অনিকা : অহনা = 8:12:15:18
∴ অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 8+12+15+ 18 = 53
মোট মূলধন = 195000 টাকা
আশিকের মূলধন = (195000 এর $\frac{8}{53}$) টাকা = 29433.96 টাকা (প্রায়) (Ans.)

মিজানের মূলধন = (195000 এর $\frac{12}{53}$) টাকা = 44150.94 টাকা (প্রায়) (Ans.)

অনিকার মূলধন = (195000 এর $\frac{15}{53}$) টাকা = 55188.68 টাকা (প্রায়) (Ans.)

অহনার মূলধন = (195000 এর $\frac{18}{53}$) টাকা = 66226.42 টাকা (প্রায়) (Ans.)

গ. বছর শেষে লাভ হয় = 26500 টাকা

বিনিয়োগ করা হয় = 26500 এর 60%

= 26500 এর $\frac{60}{100}$ = 15900 টাকা

∴ অবশিষ্ট থাকে = (26500 – 15900) টাকা = 10600 টাকা

'খ' থেকে পাই, অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 53

আশিকের লভ্যাংশ = (10600 এর $\frac{8}{53}$) টাকা = (200×8) টাকা = 1600 টাকা

অহনার লভ্যাংশ = (10600 এর $\frac{18}{53}$) টাকা = (200×18) টাকা = 3600 টাকা

অহনা লভ্যাংশ বেশি পায় = (3600 – 1600) টাকা = 2000 টাকা

∴ অহনা লভ্যাংশ 2000 টাকা বেশি পায়। (Ans.)

অধ্যায় ১২ ১২.১ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ
Simple Simaltenous Equations in Two Variables

নিচের সরল সহসমীকরণগুলো সমঞ্জস, পরস্পর নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না যুক্তিসহ উল্লেখ কর এবং এগুলোর সমাধানের সংখ্যা নির্দেশ কর:

১. $x - y = 4$
$x + y = 10$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $x - y = 4$
$x + y = 10$
x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{1}$
ও y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{-1}{1}$
আমরা পাই, $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$
$\therefore$ সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

২. $2x + y = 3$
$4x + y = 6$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $2x + y = 3$
$4x + 2y$
এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{4}$ বা $\frac{1}{2}$
ও y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{2}$
এবং ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$
$\therefore \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$
অতএব সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

৩. $x - y - 4 = 0$
$3x - 3y - 10 = 0$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $x - y - 4 = 0$ ... ... (i)
$3x - 3y - 10 = 0$ ... ... (ii)
বা, $x - y = 4$ ... ... (iii)
এবং $3x - 3y = 10$ ... ... (iv)
প্রদত্ত সমীকরণজোটে, x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{3}$
ও y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-1}{-3}$ বা $\frac{1}{3}$
এবং ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{4}{10}$ বা $\frac{2}{5}$
আমরা পাই, $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{4}{10}$
অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির কোন সমাধান নেই।

৪. $3x + 2y = 0$
$6x + 4y = 0$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $3x + 2y = 0$
$6x + 4y$
x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{6}$ বা $\frac{1}{2}$
ও y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{4}$ বা $\frac{1}{2}$
$\therefore \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$ $[\because c_1 = c_2 = 0]$
অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

৫. $3x + 2y = 0$
$9x - 6y = 0$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $3x + 2y = 0$

$9x - 6y = 0$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{3}{9}$ বা $\frac{1}{3}$

ও y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{2}{-6}$ বা $\frac{1}{-3}$

আমরা পাই, $\frac{3}{9} \neq \frac{2}{-6}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির একটি মাত্র (অনন্য) সমাধান আছে।

৬. $5x - 2y - 16 = 0$
$3x - \frac{6}{5}y = 2$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $5x - 2y - 16 = 0$ .... (i)

$3x - \frac{6}{5}y = 2$ .... (ii)

বা, $5x - 2y = 16$ .... (iii)

এবং $3x - \frac{6}{5}y = 2$ .... (iv)

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{5}{3}$ ও y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-2}{-\frac{6}{5}}$ বা, $\frac{5}{3}$

এবং ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{16}{2}$ বা $\frac{8}{1}$

আমরা পাই, $\frac{5}{3} = \frac{-2}{-\frac{6}{5}} \neq \frac{16}{2}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির কোনো সমাধান নেই।

৭. $-\frac{1}{2}x + y = -1$
$x - 2y = 2$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $-\frac{1}{2}x + y = -1$

$x - 2y = 2$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-\frac{1}{2}}{1}$ বা $-\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{-2}$ এবং ধ্রুবক পদদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-1}{2}$

আমরা পাই, $\frac{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির অসংখ্য সমাধান আছে।

[বিদ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে। অসমঞ্জস এর স্থলে সমঞ্জস হবে।]

৮. $-\frac{1}{2}x - y = 0$
$x + 2y = 0$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট: $-\frac{1}{2}x - y = 0$

$x + 2y = 0$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-\frac{1}{2}}{1}$ বা $-\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-1}{-2}$ বা $\frac{1}{2}$

আমরা পাই, $\frac{-\frac{1}{2}}{1} \neq \frac{-1}{-2}$ $[\because c_1 = c_2 = 0]$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির একটিমাত্র সমাধান আছে।

৯. $-\frac{1}{2}x + y = -1$
$x + y = 5$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণজোট :

$$-\frac{1}{2}x + y = -1$$
$$x + y = 5$$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-\frac{1}{2}}{1}$ বা $-\frac{1}{2}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{1}$ বা 1

আমরা পাই, $\frac{-\frac{1}{2}}{1} \neq \frac{1}{1}$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির একটি মাত্র সমাধান আছে।

১০. $ax - cy = 0$
$cx - ay = c^2 - a^2$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণজোট:

$$ax - cy = 0$$
$$cx - ay = c^2 - a^2$$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{a}{c}$
y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{-c}{-a}$ বা $\frac{c}{a}$
আমরা পাই, $\frac{a}{c} \neq \frac{-c}{-a}$
অতএব, প্রদত্ত সমীকরণজোট সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সমীকরণজোটটির একটিমাত্র সমাধান আছে।

অধ্যায় ১২ ১২.২ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ
Simple Simaltenous Equations in Two Variables

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান কর: (১-৩)

১. $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

সমাধান: দেওয়া আছে, $7x - 3y = 31$ ... ... (i)

$9x - 5y = 41$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $7x = 31 + 3y$

বা, $x = \frac{31+3y}{7}$ ... ... (iii)

(ii) নং সমীকরণে $x = \frac{31+3y}{7}$ বসিয়ে পাই,

$9 \times \frac{31+3y}{7} - 5y = 41$

বা, $\frac{279+27y}{7} - 5y = 41$

বা, $\frac{279+27y-35y}{7} = 41$

বা, $279 - 8y = 287$ [আড়গুণন করে]

বা, $-8y = 287 - 279$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $-8y = 8$

$\therefore y = -1$ [উভয়পক্ষকে (-8) দ্বারা ভাগ করে]

এখন, (iii) নং সমীকরণে y এর মান বসিয়ে পাই,

$x = \frac{31+3(-1)}{7} = \frac{31-3}{7} = \frac{28}{7} = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (4, -1)$

২। $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

সমাধান: দেয়া আছে, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ ... ... (i)

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ বা, $\frac{3x+2y}{6} = 1$

$\therefore 3x + 2y = 6$ ... ... (iii) [আড় গুণন করে]

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

বা, $\frac{2x+3y}{6} = 1$

বা, $2x + 3y = 6$ [আড়গুণন করে]

বা, $3y = 6-2x$ [পক্ষান্তর করে]

$\therefore y = \frac{6-2x}{3}$ .... (iv)

(iii) নং সমীকরণে $y = \frac{6-2x}{3}$ বসিয়ে পাই,

$3x + 2 \times \frac{6-2x}{3} = 6$

বা, $3x + \frac{12-4x}{3} = 6$

বা, $\frac{9x+12-4x}{3} = 6$

বা, $\frac{5x+12}{3} = 6$

বা, $5x + 12 = 18$ [আড়গুণন করে]
বা, $5x = 18-12$ [পক্ষান্তর করে]
বা, $5x = 6$
$\therefore x = \frac{6}{5}$ [উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

এখন, (iv) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই, $y = \frac{6-2\times\frac{6}{5}}{3} = \frac{6-\frac{12}{5}}{3} = \frac{\frac{30-12}{5}}{3} = \frac{\frac{18}{5}}{3} = \frac{18}{5\times3} = \frac{6}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x,y) = (\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$

৩। $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$ax + by = a^2 + b^2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ .... (i)
$ax + by = a^2 + b^2$........ (ii)
(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{y}{b} = 2 - \frac{x}{a}$$

বা, $\frac{y}{b} = \frac{2a-x}{a}$

বা, $y = \frac{2ab-bx}{a}$ ... ... (iii)

(i) নং সমীকরণে $y = \frac{2ab-bx}{a}$ বসিয়ে পাই,

$$ax + \frac{b(2ab-bx)}{a} = a^2 + b^2$$

বা, $\frac{a^2x+2ab^2-b^2x}{a} = a^2 + b^2$

বা, $a^2x + 2ab^2 - b^2x = a^3 + ab^2$ [আড়গুণন করে]

বা, $a^2x - b^2x = a^3 + ab^2 - 2ab^2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $x(a^2 - b^2) = a^3 - ab^2$

বা, $x(a^2 - b^2) = a(a^2 - b^2)$

বা, $x = a$

এখন, (iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$$y = \frac{2ab - bx}{a} = \frac{ab}{a}$$

বা, $y = b$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x,y) = (a, b)$

আপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান কর (৪-৬):
৪. $7x - 3y = 31$
$9x - 5y = 41$

সমাধান: দেওয়া আছে, $7x - 3y = 31$ ... ... (i)

$9x - 5y = 41$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণকে 5 দ্বারা এবং (ii) নং সমীকরণকে 3 দ্বারা গুণ করে পাই,

$35x - 15y = 155$ ... ... (iii)

$27x - 15y = 123$ ... ... (iv)

(iii) নং সমীকরণ থেকে (iv) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$(35x - 15y) - (27x - 15y) = 155 - 123$

বা, $35x - 15y - 27x + 15y = 32$

বা, $8x = 32$

$\therefore x = 4$ [উভয়পক্ষকে ৪ দ্বারা ভাগ করে]

এখন, (i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$7 \times 4 - 3y = 31$

বা, $28 - 3y = 31$

বা, $- 3y = 31 - 28$

বা, $-3y = 3$

$\therefore y = -1$ [উভয়পক্ষকে (-3) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (4, -1)$

৫. $7x - 8y = -9$
$5x-4y = -3$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়,

$7x - 8y = -9$ ... ... (i)

$5x-4y = -3$ ... ... (ii)

প্রদত্ত সমীকরণ (ii) নং এর উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে (i) নং থেকে বিয়োগ করি,

$7x-8y=-9$

$10x-8y=-6$

$-3x =-3$

বা, $x = 1$ [(-3) দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে]

$\therefore x = 1$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$5.1 - 4y=-3$

বা, $5-4y=-3$

বা, $- 4y=-3-5$

বা, $-4y= -1$

বা, $y = 2$ [(-4) দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে]

$\therefore y =2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, 2)$

৬. $ax + by = c$
$a^2x + b^2y = c^2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $ax + by = c$ ... ... (i)

$a^2x + b^2y = c^2$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণকে b দ্বারা গুণ করে পাই,

$abx + b^2y = bc$ ... ... (iii)

(iii) নং সমীকরণ থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$(abx + b^2y) - (a^2x + b^2y) = bc - c^2$

বা, $abx - a^2x = bc - c^2$

বা, $x(ab - a^2) = bc - c^2$

বা, $x = \frac{bc-c^2}{ab - a^2}$

বা, $x = \frac{c(b-c)}{a(b-a)}$

এখন, (i) নং সমীকরণে x-এর মান বসিয়ে পাই,

$a\times \frac{c(b-c)}{a(b-a)} + by = c$

বা, $\frac{c(b-c)}{(b-a)} + by = c$

বা, $by = c-\frac{c(b-c)}{(b-a)}$

বা, $by = \frac{c(b-a)-c(b-c)}{(b-a)}$

বা, $by = \frac{c(b-a-b+c)}{(b-a)}$

বা, $by = \frac{c(c-a)}{(b-a)}$

বা, $y = \frac{c(c-a)}{b(b-a)}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (\frac{c(b-c)}{a(b-a)}, \frac{c(c-a)}{b(b-a)})$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান কর (৭-১৫):

৭. $2x + 3y+5 = 0$
$4x + 7y + 6 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $2x + 3y+5= 0$ .... (i)
$4x + 7y + 6 = 0$ ... ... (ii)
এখন, (i) নং এবং (ii) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{3\times 6 - 7\times 5} = \frac{y}{5\times 4 - 6\times 2} = \frac{1}{2\times 7 - 4\times 3}$$

বা, $\frac{x}{18-35} = \frac{y}{20-12} = \frac{1}{14-12}$

বা, $\frac{x}{-17} = \frac{y}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{x}{-17} = \frac{1}{2}$

বা, $x = \frac{-17}{2}$

এবং $\frac{y}{8} = \frac{1}{2}$

বা, $y = \frac{8}{2}$

বা, $y = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (\frac{-17}{2}, 4)$

৮. $3x -5y +9 = 0$
$5x -3y -1 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x -5y +9 = 0$.......... (i)
$5x - 3y -1 = 0$. ... ... (ii)
এখন, (i) নং এবং (ii) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-5)\times(-1) - (-3)\times 9} = \frac{y}{5\times 9 - (-1)\times 3} = \frac{1}{3\times(-3) - 5\times(-5)}$$

বা, $\frac{x}{5+27} = \frac{y}{45+3} = \frac{1}{-9+25}$

বা, $\frac{x}{32} = \frac{y}{48} = \frac{1}{16}$

$\therefore \frac{x}{32} = \frac{1}{16}$

বা, $x = \frac{32}{16} = 2$

এবং $\frac{y}{48} = \frac{1}{16}$

বা, $y = \frac{48}{16}$

বা, $y = 3$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, 3)$

৯. $x + 2y = 7$
$2x - 3y = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x+2y = 7$........ (i)

$2x - 3y = 0$ ... ... (ii)

সমীকরণদ্বয়কে পক্ষান্তর করে পাই,

$x+2y - 7 = 0$

$2x - 3y + 0 = 0$

এখন, উপরিউক্ত সমীকরণদ্বয়ে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{2 \times 0 - (-3) \times (-9)} = \frac{y}{2 \times (-7) - 1 \times 0} = \frac{1}{1 \times (-3) - 2 \times 2}$$

বা, $\frac{x}{0-21} = \frac{y}{-14-0} = \frac{1}{-3-4}$

বা, $\frac{x}{-21} = \frac{y}{-14} = \frac{1}{-7}$

∴ $\frac{x}{-21} = \frac{1}{-7}$

বা, $x = \frac{-21}{-7} = 3$

এবং $\frac{y}{-14} = \frac{1}{-7}$

বা, $y = \frac{-14}{-7}$

বা, $y = 2$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (3, 2)$

১০. $4x + 3y = -12$
$2x = 5$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ,

$4x + 3y = -12$ .... (i)

$2x = 5$ .... (ii)

সমীকরণদ্বয়কে পক্ষান্তর করে পাই,

$4x + 4y + 12 = 0$

$2x + 0y + -5 = 0$

উপরিউক্ত সমীকরণদ্বয়ে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{3 \times (-5) - 0 \times 12} = \frac{y}{12 \times 2 - 4 \times (-5)} = \frac{1}{4 \times 0 - 2 \times 3}$$

বা, $\frac{x}{-15-0} = \frac{y}{24+20} = \frac{1}{0-6}$

বা, $\frac{x}{-15} = \frac{y}{44} = \frac{1}{-6}$

∴ $\frac{x}{-15} = \frac{1}{-6}$

বা, $x = \frac{-15}{-6} = \frac{5}{2}$

এবং $\frac{y}{44} = \frac{1}{-6}$

বা, $y = \frac{44}{-6}$

বা, $y = \frac{-22}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (\frac{5}{2}, \frac{-22}{3})$

১১. $-7x + 8y = 9$
$5x - 4y = -3$

সমাধান: দেওয়া আছে, $-7x + 8y = 9$ ... ... (i)

$5x - 4y = -3$ ... ... (i)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে পক্ষান্তর করে পাই,

$-7x + 8y - 9 = 0$

$5x - 4y + 3 = 0$

এখন, উপরিউক্ত সমীকরণদ্বয়ে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{8 \times 3 - (-4) \times (-9)} = \frac{y}{(-9) \times 5 - 3 \times (-7)} = \frac{1}{(-7) \times (-4) - 5 \times 8}$$

বা, $\frac{x}{24-36} = \frac{y}{-45+21} = \frac{1}{28-40}$

বা, $\frac{x}{-12} = \frac{y}{-24} = \frac{1}{-12}$

$\therefore \frac{x}{-12} = \frac{1}{-12}$

বা, $x = \frac{-12}{-12} = 1$

এবং $\frac{y}{-24} = \frac{1}{-12}$

বা, $y = \frac{-24}{-12}$

বা, $y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, 2)$

১২. $3x - y - 7 = 0 = 2x + y - 3$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়,
$3x - y - 7 = 0$ ... ... (i)
$2x + y - 3 = 0$ ... ... (ii)

সমীকরণদ্বয়ে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-1) \times (-3) - 1 \times (-7)} = \frac{y}{(-7) \times 2 - 3 \times (-3)} = \frac{1}{3 \times 1 - 2 \times (-1)}$$

বা, $\frac{x}{3+7} = \frac{y}{-14+9} = \frac{1}{3+2}$

বা, $\frac{x}{10} = \frac{y}{-5} = \frac{1}{5}$

$\therefore \frac{x}{10} = \frac{1}{5}$

বা, $x = \frac{10}{5} = 2$

এবং $\frac{y}{-5} = \frac{1}{5}$

বা, $y = \frac{-5}{5}$

বা, $y = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, -1)$

১৩. $ax + by = a^2 + b^2$
$2bx - ay = ab$

সমাধান: দেওয়া আছে, $ax + by = a^2 + b^2$ ... ... (i)

$2bx - ay = ab$ ... ... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণকে পক্ষান্তর করে পাই,

$$ax + by - (a^2 + b^2) = 0$$

$$2bx - ay - ab = 0$$

উপরিউক্ত সমীকরণদ্বয়ে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{b \times (-ab) - (-a) \times \{-(a^2 + b^2)\}} = \frac{y}{-(a^2 + b^2) \times 2b - (-ab) \times a}$$

$$= \frac{1}{-a \times a - 2b \times b}$$

বা, $\frac{x}{-ab^2 - a^3 - ab^2} = \frac{y}{-2a^2b - 2b^3 + a^2b} = \frac{1}{-a^2 - 2b^2}$

বা, $\frac{x}{-a^3 - 2ab^2} = \frac{y}{-a^2b - 2b^3} = \frac{1}{-a^2 - 2b^2}$

বা, $\frac{x}{-a(a^2 + 2b^2)} = \frac{y}{-b(a^2 + 2b^2)} = \frac{1}{-(a^2 + 2b^2)}$

বা, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{1}$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{1}{1}$

বা, $x = a$

এবং $\frac{y}{b} = \frac{1}{1}$

বা, $y = b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (a, b)$

১৪. $y(3 + x) = x(6 + y)$
$3(3 + x) = 5(y - 1)$

সমাধান: দেওয়া আছে, $y(3 + x) = x(6 + y)$ ....(i)

$3(3 + x) = 5(y - 1)$ ....(ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$3y + xy = 6x + xy$

বা, $6x + xy - 3y - xy = 0$

বা, $6x - 3y = 0$

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$9 + 3x = 5y - 51$

বা, $3x - 5y + 9 + 5 = 0.$

বা, $3x - 5y + 14 = 0$

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ দুইটির ভিন্ন রূপ হলো:

$6x - 3y + 0 = 0$ .... (iii)

$3x - 5y + 14 = 0$ .... (iv)

এখন, (ii) নং এবং (iv) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{(-3) \times 14 - (-5) \times 0} = \frac{y}{3 \times 0 - 6 \times 14} = \frac{1}{6 \times (-5) - 3 \times (-3)}$$

বা, $\frac{x}{-42+0} = \frac{y}{0-84} = \frac{1}{-30+9}$

বা, $\frac{x}{-42} = \frac{y}{-84} = \frac{1}{-21}$

$\therefore \frac{x}{-42} = \frac{1}{-21}$

বা, $x = \frac{-42}{-21} = 2$

এবং $\frac{y}{-84} = \frac{1}{-21}$

বা, $y = \frac{-84}{-21}$

বা, $y = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, 4)$

১৫. (x +7) (y –3) +7= (y + 3) (x-1)+5
5x -11y+35 = 0

সমাধান: দেওয়া আছে,

$(x+7)(y-3)+7 = (y+3)(x-1)+5$ ... ... (i)

$5x - 11y + 35 = 0$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে,

$(x+7)(y-3)+7 = (y+3)(x-1)+5$

বা, $xy - 3x + 7y - 21 + 7 = xy - y + 3x - 3 + 5$

বা, $xy - 3x + 7y - 14 - xy + y - 3x + 3 - 5 = 0$

বা, $-6x + 8y - 16 = 0$

বা, $-2(3x - 4y + 8) = 0$

$\therefore 3x - 4y + 8 = 0$ ... ... (iii)

এবং $5x - 11y + 35 = 0$ ... ... (iv)

এখন, (iii) নং (iv) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{35 \times (-4) - (-11) \times 8} = \frac{y}{5 \times 8 - 3 \times 35} = \frac{1}{(-11) \times 3 - 5 \times (-4)}$$

বা, $\frac{x}{-140+88} = \frac{y}{40-105} = \frac{1}{-33+20}$

বা, $\frac{x}{-52} = \frac{y}{-65} = \frac{1}{-13}$

বা, $\frac{x}{52} = \frac{y}{65} = \frac{1}{13}$ [ত্রিপক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \frac{x}{52} = \frac{1}{13}$

বা, $x = \frac{53}{13} = 4$

এবং $\frac{y}{65} = \frac{1}{13}$

বা, $y = \frac{65}{13}$

বা, $y = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (4, 5)$

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর:

১. $3x + 4y = 14$

$4x - 3y = 2$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$3x + 4y = 14$ ... (i)

$4x - 3y = 2$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) নং থেকে পাই, $4y = 14 - 3x$

বা, $y = \frac{14 - 3x}{4}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−2	2	6
y	5	2	-1

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (-2, 5), (2, 2), (6, -1)

আবার সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই,

$- 3y = 2 - 4x$

বা, $y = \frac{4x - 2}{3}$

সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

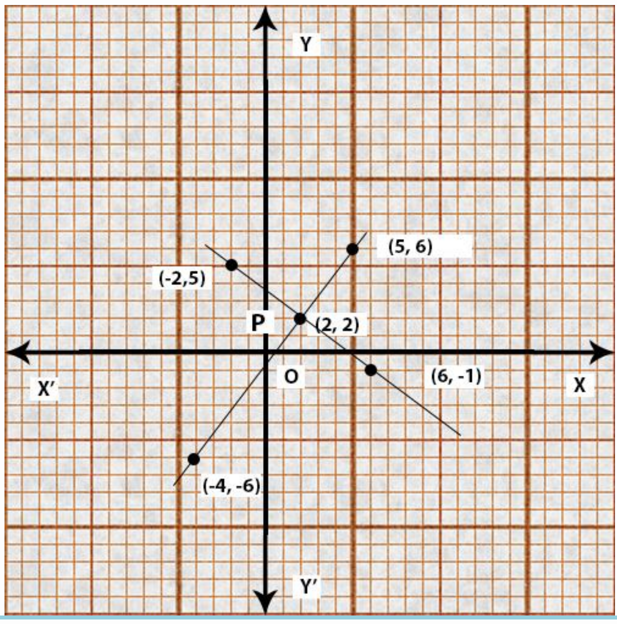
x	−4	2	5
y	−6	2	6

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে

(−4, −6), (2, 2) ও (5, 6)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (−2, 5), (2, 2) ও (6, −1) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (−4, −6), (2, 2) ও (5, 6) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক (2, 2)
∴ নির্ণেয় সমাধান: (x, y) = (2, 2)

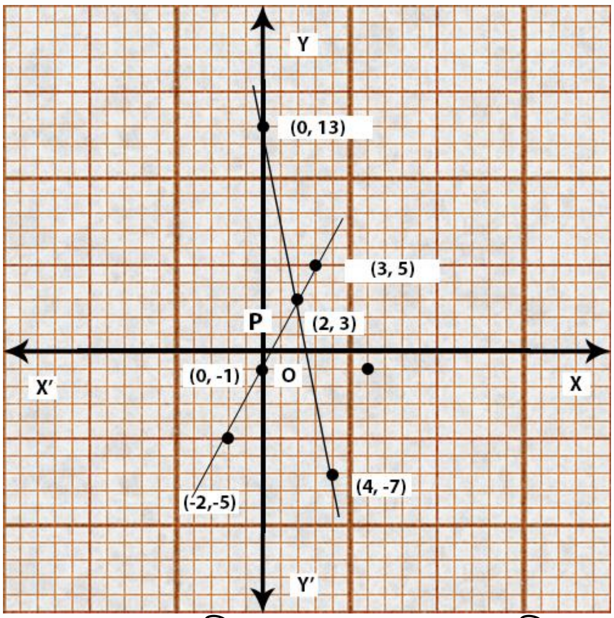
২. $2x - y = 1$
$5x + y = 13$
সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়
$2x - y = 1$ ... ... (i)
$5x + y = 13$ ... ... (ii)
সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$-y = 1 - 2x$
$\therefore y = 2x - 1$
সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	–2	0	3	2
y	–5	–1	5	3

∴ সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু যথাক্রমে (-2,-5), (0, -1), (3, 5), (2, 3)
আবার সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই, $y = 13 - 5x$
সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	0	2	4
y	13	3	–7

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (0, 13), (2, 3), (4, –7)
এখন ছক কাগজের XOX' বাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু চারটি (-2, –5), (0, -1), (2, 3) ও (3, 5) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে সরলরেখা।
একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (0, 13), (2,3) ও (4, –7) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাংক
(2, 3)
∴ নির্ণেয় সমাধান: (x, y) = (2, 3)

৩. $2x+5y=1$
$x+3y=2$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়
$2x+5y=1$ ... ... (i)
$x+3y=2$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$5y = 1-2x$
বা, $y = \frac{1-2x}{5}$

সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−7	−2	3
y	3	1	−1

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (−7, 3), (−2, 1) ও (3, −1)
আবার সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই, বা, $3y=2-x$
বা, $y = \frac{2-x}{3}$

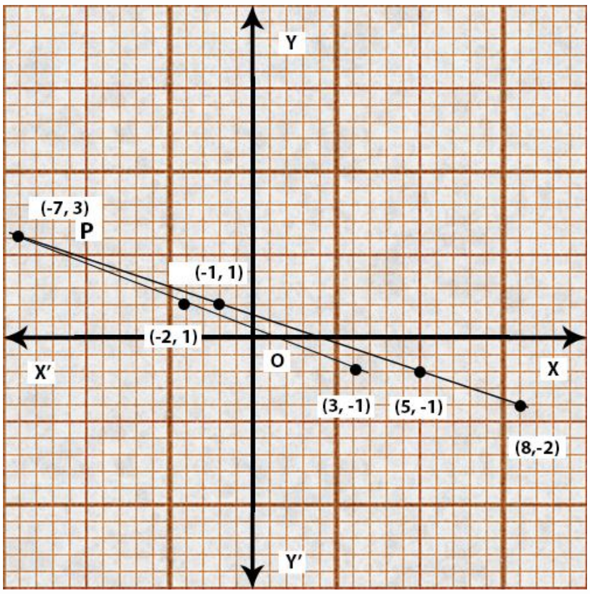
সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−7	−1	5	8
y	3	1	−1	−2

∴ সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু যথাক্রমে (−7, 3), (−1, 1), (5, −1) ও (8,−2)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-7, 3), (-2, 1), ও (3, -1) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু চারটি (-7, 3), (-1,1), (5, -1) ও (8, -2) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলি পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক (-7, 3)

∴ নির্ণেয় সমাধান: (x, y) = (-7, 3)

8. 3x -2y =2
5x -3y = 5

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$3x - 2y = 2$ ... ... (i)

$5x - 3y = 5$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,

$-2y = 2 - 3x$

বা, $y = \frac{2-3x}{-2}$

বা, $y = \frac{3x-2}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−2	0	2	4
y	−4	−1	2	5

∴ সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু যথাক্রমে (-2, -4), (0, -1), (2, 2) ও (4, 5)

আবার সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই, $-3y = 5 - 5x$

বা, $y = \frac{5-5x}{-3}$

বা, $y = \frac{5x-5}{3}$

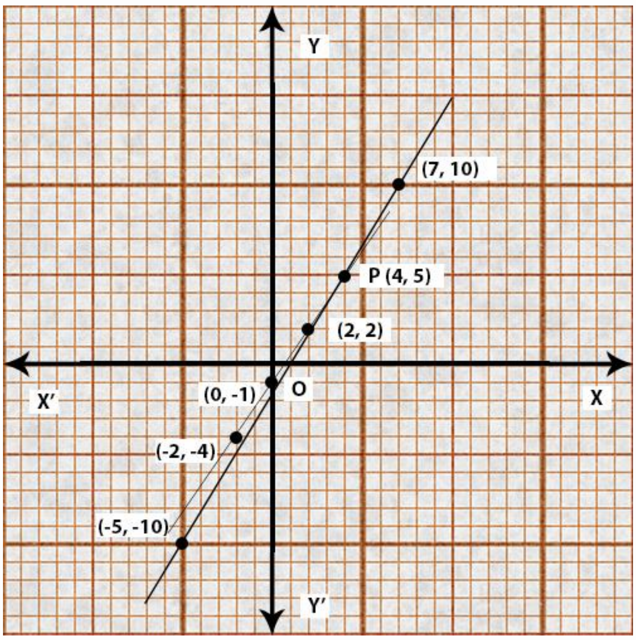
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−5	4	7
y	−10	5	10

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (5, −10), (4, 5) ও (7, 10)

এখন, ছক কাগজের O মূলবিন্দু XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু চারটি (-2, -4), (0, -1), (2, 2) ও (4, 5) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-5, -10), (4, 5) ও (7, 10) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরল রেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর

স্থানাংক (4, 5)
∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (4, 5)$

৫. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$
$2x + 3y = 13$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$ .... (i)
$2x + 3y = 13$ .... (ii)

সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$\frac{y}{3} = 2 - \frac{x}{2}$
বা, $\frac{y}{3} = \frac{4-x}{2}$
বা, $y = \frac{12-3x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	–2	0	6	2
y	9	6	–3	3

∴ সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু যথাক্রমে (–2, 9), (0, 6), (6, -3), (2, 3)
আবার সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই,
$3y = 13 - 2x$
বা, $y = \frac{13-2x}{3}$

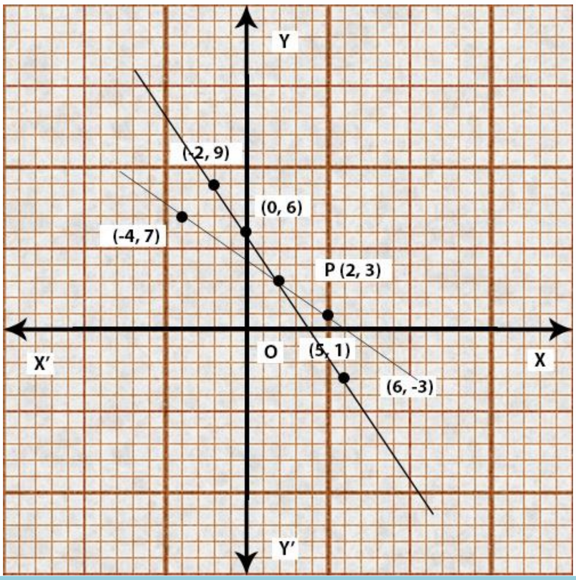
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	–4	2	5
y	7	3	1

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (4, 7), (2,3) ও (5, 1)

এখন, ছক কাগজের O মূলবিন্দু XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু চারটি (-2, 9), (0, 6), (6, -3) ও (2, 3) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (4, 7), (2,3) ও (5, 1) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখাটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক
(2, 3)
∴ নির্ণেয় সমাধান: (x, y) = (2,3)

৬. 3x+y=6
5x+3 = 12
সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়
3x+y =6 ... ... (i)
5x + 3 = 12 ... ... (ii)
সমীকরণ (i) নং থেকে পাই y=6-3x
বা, y = 6 - 3x
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরুপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করিঃ

x	−2	0	4
y	12	6	−6

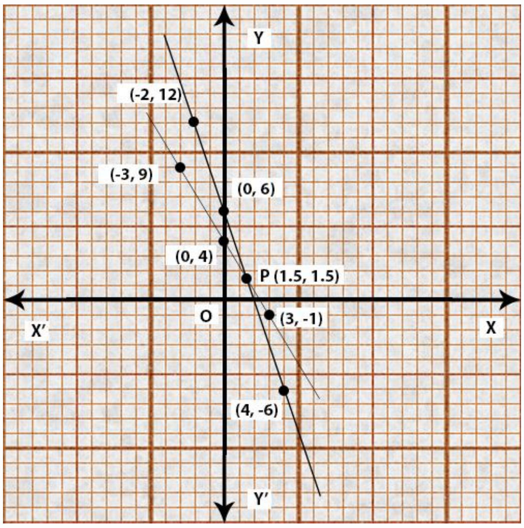
∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (2,12), (0, 6), (4, −6)
আবার সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই, 3y = 12−5x
বা, $y = \frac{12-5x}{3}$
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−3	0	3
y	9	4	−1

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (-3, 9), (0, 4) ও (3, -1)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-2, 12), (0, 6), (4, −6) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-3, 9), (0, 4) ও (3, -1) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক (1.5, 1.5)

∴ নির্ণেয় সমাধান: (x, y) = (1.5, 1.5)

৭. $3x + 2y = 4$
$3x - 4y = 1$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $3x + 2y = 4$ .... (i)
$3x - 4y = 1$ .... (ii)

সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$2y = 4 - 3x$
বা, $y = \frac{4-3x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	–2	0	4
y	5	2	–4

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (-2, 5), (0, 2), (4, –4)
আবার সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$-4y = 1 - 3x$
বা, $y = \frac{1-3x}{-4}$
বা, $y = \frac{3x-1}{4}$

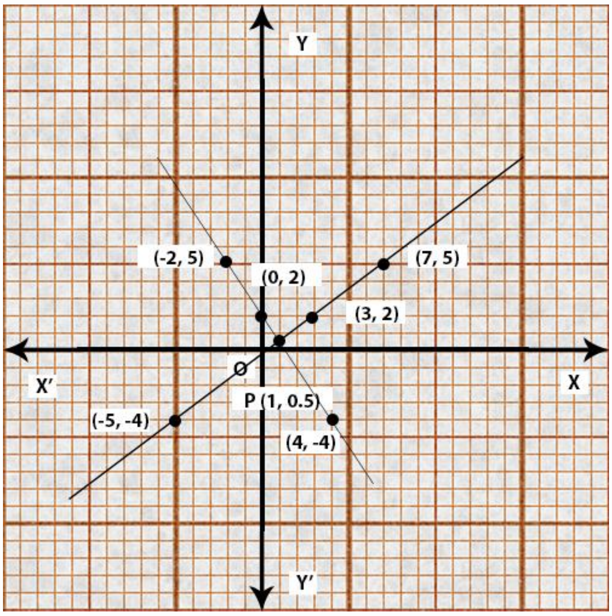
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	–5	3	7
y	–4	2	5

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (–5, –4), (3, 2) ও (7, 5)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-2, 5), (0, 2), (4, –4) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে। সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (–5, - 4), (3, 2) ও (7, 5) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরল রেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক $(1, \frac{1}{2})$
∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$

৮। $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 3$

$x+\frac{y}{6} = 3$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 3$ .... (i)

$x+\frac{y}{6} = 3$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,

$$\frac{3x + 2y}{6} = 3$$

বা, $3x + 2y = 18$

বা, $2y = 18 - 3x$

বা, $y= \frac{18 - 3x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−2	0	2
y	12	9	6

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (2, 12), (0, 9), (2, 6)

আবার সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই,

$x+\frac{y}{6} = 3$

বা, $\frac{y}{6} = 3 - x$

বা, $y = 18-6x$

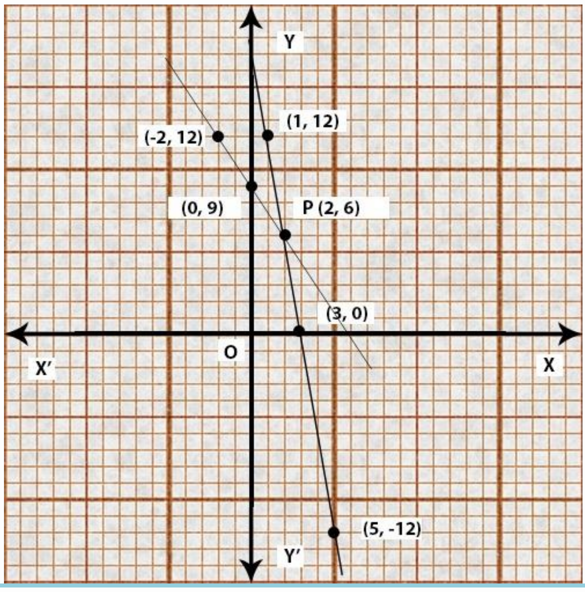
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচে ছক তৈরি করি:

x	1	2	3	5
y	12	6	0	−12

∴ সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু যথাক্রমে (1, 12), (2, 6), (3, 0) ও (5, - 12)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (−2, 12), (0, 9), (2, 6) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু চারটি (1,12), (2, 6), (3, 0) ও (5, - 12) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরল রেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক (2, 6)

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: (x, y) = (2, 6)

৯. 3x + 2 = x–2

সমাধান: দেওয়া আছে, 3x +2 = x–2
ধরি, y = 3x + 2.......... (i)
এবং y = x–2............(ii)

(i) নং সমীকরণে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরুপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি।

x	–3	–2	0
y	–7	–4	2

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (–3, –7) (–2, – 4) ও (0, 2)

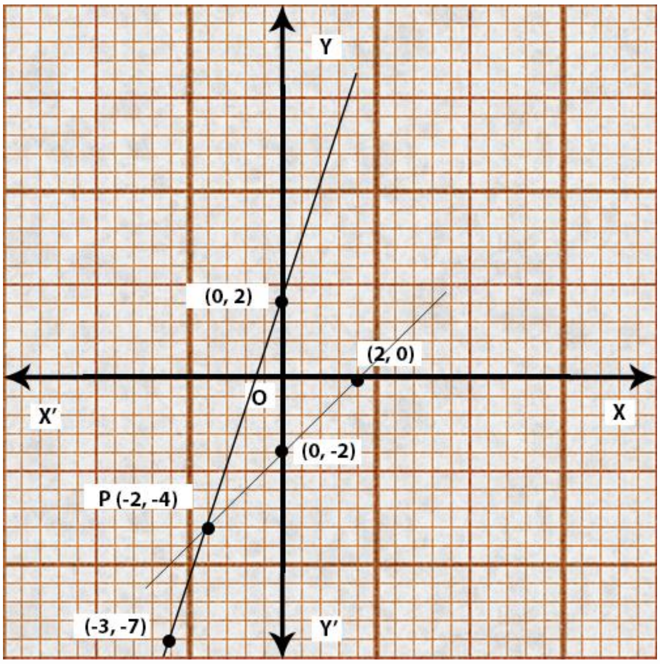
আবার, (ii) নং সমীকরণে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরুপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	–2	0	2
y	–4	–2	0

$\therefore$ সমীকরণের লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (-2, –4), (0, –2) ও (2, 0)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-3, –7), (–2, –4) ও (0, 2) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।

একই ভাবে সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-2, –4), (0, –2) ও (2, 0) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–2, –4)

ছেদবিন্দুর ভুজ -2, যা প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: x = –2

১০. $3x - 7 = 3 - 2x$

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x - 7 = 3 - 2x$

ধরি, $y = 3x - 7$.......... (i)

এবং $y = 3 - 2x$ .... (ii)

(i) নং সমীকরণে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি।

x	1	2	3
y	–4	–1	2

∴ সমীকরণের লেখের ওপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (1, –4), (2, –1) ও (3, 2)

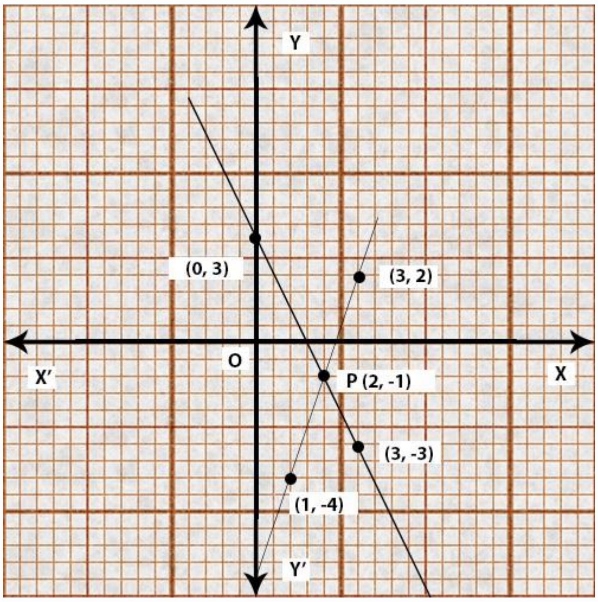
আবার, (ii) নং সমীকরণে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি।

x	0	2	3
y	3	–1	–3

∴ সমীকরণের লেখের ওপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (0, 3), (2, –1) ও (3, –3)

এখন ছক কাগজের XOX' বাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু বিবেচনা করে ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গের দৈর্ঘ্যকে একক ধরে ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (1, 4), (2, –1) ও (3, 2) স্থাপন কার ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বার্ধত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।

একই ভাবে সমীকরণ (ii) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (0, 3), (2, –1) ও (3, –3) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, –1)

ছেদ বিন্দুর ভূজ 2, যা প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2$

অধ্যায় ১২ ১২.৪ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ
Simple Simaltenous Equations in Two Variables

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. নিচের কোন শর্তে ax + b + c = 0 ও px + y + r = 0 সমীকরণজোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল হবে?

ক. $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ খ. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ গ. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ ঘ. $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

২. x + y = 4, x – y =2 হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি?

ক. (2, 4) খ. (4, 2) গ. (3, 1) ঘ. (1, 3)

৩. x + y = 6 ও 2x = 4 হলে, y মান কত?

ক. 2 খ. 4 গ. 6 ঘ. ৪

৪. নিচের কোনটির জন্য পাশের ছকটি সঠিক?

x	0	2	4
y	– 4	0	4

ক. y=x – 4 খ. y= 8 – x গ. y= 4 – 2x ঘ. y = 2x - 4

৫. 2x –y = 8 এবং x -2y = 4 হলে, x+y = কত?

ক. 0 খ. 4 গ. ৪ ঘ. 12

ব্যাখ্যা: 2x –y - x + 2y = 8 - 4
∴ x+y = 4.

৬. x - y - 4 = 0 ও 3x -3y -10 = 0 সমীকরণদ্বয়-

i. পরস্পর নির্ভরশীল
ii. পরস্পর সমঞ্জস
iii. এর সমাধান নেই
নিচের কোনটি সঠিক?

ক. ii খ. iii গ. i ও iii ঘ. ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৭-৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
আয়তাকার একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 2 মিটার বেশি এবং মেঝের পরিসীমা 20 মিটার। ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে প্রতি বর্গমিটারে 900 টাকা খরচ হয়।

৭. ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য কত মিটার?

ক. 10 খ. ৪ গ. 6 ঘ. 4

ব্যাখ্যা: ধরি, প্রস্থ = x মি.; ∴ দৈর্ঘ্য = (x + 2)
∴ পরিসীমা = 2(x + x + 2) মি. = 2(2x+ 2) মি. = 4x + 4 মি.
প্রশ্নমতে, 4x + 4 = 20
বা, 4x = 20 –4
বা, 4x = 16
∴ x= 4
∴ দৈর্ঘ্য = x + 2 = 4 + 2 = 6 মি

৮. ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

ক. 24 খ. 32 গ. 48 ঘ. 80

ব্যাখ্যা: প্রস্থ = 4 মি.; ∴ দৈর্ঘ্য = (4+2) মি. = 6 মি.
∴ ক্ষেত্রফল = (6 x 4) বর্গ মি. = 24 বর্গ মিটার।

MCQ Answers:
১। ক
২। গ
৩। খ
৪। ঘ
৫। খ
৬। খ
৭। গ
৮। ক
৯। ঘ

৯. ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে মোট কত খরচ হবে?

ক. 72000 খ. 43200 গ. 28800 ঘ. 21600

ব্যাখ্যা: প্রতিবর্গমিটার 900 টাকা হিসাবে মোজাইকের খরচ হবে (900×24) টাকা = 21,600 টাকা।

সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (১০-১৭):

১০. কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে ৪ বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ভগ্নাংশটির লব = x ও হর = y

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি = $\frac{x}{y}$

১ম শর্তানুসারে, $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ ... ... (i)

২য় শর্তানুসারে, $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$5(x + 1) = 4(y + 1)$

বা, $5x + 5 = 4y + 4$

বা, $5x - 4y = 4 - 5$

বা, $5x - 4y = -1$ ... ... (iii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$2(x - 5) = y - 5$

বা, $2x - 10 = y - 5$

বা, $2x - y = 10 - 5$

বা, $2x - y = 5$ ... ... (iv)

(iv) নং কে 4 দ্বারা গুণ করে (iii) নং থেকে বিয়োগ করি,

$5x - 4y = -1$ ... ... (iii)

$8x - y = 20$ ... ... (iv)

(-) (+) (-)

$-3x = -21$

বা, $x = 7$

x এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$2.7 - y = 5$

বা, $14 - y = 5$

বা, $- y = 5 - 14$

বা, $-y = -9$

বা, $y = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{7}{9}$

১১. কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ হলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ভগ্নাংশটির লব = x এবং হর = y

$\therefore$ ভগ্নাংশটি = $\frac{x}{y}$

প্রশ্নমতে, $\frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2}$

বা, $2x - 2 = y + 2$ [আড়গুণন করে]

বা, $2x - y = 2+2$

$\therefore 2x - y = 4$ .... (i)

আবার, $\frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3}$

বা, $3x - 21 = y - 2$ [আড়গুণন করে]

বা, $3x - y = 21 - 2$

$\therefore 3x - y = 19$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$3x - y - (2x - y) = 19 - 4$

বা, $3x - y - 2x + y = 15$

$\therefore x = 15$

এখন, x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2 \times 15 - y = 4$

বা, $30 - 4 = y$

$\therefore y = 26$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{15}{26}$ (Ans.)

১২। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্কটি = x ও দশক স্থানীয় অঙ্কটি = y

$\therefore$ প্রদত্ত সংখ্যাটি $= 10y + x$

১ম শর্তানুসারে, $x = 3y+1$.......... (i)

২য় শর্তানুসারে, $10x + y = ৪(x + y)$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$10x + y = 8x + 8y$

বা, $10x - 4x + y - 8y = 0$

বা, $2x - 7y = 0$

বা, $2(3y+ 1) - 7y = 0$ [(i) নং হতে]

বা, $6y + 2 - 7y = 0$

বা, $-y = -2$

$\therefore y = 2$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = 3.2 + 1$

বা, $x = 6 + x = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 10.2 + 7 = 20 + 7 = 27$

Ans. সংখ্যাটি 27.

১৩. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 4; সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল 110; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, একক স্থানীয় অঙ্কটি $= x$ এবং দশক স্থানীয় অঙ্কটি $= y$

কোন অঙ্কটি বড় আমাদের জানা নেই,

$\therefore x - y = \pm 4 \ldots \ldots \ldots (i)$

সংখ্যাটি $= 10y + x$

অঙ্কদ্বয়ের স্থান পরিবর্তন করলে সংখ্যাটি $= 10x + y$

প্রশ্নমতে, $10x + y + 10y + x = 110$

বা, $11x+11y = 110$

বা, $11(x + y) = 110$

$x+y = 10 \ldots \ldots (ii)$ [উভয়পক্ষকে 11 দ্বারা ভাগ করে]

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$x+y+ x - y = 10 \pm 4$

বা, $2x = 10 \pm 4$

বা, $x = \frac{10\pm4}{2}$

বা, $x = 5 \pm 2$

$\therefore x = 7$ বা 3

এখন, (ii) নং সমীকরণ $y = 10 - x$ থেকে পাই,

$x = 7$ হলে, $y = 10 - 7 = 3$

$x = 3$ হলে, $y = 10 - 3 = 7$

$x = 1, y = 3$ হলে, সংখ্যাটি $= 10 \times 3+7= 30 + 7 = 37$

$x = 3, y = 7$ হলে, সংখ্যাটি $= 10 \times 7+3 = 70 + 3 = 73$

Ans. 37 বা 73

১৪. মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। 5 বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত?

সমাধান: মনে করি, মাতার বর্তমান বয়স $= x$ বছর

ও দুই কন্যার বর্তমান বয়সের সমষ্টি $= y$ বছর

১ম শর্তানুসারে, $x = 4y \ldots \ldots \ldots (i)$

২য় শর্তানুসারে, $x + 5 = 2(y + 5 \times 2) \ldots \ldots \ldots (ii)$

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$x+ 5 = 2(y + 10)$

বা, $x + 5 = 2y+ 20$

বা, $4y + 5 = 2y + 20$ [$\because x = 4y$]

বা, $4y - 2y = 20 - 5$

বা, $2y = 15$

বা, $y = \frac{15}{2}$

y এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$x = 4 \times \frac{15}{2}$

বা, $x = 30$

∴ মাতার বর্তমান বয়স = 30 বছর

Ans. 30 বছর।

১৫. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার কম ও প্রস্থ 3 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গমিটার কম হবে। আবার দৈর্ঘ্য 3মিটার বেশি ও প্রস্থ 2 মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার

এবং প্রস্থ = y মিটার

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার

১ম শর্তানুসারে, $(x - 5)(y + 3) = xy - 9$ ……… (i)

২য় শর্তানুসারে, $(x + 3)(y + 2) = xy + 67$……. (ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$(x - 5)(y + 3) = xy - 9$

বা, $xy + 3x - 5y - 15 = xy - 9$

বা, $xy + 3x - 5y - xy = -9 + 15$

∴ $3x - 5y = 6$ ……….(iii)

আবার, (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$(x + 3)(y + 2) = xy + 67.$

বা, $xy + 2x + 3y + 6 = xy + 67$

বা, $xy + 2x + 3y - xy = 67 - 6$

∴ $2x + 3y = 61$……… (iv)

(iii) ও (iv) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$3x - 5y - 6 = 0$

$2x + 3y - 61 = 0$

$$\frac{x}{(-5)\times(-61) - (-6)\times 3} = \frac{y}{(-6)\times 2 - 3\times(-61)} = \frac{1}{3\times 3 - (-5)\times 2}$$

বা, $\frac{x}{305+18} = \frac{y}{-12+183} = \frac{1}{9+10}$

বা, $\frac{x}{323} = \frac{y}{171} = \frac{1}{19}$

∴ $\frac{x}{323} = \frac{1}{19}$

বা, $x = \frac{323}{19} = 17$

এবং $\frac{y}{171} = \frac{1}{19}$

বা, $y = \frac{171}{19}$

বা, $y = 9$

∴ আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য, x = 17 মিটার এবং প্রস্থ, y = 9 মিটার

Ans. দৈর্ঘ্য 17 মি. এবং প্রস্থ 9 মি.

১৬. একটি নৌকা দাড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 15 কি.মি যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘন্টায় 5 কি.মি.। নৌকার ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, নৌকার বেগ $= x$ কি.মি./ঘন্টা

এবং স্রোতের বেগ $= y$ কি.মি./ঘণ্টা

এখন, স্রোতের অনুকূলে বেগ $= (x + y)$ কি.মি./ঘণ্টা

স্রোতের প্রতিকূলে বেগ $= (x - y)$ কি.মি./ঘণ্টা

প্রশ্নমতে, $x + y = 15$ .... (i)

$x - y = 5$ ... .(ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$x+y+x - y = 15 + 5$

বা, $2x = 20$

$\therefore x = 10$

$\therefore$ নৌকার বেগ 10 কি.মি./ঘণ্টা

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$(x+y) - (x - y) = 15 - 5$

বা, $x+y - x + y = 10$

বা, $2y = 10$

বা, $y = 5$

$\therefore$ স্রোতের বেগ = 5 কি.মি./ঘণ্টা

Ans. নৌকার বেগ 10 কি.মি./ঘণ্টা ও স্রোতের বেগ 5 কি.মি./ঘন্টা

১৭. একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতনবৃদ্ধি পান। তার মাসিক বেতন 4 বছর পর 4500 টাকা ও ৪ বছর পর 5000 টাকা হয়। তার চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঐ শ্রমিকের চাকুরী শুরুতে মাসিক বেতন ছিল x টাকা ও বার্ষিক বেতনবৃদ্ধি y টাকা

১ম শর্তানুসারে, $x + 4y = 4500$ .... (i)

২য় শর্তানুসারে $x+ 8y = 5000$ ... ... (ii)

(−) (−) (−)

[বিয়োগ করে] $-4y = -500$

বা, $y = \frac{500}{4}$

বা, $y = 125$

y এর মান (i)নং এ বসিয়ে পাই,

$x+4.\ 125 = 4500$

বা, $x + 500 = 4500$

বা, $x = 4500 - 500$

$\therefore x = 4000$

Ans. চাকুরীর শুরুতে ঐ ব্যক্তির মাসিক বেতন ছিল 4000 টাকা ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি 125 টাকা।

১৮. একটি সরল সমীকরণজোট $x+y = 10$
$3x - 2y = 0$

ক. দেখাও যে, সমীকরণজোটটি সমঞ্জস। এর কয়টি সমাধান আছে?

খ. সমীকরণজোটটি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর।

গ. সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. প্রদত্ত সমীকরণ জোট: $x+y = 10$ ... ... (i)

$3x - 2y = 0$ ... ... (ii)

$\therefore$ x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{3}$ ও y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{-2}$

$\therefore \frac{1}{3} \neq \frac{1}{-2}$

$\therefore$ সমীকরণ জোটটি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং একটি মাত্র সমাধান আছে।
Ans. একটি

খ. (i) নং সমীকরণ কে 2 দ্বারা গুণ করে (ii) নং এর সাথে যোগ করি-
$2x + 2y = 20$
$3x - 2y = 0$

$5x = 20$
বা, $x = \frac{20}{5}$
বা, $x = 4$
x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $4+y = 10$
বা, $y = 10 - 4$
$\therefore y = 6$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (4, 6)$
Ans. (4, 6)

গ. প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়
$x+y = 10$ ... ... (i)
$3x - 2y = 0$ ... ... (ii)
সমীকরণ (i) নং থেকে পাই,
$x+y= 10$
বা, $y = 10 - x$
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি। ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	1	5	8	4
y	9	5	2	6

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর চারটি বিন্দু যথাক্রমে (1,9), (5, 5), (8, 2), (4, 6)
আবার, সমীকরণ (ii) নং থেকে পাই, $3x - 2y = 0$
বা, $-2y = -3x$
বা, $y = \frac{3x}{2}$

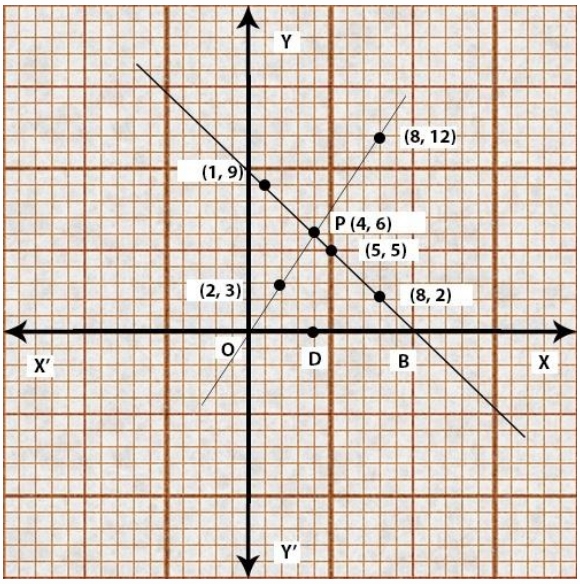
সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচে ছক তৈরি করি।

x	2	4	8
y	3	6	12

$\therefore$ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (2,3), (4, 6) ও (8, 12)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু চারটি (19), (5, 5), (8, 2), (4, 6) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (ii) নং প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (2,3), (4, 6) ও (8, 12) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরল রেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক (4, 6)
সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সাথে POB ত্রিভুজ গঠন করেছে।
POB ত্রিভুজের ভূমি OB = 10 একক ও POB ত্রিভুজের লম্ব PD = 6 একক
∴ ত্রিভুজ POB এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times 10 \times 6$ বর্গ একক = 30 বর্গ একক।
Ans. 30 বর্গ একক।

১৯. কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 2 হয়। আবার হর হতে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা 1 হয়।
ক. ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।
খ. সমীকরণজোটটি আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটি কত?
গ. সমীকরণজোটটির লেখ অঙ্কন করে (x, y) এর প্রাপ্ত মানের। সত্যতা যাচাই কর।
সমাধান:
ক. প্রদত্ত সমীকরণ জোট: ১ম শর্তানুসারে, $\frac{x+7}{y} = 2$ .... (i)
২য় শর্তানুসারে, $\frac{x}{y-2} = 1$.......... (ii)

খ. (i) নং সমীকরণ হতে পাই, x +7=2y
বা, x – 2y+7= 0 .... (iii)

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, x = y – 2
বা, x – y+2 = 0 .... (iv)

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ জোটে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,
$$\frac{x}{(-2)\times 2 - 7 \times (-1)} = \frac{y}{7 \times 1 - 1 \times 2} = \frac{1}{1 \times (-1) - 1 \times (-2)}$$
বা, $\frac{x}{-4+7} = \frac{y}{7-2} = \frac{1}{-1+2}$
বা, $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{1}{1}$

$\therefore \frac{x}{3} = \frac{1}{1}$

বা, $x = \frac{3}{1} = 3$

এবং $\frac{y}{5} = \frac{1}{1}$

বা, $y = \frac{5}{1}$

বা, $y = 5$

ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$

Ans. (3, 5)

গ. 'খ' হতে পাই প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়

$x - 2y + 7 = 0$ .... (iii)

$x - y + 2 = 0$ .... (iv)

সমীকরণ (iii) নং থেকে পাই,

$-2y = -7 - x$

বা, $y = \frac{7+x}{2}$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−3	3	5
y	2	5	6

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (-3, 2), (3, 5), (5, 6)

আবার সমীকরণ (iv) নং থেকে পাই,

$-y = -2 - x$

বা, $y = 2 + x$

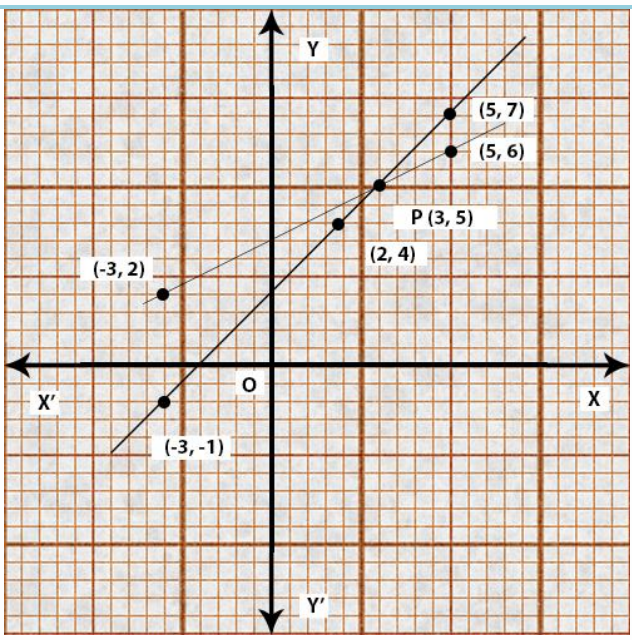
সমীকরণটিতে x এর সুবিধামতো কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছক তৈরি করি:

x	−3	2	5
y	−1	4	7

∴ সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু যথাক্রমে (-3, -1), (2, 4) ও (5, 7)

এখন, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, ছক কাগজে সমীকরণ (i) নং থেকে প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-3, 2), (3, 5), (5, 6) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এ উভয় দিকে বর্ধিত করি। তাহলে, লেখটি হবে সরলরেখা।

একইভাবে, সমীকরণ (iv) নং প্রাপ্ত বিন্দু তিনটি (-3, -1), (2, 4) ও (5, 7) স্থাপন করি ও বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি এবং উভয়দিকে বর্ধিত করি। তাহলে লেখটি হবে একটি সরলরেখা।



মনে করি, সরল রেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। লেখচিত্রে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাংক (3, 5) ।

∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (3, 5)$

খ এর প্রাপ্ত মান ও গ এর প্রাপ্ত মান সমান।
সুতরাং আড়গুণন পদ্ধতি ও লেখচিত্র পদ্ধতি উভয় পদ্ধতিতে প্রাপ্ত মান সমান।

অধ্যায় ১৩ ১৩.১

সসীম ধারা
Finite Series

অনুশীলনী ১৩.১ এর সমাধান
(সসীম ধারা)

১। 13 + 20 + 27 + 34 + ... + 111 ধারাটির পদ সংখ্যা কত?

ক) 10 খ) 13 গ) 15 ঘ) 20

২। 5 + 8 + 11 + 14 + ... + 62 ধারাটি

i. একটি সসীম ধারা
ii. একটি গুণোত্তর ধারা
iii. এর 19 তম পদ 59

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৩ - ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

7 + 13 + 19 + 25 + ... একটি ধারা।

৩। ধারাটির 15 তম পদ কোনটি?

ক) 85 খ) 91 গ) 97 ঘ) 104

৪। ধারাটির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি কত?

ক) 141 খ) 1210 গ) 1280 ঘ) 2560

৫। 2 – 5 – 12 – 19 – ... ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12-তম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, a = 2
ধারাটির সাধারণ অন্তর, d = – 5 – (+2) = – 5 – 2 = – 7
∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n–1)d
∴ 12 তম পদ = 2 + (12–1)(–7)
= 2 + 11(–7)
= 2 –77
= –75

উত্তরঃ সাধারণ অন্তর – 7 ও 12 তম পদ –75

৬। 8 + 11 + 14 + 17 + ... ধারাটির কোন পদ 392 ?

সমাধান:

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, a = 8
ধারাটির সাধারণ অন্তর, d = 11 – 8 = 3
∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।
মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 392

আমরা জানি,
n তম পদ = a + (n-1)d
8 + (n-1) 3 = 392
বা, 8 + 3n–3 = 392
বা, 5 + 3n = 392
বা, 3n = 392 – 5
বা, 3n = 387
বা, $n = \frac{387}{3}$
বা, n = 129

MCQ Answers:
১। গ
২। খ
৩। খ
৪। গ

উত্তরঃ প্রদত্ত ধারাটির 129 তম পদ 392

৭। 4 + 7 + 10 + 13 + ... ধারাটির কোন পদ 301?

সমাধান:

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 4$
ধারাটির সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 4 = 3$
∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 301$
আমরা জানি,
n তম পদ $= a + (n-1)d$
$\therefore a + (n-1)d = 301$
বা, $4 + (n-1)\ 3 = 301$
বা, $4 + 3n - 3 = 301$
বা, $3n+1 = 301$
বা, $3n = 301 - 1$
বা, $3n = 300$
বা, $n = 100$

উত্তরঃ প্রদত্ত ধারাটির 100 তম পদ 301

৮। কোনও সমান্তর ধারার m তম পদ n ও n তম পদ m হলে, ধারাটির $(m+n)$ তম পদ কত?

সমাধান:

মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ $= a$
ধারাটির সাধারণ অন্তর $= d$
∴ ধারাটির m তম পদ $= a + (m-1)d$
ধারাটির n তম পদ $= a + (n-1)d$
প্রশ্নমতে,

$a + (m-1)d = n$ ... ... (i)

$a + (n-1)d = m$ ... ... (ii)

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\{a + (m-1)d\} - \{a + (n-1)d\} = n - m$

বা, $a + (m-1)d - a - (n-1)d = n - m$

বা, $(m-1)d - (n-1)d = n - m$

বা, $d\{(m-1) - (n-1)\} = n - m$

বা, $d(m - 1 - n + 1) = n - m$

বা, $d(m - n) = n - m$

বা, $d = \frac{n - m}{(m - n)}$

বা, $d = \frac{-(m - n)}{(m - n)}$

$\therefore d = -1$

(i) নং সমীকরণে d এর মান বসিয়ে,

$a + (m - 1)(-1) = n$

বা, $a - (m - 1) = n$

$\therefore a = n + m - 1$

$= m + n - 1$

যেহেতু, সূত্রানুযায়ী আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n-1)d

∴ (m + n) তম পদ = a + (m + n −1)d

$= m + n - 1 + (m + n - 1)(-1)$ [a ও d এর মান বসিয়ে]

$= m + n - 1 - m - n + 1$

$= 0$

উত্তরঃ ধারাটির (m+n) তম পদ 0.

৯। 1 + 3 + 5 + 7 + ... ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

সমাধান:

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, a = 1

এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর, d = 3 – 1 = 2

∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2 \times 1 + (n-1) \times 2\}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{n}{2}(2 + 2n - 2)$

$= \frac{n}{2} \times 2n$

$= n^2$

উত্তরঃ ধারাটির n পদের সমষ্টি n^2

১০। 8 + 16 + 24 + ... ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান:

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, a = 8

এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর, d = 16 – 8 = 8

∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

∴ সমান্তর ধারার 9 পদের সমষ্টি, $S_9 = \frac{9}{2}\{2\times8 + (9 - 1)\times8\}$

$= \frac{9}{2}(16 + 8\times8)$

$= \frac{9}{2}(16 + 64)$

$= \frac{9}{2} \times 80$

$= 9 \times 40$

$= 360$

উত্তরঃ প্রদত্ত ধারাটির প্রথম 9টি পদের সমষ্টি 360.

১১। 5 + 11 + 17 + 23 + ... + 59 = কত?

সমাধান:

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, a = 5

এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর, d = 11 – 5 = 6

∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ = 59

আমরা জানি,

n তম পদ = a + (n-1)d

∴ a + (n-1)d = 59

বা, $5 + (n-1) 6 = 59$
বা, $5 + 6n - 6 = 59$
বা, $6n - 1 = 59$
বা, $6n = 59 + 1$
বা, $6n = 60$
বা, $n = 10$
আমরা জানি,
সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

∴ সমান্তর ধারার 10 পদের সমষ্টি, $S_{10} = \frac{10}{2}\{2\times5 + (10 - 1) \times6\}$

$= \frac{10}{2} (10 + 9 \times 6)$

$= \frac{10}{2} (10 + 54)$

$= 5 \times 64$
$= 320$

উত্তরঃ $5 + 11 + 17 + 23 + ... + 59 = 320$

১২। 29 + 25 + 21 + ... – 23 = কত?
সমাধান:
এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 29$
এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর, $d = 25 - 29 = - 4$
∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।
মনে করি, ধারাটির n তম পদ = – 23
আমরা জানি,
n তম পদ = $a + (n-1)d$

∴ $a + (n-1)d = - 23$
বা, $29 + (n-1) \times -4 = - 23$
বা, $29 - 4n + 4 = - 23$
বা, $33 - 4n = - 23$
বা, $- 4n = - 23 - 33$
বা, $- 4n = - 56$
বা, $n = \frac{-56}{-4}$
বা, $n = 14$
আমরা জানি,
সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
∴ সমান্তর ধারার 14 পদের সমষ্টি, $S_{14} = \frac{14}{2}\{2\times29 + (14 - 1) \times -4\}$

$= \frac{14}{2} (58 + 13 \times - 4)$
$= 7 (58 - 52)$
$= 7 \times 6$
$= 42$

উত্তরঃ $29 + 25 + 21 + ... - 23 = 42$

১৩। কোনও সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, ধারাটির প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?
সমাধান:
মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর = d

আমরা জানি,
সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n-1)d
∴ 12 তম পদ = a + (12-1)d = a + 11d
প্রশ্নমতে,
a + 11d = 77 … … … (i)
আমরা জানি,
সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
∴ সমান্তর ধারার 23 পদের সমষ্টি, $S_{23} = \frac{23}{2}\{2a + (23-1) \times d\}$

$= \frac{23}{2}(2a + 22d)$

$= \frac{23}{2} \times 2(a + 11d)$

$= 23 \times (a + 11d)$

$= 23 \times 77$ [a + 11d = 77]

$= 1771$

উত্তরঃ ধারাটির প্রথম 23টি পদের সমষ্টি 1771.

১৪। কোনও সমান্তর ধারার 16 তম পদ –20 হলে, ধারাটির প্রথম 31টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান:

মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a
এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর = d
আমরা জানি,
সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n-1)d
∴ 16 তম পদ = a + (16-1)d = a + 15d
প্রশ্নমতে,
a + 15d = -20 … … … (i)

আমরা জানি,
সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
∴ সমান্তর ধারার 31 পদের সমষ্টি, $S_{31} = \frac{31}{2}\{2a + (31-1) \times d\}$

$= \frac{31}{2}(2a + 30d)$

$= \frac{31}{2} \times 2(a + 15d)$

$= 31 \times (a + 15d)$

$= 23 \times -20$ [a + 15d = -20]

$= -620$

উত্তরঃ ধারাটির প্রথম 31টি পদের সমষ্টি -620.

১৫। 9 + 7 + 5 + … ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল -144 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ, a = 9
এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর, d = 7 – 9 = –2
∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।
আমরা জানি,
সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2\times9 + (n-1)(-2)\}$

$= \frac{n}{2}(18 - 2n + 2)$

$= \frac{n}{2} \times (20 - 2n)$

$= \frac{n}{2} \times 2 \times (10 - n)$

$= n(10 - n)$

প্রশ্নমতে,

$n(10 - n) = -144$

বা, $10n - n^2 + 144 = 0$

বা, $n^2 - 10n - 144 = 0$

বা, $n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$

বা, $n(n - 18) + 8(n - 18) = 0$

বা, $(n + 8)(n - 18) = 0$

হয়, $n + 8 = 0$ অথবা, $n - 18 = 0$

$\therefore n = -8$ $\therefore n = 18$

কিন্তু, ধারার পদ সংখ্যা কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং, n এর মান – 8 গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব, $n = 18$

উত্তরঃ n এর মান 18

১৬। 2 + 4 + 6 + 8 + ... ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

এবং ধারাটির সাধারণ অন্তর, $d = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2 \times 2 + (n-1) \times 2\}$

$= \frac{n}{2}(4 + 2n - 2)$

$= \frac{n}{2} \times (2n + 2)$

$= \frac{n}{2} \times 2 \times (n + 1)$

$= n(n + 1)$

প্রশ্নমতে,

$n(n + 1) = 2550$

বা, $n^2 + n - 2550 = 0$

বা, $n^2 + 51n - 50n - 2550 = 0$

বা, $n(n + 51) - 50(n + 51) = 0$

বা, $(n + 51)(n - 50) = 0$

হয়, $n + 51 = 0$ অথবা, $n - 50 = 0$

$\therefore n = -51$ $\therefore n = 50$

কিন্তু, ধারার পদ সংখ্যা কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং, n এর মান – 51 গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব, $n = 50$

উত্তরঃ n এর মান 50

১৭। কোনও ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি n (n+1) হলে, ধারাটি নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = n(n+1)$

সুতরাং, ধারাটির প্রথম 1 পদের সমষ্টি, $S_1 = 1\times(1+1) = 2$

ধারাটির প্রথম 2 পদের সমষ্টি, $S_2 = 2\times(2+1) = 6$

ধারাটির প্রথম 3 পদের সমষ্টি, $S_3 = 3\times(3+1) = 12$ ইত্যাদি...

∴ প্রথম পদ = $S_1 = 2$

দ্বিতীয় পদ = $S_2 - S_1 = 6 - 2 = 4$

তৃতীয় পদ = $S_3 - S_2 = 12 - 6 = 6$

অতএব, ধারাটি হলো 2 + 4 + 6 + ...

উত্তরঃ ধারাটি 2 + 4 + 6 + ...

১৮। কোনও ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি n (n+1) হলে, ধারাটির 10টি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান:

দেওয়া আছে, ধারাটির n পদের সমষ্টি, $S_n = n(n+1)$

সুতরাং, ধারাটির 10 পদের সমষ্টি, $S_{10} = 10 \times (10+1) = 10 \times 11 = 110$

উত্তরঃ ধারাটির 10টি পদের সমষ্টি 110.

১৯। একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a

ধারাটির সাধারণ অন্তর = d

দেওয়া আছে, সমান্তর ধারাটির প্রথম 12 পদের সমষ্টি, $S_{12} = 144$

এবং ধারাটির প্রথম 20 পদের সমষ্টি, $S_{20} = 560$

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

∴ সমান্তর ধারার 12 পদের সমষ্টি, $S_{12} = \frac{12}{2}\{2a + (12-1) \times d\}$

$= 6(2a + 11d)$

∴ $6(2a + 11d) = 144$

বা, $2a + 11d = 24$ ... ... (i)

∴ সমান্তর ধারার 20 পদের সমষ্টি, $S_{20} = \frac{20}{2}\{2a + (20-1) \times d\}$

$= 10(2a + 19d)$

∴ $10(2a + 19d) = 560$

বা, $2a + 19d = 56$ ... ... (ii)

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করি,

$$\begin{array}{r} 2a + 19d = 56 \\ 2a + 11d = 24 \\ (-) \quad (-) \quad (-) \\ \hline 8d = 32 \end{array}$$

বা, $d = 4$

d এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$2a + 11 \times 4 = 24$

বা, $2a + 44 = 24$

বা, $2a = 24 - 44$

বা, $2a = -20$

বা, $a = -10$

∴ সমান্তর ধারার প্রথম 6 পদের সমষ্টি, $S_6 = \frac{6}{2}\{2 \times -10 + (6-1) \times 4\}$ [মান বসিয়ে]

$= 3(-20 + 5 \times 4)$

$= 3(-20 + 20)$

$= 3 \times 0 = 0$

উত্তরঃ সমান্তর ধারাটির প্রথম 6 পদের সমষ্টি 0.

২০। কোনও সমান্তর ধারার প্রথম m পদের সমষ্টি n ও প্রথম n পদের সমষ্টি m হলে, ধারাটির প্রথম (m+n) পদের সমষ্টি কত?

সমাধান:

মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a

ধারাটির সাধারণ অন্তর = d

এখন, ধারাটির প্রথম m পদের সমষ্টি, $S_m = \frac{m}{2}\{2a + (m-1)d\}$

অতএব, $\frac{m}{2}\{2a + (m-1)d\} = n$

বা, $m\{2a + (m-1)d\} = 2n$

বা, $2am + m^2 d - md = 2n$ ... ... (i)

এবং, ধারাটির প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

অতএব, $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = m$

বা, $n\{2a + (n-1)d\} = 2m$

বা, $2an + n^2 d - nd = 2m$ ... ... (ii)

(ii) নং কে m দ্বারা এবং (i) নং কে n দ্বারা গুন করে (ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$$2amn + mn^2d - mnd = 2m^2$$
$$2amn + nm^2d - mnd = 2n^2$$
(-) (-) (+ (-)

$$mnd(n-m) = 2(m^2 - n^2)$$

বা, $d = \frac{2(m+n)(m-n)}{mn(n-m)}$

বা, $d = \frac{-2(m+n)(n-m)}{mn(n-m)}$

বা, $d = \frac{-2(m+n)}{mn}$

এখন, d এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$2am + m^2 \times \frac{-2(m+n)}{mn} - m \times \frac{-2(m+n)}{mn} = 2n$

বা, $2am - m \times \frac{2(m+n)}{n} + \frac{2(m+n)}{n} = 2n$

বা, $am - m \times \frac{(m+n)}{n} + \frac{(m+n)}{n} = n$

বা, $\frac{amn - m^2 - mn + m + n}{n} = n$

বা, $amn - m^2 - mn + m + n = n^2$

বা, $amn = n^2 + m^2 + mn - m - n$

বা, $a = \frac{m^2 + n^2 + mn - m - n}{mn}$

∴ সমান্তর ধারার প্রথম (m+n) পদের সমষ্টি,

$$S_{(m+n)} = \frac{(m+n)}{2}\{2a + (m+n-1) \times d\}$$

$$= \frac{(m+n)}{2}\{2 \times \frac{m^2 + n^2 + mn - m - n}{mn} + (m+n-1) \times \frac{-2(m+n)}{mn}\}$$

$$= \frac{(m+n)}{2}\{2 \times \frac{m^2 + n^2 + mn - m - n}{mn} + (m+n-1) \times \frac{-2(m+n)}{mn}\}$$

$$= \frac{(m+n)}{2} \times 2\{\frac{m^2 + n^2 + mn - m - n}{mn} - (m+n-1) \times \frac{(m+n)}{mn}\}$$

$= (m + n) \{ \frac{m^2 + n^2 + mn - m - n - m^2 - mn + m - mn - n^2 + n}{mn} \}$

$= (m + n) \times \frac{-mn}{mn}$

$= (m + n) \times -1$

$= -(m + n)$

উত্তরঃ ধারাটির প্রথম (m+n) পদের সমষ্টি $-(m + n)$.

২১। কোনও সমান্তর ধারার p তম, q তম ও r তম পদ যথাক্রমে a, b, c হলে, দেখাও যে, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$

সমাধান:

মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ $= x$

ধারাটির সাধারণ অন্তর $= d$

সুতরাং,

সমান্তর ধারার n তম পদ $= x + (n-1)d$

$\therefore$ সমান্তর ধারার p তম পদ $= x + (p-1)d = a$

সমান্তর ধারার q তম পদ $= x + (q-1)d = b$

সমান্তর ধারার r তম পদ $= x + (r-1)d = c$

$L.H.S = a(q-r) + b(r-p) + c(p-q)$

$= \{x + (p-1)d\}(q-r) + \{x + (q-1)d\}(r-p) + \{x + (r-1)d\}(p-q)$

$= x(q-r) + x(r-p) + x(p-q) + d(p-1)(q-r) + d(q-1)(r-p) + d(r-1)(p-q)$

$= x(q-r + r-p + p-q) + d(pq - pr - q + r + qr - pq - r + p + pr - qr - p + q)$

$= x.0 + d.0$

$= 0 = R.H.S$

$\therefore a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$ (দেখানো হলো)

২২। দেখাও যে, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 125 = 169 + 171 + 173 + \ldots + 209$

সমাধান:

$L.H.S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 125$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

ধারাটির সাধারণ অন্তর, $d = 3 - 1 = 2$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 125$

আমরা জানি,

n তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore a + (n-1)d = 125$

বা, $1 + (n-1)2 = 125$

বা, $1 + 2n - 2 = 125$

বা, $2n - 1 = 125$

বা, $2n = 125 + 1$

বা, $2n = 126$

বা, $n = 63$

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\therefore$ সমান্তর ধারার 63 পদের সমষ্টি, $S_{63} = \frac{63}{2}\{2\times1 + (63-1)\times2\}$

$= \frac{63}{2}(2 + 62\times2)$

$= \frac{63}{2}\ (2 + 124)$

$= \frac{63}{2}\ \times 126$

$= 63 \times 63 = 3969$

R.H.S $= 169 + 171 + 173 + \ldots + 209$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 169$

ধারাটির সাধারণ অন্তর, $d = 171 - 169 = 2$

∴ এটি একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 209$

আমরা জানি,

n তম পদ $= a + (n\text{-}1)d$

$\therefore a + (n\text{-}1)d = 209$

বা, $169 + (n\text{-}1)\ 2 = 209$

বা, $169 + 2n - 2 = 209$

বা, $2n + 167 = 209$

বা, $2n = 209 - 167$

বা, $2n = 42$

বা, $n = 21$

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-$

বা, 2500 $= \frac{n}{2} \times 2n$

বা, 2500 $= n^2$

বা, n $= \pm\sqrt{2500}$

বা, n $= \pm 50$

যেহেতু কিস্তির সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না তাই, $n = 50$

উত্তরঃ ঐ ব্যক্তি 50 সংখ্যক কিস্তিতে ঋণ শোধ করতে পারবেন।

২৪। কোনো সমান্তর ধারার দুইটি নির্দিষ্ট পদ l তম পদ l^2 এবং k তম পদ k^2

ক। ধারাটির প্রথম পদ a সাধারণ অন্তর d ধরে উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ তৈরি কর।

খ। $(l + k)$ তম পদ নির্ণয় কর।

গ। প্রমাণ কর ধারাটির প্রথম $(l + k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{l+k}{2}(l^2 + k^2 + l + k)$

সমাধান:

ক। এখানে, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ = a

ধারাটির সাধারণ অন্তর = d

∴ ধারাটির l তম পদ $= a + (l - 1)d$

ধারাটির k তম পদ $= a + (k - 1)d$

প্রশ্নমতে,

$a + (l - 1)d = l^2$ ... ... (i)

$a + (k - 1)d = k^2$ ... ... (ii)

খ। (i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\{a + (l - 1)d\} - \{a + (k - 1)d\} = l^2 - k^2$

বা, $a + (l - 1)d - a - (k - 1)d = l^2 - k^2$

বা, $(l - 1)d - (k - 1)d = l^2 - k^2$

বা, $d(l - 1 - k + 1) = l^2 - k^2$

বা, $d(l - k) = (l + k)(l - k)$

$\therefore d = (l + k)$

∴ ধারাটির $l + k$ তম পদ $= a + (l + k - 1)d$

$= a + (l - 1)d + kd$

$= l^2 + k(l + k)$

$= l^2 + kl + k^2$

গ। 'খ' থেকে পাই, $d = (l + k)$

d এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$a + (l - 1)(l + k) = l^2$

বা, $a + l^2 - l + lk - k = l^2$

বা, $a = l^2 - l^2 + l - lk + k$

বা, $a = l - lk + k$

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

সমান্তর ধারার $(l + k)$ পদের সমষ্টি,

$$S_{(l+k)} = \frac{(l+k)}{2}\{2 \times (l - lk + k) + (l + k - 1) \times (l + k)\}$$

$$= \frac{(l+k)}{2}(2l - 2lk + 2k + l^2 + lk - l + lk + k^2 - k)$$

$$= \frac{(l+k)}{2}(l^2 + k^2 + l + k)$$

(প্রমাণিত)

অধ্যায় ১৩ ১৩.২

সসীম ধারা
Finite Series

১। a, b, c ও d সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $b = \frac{c+d}{2}$ খ. $a = \frac{b+c}{2}$ গ. $c = \frac{b+d}{2}$ ঘ. $d = \frac{a+c}{2}$

২। $n \in N$ এর জন্য-

$$i. \sum n = \frac{n^2+n}{2}$$

$$ii. \sum n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$

$$iii. \sum n^3 = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

$$\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots\ldots\ldots$$

৩। ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?

ক. 2 খ. 4 গ. $\log 2$ ঘ. $2 \log 2$

ব্যাখ্যা: সাধারণ অন্তর $= \log 4 - \log 2$

$$= \log 2^2 - \log 2 = 2\log 2 - \log 2 = \log 2$$

৪। ধারাটির 7ম পদ কত?

ক. $\log 32$ খ. $\log 64$ গ. $\log 128$ ঘ. $\log 256$

ব্যাখ্যা: কারণ, n তম পদ $= a + (n-1)d$

যেহেতু প্রথম পদ, $a = \log 2$

সাধারণ অন্তর, $d = \log 2$

$\therefore$ 7 তম পদ $= \log 2 + (7-1).\log 2$

$$= \log 2 + 6\log 2 = 7\log 2 = \log 2^7 = \log 128$$

৫। $64 + 32 + 16 + 8 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত ধারাটি $64 + 32 + 16 + 8 + \ldots\ldots\ldots$

যার প্রথম পদ, $a = 64$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির ৪ম পদ $= 64.(\frac{1}{2})^{8-1}$

$$= 64.(\frac{1}{2})^7$$

$$= 64.\frac{1}{128} = \frac{1}{2} \quad (Ans.)$$

MCQ Answers:
১। গ
২। খ
৩। গ
৪। গ

৬। $3 + 9 + 27 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 3$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{9}{3} = 3 > 1$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি S_{14} নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $[\because r > 1]$

$\therefore\ S_{14} = \frac{3(3^{14}-1)}{3-1} = \frac{3}{2}(3^{14} - 1)\ \ (Ans.)$

৭। $128 + 64 + 32 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 128$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= \frac{1}{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore 128.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2\times128}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$

$\therefore n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1$

বা, $n = 9$

$\therefore$ ধারাটির 9 তম পদ $= \frac{1}{2}\ \ (Ans.)$

৮। একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $= a$

সাধারণ অনুপাত $= r$

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির 5ম পদ $= ar^{5-1} = ar^4$

এবং 10ম পদ $= ar^{10-1} = ar^9$

প্রশ্নমতে, $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\ \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81}\ \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) নং কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{ar^9}{ar^4} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{81}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

বা, $r^5 = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{(\sqrt{2})^4 \times \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^4 \times \sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{3})^5}$

বা, $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

এখন, (i) নং এ r এর মান বসিয়ে পাই,

$$a(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

বা, $a \times \frac{2^2}{3^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

বা, $\frac{4a}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

বা, $a = \frac{2\sqrt{3}}{4}$

বা, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (Ans.)$$

৯। $\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \sqrt{2}, \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1 \times \frac{\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $= 8\sqrt{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore ar^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}.(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$ [মান বসিয়ে]

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 16$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = (-\sqrt{2})^8$

$\therefore n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1$

বা, $n = 9$

$\therefore$ ধারাটির 9 তম পদ $= 8\sqrt{2}$ $(Ans.)$

১০। $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, $5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত।

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 5$

ধরি, সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 5r^3$

প্রশ্নমতে, $5r^3 = 135 \ldots \ldots \ldots$ (i)
বা, $r^3 = \frac{135}{5}$
বা, $r^3 = 27$
বা, $r^3 = 3^3$
বা, $r = 3$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ, $x = ar^{2-1} = ar = 5.3 = 15$
তৃতীয় পদ $y = ar^{3-1} = ar^2 = 5.3^2 = 45$

$\therefore x = 15$ এবং $y = 45$ $(Ans.)$

১১। $3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।
সমাধান: দেয়া আছে, $3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত।
প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 3$
ধরি, সাধারণ অনুপাত $= r$

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির পঞ্চম পদ $= 3.r^{5-1} = 3r^4$

প্রশ্নমতে, $3r^4 = 243$
বা, $r^4 = \frac{243}{3}$
বা, $r^4 = 81$
বা, $r^4 = (\pm 3)^4$
বা, $r = \pm 3$

যেহেতু, ধারাটি গুণোত্তর শ্রেণিভুক্ত
$\therefore$ r $= 3$ হলে, $\frac{x}{3} = 3$ বা, $x = 9$

$\frac{y}{x} = \frac{y}{9} = 3$ বা, $y = 27$

$\frac{z}{y} = \frac{z}{27} = 3$ বা, $z = 81$

আবার, r $= -3$ হলে, $\frac{x}{3} = -3$ বা, $x = -9$

$\frac{y}{x} = \frac{y}{-9} = -3$ বা, $y = 27$

$\frac{z}{y} = \frac{z}{27} = -3$ বা, $z = -81$

$\therefore x = 9, y = 27$ এবং $z = 81$

অথবা, $x = -9, y = 27$ এবং $z = -81$ $(Ans.)$

১২। $2 - 4 + 8 - 16 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$
সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-4}{2} = -2 < 1$
$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি S_7 নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because r < 1]$

$$S_7 = \frac{2\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)} = \frac{2}{3}(1+128) = \frac{2}{3} \times 129 = 86 \ (Ans.)$$

১৩। $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{1} = -1 < 1$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because r < 1]$

প্রদত্ত ধারার প্রথম $(2n + 1)$সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$= \frac{1\{1 - (-1)^{2n+1}\}}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{1-(-1)}{2}$$

[সকল $n \in N$ এর জন্য $(-1)^{2n+1} = -1$]

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1 \ (Ans.)$$

১৪। $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = \log 2$

সাধারণ অন্তর, $d = \log 4 - \log 2 = \log\frac{4}{2} = \log 2$

$\therefore$ এটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\{2 \times \log 2 + (10 - 1) \times \log 2\}$$

$$= 5 \times \{2\log 2 + 9\log 2\}$$

$$= 5 \times 11\log 2$$

$$= 55\log 2 \ (Ans.)$$

১৫। $\log 2 + \log 16 + \log 512 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

$\log 2 + \log 16 + \log 512 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির দ্বাদশ পদ পর্যন্ত

$= \log 2 + \log 2^4 + \log 2^9 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির দ্বাদশ পদ পর্যন্ত

$= \log 2 + 4\log 2 + 9\log 2 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির দ্বাদশ পদ পর্যন্ত

$= (1 + 4 + 9 + \ldots \ldots \ldots$ দ্বাদশ পদ পর্যন্ত$) \log 2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \ldots \ldots + 12^2) \times \log 2$

$= \{\frac{12(12+1)(2.12+1)}{6}\} \times \log 2$

$[\because 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \ldots \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$

$= (\frac{12 \times 13 \times 25}{6}) \times \log 2$

$= 650\log 2 \ (Ans.)$

১৬। $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{4}{2} = 2 > 1$

$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $[\because r > 1]$

$\therefore$ প্রদত্ত গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2(2^n - 1)$

প্রশ্নমতে, $2(2^n - 1) = 254$
বা, $2^n - 1 = 127$
বা, $2^n = 127 + 1$
বা, $2^n = 128$
বা, $2^n = 2^7$
$\therefore n = 7$ $(Ans.)$

১৭। $2 - 2 + 2 - 2 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
সমাধান: প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$
সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{2} = -1 < 1$
$\therefore$ এটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because r < 1]$

প্রদত্ত ধারার প্রথম $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$= \frac{2\{1 - (-1)^{2n+2}\}}{1 - (-1)}$$

$= \frac{2(1-1)}{2}$ [সকল $n \in N$ এর জন্য $(2n + 2)$ জোড়]

$$= \frac{2 \times 0}{2} = 0 \ (Ans.)$$

১৮। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।
সমাধান: দেয়া আছে, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= 441$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$

প্রশ্নমতে, $\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2 = 441$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = \sqrt{441}$

বা, $\frac{n^2+n}{2} = 21$

বা, $n^2 + n = 42$

বা, $n^2 + n - 42 = 0$

বা, $n^2 + 7n - 6n - 42 = 0$

বা, $n(n + 7) - 6(n + 7) = 0$

বা, $(n + 7)(n - 6) = 0$

হয়, $n + 7 = 0$
বা, $n = -7$

অথবা, $n - 6 = 0$
বা, $n = 6$

কিন্তু, $n = -7$ গ্রহণযোগ্য নয়; কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারেনা।
আবার, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ প্রথম 6টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S_6 = \frac{6(6+1)}{2} = 3 \times 7 = 21$

$\therefore n = 6$ এবং $S_6 = 21$ $(Ans.)$

১৯। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: দেয়া আছে, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= 225$

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$

প্রশ্নমতে, $\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2 = 225$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = \sqrt{225}$

বা, $\frac{n^2+n}{2} = 15$

বা, $n^2 + n = 30$

বা, $n^2 + n - 30 = 0$

বা, $n^2 + 6n - 5n - 30 = 0$

বা, $n(n+6) - 5(n+6) = 0$

বা, $(n+6)(n-5) = 0$

হয়, $n + 6 = 0$
বা, $n = -6$

অথবা, $n - 5 = 0$
বা, $n = 5$

কিন্তু, $n = -6$ গ্রহণযোগ্য নয়; কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারেনা।
$\therefore\ n = 5$

আবার, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore$ প্রথম 5টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S_5 = \frac{5(5+1)(2.5+1)}{6} = \frac{5\times6\times11}{6} = 55$

$\therefore\ n = 5$ এবং $S_5 = 55\quad (Ans.)$

২০। দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 10)^2$

সমাধান:

বামপক্ষ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + 10^3$

$$= \{\frac{10(10+1)}{2}\}^2$$

[আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$]

$$= \{\frac{10\times11}{2}\}^2$$

$$= (55)^2 = 3025$$

ডানপক্ষ $= (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 10)^2$

$$= \{\frac{10(10+1)}{2}\}^2$$

[আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$]

$$= \{\frac{10\times11}{2}\}^2$$

$$= (55)^2 = 3025$$

$\therefore\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 10)^2$ (দেখানো হলো)

২১। $\frac{1^3+2^3+3^3+ \ldots\ldots\ldots+n^3}{1+2+3+ \ldots\ldots\ldots+n} = 210$ হলে, n এর মান কত?

সমাধান:

দেয়া আছে, $\frac{1^3+2^3+3^3+ \ldots\ldots\ldots+n^3}{1+2+3+ \ldots\ldots\ldots+n} = 210$

বা, $\frac{\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = 210$ [সূত্র ব্যবহার করে]

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 210$

বা, $n^2 + n = 420$

বা, $n^2 + n = 420$
বা, $n^2 + n - 420 = 0$
বা, $n^2 + 21n - 20n - 420 = 0$
বা, $n(n + 21) - 20(n + 21) = 0$
বা, $(n + 21)(n - 20) = 0$

হয়, $n + 21 = 0$
বা, $n = -21$

অথবা, $n - 20 = 0$
বা, $n = 20$

কিন্তু, $n = -21$ গ্রহণযোগ্য নয়; কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারেনা।
$\therefore\ n = 20 \quad (Ans.)$

২২। 1মি. দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি লৌহ দণ্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, লৌহ দণ্ডের ক্ষুদ্রতম অংশের দৈর্ঘ্যের মান = উক্ত গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $= a$

এবং ধারাটির সাধারণ অনুপাত $= r$

এখন, ধারাটির পদসংখ্যা, $n = 10$ [দণ্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হয়]

এবং, ধারাটির যোগফল, $S =$ দণ্ডটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য 1মি.
= 1000মি.মি. [1মি. = 1000 মি.মি.]

প্রশ্নমতে, $a \times 10 = ar^{10-1}$
বা, $10a = ar^9$
বা, $r^9 = 10$
বা, $r = 10^{\frac{1}{9}} = 1.29 > 1$

তাহলে, ধারাটির সমষ্টি $S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $[\because r > 1]$

বা, $1000 = \frac{a(1.29^n-1)}{1.29-1}$

বা, $1000 = \frac{a(12.76-1)}{0.29}$

বা, $a(12.76 - 1) = 290$
বা, $11.76a = 290$

বা, $a = \frac{290}{11.76}$

বা, $a = 24.66$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান 24.66 মিলিমিটার(প্রায়) $(Ans.)$

২৩। একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির ৪র্থ পদ -2 এবং ৯ম পদ $8\sqrt{2}$
ক. উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।
খ. ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।
গ. ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
সমাধান:
ক. দেয়া আছে, ধারাটির ১ম পদ $= a$
সাধারণ অনুপাত $= r$

ধারাটির ৪র্থ পদ $= -2$
এবং ধারাটির ৯ম পদ $= 8\sqrt{2}$

$\therefore$ ধারাটির ৪র্থ পদ $= ar^{4-1}$
বা, $ar^3 = -2$

এবং ধারাটির ৯ম পদ $= ar^{9-1}$
বা, $ar^8 = 8\sqrt{2}$

খ. 'ক' থেকে পাই, $ar^8 = 8\sqrt{2}$
এবং $ar^3 = -2$

$\therefore \frac{ar^8}{ar^3} = \frac{8\sqrt{2}}{-2}$

বা, $r^5 = -4\sqrt{2}$

বা, $r^5 = (-\sqrt{2})^5$

বা, $r = -\sqrt{2}$

অতএব, $a(-\sqrt{2})^3 = -2$ [r এর মান বসিয়ে]

বা, $a = \frac{-2}{(-\sqrt{2})^3}$

বা, $a = \frac{-\sqrt{2}.\sqrt{2}}{-\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}$

বা, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

অতএব, ধারাটির 12 তম পদ $= ar^{12-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.(-\sqrt{2})^{11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\left\{(-\sqrt{2}).(\sqrt{2})^{10}\right\}$$

$$= -(\sqrt{2})^{10}$$

$$= -32$$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= -32$ $(Ans.)$

গ. 'খ' থেকে পাই, ধারাটির ১ম পদ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$
সাধারণ অনুপাত $r = -\sqrt{2}$

$\therefore$ ধারাটি $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^2 + \ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - \ldots\ldots\ldots$$

∴ ধারাটির প্রথম 7টি পদের সমষ্টি,

$$S_7 = \frac{a(1-r^7)}{1-r} \; [\because r < 1]$$

$$S_7 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{1-(-\sqrt{2})^7\}}{1-(-\sqrt{2})} = \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \times \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1+8.2-8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)}$$

$$= \frac{15-7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(15-7\sqrt{2})}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$= \frac{15\sqrt{2}-14}{2} \quad (Ans.)$

২৪। কোনও ধারার n তম পদ $2n-4$

ক. ধারাটি নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 20 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. এখানে, ধারাটির n তম পদ $= 2n-4$

$n = 1$ হলে ধারাটির ১ম পদ $= -2$

$n = 2$ হলে ধারাটির ২য় পদ $= 0$

$n = 3$ হলে ধারাটির ৩য় পদ $= 2$

$n = 4$ হলে ধারাটির ৪র্থ পদ $= 4$

… … … … … …

∴ ধারাটি $= -2+0+2+4+ \ldots\ldots\ldots + (2n-4)$

খ. ধারাটির ১ম পদ $a = -2$

সাধারণ অন্তর, $d = 0-(-2) = 2$

আমরা জানি,

r তম পদ $= a+(r-1)d$

∴ 10 তম পদ $= -2+(10-1)\times 2$

$= -2+18 = 16$

আবার, 20 টি পদের সমষ্টি,

$S_{20} = \frac{20}{2}\{2\times(-2)+(20-1)\times 2\}$

$= 10\times(-4+38)$

$= 10\times 34$

$= 340$

গ. এখানে, প্রথম পদ $a = -2$

সাধারণ অনুপাত $r = 2 > 1$

∴ নতুন ধারাটি $= -2+(-2)\times 2+(-2)\times 2^2+(-2)\times 2^3+ \ldots\ldots\ldots$

আমরা জানি, $S_8 = \frac{a(r^8-1)}{r-1}$; যখন $r > 1$

$$= \frac{(-2)(2^8-1)}{2-1}$$
$$= (-2)(2^8-1)$$
$$= (-2) \times 255$$
$$= -510 \quad (\text{Ans.})$$

২৫। দুপুর 1টা 15 মিনিটে 1 জন এসএসসি পরীক্ষার রেজাল্ট জানতে পারল। 1টা 20 মিনিটে জানল 8 জন, 1টা 25 মিনিটে জানল 27 জন। এভাবে রেজাল্ট ছড়িয়ে পড়লো।

ক. উদ্দীপকের আলোকে প্যাটার্ন দুটি লিখ।
খ. ঠিক 2:10 এ কত জন এবং 2:10 পর্যন্ত মোট কত জন রেজাল্ট জানতে পারবে?
গ. কয়টার সময় 6175225 জন রেজাল্ট জানতে পারবে?

সমাধান:

ক. প্রথম ক্ষেত্রে, প্যাটার্ন হবে 1টা 15 মি., 1টা 20 মি., 1টা 25 মি., ...
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, প্যাটার্ন হবে 1, 8, 27, ...

খ. প্রথম ক্ষেত্রে, 1টা 15 মি., 1টা 20 মি., 1টা 25 মি., ...

এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর = 1টা 20 মি. −1টা 15 মি. = 5 মি.

1টা 15 মি. থেকে 2টা 10 মি. পর্যন্ত প্যাটার্নের পদসংখ্যা = 12

এখন, রেজাল্ট জানতে পারা শিক্ষার্থীদের ধারা,
$1+8+27+ \dots \dots \dots = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad \dots \dots \dots$

ধারাটির ১ম পদ $a = 1$
ধারাটির ২য় পদ $= 8 = 2^3$
ধারাটির 12 তম পদ $= 12^3 = 1728$

∴ 2:10 মিনিটে রেজাল্ট জানতে পারবে 1728 জন

(Ans.)

আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $S_n = \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$

∴ 12টি পদের সমষ্টি $S_{12} = \{\frac{12(12+1)}{2}\}^2$

$$= (6 \times 13)^2$$
$$= (78)^2$$
$$= 6084$$

∴ 2:10 মিনিট পর্যন্ত রেজাল্ট জানতে পারবে 6084 জন (Ans.)

গ. মনে করি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি = 6175225
আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$
প্রশ্নমতে, $\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2 = 6175225$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = \sqrt{6175225}$

বা, $\frac{n^2+n}{2} = 2485$

বা, $n^2 + n = 4970$

বা, $n^2 + n - 4970 = 0$

বা, $n^2 + 71n - 70n - 4970 = 0$

বা, $n(n + 71) - 70(n + 71) = 0$

বা, $(n + 71)(n - 70) = 0$

হয়, $n + 71 = 0$
বা, $n = -71$

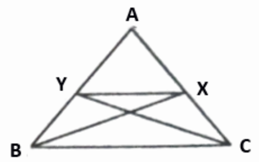
অথবা, $n - 70 = 0$
বা, $n = 70$

কিন্তু, $n = -71$ গ্রহণযোগ্য নয়; কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারেনা।
$\therefore$ ১ম প্যাটার্নের জন্য $n = 70$ তম পদের সময়ের পার্থক্য,
$= 70 \times 5$ মিনিট
$= 350$ মিনিট
$= 5$ ঘণ্টা 50 মিনিট
$\therefore$ এক্ষেত্রে 6175225 জন রেজাল্ট জানতে পারবে,
$=$ (1টা 15 মি. +5 টা 50 মিনিট)
$=$ 7 টা 05 মিনিটে $(Ans.)$

অধ্যায় ১৪ ১৪.১ অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা
Ratio, Simiraity & Symmetry

১. কোন ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY, ভূমির সমান্তরাল হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর $\angle B$-এর সমদ্বিখণ্ডক BX এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক CY যথাক্রমে AC কে X বিন্দুতে এবং AB কে Y বিন্দুতে ছেদ করে। X, Y যোগ। করি। XY || CB হলে, প্রমাণ। করতে হবে যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু, অর্থাৎ $AB = AC$.

প্রমাণ:

(১) ΔABC-এর $\angle B$-এর সমদ্বিখণ্ডক BX।

$\therefore \frac{AX}{XC} = \frac{AB}{BC}$ ... (i) [ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন

বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে]

(২) আবার, ΔABC-এর

$\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডক CY

$\therefore \frac{AY}{YB} = \frac{AC}{BC}$ .... (ii); [একই কারণে]

(৩) আবার, YX || BC

$\therefore \frac{AY}{YB} = \frac{AX}{XC}$ ... (i); [ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

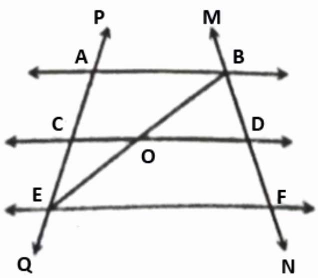
(৪) $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}$ [(i), (ii), (iii) নং সমীকরণ থেকে]

$\therefore AB = AC$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। (প্রমাণিত)

২। প্রমাণ কর যে, কতকগুলো পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখাকে দুইটি সরলরেখা ছেদ করলে, অনুরূপ অংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, AB, CD ও EF সরলরেখা তিনটি পরস্পর সমান্তরাল। PQ এবং MN সরলরেখা দুইটি AB, CD ও EF তিনটিকে যথাক্রমে A, C, E এবং B, D, F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$

অঙ্কন: B, E যোগ করি। BE, CD কে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ:

(১) ΔBEF-এ OD || EF

$\therefore \frac{BO}{OE} = \frac{BD}{DF}$ .... (i) [ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

(২) আবার, ΔABE-এ CO || AB

$\therefore \frac{BO}{OE} = \frac{AC}{CE}$ .... (ii) [একই কারণে]

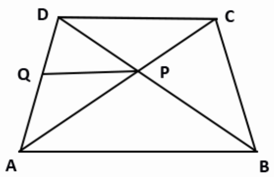
(৩) (i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই-

$\therefore \frac{BD}{DF} = \frac{AC}{CE}$

$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ (প্রমাণিত)

৩. প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় এদের ছেদবিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

সমাধান:



মনে করি, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম যার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$

অঙ্কন: PQ || AB || CD আঁকি যা AD কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔABD-এ

QP || AB [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \frac{DP}{PB} = \frac{DQ}{AQ}$ … … … (i) [ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

ধাপ ২. ΔACD- এ

QP || DC [অঙ্কনানুসারে]

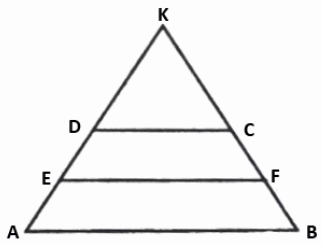
$\therefore \frac{CP}{PA} = \frac{DQ}{AQ}$ … … … (ii) [ত্রিভূজের যে কোনো দুই বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

ধাপ ৩. সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$\frac{DP}{PB} = \frac{CP}{PA}$

∴ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় এদের ছেদ বিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়। (প্রমাণিত)

৪. প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এবং এর AB > CD. AB, DC এর সমান্তরাল বাহু। AD ও BC এর দুটি তির্যক বাহু। AD এর মধ্যবিন্দু E এবং BC এর মধ্যবিন্দু F. এখন E, F যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, EF রেখা AB ও CD বাহুর সমান্তরাল।
অঙ্কন: AD এবং BC কে বর্ধিত করি যা পরস্পরকে K বিন্দুতে ছেদ করল। ফলে ΔAKB উৎপন্ন হলো।
প্রমাণ:
(১) যেহেতু E, AD এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore AD = 2DE$

আবার, F, BC-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore BC = 2CF$

এখন, ΔAKE - DC || AB

$\therefore \frac{DK}{AD} = \frac{CK}{BC}$ [ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{DK}{2DE} = \frac{CK}{2CF}$ [$AD = 2DE$, এবং, $BC = 2CF$]

বা, $\frac{DK}{DE} = \frac{CK}{CF}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

(৩) ΔKEF এ $\frac{DK}{DE} = \frac{CK}{CF}$

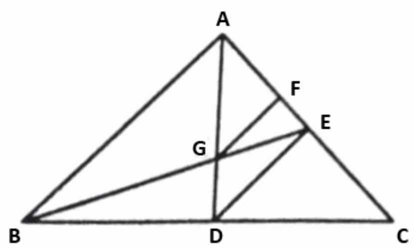
সুতরাং CD || EF .... (i) [কোনো সরলরেখা ত্রিভুজের দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে, উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে]

(৪) কিন্তু দেওয়া আছে, AB || CD ... ... (ii)

$\therefore$ AB || CD || EF [(ii) ও (iii) হতে]

অর্থাৎ EF, AB এবং CD সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

৫. ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = 6EF$.
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। D, E যোগ করি। G বিন্দু দিয়ে GF || DE আঁকি। GF, AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে যে, AC = 6EF.
প্রমাণ:

(১) ΔADE-এ GF || DE,

$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{AG}{GD}$ [$\because$ ত্রিভুজের কোনো এক বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{AF}{EF} = \frac{2}{1}$ [$\because$ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় ছেদ বিন্দুতে 2:1 অনুপাতে বিভক্ত হয় $\therefore$ AG : GD =2:1]

বা, $\frac{AF}{EF} + 1 = \frac{2}{1} + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AF + FE}{EF} = 3$

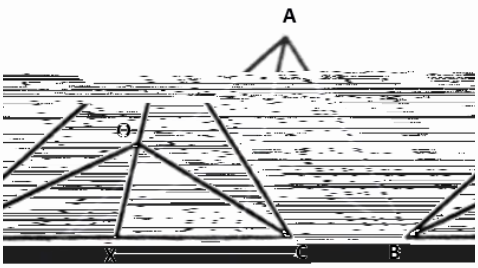
বা, AE = 3EF

(২) AE =$\frac{1}{2}$AC [$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু]

বা, BAC=3EF [ধাপ (১) হতে]

বা, $\frac{1}{2}$AC = 6EF
$\therefore$ AC = 6EF (প্রমাণিত)

৬. ΔABC-এর BC বাহুস্থ যে কোনো বিন্দু X এবং AX রেখাস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\Delta AOB : \Delta AOC = BX:XC$.
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর BC বাহুস্থ যে কোনো বিন্দু X। A, X যোগ করি। AX রেখাস্থ O একটি বিন্দু।O, B এবং O,C যোগ করি।
OBX
প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta AOB : \Delta AOC = BX:XC$
প্রমাণ:

(১) ΔOBX ও ΔOCX এর উচ্চতা সমান। [:. একই শীর্ষ বিন্দু O এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত]

$\therefore \frac{\Delta OBX}{\Delta OCX} = \frac{BX}{XC}$ ... ... (i) [দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান]

(২) ΔAOB ও AOBX এর উচ্চতা সমান। [আবার, একই শীর্ষবিন্দু B এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত]

$\therefore \frac{\Delta AOB}{\Delta OBX} = \frac{AO}{OX}$ [একই কারণে]

অনুরূপভাবে, $\frac{\Delta AOC}{\Delta OCX} = \frac{AO}{OX}$

$\therefore \frac{\Delta AOB}{\Delta OBX} = \frac{\Delta AOC}{\Delta OCX}$

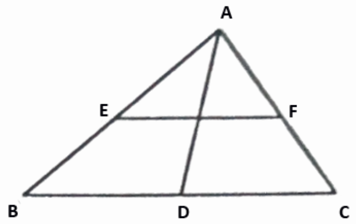
বা, $\frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \frac{\Delta OBX}{\Delta OCX} = \frac{BX}{XC}$ [সমীকরণ (i) হতে]

$\therefore \frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \frac{BX}{XC}$

অর্থাৎ $\Delta AOB : \Delta AOC = BX : XC$ (প্রমাণিত)

৭. ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখন্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BD : DC = BE : CF.

সমাধান:



বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখন্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC এর সমান্তরাল EF রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BE : CF।

প্রমাণ:

(১) ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD,

BD : DC = AB : AC .... (i) [ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তবিভক্ত করে]

(২) আবার, EF || BC,

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF}$ [ত্রিভুজের কোনো এক বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{AE}{BE} + 1 = \frac{AF}{CF} + 1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AE + BE}{BE} = \frac{AF + CF}{CF}$

বা, $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$

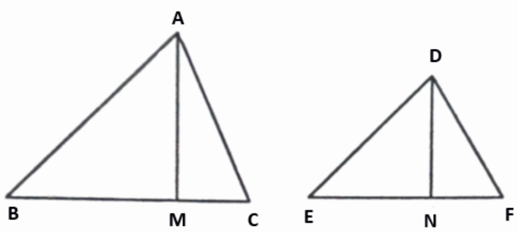
বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$

বা, AB : AC = BE : CF ... . (ii)

(৩) সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,
BD : DC = BE : CF (প্রমাণিত)

৮. ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে, প্রমাণ কর যে, AM:DN = AB:DE.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ও $ADEF$ দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ। AM ও DN যথাক্রমে তাদের উচ্চতা। প্রমাণ করতে হবে যে, $AM : DN = AB : DE$.

প্রমাণ:

(১) যেহেতু ΔABC ও $ADEF$ সদৃশকোণী

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

(২) আবার, ΔABM ও ΔDEN-এ, $\angle ABM = \angle DEN$ [কল্পনা]

$\angle AMB = \angle DNE =$ এক সমকোণ

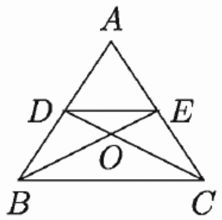
এবং $\angle BAM = \angle EDN$; [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore \Delta ABM$ ও ΔDEN সদৃশকোণী ও সদৃশ।

$\therefore \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE}$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

$\therefore AM : DN = AB : DE$ (প্রমাণিত)

৯. এখানে BC || DE



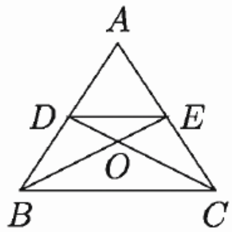
ক. প্রমাণ কর ΔBOC ও ΔDOE সদৃশ।

খ. প্রমাণ কর, $AD : BD = AE : CE$।

গ. প্রমাণ কর, $BO : OE = CO : OD$।

সমাধান:

ক.



প্রমাণ:

ΔBOC ও ΔDOE এর মধ্যে $\angle BOC = \angle DOE$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle BCO =$ একান্তর $\angle ODE$ [$\because BC \parallel DE$ এবং CD ছেদক]

এবং $\angle CBO =$ একান্তর $\angle OED$

$\therefore \Delta BOC$ ও ΔDOE সদৃশকোণী [$\because BC \parallel DE$ এবং BE ছেদক]

অতএব ΔBOC ও ΔDOE সদৃশ (প্রমাণিত)।

খ. গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪ এর উপপাদ্য-২৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা: ২৬৮

গ. আমরা জানি, দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

'ক' থেকে পাই,

ΔBOC ও ΔDOE পরস্পর সদৃশকোণী

$\therefore \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD}$

$\therefore BO : OE = CO : OD$ (প্রমাণিত)

অধ্যায় ১৪ ১৪.২ অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা
Ratio, Simiraity & Symmetry

১. ΔABC এ BC এর সমান্তরাল DE রেখা AB ও AC কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করলে—

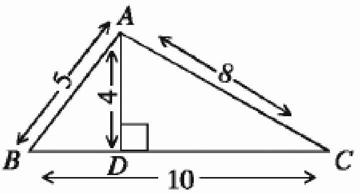
i. ΔABC ও ΔADE পরস্পর সদৃশ

ii. $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{AE}$

ii. $\frac{\Delta ABC}{\Delta ADE} = \frac{BC^2}{DE^2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii



ওপরের চিত্রের তথ্যানুসারে (২ ও ৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২. ΔABC এর উচ্চতা ও ভূমির অনুপাত কত?

ক. $\frac{1}{2}$ খ. $\frac{4}{5}$ গ. $\frac{2}{5}$ ঘ. $\frac{5}{4}$

ব্যাখ্যা: $\frac{AD}{BC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

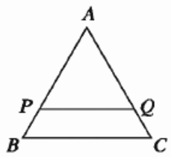
৩. ΔABD এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক. 6 খ. 20 গ. 40 ঘ. 50

ব্যাখ্যা: ΔABD এ $BD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\therefore \Delta ABD = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক

৪. ΔABC এ $PQ \parallel BC$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

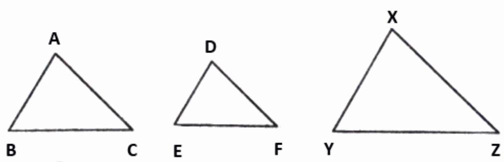


ক. AP : PB = AQ : QC খ. AB : PQ = AC : PQ

গ. AB : AC = PQ : BC ঘ. PQ : BC = BP: BQ

৫. প্রমাণ কর যে, দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি যদি তৃতীয় একটি ত্রিভুজের সদৃশ হয়, তবে তারা পরস্পর সদৃশ।

সমাধান:



MCQ Answers:
১। খ
২। গ
৩। ক
৪। ক

বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, ΔABC ও ΔDEF প্রত্যেকেই ΔXYZ এর সদৃশ। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC ও $ADEF$ পরস্পর সদৃশ।

প্রমাণ:

(১) ΔABC ও ΔXYZ পরস্পর সদৃশ।

$\therefore \angle A = \angle X, \angle B = \angle Y$ এবং $\angle C = \angle Z$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে]

(২) আবার, ΔDEF ও ΔXYZ পরস্পর সদশ।

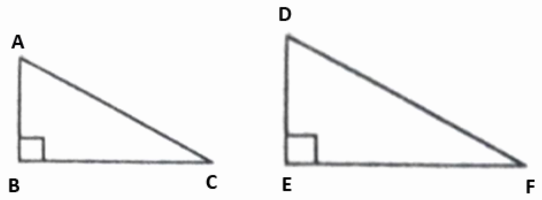
$\therefore \angle D = \angle X, \angle E = \angle Y$ এবং $\angle F = \angle Z$ [একই কারণে]

(৩) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ [ধাপ (১) ও ধাপ (২) হতে]

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔDEF পরস্পর সদৃশ। (প্রমাণিত)

৬. প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ও DEF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB = \angle DFE$, প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC ও $ADEF$ পরস্পর সদৃশ।

প্রমাণ:

(১) ΔABC ও ΔDEF-এ,

$\angle ABC = \angle DEF$ [প্রত্যেকে সমকোণ]

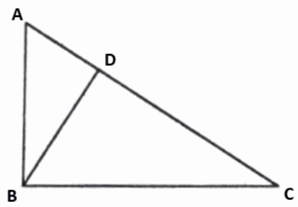
$\angle ACB = \angle DFE$ [স্বীকার]

$\therefore \angle BAC = \angle EDF$ [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore \Delta ABC$ ও $ADEF$ সদৃশ। (প্রমাণিত)

৭. প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ থেকে অতিভুজের উপর লম্ব আঁকলে যে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে AB সমকোণ। BD, অতিভুজ AC এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABD, \Delta BDC$ ও ΔABC পরস্পর সদৃশ।

প্রমাণ:

(১) ΔABC ও ΔABD-এ $\angle ABC = \angle ADB$ [প্রত্যেকে সমকোণী]

এবং $\angle A$ সাধারণ

$\therefore \angle ACB = \angle ABD$; [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔABD সদৃশকোণী ও সদৃশ।

(২) আবার, ΔABC ও ΔBDC-এ।

$\angle ABC = \angle BDC$ [প্রত্যেকে সমকোণ]

$\angle C$ সাধারণ

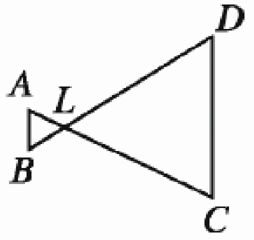
এবং ∠BAC=∠DBC [অবশিষ্ট কোণ]

∴ ΔABC ও ΔBDC সদৃশকোণী ও সদৃশ। [ধাপ (১) ও ধাপ (২) হতে]

∴ ΔABD, ΔBDC ও ΔABC-পরস্পর সদৃশ। (প্রমাণিত)

৮. পাশের চিত্রে, ∠B = ∠D এবং CD = 4AB। প্রমাণ কর যে, BD = 5BL

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, উপরোক্ত চিত্রে ∠B = ∠D এবং CD = 4AB। প্রমাণ করতে হবে যে, BD =5BL.

প্রমাণঃ

(১) ΔABL ও ΔCLD-এ

∠B = ∠D [কল্পনা]

∠ALB =∠CLD [বিপ্রতীপ কোণ]

∴ ∠A = ∠C [অবশিষ্ট কোণ]

∴ ΔABL ও ΔCDL সদৃশ

(২) অতএব, $\frac{CD}{AB} = \frac{DL}{BL}$

বা, $\frac{CD}{AB} + 1 = \frac{DL}{BL} + 1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{CD + AB}{AB} = \frac{DL + BL}{BL}$

বা, $\frac{4AB}{AB} = \frac{BD}{BL}$ [∵CD=4AB]

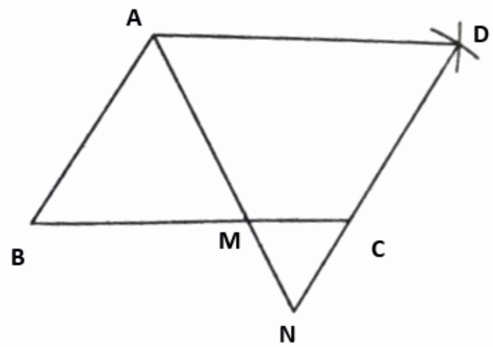
বা, $\frac{5AB}{AB} = \frac{BD}{BL}$

বা, $5 = \frac{BD}{BL}$

∴ BD = 5BL. (প্রমাণিত)

৯. ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অভিঙ্কত একটি রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC বাহুর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BM × DN একটি ধ্রুবক।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ থেকে একটি রেখাংশ BC বাহকে M বিন্দুতে এবং DC এর বর্ধিতাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BM × DN = ধ্রুবক।

প্রমাণ:

(১) ΔABM ও ΔADN-এ,

$\angle BAM = \angle AND$ [একান্তর কোণ]

$\angle ABM = \angle ADN$ [সামান্তরিকের বিপরীত কোণ]

এবং $\angle AMB = \angle DAN$ [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore \Delta ABM$ ও ΔADN সদৃশ

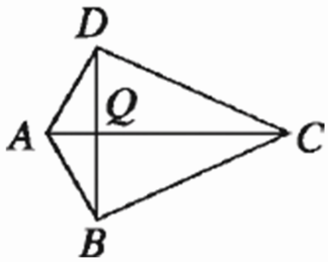
(২) অতএব, $\frac{BM}{AD} = \frac{AB}{DN}$

বা, $BM \times DN = AB \times AD$

(৩) কিন্তু AB ও AD সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু বিধায় এদের গুণফল ধ্রুবক।
$\therefore BM \times DN =$ ধ্রুবক। (প্রমাণিত)

১০. পাশের চিত্রে $BD \perp AC$ এবং $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC$. প্রমাণ কর যে, $DA \perp DC$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: চিত্রে দেওয়া আছে $BD \perp AC$ এবং $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC$. প্রমাণ করতে হবে যে, $DA \perp DC$.

প্রমাণ:

(১) ABQ ও ADQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়-এ,
$BQ = DQ$ এবং $AQ = AQ$ [সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ABQ \cong \Delta ADQ$
$\therefore AB = AD$
$\therefore \angle ABQ = \angle ADQ$

(২) আবার, $BQ = 2AQ$
বা, $\frac{AQ}{BQ} = \frac{1}{2}$ ... ... (i)
এবং $DQ = \frac{1}{2}QC$
বা, $\frac{DQ}{QC} = \frac{1}{2}$ ... ... (ii)
$\therefore \frac{AQ}{BQ} = \frac{DQ}{QC}$ [(i) ও (ii) হতে]

(৩) অতএব, $\frac{AQ}{DQ} = \frac{BQ}{QC}$ এবং $\angle AQB = \angle DQC$ [$\because BD \perp AC$]

$\therefore \Delta ABQ$ ও ΔDQC সদৃশ [দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির অপর কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ]

$\therefore \angle BAQ = \angle QDC$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলো পরস্পর সমান]

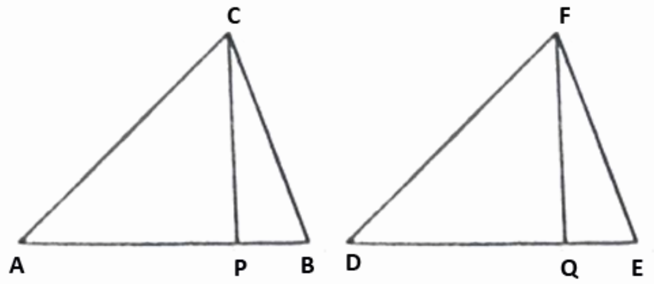
(৪) আবার, $\angle ADC = \angle ADQ + \angle QDC$

বা, $\angle ADC = \angle ABQ + \angle BAQ$ [$\angle ABQ + \angle BAQ = \angle AQB = 90°$]

$\therefore \angle ADC = 90°$
$\therefore DA \perp DC$ (প্রমাণিত)

১১. ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$। প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = AB.AC : DE.DF$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ও ΔDEF-এ $\angle A = \angle D$. প্রমাণ। করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = AB.AC : DE.DF$

অঙ্কন: $CP \perp AB$ এবং $FQ \perp DE$ আঁকি।

প্রমাণ: ΔCAP ও ΔFDQ-এ,

$\angle A = \angle D$, $\angle CPA = \angle FQD = 90°$

$\therefore \angle ACP = \angle DFQ$; [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore \Delta CAP$ ও ΔFDQ সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{CP}{FQ}$ ..... (1) [$\because$ দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরুপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

আবার, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2}AB.CP}{\frac{1}{2}DE.FQ}$

বা, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB.CP}{DE.FQ} = \frac{AB.AC}{DE.DF}$ [(1) হতে]

$\therefore \Delta ABC : \Delta DEF = AB.AC:DE.DF$. (প্রমাণিত)

১২. ΔABC-এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CT রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

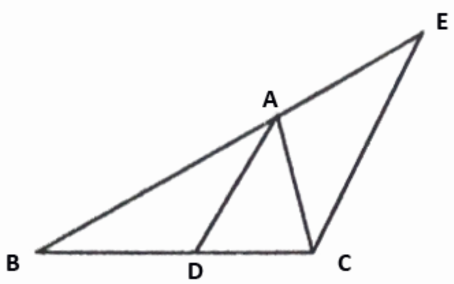
ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অজন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $BD:DC = BA:AC$

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, $BD:DC = BP:CQ$

সমাধান:

ক.



খ. 'ক' এর চিত্র থেকে,

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত DA এর সমান্তরাল রেখাংশ CE, বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD:DC = BA:AC$.

প্রমাণ:

(১) এখানে, DA || CE [অঙ্কন]

∴ $\angle BAD = \angle AEC$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle CAD = \angle ACE$ [একান্তর কোণ]

(২) কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$; [স্বীকার]

∴ $\angle AEC = \angle ACE$

∴ $AC = AE$

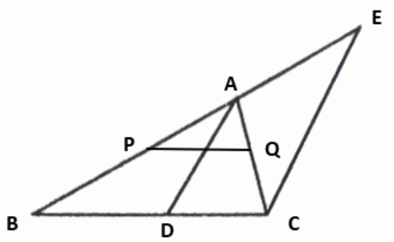
(৩) আবার যেহেতু ΔBCE-এ DA || CE

∴ $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$

∴ $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$ [: AE = AC]

∴ BD:DC = BA:AC. (প্রমাণিত)

গ.



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। C বিন্দ দিয়ে অংকিত DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA কে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC-এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BP: CQ.

প্রমাণ:

(১) ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD.

∴ $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ['খ' থেকে]

(২) আবার, PQ || BC

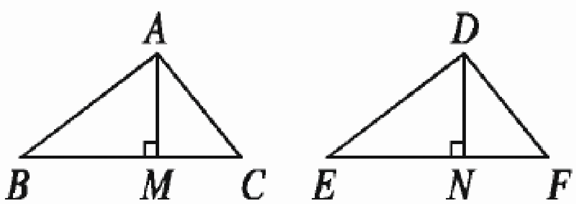
∴ $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CQ}$ [ত্রিভুজের যেকোন এক বাহুর সমান্তরাল রেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$

বা, $\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{CQ}$ [[ধাপ (১) হতে]

∴ BD : DC = BP : CQ. (প্রমাণিত)

১৩. চিত্রে ABC এবং DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।



ক. ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

খ. প্রমাণ কর যে $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

গ. যদি BC = 3 সে.মি., EF = 8 সে.মি., $\angle B = 60°$, $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ এবং $\Delta ABC = 3$ বর্গ সে.মি. হয়, তবে ΔDEF অঙ্কন কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ বাহুগুলো হলো: AB ও DE; AC ও DF এবং BC ও EF এবং অনুরূপ কোণগুলো হলো: $\angle A$ ও $\angle D$; $\angle B$ ও $\angle E$ এবং $\angle C$ ও $\angle F$.

খ.

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ। প্রমাণ করতে হবে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

অঙ্কন: $AM \perp BC$ এবং $DN \perp EF$ আঁকি।

প্রমাণ:

(১) $\Delta ABC = \frac{1}{2} BC.AM$ এবং $\Delta DEF = \frac{1}{2} EF.DN$ [ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

(২) আবার, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ,

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

(৩) $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC.AM}{\frac{1}{2} EF.DN} = \frac{BC.AM}{EF.DN}$

(৪) আবার, ΔABM ও ΔDEN-এ,

$\angle ABM = \angle DEN$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলো সমান]

এবং $\angle AMB = \angle DNE$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore \Delta ABM$ ও ΔDEN সদৃশ।

$\therefore \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

(৫) অতএব, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC}{EF} . \frac{AM}{DN}$

বা, $DE = \frac{AB \times EF}{BC}$

বা, $DE = \frac{2 \times 8}{BC}$

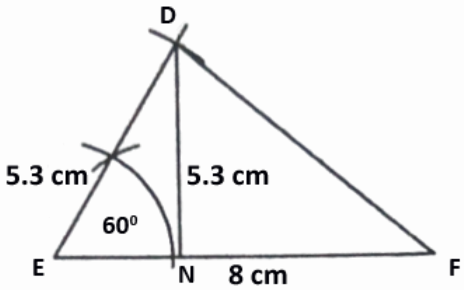
$\therefore DE = 5.3$ সে.মি. (প্রায়)

এবং $\frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF}$

বা, $DN = \frac{AM \times EF}{BC}$

বা, $DN = \frac{2 \times 8}{3}$

$\therefore DE = 5.3$ সে.মি. (প্রায়)



$\therefore \Delta DEF = \frac{1}{2} \times EF \times DN = \frac{1}{2} \times 8 \times 5.3$ বর্গ সে.মি.

$= 21.2$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

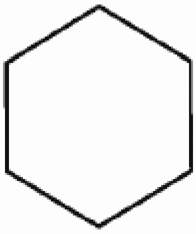
অধ্যায় ১৪ ১৪.৩ অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা
Ratio, Simiraity & Symmetry

MCQ Answers:
১। খ
২। ক
৩। খ
৪। গ

১. সমতলীয় জ্যামিতিতে-
i. ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ।
ii. চার বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ হলো রম্বস।
iii. সুষম পঞ্চভুজের বাহুগুলো সমান হলেও কোণগুলো অসমান।
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i খ. i ও ii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

২. বিষমবাহু ত্রিভুজের মোট কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?
ক. শূন্যটি খ. 1টি গ. 3টি ঘ. অসংখ্য

নিচের চিত্র হতে ৩ ও ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
বহুভুজটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে. মি.



৩. বহুভুজটির মোট কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?
ক. 3টি খ. 6টি গ. 7টি ঘ. অসংখ্য

৪. বহুভূজটির-
i. ঘূর্ণন মাত্রা 4
ii. ঘূর্ণন কোণ 60°
iii. প্রতিটি কোণ সমান
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i খ. ii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৫. নিচের চিত্রসমূহের কোনটির প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে?
(ক) বাড়ির চিত্র, (খ) মসজিদের চিত্র, (গ) মন্দিরের চিত্র, (ঘ) গীর্জার চিত্র, (ঙ) প্যাগোডার চিত্র, (চ) পার্লামেন্ট ভবনের চিত্র, (ছ) মুখোশের চিত্র, (জ) তাজমহলের চিত্র

সমাধান:

(ক) বাড়ির চিত্রে সচরাচর প্রতিসাম্য রেখা থাকে না। তবে কোনো কোনো ক্ষেত্রে থাকতে পারে। যেমন: উত্তরা গনভবন, হোয়াইট হাউস এর একটি করে প্রতিসাম্য রেখা আছে।

(খ) অধিকাংশ মসজিদের চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা আছে। যেমন: ষাট গম্বুজ মসজিদ, মুসা খাঁ মসজিদ এর একটি করে প্রতিসাম্য রেখা আছে।

(গ) অধিকাংশ মন্দিরের চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা আছে, যেমন— ঢাকেশ্বরী মন্দির ও কান্তজির মন্দির-এর একটি করে প্রতিসাম্য রেখা আছে।

(ঘ) অধিকাংশ গীর্জার চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা আছে।

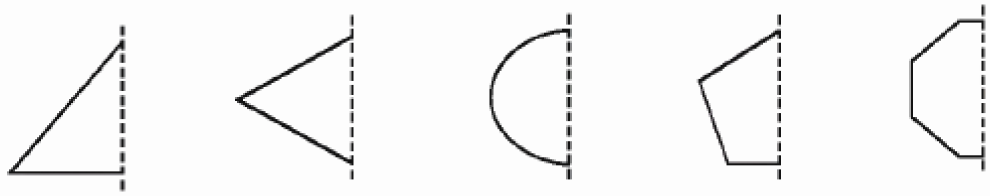
(ঙ) অধিকাংশ প্যাগোডার চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

(চ) বাংলাদেশের পার্লামেন্ট ভবনের একটি প্রতিসাম্য রেখা আছে।

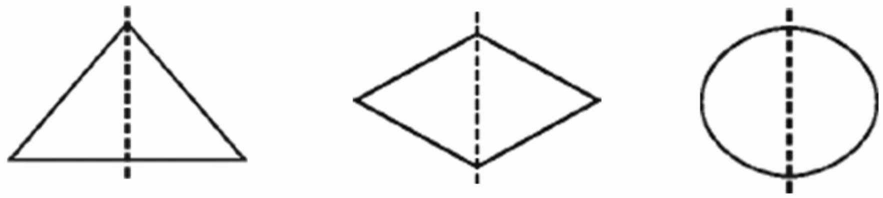
(ছ) অধিকাংশ মুখোশের চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা আছে।

(জ) তাজমহলের একটি প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

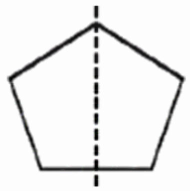
৬. প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে (ড্যাশযুক্ত রেখা), জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর এবং সনাক্ত কর।



সমাধান: প্রতিসাম্য রেখার সাপেক্ষে প্রদত্ত জ্যামিতিক চিত্রগুলো সম্পূর্ণ করে তাদের শনাক্ত করা হলো

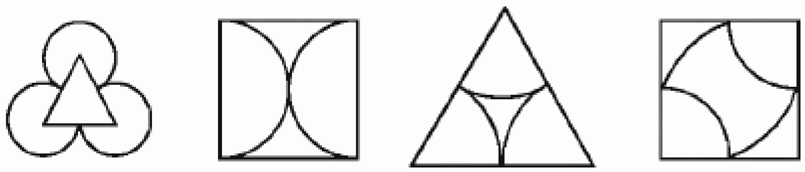


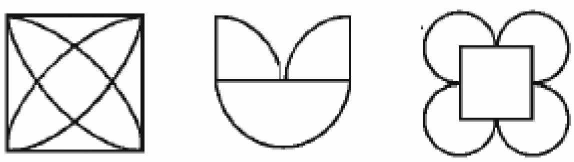
ত্রিভুজ রম্বস বৃত্ত



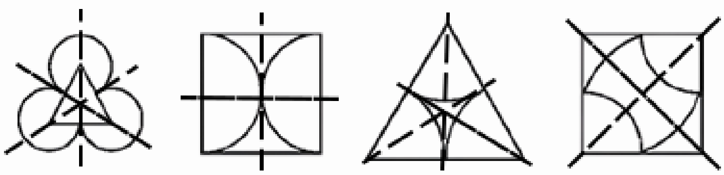
সুষমপঞ্চভুজ অষ্টভুজ

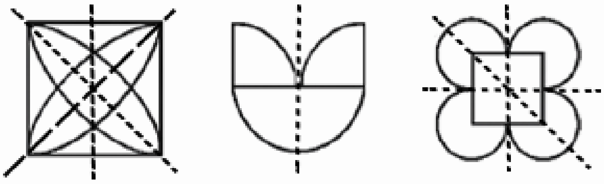
৭. নিচের জ্যামিতিক চিত্রে প্রতিসাম্য রেখা নির্দেশ কর:



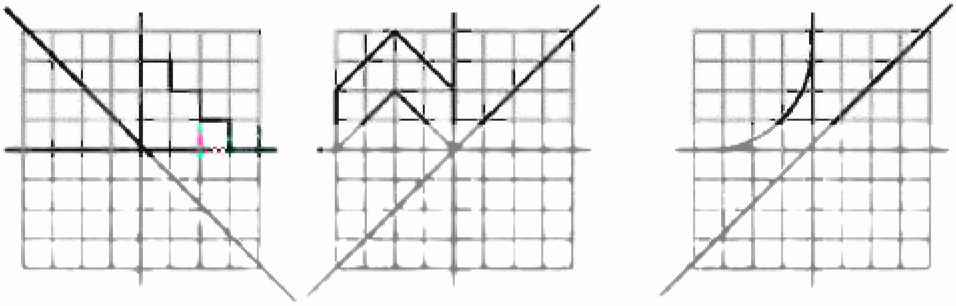


সমাধান: প্রদত্ত জ্যামিতিক চিত্রসমূহের প্রতিসাম্যরেখা ড্যাশযুক্ত রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হলো:

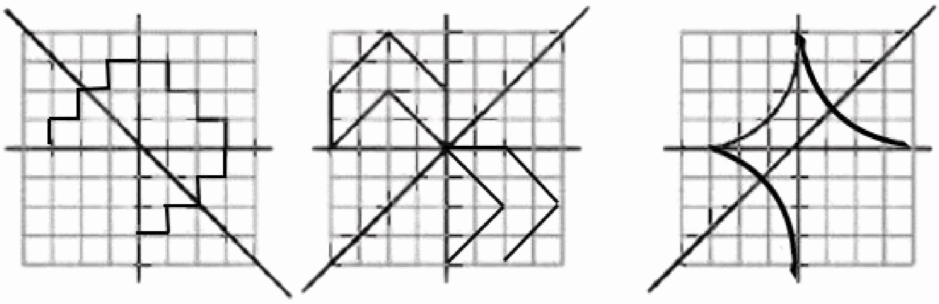




৮. নিচের অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ কর যেন আয়না রেখা সাপেক্ষে প্রতিসম হয়:



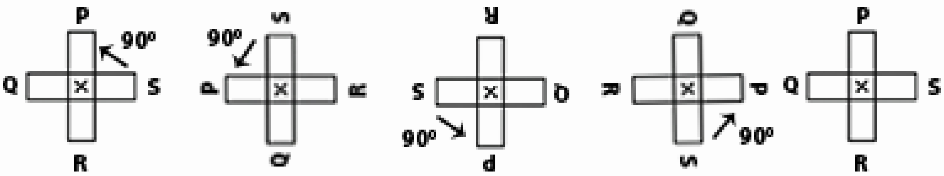
সমাধান: অসম্পূর্ণ জ্যামিতিক চিত্রসমূহ সম্পর্ণ করা হলো (ড্যাশযুক্ত রেখা) যা আয়না রেখা সাপেক্ষে প্রতিসম।



৯. নিচের চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর:

(ক) (খ) (গ) (ঘ) (ঙ) (চ)

(ক) **সমাধান:**

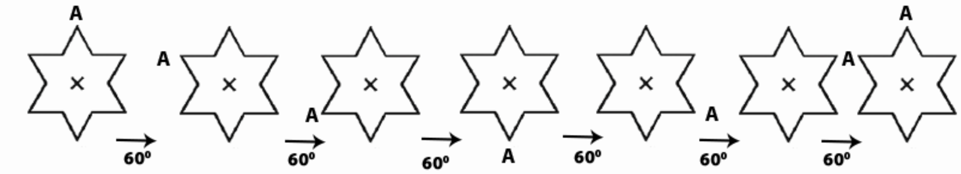


∴ ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে। ঘূর্ণন কোণ 90° এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 4.

(খ) **সমাধান:**

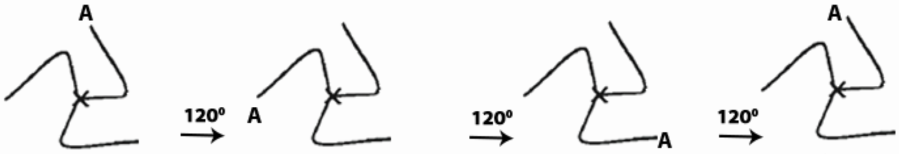
∴ ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে। ঘূর্ণন কোণ 72° এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 5

(গ) **সমাধান:**



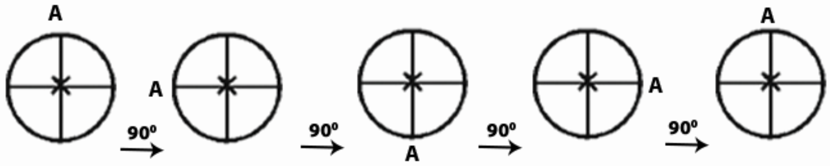
∴ ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে। ঘূর্ণন কোণ 60° এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 6

(ঘ) **সমাধান:**



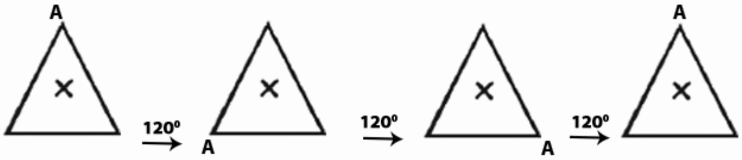
∴ ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে। ঘূর্ণন কোণ 120° এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 3

(ঙ) **সমাধান:**



∴ ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে। ঘূর্ণন কোণ 90° এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 4

(চ) **সমাধান:**



∴ ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে। ঘূর্ণন কোণ 120° এবং প্রতিসমতার মাত্রা 3

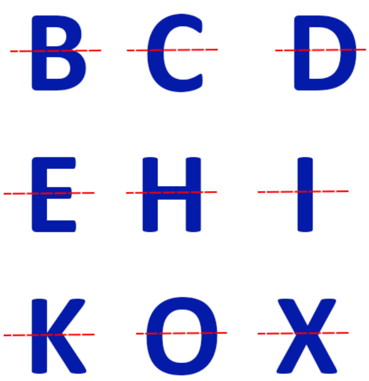
১০. ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের

(ক) অনুভূমিক আয়না

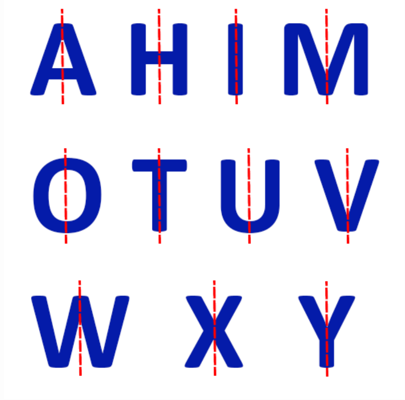
(খ) উলম্ব আয়না

(গ) অনুভূমিক ও উলম্ব উভয় আয়না সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো আঁক। **সমাধান:**

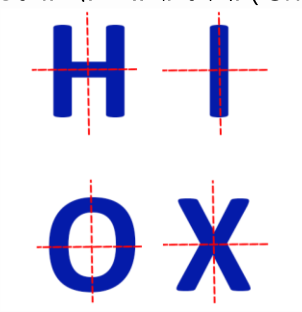
(ক) ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের অনুভূমিক আয়না সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো প্রতিসাম্য রেখাসহ (ড্যাশযুক্ত রেখা) আঁকা হলো:



(খ) ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের উলম্ব আয়না সাপেক্ষে প্রতিফল প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো প্রতিসাম্য রেখাসহ (ড্যাশযুক্ত রেখা) আকা হলো:

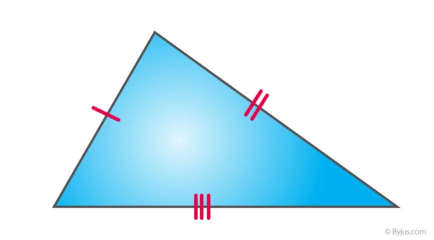


(গ) ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের অনুভূমিক ও উলম্ব উভয় আয়না সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো প্রতিসাম্য রেখা (ড্যাশযুক্ত রেখা)সহ আকা হলো:

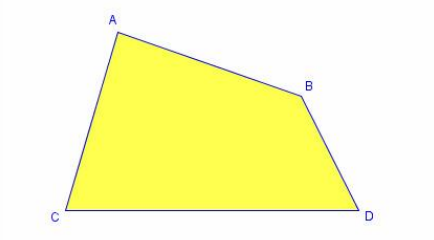


১১. প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: প্রতিসমতা নেই এমন তিনটি চিত্র নিম্নে অঙ্কন করা হলো:



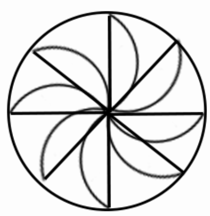
বিষমবাহু ত্রিভুজ



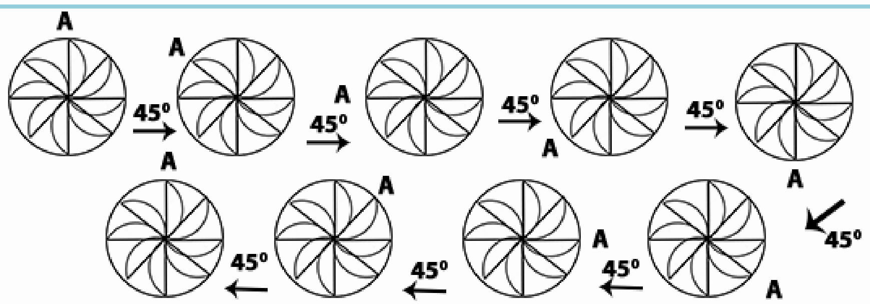
ট্রাপিজিয়াম

দেয়াল ঘড়ি (লেখাগুলোর সাপেক্ষে অপ্রতিসম)

১২. একটি লেবু আড়াআড়ি কেটে চিত্রের ন্যায় আকার পাওয়া গেল। সমতলীয় চিত্রটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় কর।



সমাধান: আড়াআড়িভাবে কেটে নেওয়া লেবুটির শুধু কাটা তলের প্রতিসমতা নির্ণয় করলেই কাঙ্খিত প্রতিসমতা নির্ণয় হবে।



∴ ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে
ঘূর্ণন কোণ 45°
ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা ৪

১৩. শূন্যস্থান পূরণ কর:

চিত্র	ঘূর্ণন কেন্দ্র	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার কোণ
বর্গ	কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু	4	90°
আয়ত	কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু	2	180°
রম্বস	কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু	2	180°
সমবাহু ত্রিভুজ	মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু	3	120°
অর্ধবৃত্ত	কেন্দ্র	1	360°
সুষম পঞ্চভুজের	কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকগুলোর ছেদবিন্দু	5	72°

১৪. যে সকল চতুর্ভুজের রেখা প্রতিসমতা ও 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে, তাদের তালিকা কর।

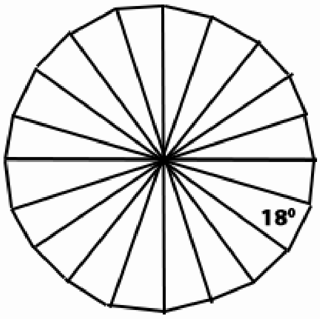
সমাধান: যে সকল চতুর্ভুজের প্রতিসমতা ও 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে তাদের তালিকা-

চতুর্ভুজ	রেখা প্রতিসমতা	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা
বর্গ	আছে	4
আয়ত	আছে	2
রম্বস	আছে	2

[বি:দ্র: সামান্তরিক এর 2 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা থাকলেও রৈখিক প্রতিসমতা নেই এবং ট্রাপিজিয়ামের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 1 এবং রৈখিক প্রতিসমতা নেই।

১৫. 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে কি? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

সমাধান: 20টি সমবাহু বিশিষ্ট বহুভুজের ঘূর্ণন মাত্রা 20 এবং এর ঘূর্ণন কোণ 18°। সুতরাং 1 এর অধিক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এরূপ চিত্রের ঘূর্ণন কোণ 18° হতে পারে।



যুক্তি: আমরা লক্ষ করেছি যে, সমবাহু ত্রিভুজের ঘূর্ণন কোণ $120° = \frac{360°}{3}$ এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 3। বর্গক্ষেত্রের ঘূর্ণন কোণ $90° = \frac{360°}{4}$ ঘূর্ণন প্রতিসমতার।
সুষম পঞ্চভুজের ঘূর্ণন কোণ $72° = \frac{360°}{5}$ এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্র $= 4$.
অনুরূপভাবে আমরা বলতে পারি যে, 20টি সুষম বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের ঘূর্ণন কোণ হবে $\frac{360°}{20} = 18°$ এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা $= 20$

অধ্যায় ১৫ ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য
Area Related Theorems & Constructions

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে: নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

ক. 3cm, 4cm, 5cm　　খ. 6cm, 8cm, 10cm

গ. 5cm, 7cm, 9cm　　ঘ. 5cm, 12cm, 13cm

ব্যাখ্যা: $5^2 + 7^2 \neq 9^2$

২. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:

i. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে

ii. দইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সবসম

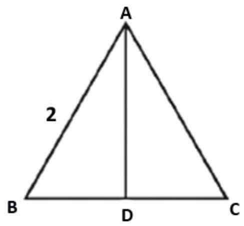
iii. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii　　খ) i ও iii　　গ) ii ও iii　　ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: ii সঠিক নয়। কারণ, দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান হলে সর্বসম নাও হতে পারে।

নিচের চিত্রে, ΔABC সমবাহু, $AD \perp BC$ এবং $AB = 2$ তথ্যের ভিত্তিতে (৩ ও ৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৩. BD = কত?

ক. 1　　খ. 2　　গ. $\sqrt{2}$　　ঘ. 4

ব্যাখ্যা: $BD = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1$

৪. ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

ক. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক　　খ. $\sqrt{3}$ একক

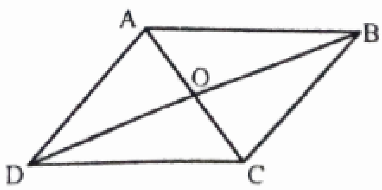
গ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক　　ঘ. $2\sqrt{3}$ বর্গ একক

ব্যাখ্যা: $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ একক

৫. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।



MCQ Answers:

১। গ

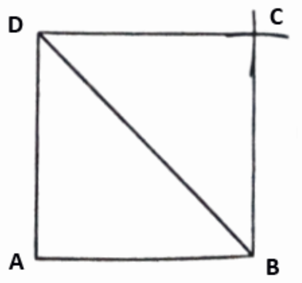
২। ক

৩। ক

৪। খ

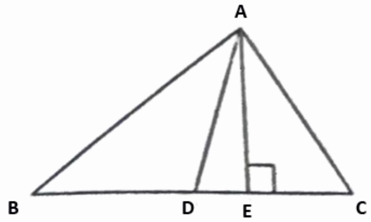
বিশেষ নির্বচন: মনে করি ABCD একটি সামান্তরিক। তার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD.
প্রমাণ:
(১) ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়। AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
সুতরাং AO = OC এবং BO = OD. [সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) ΔABC-এ AC-এর ওপর মধ্যমা BO [AO = OC]
∴ Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC....... (i) [ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে]
তদ্রূপ Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD ... ... (ii)
এবং Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD ... ... (iii)
(৩) (i) নং (ii) নং এবং (iii) নং হতে পাই,
Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD (প্রমাণিত)

৬. প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং BD তার একটি কর্ণ। ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB^2। আবার BD এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল BD^2।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2}BD^2$
প্রমাণ:
(১) ΔABC এ ∠A = 90° [বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি কোণ সমকোণ]
(২)$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$= AB^2 + AB^2$ [∵ AD = AB]
$= 2AB^2$
∴ $AB^2 = \frac{1}{2}BD^2$ (প্রমাণিত)

৭. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর মধ্যমা AD. প্রমাণ করতে হবে, Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD.
অঙ্কনঃ A থেকে BC এর উপর AE লম্ব আঁকি। তাহলে AE, ΔABC এর উচ্চতা।

প্রমাণ:

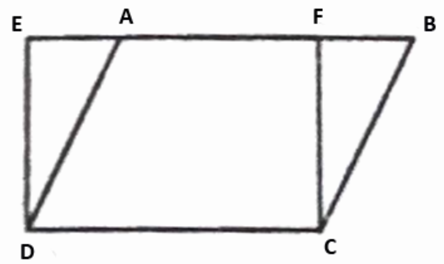
(১) $\Delta ABD = \frac{1}{2} \times BD \times AE$ ....(i) [ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

(২) $\Delta ACD = \frac{1}{2} \times CD \times AE = \frac{1}{2} \times BD \times AE$ .... (ii) [$\because CD = BD$]

(৩) Δ ক্ষেত্র ABD= Δ ক্ষেত্র ACD. (প্রমাণিত) [(i) ও (ii) নং থেকে]

৮. একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD সামান্তরিক এবং এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট CDEF আয়তক্ষেত্রটি একই ভূমি CD এর ওপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা, আয়ত CDEF-এর পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

অর্থাৎ, $AB + BC + CD + DA > CD + DE + EF + FC$

প্রমাণ:

(১) সামান্তরিক ABCD এবং এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়ত CDEE একই ভূমি CD-এর ওপর ও এর একই পাশে অবস্থিত।

$\therefore$ তারা একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ EF এবং AB একই রেখায় অবস্থিত।

(২) ΔAED-এ $\angle AED = 90°$ [আয়তক্ষেত্র CDEF-এর কোণ বলে]

$\therefore AD > DE$ [$\because$ যেকোনো সমকোণী ত্রিভুজে অতিভূজই বৃহত্তম বাহু]

(৩) ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা $= AB + BC + CD + DA$

$= CD + AD + CD + AD$ [$\because AB = CD$ এবং $BC = AD$]

$= 2(AD + CD)$

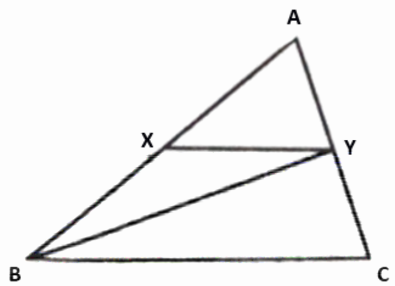
(৪) CDEF আয়তের পরিসীমা $= 2(DE + CD)$

(৫) $2(AD + CD) > 2(DE + CD)$ [$\because AD > DE$]

$\therefore$ ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা > CDEF আয়তের পরিসীমা। (দেখানো হলো)

৯. ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। প্রমাণ কর যে, Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$(Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)

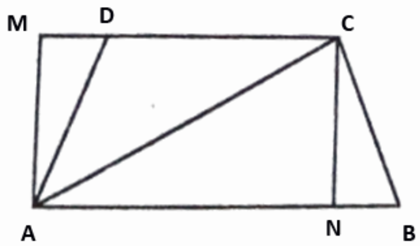
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y। X, Y যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল = (Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)। অঙ্কন: B, Y যোগ করি।

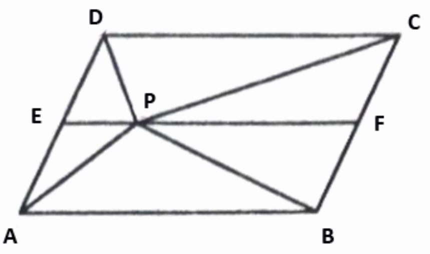
প্রমাণ:
(১) ΔABY-এ XY, AB এর ওপর মধ্যমা।
Δ-ক্ষেত্র $AXY = \frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABY) [$\because XY$ মধ্যমা Δ-ক্ষেত্র ABY কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র $ABY = 2$(Δ-ক্ষেত্র AXY)
(২) ΔABC- এ BY, AC-এর ওপর মধ্যমা।
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র $ABY = \frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC) [একই কারণে]
বা, 2(Δ-ক্ষেত্র AXY) $= \frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC) [ধাপ (১)হতে]
$\therefore$ Δ-ক্ষেত্র $AXY = \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC)$\} = \frac{1}{4}$ (Δ-ক্ষেত্র ABC)
অর্থাৎ, Δ-ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$(Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল) (প্রমাণিত)

১০. চিত্রে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহুদ্বয় সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
সমাধান: দেওয়া আছে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও DC বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র ABCD-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



ABCD ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:
অঙ্কন: C বিন্দু হতে AB এর ওপর CN লম্ব টানি। A, C যোগ করি এবং A থেকে CD এর বর্ধিতাংশের উপর AM লম্ব আঁকি।
প্রমাণ:
(১) ΔABC এর ভুমি AB এবং উচ্চতা CN
Δ-ক্ষেত্র $ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CN$ ... (i) [$\because$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]
(২) Δ ক্ষেত্র $ACD = \frac{1}{2} \times CD \times AM$ ... (ii) [$\because \Delta ACD$ এর ভূমি CD এবং উচ্চতা AM]
$= \frac{1}{2} \times CD \times CN$ [$\because AM = CN$ কেননা $AB \parallel DC$]
(৩) ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD =$ (Δ ক্ষেত্র ABC) $+$ (Δ ক্ষেত্র ACD)
$= \frac{1}{2} \times AB \times CN + \frac{1}{2} \times CD \times CN$ [(i) ও (ii) নং থেকে মান বসিয়ে]
$= \frac{1}{2}(AB + CD)\, CN$
$\therefore$ নির্ণেয় ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB + CD)\, CN$
$= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $\times$ তাদের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব।

১১. সামান্তরিক ABCD-এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, Δ-ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ-ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)
সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, সামান্তরিক ABCD-এর অভ্যন্তরে P যে কোনো একটি বিন্দু। P, A; P, B; P, C এবং P, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, Δ-ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ-ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$(সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল).

অঙ্কন: P বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল রেখা EF টানি যা AD এবং BC রেখার সাথে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রমাণ:

(১) EF || AB [অঙ্কনানুসারে]

এবং AE || BF [∵ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু AD এবং BC পরস্পর সমান্তরাল]

∴ ABFE একটি সামান্তরিক।

(২) ΔPAB এবং সামান্তরিক ABFE একই ভূমি AB এর ওপর এবং AB ও EF সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত।

∴ APAB = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABFE এর ক্ষেত্রফল) ....(i)

তদ্রুপ, ΔPCD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র CDEF এর ক্ষেত্রফল)…(ii)

(৩) (i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

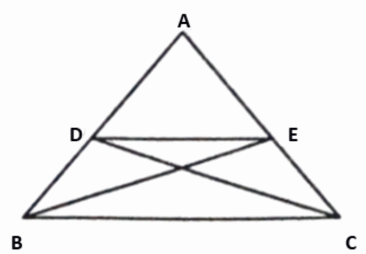
ΔPAB + ΔPCD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABFE এর ক্ষেত্রফল)+ $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র CDEF এর ক্ষেত্রফল) = $\frac{1}{2}$(সামান্তরিকক্ষেত্র ABFE এর ক্ষেত্রফল + সামান্তরিকক্ষেত্র CDEF এর ক্ষেত্রফল)

= $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)

∴ Δ-ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ-ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল) (প্রমাণিত)

১২. ΔABC-এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, Δ-ক্ষেত্র DBC=Δ-ক্ষেত্র EBC এবং Δ-ক্ষেত্র DBE =Δ-ক্ষেত্র CDE.

সমাধান:



প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

অঙ্কন: P বিন্দু থেকে AB এবং AC বাহুর ওপর যথাক্রমে PE এবং PD লম্ব টানি।

প্রমাণ:

(১) ΔABC-এর, $\angle A = 90°$

এবং $\angle B = \angle C = 45°$ [$\because AC = AB$]

এখন, ΔPDC-এর, $\angle D = 90°$ [$\because$ PD AC]

সুতরাং, $\angle DPC = \angle DCP = 45°$

$\therefore CD = PD$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, PBE সমকোণী ত্রিভুজে, $PE = BE$

(২) PDC সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায়,

$PC^2 = PD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= PD^2 + PD^2$ [$\because PD=CD$]

$\therefore PC^2 = 2PD^2$ ... ... (i)

(৩) PBE সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়,

$PB^2 = BE^2 + PE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= PE^2 + PE^2$ [$\because BE=PE$]

$\therefore PB^2 = 2PE^2$ ... ... (ii)

(৪) (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$$PC^2 + PB^2 = 2PD^2 + 2PE^2 = 2(PD^2 + PE^2)$$

আবার, ADPE একটি আয়ত [$\angle E=\angle A=\angle D=$ এক সমকোণ]

$\therefore PE=AD$ [$\because$ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore PC^2 + PB^2 = 2(PD^2 + AD^2)$ ... ... (iii)

(৫) ADP সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,

$PA^2 = PD^2 + AD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

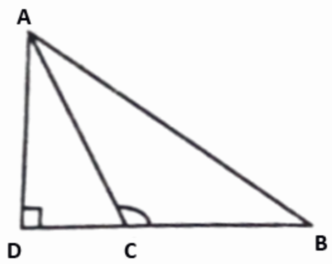
(৬) (iii) নং হতে পাই,

$$PC^2 + PB^2 = 2PA^2$$

$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ (প্রমাণিত)

১৫. ΔABC-এর $\angle C$ স্থূলকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ত্রিভুজে $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC এর বর্ধিতাংশের ওপর লম্ব অর্থাৎ $\angle ADB = 90°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

প্রমাণ:
(১) ΔACD এ $\angle ADC$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AC

সুতরাং, $AC^2 = AD^2 + CD^2 \ldots (i)$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔABD এ $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AB

সুতরাং, $AB^2 = AD^2 + BD^2 \ldots (i)$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

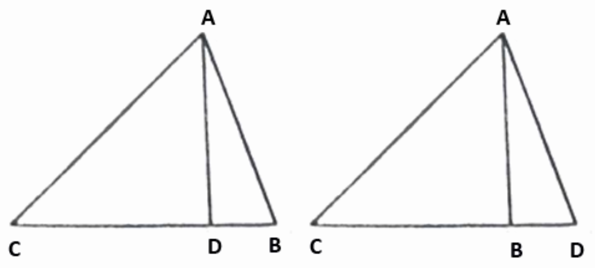
$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because BD = BC+CD$]

$= AD^2 + BC^2 + 2BC.CD + CD^2$

$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$

$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ [(i) নং থেকে]
সুতরাং, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$. (দেখানো হলো)

১৬. ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.
সমাধান:

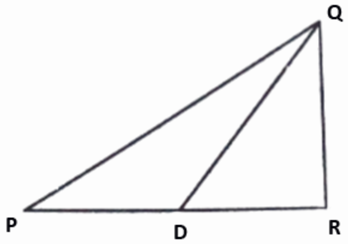


চিত্র-১ চিত্র-২

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর (বা CB এর বর্ধিতাংশের চিত্র (২)) ওপর লম্ব। অর্থাৎ $\angle ADB = \angle ADC = 90°$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.
প্রমাণ:
(১) ΔACD এ $\angle ADC$ এক সমকোণ এবং অতিভুজ AC
$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 \ldots (i)$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(২) ABD এ $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং অতিভুজ AB
$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(৩) চিত্র ১ এ,
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
$= AD^2 + (BC - CD)^2$ [$BD = BC-CD$]
$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$ [সূত্র ব্যবহার করে]
$= (AD^2 + CD^2) + BC^2 - 2BC.CD$
$= AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ [(i) নং থেকে]
চিত্র-২ এ,
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
$= AD^2 + (CD - BC)^2$ [$BD = CD-BC$]
$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC.CD$ [সূত্র ব্যবহার করে]
$= AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ [(i) নং থেকে]
সুতরাং, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$. (দেখানো হলো)

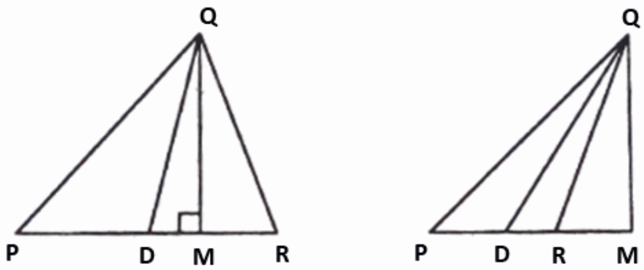
১৭. ΔPQR এ QD একটি মধ্যমা।
ক. উদ্দীপকের আলোকে আনুপাতিক চিত্র আঁক।
খ. প্রমাণ কর, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$
গ. যদি $PQ = QR = PR$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর, $4QD^2 = 3PQ^2$
সমাধান:

ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি আঁকা হলো:



দেওয়া আছে, ΔPQR এর QD একটি মধ্যমা।

খ.



দেওয়া আছে, ΔPQR এর মধ্যমা QD. প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

অঙ্কন: Q বিন্দু থেকে PR এর (বা, তার বর্ধিতাংশের চিত্র (২)) উপর QM লম্ব টানি।

প্রমাণ:

(১) ΔQDM-এ, $\angle QMD = 90°$ এবং অতিভুজ QD

$QD^2 = QM^2 + DM^2$ ..... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔQPM-এ $\angle QMP = 90°$ এবং অতিভুজ QP

$PQ^2 = QM^2 + PM^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= QM^2 + (PD + DM)^2$ [$PM = PD + DM$]

$= QM^2 + PD^2 + DM^2 + 2PD.DM$

$= (QM^2 + DM^2) + PD^2 + 2PD.DM$

$= QD^2 + PD^2 + 2PD.DM$

$PQ^2 = QD^2 + PD^2 + 2PD.DM$ ... (ii) [(i) নং হতে $QD^2 = QM^2 + DM^2$]

(৩) ΔQRM এ $\angle QMR = 90°$ এবং অতিভুজ QR.

$QR^2 = QM^2 + RM^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= QM^2 + (RD - DM)^2$

$= QM^2 + RD^2 + DM^2 - 2RD.DM$ [১নং চিত্রে $RM = RD - DM$ এবং ২নং চিত্রে $RM = DM - RD$]

$= (QM^2 + DM^2) + RD^2 - 2RD.DM$

$= QD^2 + RD^2 - 2RD.DM$

$= QD^2 + PD^2 - 2PD.DM$ [QD. PR বাহুর মধ্যমা, RD=PD]

$QR^2 = QD^2 + PD^2 - 2PD.DM$

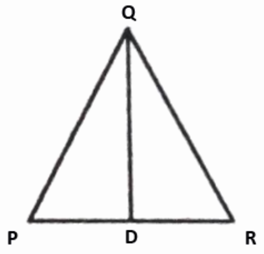
(৪) (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$PQ^2 + QR^2 = QD^2 + PD^2 + 2PD.DM + QD^2 + PD^2 - 2PD.DM$

$= 2QD^2 + 2PD^2$

$= 2(QD^2 + PD^2)$ (প্রমাণিত)

গ.



দেওয়া আছে,

$PQ = QR = PR$ অর্থাৎ ΔPQR- সমবাহু এবং QD, PR এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে $4QD^2 = 3PQ^2$

প্রমাণ:

(১) $QD \perp PR$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle QDP = \angle QDR = 90°$

(২) এখন সমকোণী ΔQPD এবং সমকোণী

ΔQRD এ অতিভুজ OP = অতিভুজ QR [$\because$ PQR সমবাহু ত্রিভুজ]

$QD = QD$ [$\because$ সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta QPD \cong \Delta QRD$

$\therefore PD = RD$

$\therefore PR = 2PD$

(৩)আবার, সমকোণী ΔQPD-এ

$\angle QDP = 90°$ এবং অতিভুজ $= PQ$

(৪) পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$PQ^2 = QD^2 + PD^2$

বা, $QD^2 = PQ^2 - PD^2$

বা, $4QD^2 = 4PQ^2 - 4PD^2$

বা, $4QD^2 = 4PQ^2 - (2PD)^2$

বা, $4QD^2 = 4PQ^2 - PR^2$ [$\because PR = 2PD$]

বা, $4QD^2 = 4PQ^2 - PQ^2$ [$\because PQ = PR$]

বা, $4QD^2 = 3PQ^2$ (প্রমাণিত)

১৮. ABCD সামান্তরিকের AB = 5 সে.মি., AD = 4 সে.মি. এবং ∠BAD= 75°। অপর একটি সামান্তরিক APML এর ∠LAP = 60°। ΔAED এর ক্ষেত্রফল ও APML সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

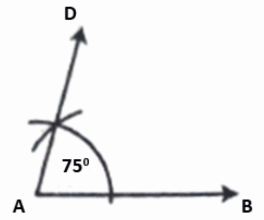
ক. পেন্সিল, কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে ∠BAD আঁক।

খ. ΔAED অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

গ. APML সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরন আবশ্যক]

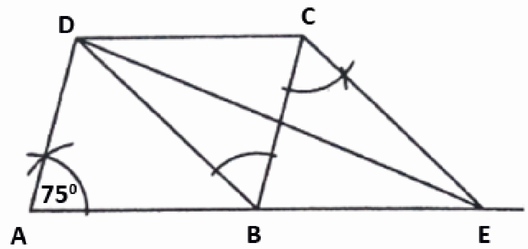
সমাধান:

ক.



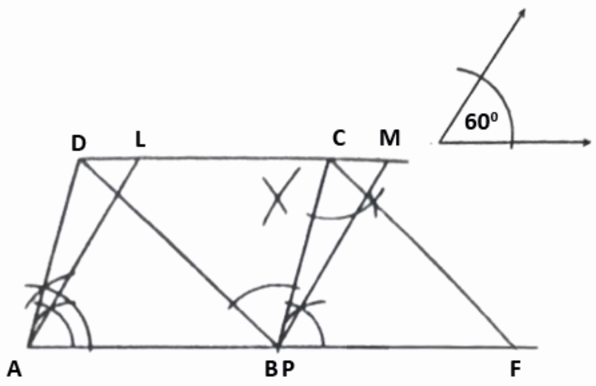
চিত্রে ∠BAD = 75° অঙ্কন করা হলো।

খ.



দেওয়া আছে, ABCD একটি সামান্তরিক যার AB = 5 সে.মি., AD = 4 সে.মি. এবং ∠BAD = 75°। এখন এমন একটি ত্রিভুজ AED আঁকতে হবে যার দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।
অঙ্কনের বিবরণ:
(১) B, D যোগ করি।
(২) C বিন্দু দিয়ে CF || BD টানি যা AB বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।
(৩) D, E যোগ করি।
তাহলে ΔAED ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ.



দেওয়া আছে, ABCD একটি সামান্তরিক যার AB = 5 সে.মি., AD = 4 সে.মি. এবং ∠BAD = 75°। এখন এমন একটি সামান্তরিক APML আঁকতে হবে যার ∠LAP = 60° এবং যার ক্ষেত্রফল ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।
অঙ্কনের বিবরণ:

(১) B, D যোগ করি।

(২) C বিন্দু দিয়ে CF || BD টানি যা AB বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) AF রেখাংশের মধ্যবিন্দু P নির্ণয় করি। যা B বিন্দুর সাথে মিলে যায় অর্থাৎ P বিন্দু B বিন্দুর উপরে সমাপতিত হয়।

(৪) AD রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle PAL = 60°$ আঁকি। ধরি AL রশ্মি CD রেখাংশকে L বিন্দুতে ছেদ করে।

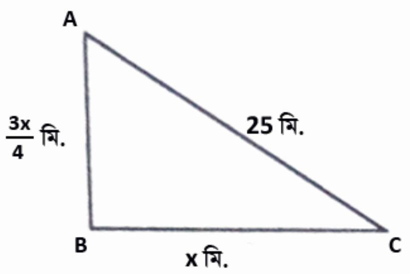
(৫) এখন, P বিন্দুতে PM || AL আঁকি যেখানে PM রশ্মি CD রেখাংশের বর্ধিতাংশকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে APML ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

অধ্যায় ১৬ ১৬.১ পরিমিতি Mensuration

১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25 মিটার। এর একটি বাহু অপরটির $\frac{3}{4}$ অংশ হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, অতিভুজ ভিন্ন একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = x মিটার

∴ অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = $\frac{3x}{4}$ মিটার

প্রশ্নমতে, $x^2 + (\frac{3x}{4})^2 = 25^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $x^2 + \frac{9x^2}{16} = 625$

বা, $\frac{16x^2+9x^2}{16} = 625$

বা, $16x^2 + 9x^2 = 625 \times 16$

বা, $25x^2 = 625 \times 16$

বা, $x^2 = \frac{625 \times 16}{25}$

বা, $x^2 = 400$

∴ x = 20

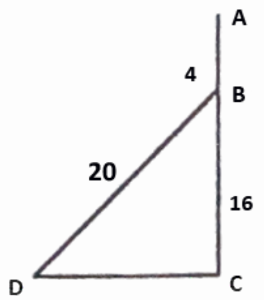
∴ একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = 20 মিটার

∴ ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = $\frac{3}{4} \times 20$ মিটার = 15 মিটার

Ans. 20 মিটার এবং 15 মিটার।

২. 20 মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের সাথে খাড়াভাবে আছে। মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে কত দূরে সরালে ওপরের প্রান্ত 4 মিটার নিচে নামবে?

সমাধান:



মনে করি, AC মইয়ের গোড়া C থেকে D বিন্দুতে সরালে ওপরের প্রান্ত A থেকে B বিন্দুতে নামবে। মইয়ের দৈর্ঘ্য = AC = BD = 20 মি. এবং AB = 4 মি.

∴ BC = AC – AB = (20−4) = 16 মিটার

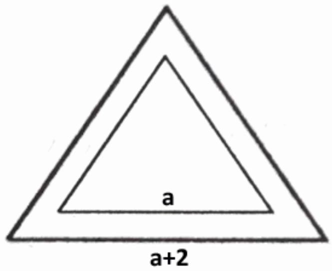
এখন, $BC^2 + CD^2 = BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $CD^2 = BD^2 - BC^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$

∴ CD = 12

$= \sqrt{107100}$ বর্গ সে.মি.
$= 327.26$ বর্গ সে.মি.
∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 327.26 বর্গ সে.মি. (প্রায়)
Ans. 327.26 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

৫. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল $6\sqrt{3}$ বর্গমিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
সমাধান:

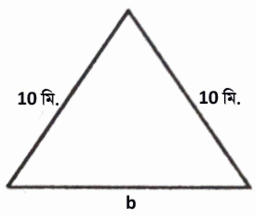


মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার।
অতএব, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ মিটার।
ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে বাহুর দৈর্ঘ্য $= (a+2)$ মিটার
∴ এক্ষেত্রে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)^2$ বর্গ মিটার
প্রশ্নানুসারে, $\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 6\sqrt{3}$
বা, $\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a+2)^2 - a^2\} = 6\sqrt{3}$
বা, $(a+2)^2 - a^2 = 24$ [উভয় পক্ষকে $\frac{\sqrt{3}}{4}$ দ্বারা ভাগ করে]
বা, $a^2 + 2.a.2 + 2^2 - a^2 = 24$
বা, $4a = 24 - 4$
বা, $4a = 20.$
বা, $a = \frac{20}{4}$
∴ $a = 5$
∴ সমবাহু ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 মিটার।
Ans. 5 মিটার।

৬. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 মিটার, 28 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 182 বর্গ মিটার হলে, বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।
সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজের বাহু দুইটি যথাক্রমে $a = 26$ মিটার এবং $b = 28$ মিটার এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $= \theta$
∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times ab\sin\theta$ বর্গ একক
$= \frac{1}{2} \times 26 \times 28 \times \sin\theta$ বর্গ মিটার
$= 364\sin\theta$ বর্গ মিটার
প্রশ্নানুসারে, $364\sin\theta = 182$
বা, $\sin\theta = \frac{182}{364}$
বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\sin\theta = \sin 30°$
বা, $\theta = 30°$
∴ বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 30°.
Ans. 30°

৭. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 48 বর্গ মিটার হলে, ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a = 10 মিটার এবং ভূমি = b মিটার।

আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ একক

প্রশ্নানুসারে, $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = 48$

বা, $\frac{b}{4}\sqrt{4 \times 10^2 - b^2} = 48$

বা, $b\sqrt{400 - b^2} = 48 \times 4$

বা, $b\sqrt{400 - b^2} = 192$

বা, $(b\sqrt{400 - b^2})^2 = (192)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $b^2\,(400 - b^2) = 36864$

বা, $400b^2 - b^4 = 36864$

বা, $400b^2 - b^4 - 36864 = 0$

বা, $b^4 - 400b^2 + 36864 = 0$

বা, $b^4 - 256b^2 - 144b^2 + 36864 = 0$

বা, $b^2(b^2 - 256) - 144(b^2 - 256) = 0$

বা, $(b^2 - 256)(b^2 - 144) = 0$

সুতরাং, $b^2 - 256 = 0$

বা, $b^2 = 256$

বা, $b = 16$

অথবা, $b^2 - 144 = 0$

বা, $b^2 = 144$

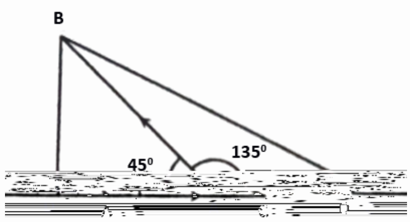
বা, $b = 12$

∴ ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 12 মিটার অথবা 16 মিটার।

Ans. 12 মিটার অথবা 16 মিটার।

৮. একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর 135° কোণ করে দুইদিকে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট খান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার ও 5 কিলোমিটার বেগে বিপরীত মুখে রওনা হলো। 4 ঘন্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দুরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, A থেকে দুইদিকে দুইটি রাস্তা 135° কোণে AB এবং AC বরাবর দুই দিকে চলে গেছে। দুইজন লোক AB এবং AC পথে যথাক্রমে 7 কি.মি./ঘণ্টা এবং 5 কি.মি./ঘন্টা বেগে বিপরীতমুখে রওনা হয়ে 4 ঘন্টা পর B ও C বিন্দুতে এসে পৌছল।

দেওয়া আছে, $\angle BAC = 135°$

$\therefore$ AB পথে লোকটির বেগ = 7 কি.মি./ঘন্টা

AB = বেগ × সময় = 7 × 4 = 28 কি.মি.

AC পথে লোকটির বেগ = 5 কি.মি./ঘন্টা

$\therefore$ AC =5 × 4 = 20 কি.মি.

4 ঘন্টা পরে লোক দুইটির মধ্যে সরাসরি দুরত্ব BC নির্ণয় করতে হবে।

B থেকে CA এর বর্ধিতাংশের ওপর BD লম্ব টানি। AB রশ্মির প্রান্তবিন্দু A তে CD রেখা মিলিত হয়েছে।

$\therefore \angle BAC + \angle BAD = 180°$ [সন্নিহিত কোণ]

বা, $135° + \angle BAD = 180°$ [$\because \angle BAC = 135°$]

$\therefore \angle BAD = 180° - 135° = 45°$

এখন, ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $\tan\angle DAB = \frac{BD}{AD}$

বা, $\tan 45° = \frac{BD}{AD}$

বা, $1 = \frac{BD}{AD}$

$\therefore AD = BD$

এবং $AD^2 + BD^2 = AB^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AD^2 + AD^2 = AB^2$ [$\because AD = BD$]

বা, $2AD^2 = AB^2$

বা, $AD^2 = \frac{AB^2}{2}$

$AD = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{AB \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{AB \times \sqrt{2}}{2} = \frac{28 \times \sqrt{2}}{2} = 14 \times \sqrt{2}$

আবার, ΔBCD-এ, অতিভুজ = BC [$\because \angle BDC = 90°$]

$\therefore BC^2 = CD^2 + BD^2$

বা, $BC^2 = (AC + AD)^2 + AD^2$ [$\because CD = AC + AD$ এবং $BD = AD$]

$\therefore BC = \sqrt{(20 + 14\sqrt{2})^2 + (14\sqrt{2})^2}$ কি.মি.

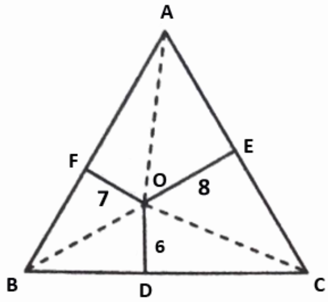
$= \sqrt{1583.96 + 392}$ কি.মি.

= 44.45 কি.মি. (প্রায়)

Ans. দূরত্ব 44.45 কি.মি. (প্রায়)।

৯. একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তর একটি বিন্দু থেকে বাহু তিনটির ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি., 7 সে.মি ও ৪ সে.মি. ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, ΔABC-এ $AB = BC = AC = a$

এর অভ্যন্তরস্থ O বিন্দু হতে $OF \perp AB$, $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ আঁকি।

সুতরাং $OD = 6$ সে.মি., $OF = 7$ সে.মি., $OE = 8$ সে.মি.

O, A; O, B এবং O, C যোগ করি।

এখন Δ-ক্ষেত্র $AOB = \frac{1}{2} \times AB \times OF = \frac{1}{2} \times a \times 7$ বর্গ সে.মি.

Δ-ক্ষেত্র $BOC = \frac{1}{2} \times BC \times OD = \frac{1}{2} \times a \times 6$ বর্গ সে.মি.

Δ-ক্ষেত্র $AOC = \frac{1}{2} \times AC \times OE = \frac{1}{2} \times a \times 8$ বর্গ সে.মি.

Δ-ক্ষেত্র $ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ সে.মি.

এখন, Δ-ক্ষেত্র ABC = Δ-ক্ষেত্র AOB+ Δ-ক্ষেত্র BOC+Δ-ক্ষেত্র AOC

বা, $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{2} \times a \times 7 + \frac{1}{2} \times a \times 6 + \frac{1}{2} \times a \times 8$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{a}{2} (7 + 6 + 8)$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} a = 7+6+8$ [উভয়পক্ষকে $\frac{2}{a}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $a = \frac{21 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{42}{\sqrt{3}} = \frac{42\sqrt{3}}{3} = 14\sqrt{3}$

$\therefore a = 24.2487$

$\therefore$ ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য 24.249 সে.মি. (প্রায়)

এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (24.249)^2$ বর্গ সে.মি. $= 254.61$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

Ans. বাহুর দৈর্ঘ্য 24.249 সে.মি. (প্রায়)এবং ক্ষেত্রফল 254.61 বর্গ সে. মি. (প্রায়)

১০. একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমির $\frac{11}{12}$ অংশ থেকে 6 সে.মি. কম এবং অতিভুজ ভূমির $\frac{4}{3}$ অংশ থেকে 3 সে.মি. কম।

ক. ভূমি x হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. ত্রিভুজটির ভূমি 12 সে.মি. হলে এর পরিসীমার সমান পরিসীমাবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে,

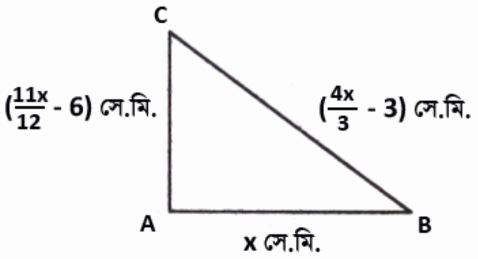
সমকোণী ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য x সে.মি.

তাহলে, ত্রিভুজটির লম্বের দৈর্ঘ্য $= (\frac{11x}{12} - 6)$ সে.মি.

এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য $= (\frac{4x}{3} - 3)$ সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ লম্ব $= \frac{1}{2} \times (\frac{11x}{12} - 6)$ ব.সে.মি.

খ. 'ক' থেকে পাই ত্রিভুজটির ভূমি x সে.মি. হলে লম্ব $(\frac{11x}{12} - 6)$ সে.মি. এবং অতিভুজ $(\frac{4x}{3} - 3)$ সে.মি.



এখন ΔABC-এ পিথাগোরাসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

বা, $(\frac{4x}{3} - 3)^2 = x^2 + (\frac{11x}{12} - 6)^2$

বা, $(\frac{4x-9}{3})^2 = x^2 + (\frac{11x-72}{12})^2$

বা, $\frac{(4x-9)^2}{9} = x^2 + \frac{(11x-72)^2}{144}$

বা, $16(4x - 9)^2 = 144x^2 + (11x - 72)^2$ [উভয় পক্ষকে 144 দ্বারা গুণ করে]

বা, $16(16x^2 - 72x + 81) = 144x^2 + 121x^2 - 1584x + 5184$

বা, $256x^2 - 1152x + 1296 = 265x^2 - 1584x + 5184$

বা, $-9x^2 + 432x - 3888 = 0$

বা, $x^2 - 48x + 432 = 0$ [উভয়পক্ষে (-9) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 - 12x --36x + 432 = 0$

বা, $x(x - 12) - 36(x - 12) = 0$

বা, $(x - 12)(x - 36) = 0$

∴ হয়, $x - 12 = 0$

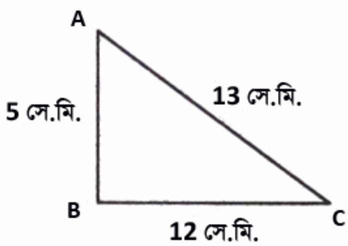
বা, $x = 12$

অথবা, $x - 36 = 0$

বা, $x = 36$

∴ ভূমির দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. বা 36 সে.মি. (Ans.)

গ.



দেওয়া আছে, ত্রিভুজটির ভূমি, BC = 12 সে.মি.

অতিভুজ, AC = $\{(12 \times \frac{4}{3}) - 3\}$ সে.মি. = (16–3) সে.মি.
AC = 13 সে.মি.
এবং ত্রিভুজটির লম্ব, AB = $\sqrt{AC^2 - BC^2}$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য হতে]
$= \sqrt{13^2 - 14^2}$
$= \sqrt{169 - 144}$
$= \sqrt{25}$
= 5 সে.মি.
ΔABC এর পরিসীমা = AB + BC + AC
= (5 + 12 + 13) সে.মি.
= 30 সে.মি.
মনে করি,
সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহু = a সে.মি.
$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = 3a সে.মি.
শর্তমতে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = ΔABC এর পরিসীমা
বা, 3a = 30
বা, a = 10 সে.মি.
$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ একক
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2$ বর্গ সে.মি.
$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 100$ বর্গ সে.মি.
$= 25\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.
= 43.301 বর্গ সে.মি.
$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 43.301 বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

অধ্যায় ১৬ | ১৬.২

পরিমিতি
Mensuration

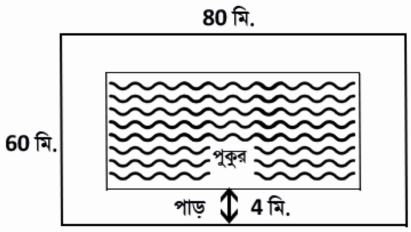
১. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। এর ক্ষেত্রফল 512 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রের বিস্তার = x মিটার
∴ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 2x মিটার
∴ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $2x \times x = 2x^2$ বর্গমিটার

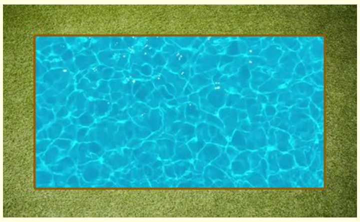
প্রশ্নানুসারে, $2x^2 = 512$
বা, $x = 256$
অতএব, আয়তক্ষেত্রের বিস্তার = 16 মিটার
এবং আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 2× 16 মিটার = 32 মিটার।
আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + বিস্তার) একক
= 2(32 + 16) মিটার = 96 মিটার
Ans. আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 96 মিটার।

২. একটি জমির দৈর্ঘ্য ৪০ মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। ঐ জমির মাঝে একটি পুকুর খনন করা হলো। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার 4 মিটার হয়, তবে পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



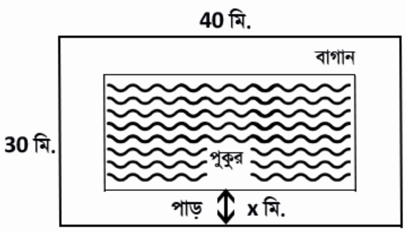

চিত্রঃ জমি


চিত্রঃ জমির মাঝে পুকুর

দেওয়া আছে, জমির দৈর্ঘ্য = 80 মিটার, প্রস্থ = 60 মিটার এবং পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার = 4 মিটার
∴ জমির ক্ষেত্রফল = (80 × 60) বর্গমিটার = 4800 বর্গমিটার
আবার, পাড় বাদে পুকুরের দৈর্ঘ্য = (80 – 2 × 4) মি. = 72 মি.
পাড় বাদে পুকুরের প্রস্থ = (60 – 2 × 4) মি. = 52 মি.
∴ পাড় বাদে পুকুরের ক্ষেত্রফল = (72 ×52) বর্গ মি, = 3744 বর্গ মি.
∴ পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল = (4800 – 3744) বর্গ মি. = 1056 বর্গ মি.
Ans. 1056 বর্গমিটার।

৩. একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে সমান পাড়বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল বাগানের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{2}$ অংশ হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান:



দেওয়া আছে, বাগানের দৈর্ঘ্য = 40 মিটার এবং প্রস্থ = 30 মিটার
∴ বাগানের ক্ষেত্রফল = (40 × 30) বর্গমিটার = 1200 বর্গমিটার।
মনে করি, পুকুর পাড়ের বিস্তার x মিটার
∴ পাড় বাদে পুকুরের দৈর্ঘ্য = (40 – 2x) মিটার
এবং পাড় বাদে পুকুরের প্রস্থ = (30 – 2x) মিটার।
∴ পাড় বাদে পুকুরের ক্ষেত্রফল = (40 – 2x) (30 – 2x) বর্গমিটার
= $(1200 - 80x - 60x + 4x^2)$ বর্গমিটার।
= $(4x^2 - 140x + 1200)$ বর্গমিটার
প্রশ্নমতে, $4x^2 - 140x + 1200 = \frac{1}{2} \times 1200$
বা, $4x^2 - 140x + 1200 - 600 = 0$
বা, $4x^2 - 140x + 600 = 0$
বা, $x^2 - 35x + 150 = 0$ [4 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $x^2 - 30x - 5x + 150 = 0$
বা, $x(x - 30) - 5(x - 30) = 0$
বা, $(x - 30)(x - 5) = 0$

∴ $x - 30 = 0$
বা, $x = 30$

অথবা, $x - 5 = 0$
বা, $x = 5$
কিন্তু, পুকুর পাড়ের বিস্তার বাগানের প্রস্থের সমান হতে পারে না। তাই, x = 30 গ্রহণযোগ্য নয়।
∴ x = 5
পুকুরের দৈর্ঘ্য = (40 – 2 × 5) মিটার = 30 মিটার
এবং পুকুরের প্রস্থ = (30 – 2 × 5) মিটার = 20 মিটার
Ans. দৈর্ঘ্য 30 মিটার, প্রস্থ 20 মিটার।

৪. একটি বর্গাকার মাঠের বাইরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 500 বর্গমিটার হলে, মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বর্গাকার মাঠের এক পার্শ্বের দৈর্ঘ্য x মিটার
∴ বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গমিটার
দেওয়া আছে, রাস্তার ক্ষেত্রফল = 500 বর্গমিটার।
অতএব, রাস্তাসহ মাঠের ক্ষেত্রফল = $(x^2 + 500)$ বর্গমিটার …….. (i)
আবার, রাস্তাসহ বর্গাকার মাঠের এক পার্শ্বের দৈর্ঘ্য = (x +2×5) মিটার = (x + 10) মিটার
∴ রাস্তাসহ বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল = $(x + 10)^2$ বর্গমিটার
= $(x^2 + 20x + 100)$ বর্গমিটার ……… (ii)
(i) ও (ii) থেকে পাই,
$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 500$
বা, $20x = 400$
বা, $x = 20$
অতএব, মাঠের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গমি. = 20^2 বর্গমি. = 400 বর্গমি.
Ans. 400 বর্গমিটার

৫. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 768 বর্গমিটার। প্রতিটি 40 সে.মি. বর্গাকার পাথর দিয়ে বর্গক্ষেত্রটি বাঁধতে মোট কতটি পাথর লাগবে।

সমাধান: দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 768 বর্গমিটার
এবং বর্গাকার পাথরের এক বাহু = 40 সে.মি. = $\frac{40}{100}$ মি. = 0.4 মি.
মনে করি, আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = x মি.
তাহলে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 3x মি.
∴ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 3x × x বর্গমিটার = $3x^2$ বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $3x^2 = 768$
বা, $x^2 = 256$
$\therefore x = 16$ মি.
এখন, আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = $2(3x + x)$ মিটার
= $2 \times 4x$ মিটার = $2 \times 4 \times 16$ মিটার = 128 মিটার
প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 128 মিটার
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য = $\frac{\text{পরিসীমা}}{4} = \frac{128}{4} = 32$ মিটার
এখন, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(32)^2$ বর্গমিটার = 1024 বর্গমিটার
বর্গাকার একটি পাথরের ক্ষেত্রফল = $(0.4)^2$ বর্গমিটার = 0.16 বর্গমিটার
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটি বাঁধাতে পাথর লাগবে = $\frac{\text{বর্গের ক্ষেত্রফল}}{\text{পাথরের ক্ষেত্রফল}} = \frac{1024}{0.16}$ টি = 6400 টি
Ans. পাথরের সংখ্যা 6400 টি।

৬. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 160 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 6 মিটার কম হয়, তবে ক্ষেত্রটি বর্গাকার হয়। আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
সমাধান: মনে করি, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মিটার
এবং আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ = y মিটার
$\therefore$ আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার
প্রশ্নানুসারে, $xy = 160$ .... (i)
আবার শর্তানুসারে, $x - 6 = y$
বা, $x = y + 6$ .... (ii)
(ii) নং সমীকরণের x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$(y + 6)y = 160$
বা, $y^2 + 6y - 160 = 0$
বা, $y^2 + 16y - 10y - 160 = 0$
বা, $y(y + 16) - 10(y + 16) = 0$
বা, $(y+ 16)(y - 10) = 0$
$\therefore y + 16 = 0$
বা, $y = -16$
অথবা, $y - 10 = 0$
$\therefore y = 10$
কিন্তু $y = -16$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ, দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না।
$y = 10$ মি.
$\therefore$ (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = 10 + 6 = 16$ মি.
অতএব, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং প্রস্থ 10 মিটার।
Ans. দৈর্ঘ্য 16 মিটার এবং প্রস্থ 10 মিটার।

৭. একটি সামান্তরিকের ভূমি উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ এবং ক্ষেত্রফল 363 বর্গ মিটার হলে, ক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতা নির্ণয় কর।
সমাধান: মনে করি, সামান্তরিকের উচ্চতা = h মি.
সামান্তরিকের ভূমি = $h \times \frac{3}{4}$ মি. = $\frac{3h}{4}$ মি.
$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $\frac{3h}{4} \times h$ বর্গমি. = $\frac{3h^2}{4}$ বর্গমি.
প্রশ্নানুসারে, $\frac{3h^2}{4} = 363$
বা, $3h^2 = 363 \times 4$
বা, $h^2 = \frac{363 \times 4}{3}$
বা, $h^2 = 121 \times 4$
বা, $h^2 = 484$
$\therefore h = 22$
$\therefore$ সামান্তরিকের উচ্চতা = 22 মি.

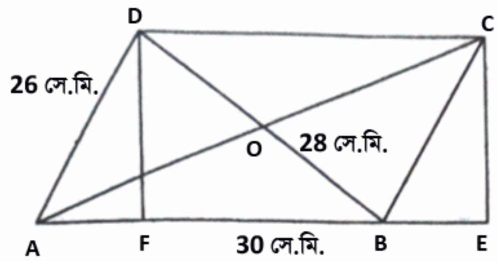
∴ সামান্তরিকের ভূমি = 3h মি. = $\frac{3 \times 22}{4}$ মি. = $\frac{66}{4}$ মি. = 16.5 মি.
Ans. সামান্তরিকের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 16.5 মি. এবং 22 মি.।

৮. একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার।
∴ সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 125 × 5 বর্গমিটার = 625 বর্গমিটার
ধরি, বর্গক্ষেত্রটির এক বাহুর দৈর্ঘ্য = a মি.
∴ ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গমিটার
প্রশ্নমতে, $a^2 = 625$
∴ a = 25
∴ বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য = a$\sqrt{2}$ মিটার = 25$\sqrt{2}$ মিটার = 35.35 মিটার।
Ans. বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 35.35 মিটার (প্রায়)

৯. একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 30 সে.মি. এবং 26 সে.মি.। এর ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 28 সে.মি. হলে, অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।
AC> BD
চিত্রে, AB = 30 সে.মি., BD = 28 সে.মি. এবং AD = 26 সে.মি.

∴ ΔABD এর অর্ধ পরিসীমা s = $\frac{30 + 28 + 26}{2}$ সে.মি.= $\frac{84}{2}$ সে.মি.= 42 সে.মি.

∴ Δ-ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল

= $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ বর্গ একক

= $\sqrt{42(42 - 30)(42 - 28)(42 - 26)}$ বর্গ সে.মি.

= $\sqrt{42 \times 12 \times 14 \times 16}$ বর্গ সে.মি.

= $\sqrt{12896}$ বর্গ সে.মি.

= 336 বর্গ সে.মি.

DF ⊥ AB এবং CE ⊥ বর্ধিত AB আঁকি।

এখন ΔADF ও ΔBCE এ ∠DAF =∠CBE [অনুরূপ কোণ]

∠AFD = ∠BEC = 1 সমকোণ

এবং AD = CB [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু]

∴ ΔADF ≅ ΔBCE

∴ DF = CE এবং AF = BE

আবার, Δ ক্ষেত্র $ABD = \frac{1}{2} \times AB \times DF$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times DF = 15DF$

$\therefore 15DF = 336$

বা, $DF = \frac{336}{15}$ সে.মি. $= 22.4$ সে.মি.

$\therefore CE = 22.4$ সে.মি.

ADF সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AD = 26$ সে.মি., লম্ব $DF = 22.4$ সে.মি.

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AD^2 = DF^2 + AF^2$

বা, $AF^2 = AD^2 - DF^2 = (26)^2 - (22.4)^2 = 676 - 501.76 = 174.24$

$\therefore AF = \sqrt{74.24}$ সে.মি. $= 13.2$ সে.মি.

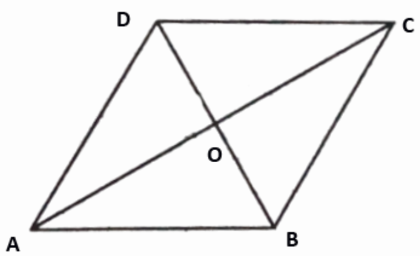
$\therefore BE = 13.2$ সে.মি.

$\therefore AE = AB + BE = (30 + 13.2)$ সে.মি. $= 43.2$ সে.মি.

সমকোণী ΔACE এ, $AC^2 = AE^2 + CE^2 = (43.2)^2 + (22.4)^2 = 1866.24 + 501.76$
$=2368$

$\therefore AC = \sqrt{2368} = 48.66$ (প্রায়)
Ans. 48.66 সে.মি. (প্রায়)

১০. একটি রম্বসের পরিসীমা 180 সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 54 সে.মি.। এর অপর কর্ণ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
সমাধান:



মনে করি, ABCD একটি রম্বস, যার দুইটি কর্ণ AC এবং BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
দেওয়া আছে, রম্বসের পরিসীমা = 180 সে.মি.
এবং একটি কর্ণ $BD = 54$ সে.মি.
রম্বসের বাহু, $AB = \frac{\text{পরিসীমা}}{4} = \frac{180}{4}$ সেমি. $= 45$ সে.মি.
আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
$\therefore OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 54$ সে. মি. $= 27$ সে. মি.
AOB সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,
$AB^2 = OA^2 + OB^2$
বা, $45^2 = OA^2 + 27^2$
বা, $OA^2 = 45^2 - 27^2$
বা, $OA^2 = 1296$
$\therefore OA = 36$
$\therefore$ রম্বসের কর্ণ $AC = 2OA$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু।
$= 2 \times 36$ সে.মি.
$= 72$ সে.মি.
এবং রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BD \times AC$

[∵ রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ রম্বসটির কর্ণদ্বয়ের গুণফল]

$= \frac{1}{2} \times 54 \times 72$ বর্গ সে.মি.

$= 1944$ বর্গ সে.মি.

Ans. অপর কর্ণ 72 সে.মি. এবং ক্ষেত্রফল 1944 বর্গ সে.মি.

১১. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের অন্তর ৪ সে.মি. তাদের লম্ব দূরত্ব 24 সে.মি.। যদি ট্রাপিজিয়াম এর ক্ষেত্রফল 312 বর্গ সে.মি. হয় তবে বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটি a ও b এবং তাদের মধ্যে লম্ব দূরত্ব h শর্তমতে, $312 = \frac{1}{2}(a + b) \times h$

বা, $312 = \frac{1}{2}(a + b) \times 24$ [∵ $h = 24$]

$\therefore a + b = 26$

প্রশ্নানুসারে, $a - b = 8$ .... (ii)

এখন, (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2a = 34 \therefore a = 17$

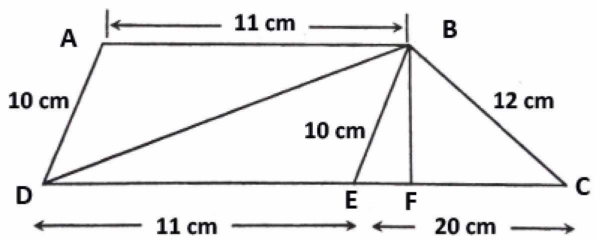
(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $2b = 18 \therefore b = 9$

∴ বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 17 সে.মি. ও 9 সে.মি.।

Ans. 17 সে.মি. ও 9 সে.মি.।

১২. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 31 সে.মি. ও 11 সেন্টিমিটার এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সে.মি. ও 12 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় যথাক্রমে AB এবং CD.

সুতরাং, AB = 11 সে.মি., CD = 31 সে.মি.

AD = 10 সে.মি. এবং BC = 12 সে.মি.

CD থেকে AB এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই এবং B, E যোগ করি। এখন AB = DE এবং AB || DE. অতএব, ABED একটি সামান্তরিক।

∴ BE = AD = 10 সে.মি.

এবং CE = CD – DE

= CD – AB [∵ AB = DE]

= (31 – 11) সে.মি.

= 20 সে.মি.

ΔBEC এর অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{BC + CE + BE}{2}$

$= \frac{12 + 20 + 10}{2}$ সে.মি. $= \frac{4}{2}$ সে.মি. $= 21$ সে.মি.

$\therefore \Delta BEC$ এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s - BC)(s - CE)(s - BE)}$

$= \sqrt{21(21 - 12)(21 - 20)(21 - 10)}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{21 \times 9 \times 1 \times 11}$ বর্গ সে.মি.

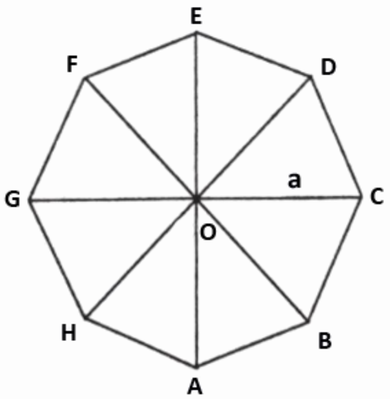
$= \sqrt{9 \times 231}$ বর্গ সে.মি.

$= 3\sqrt{231}$ বর্গ সে.মি.

B বিন্দু থেকে CD রেখার উপর BF লম্ব আঁকি।
ধরি, BF $= h$ সে.মি.
BEC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times CE \times BF$
বা, $3\sqrt{231} = \frac{1}{2} \times 20 \times h$
বা, $3\sqrt{231} = 10h$
বা, $10h = 3\sqrt{231}$
$\therefore h = \frac{3\sqrt{231}}{10}$ সে.মি.
$BF = \frac{3\sqrt{231}}{10}$ সে.মি.
$\therefore$ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB + CD) \times BF$
$= \frac{1}{2}(11+31) \times \frac{3\sqrt{231}}{10}$ বর্গ সে.মি.
$= \frac{1}{2} \times 42 \times \frac{3\sqrt{231}}{10}$ বর্গ সে.মি.
$= \frac{63\sqrt{231}}{10}$ বর্গ সে.মি.
$= 95.75$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)
Ans. 95.75 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

১৩. একটি সুষম অষ্টভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 1.5 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



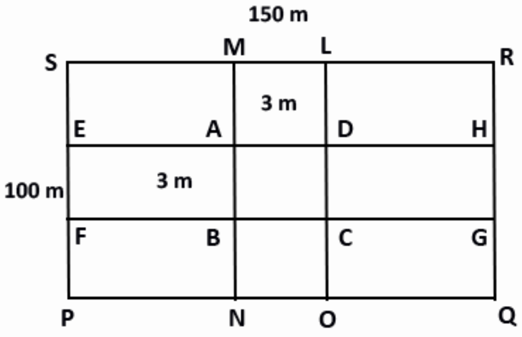
মনে করি, ABCDEFGH একটি সুষম অষ্টভুজ। এর কেন্দ্র O থেকে শীর্ষ বিন্দুগুলো যোগ করা হলো। ফলে ৪টি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ 360°।
$\therefore \angle COD = \frac{360°}{8} = 45°$
মনে করি, কেন্দ্র O থেকে শীর্ষ বিন্দুগুলোর দুরত্ব a মিটার।
$\therefore a = 1.5$ মিটার
Δ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ a.a $\sin\angle COD$
$= \frac{1}{2} a^2 \sin 45°$ বর্গমিটার
$= \frac{1}{2} \times (1.5)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ বর্গমিটার
$= \frac{2.25}{2\sqrt{2}}$ বর্গমিটার
$\therefore$ সুষম অষ্টভুজের ক্ষেত্রফল $= 8 \times \Delta$-ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল
$= 8 \times \frac{2.25}{2\sqrt{2}}$ বর্গমিটার
$= 6.36$ বর্গমিটার
Ans. 6.36 বর্গমিটার (প্রায়)

১৪. আয়তাকার একটি ফুল বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মিটার এবং প্রস্থ 100 মিটার। বাগানটিকে পরিচর্যা করার জন্য ঠিক মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর রাস্তা আছে।

ক. উপরের তথ্যটি চিত্রের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।
খ. রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
গ. রাস্তাটি পাকা করতে 25 সে.মি, দৈর্ঘ্য এবং 12.5 সে মি প্রস্থ বিশিষ্ট কয়টি ইটের প্রয়োজন হবে?

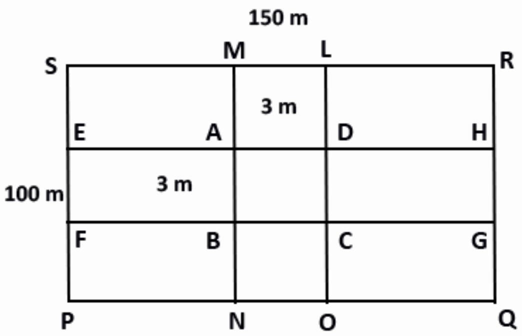
সমাধানঃ

ক.



মনে করি, PQRS একটি আয়তাকার ফুলের বাগান। যার দৈর্ঘ্য PQ = SR = 150 মিটার এবং প্রস্থ PS = QR = 100 মিটার। বাগানের মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া দৈর্ঘ্য বরাবর EFGH একটি রাস্তা আছে। আবার, বাগানের মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া প্রস্থ বরাবর LMNO একটি রাস্তা আছে।
∴ রাস্তা দুইটির সাধারণ অংশ ABCD.

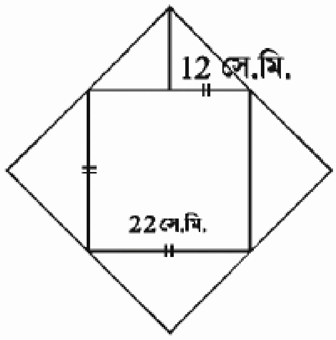
খ.



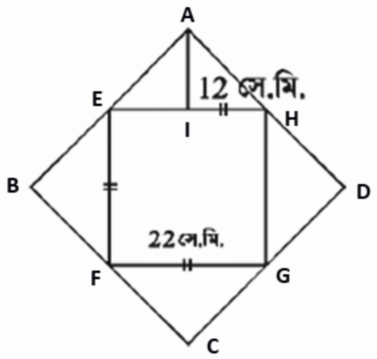
বাগানের দৈর্ঘ্য বরাবর রাস্তার ক্ষেত্রফল = 150×3 বর্গমিটার = 450 বর্গমিটার
বাগানের প্রস্থ বরাবর রাস্তার ক্ষেত্রফল = 100×3 বর্গমিটার = 300 বর্গমিটার
∴ রাস্তা দুইটির মোট ক্ষেত্রফল = (450 + 300) বর্গমিটার = 750 বর্গমিটার।
কিন্তু রাস্তা দুইটি যেখানে পরস্পর ছেদ করে সেই ABCD সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল = 3 মিটার × 3 মিটার = 9 বর্গমিটার
রাস্তার মোট ক্ষেত্রফলের সাথে এই সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল দুইবার ধরা হয়েছে।
∴ রাস্তার ক্ষেত্রফল = (750 – 9) বর্গমিটার = 741 বর্গমিটার (Ans.)

গ. 'খ' হতে পাই,
রাস্তার ক্ষেত্রফল = 741 বর্গমিটার
দেওয়া আছে, ইটের দৈর্ঘ্য = 25 সে.মি. = 0.25 মিটার [∵ 1 মিটার = 100 সে.মি.]
ইটের প্রস্থ = 12.5 সে.মি. = 0.125 মিটার [∵ 1 মিটার = 100 সে.মি.]
∴ একটি ইটের ক্ষেত্রফল = (025 × 0.125) বর্গমিটার = 0.03125 বর্গমিটার
∴ ইটের প্রয়োজন = (741 ÷ 0.03125) টি = 23,712 টি (Ans.)

১৫. বহুভুজ চিত্রে তথ্য অনুসারে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রদত্ত চিত্রটিকে অক্ষর প্রতীক দ্বারা নিম্নে চিহ্নিত করা হলো।



চিত্রানুযায়ী,

$EF = FG = GH = EH = 22$ সে.মি.

এবং $AI = 12$ সে.মি.

$\therefore$ ΔAEH এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 22 \times 12$ বর্গ সে.মি. $= 132$ বর্গ সে.মি.

এবং বর্গক্ষেত্র EFGH এর ক্ষেত্রফল $= 22^2$ বর্গ সে.মি. $= 484$ বর্গ সে.মি.

যেহেতু ABCD বর্গক্ষেত্রের মধ্যে চারটি ΔAEH ক্ষেত্রের সমান ত্রিভূজ এবং EFGH বর্গক্ষেত্র রয়েছে।

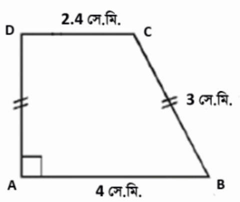
$\therefore$ ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \Delta AEH$ এর ক্ষেত্রফল $+$ EFGH বর্গের ক্ষেত্রফল

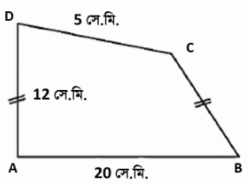
$= 4 \times 132$ বর্গ সে.মি. $+ 484$ বর্গ সে.মি.

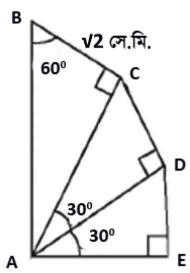
$= (528 + 484)$ বর্গ সে.মি.

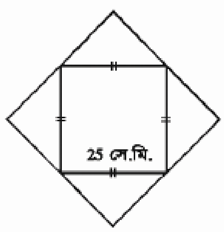
$= 1012$ বর্গ সে.মি. (Ans.)

১৬. নিচের চিত্রের তথ্য থেকে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



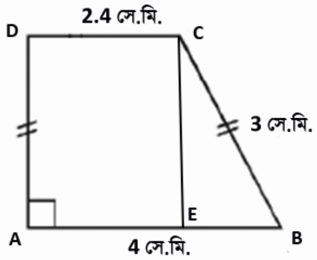






সমাধান:

প্রথম চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

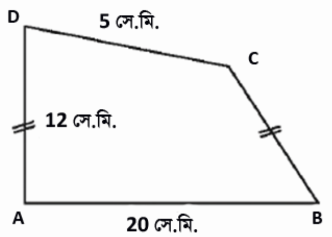


চিত্রে দেওয়া আছে, CD = 2.4 সে.মি. BC = 3 সে.মি. AB = 4 সে.মি.
এখন, C হতে AB এর উপর CE লম্ব টানি।
যেহেতু $\angle DAB$ = এক সমকোণ।
সুতরাং AD = CE.
আবার, চিত্র হতে দেখা যায় CD || AB
$\therefore$ CD = AE = 2.4 সে.মি.
$\therefore$ AB = AE + BE
বা, BE = AB – AE = (4 – 2.4) সে.মি. = 1.6 সে.মি.

সমকোণী ΔBCE হতে,
$BC^2 = BE^2 + CE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য হতে]
বা, $(3)^2 = (1.6)^2 + CE^2$
বা, $9 = 2.56 + CE^2$
বা, $CE^2 = 9 - 2.56$
বা, $CE^2 = 6.44$
বা, $CE = \sqrt{6.44}$
$\therefore$ CE = 2.54
$\therefore$ AD = CE = 2.54 সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ ট্রাপিজিয়াম ABCD এর ক্ষেত্রফল
$= \frac{1}{2} \times$ CE (AB + CD) বর্গ একক
$= \frac{1}{2} \times 2.54\ (4 + 2.4)$ বর্গ সে.মি.
$= \frac{1}{2} \times 2.54 \times 6.4$ বর্গ সে.মি.
= 8.128 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

দ্বিতীয় চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

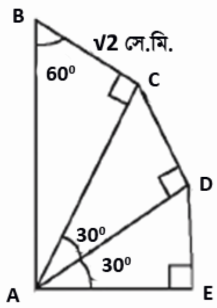


চিত্রানুযায়ী পাই, ABCD ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় AB = 20 সে.মি., DC = 5 সে.মি. এবং সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব AD = 12 সে.মি.

$\therefore$ ABCD ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (AB+ DC) $\times$ AD
$= \frac{1}{2} \times (20 + 5) \times 12$ বর্গ সে.মি. $= 6 \times 25$ বর্গ সে.মি.
= 150 বর্গ সে.মি. (Ans.)

বি:দ্র: পাঠ্যবইয়ে প্রদত্ত চিত্রটি অসম্পূর্ণ। তাই উক্ত চিত্র ট্রাপিজিয়াম ধরে সমাধান করা হয়েছে।

তৃতীয় চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়: ৩য় চিত্রটিকে A, B, C, D ও F দ্বারা নিম্নোক্তভাবে চিহ্নিত করি।



$\angle ABC = 60°$

ΔABC-এ $\tan\angle ABC = \frac{AC}{BC}$

বা, $\tan 60° = \frac{AC}{\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{AC}{\sqrt{2}}$

বা, $AC = \sqrt{6}$ cm

আবার, ΔADC-এ

$\sin\angle CAD = \frac{CD}{AC}$

বা, $\sin 30° = \frac{CD}{\sqrt{6}}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{CD}{\sqrt{6}}$

বা, $CD = \frac{\sqrt{6}}{2}$ cm

ও $\cos\angle CAD = \frac{AD}{AC}$

বা, $\cos 30° = \frac{AD}{\sqrt{6}}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{\sqrt{6}}$

বা, $AD = \frac{\sqrt{18}}{2}$ cm $= \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

আবার, ΔADE-এ $\sin\angle DAE = \frac{DE}{AD}$

বা, $\sin 30° = \frac{DE}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{DE}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{2DE}{3\sqrt{2}}$

বা, $DE = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ cm

ও $\cos\angle DAE = \frac{AE}{AD}$

বা, $\cos 30° = \frac{AE}{AD}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AE}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2AE}{3\sqrt{2}}$

বা, $AE = \frac{3\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

ABCDE- ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র ABC $+ \Delta$ ক্ষেত্র ADC $+ \Delta$ ক্ষেত্র ADE

$= \frac{1}{2} \times AC \times BC + \frac{1}{2} \times AD \times CD + \frac{1}{2} \times AE \times DE$

$= \frac{1}{2} (\sqrt{6} \times \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{4} \times \frac{3\sqrt{2}}{4})$

$= \frac{1}{2} (\sqrt{12} + \frac{3\sqrt{12}}{4} + \frac{9\sqrt{12}}{16})$

$= \frac{1}{2} \sqrt{12} \, (1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16})$

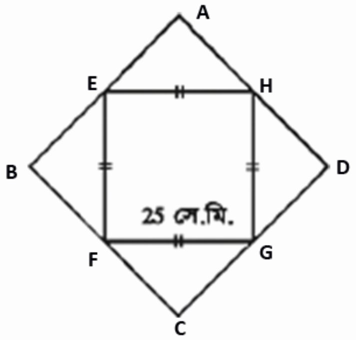
$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{37}{16}$

$= \frac{37\sqrt{3}}{16}$ বর্গ সে.মি.

$= 4.005 \approx 4$ বর্গ সে.মি. (Ans.)

চতুর্থ চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

৪র্থ চিত্রটিকে A, B, C, D, E, F, G ও H দ্বারা নিম্নোক্তভাবে চিহ্নিত করি:



প্রদত্ত চিত্রে, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

AB, BC, CD ও AD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G ও H

সুতরাং, উৎপন্ন EFGH একটি বর্গক্ষেত্র।

$\therefore EF = FG = GH = HE = 25$ সে.মি.

F, H যোগ করি। তাহলে সমকোণী ত্রিভুজ FGH হতে,

$FH^2 = FG^2 + GH^2 = (25)^2 + (25)^2$

$= 625 + 625 = 1250$

বা, $FH^2 = (625 \times 2)$

$\therefore FH = 25\sqrt{2}$

যেহেতু, BC ও AD এর মধ্যবিন্দু F ও H এবং AB || FH

সুতরাং, $AB = FH = 25\sqrt{2}$

$\therefore$ ABCD এর ক্ষেত্রফল $= (25\sqrt{2})^2$ বর্গ সে.মি.

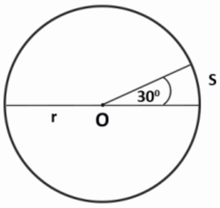
$= 625 \times 2$ বর্গ সে.মি. $= 1250$ বর্গ সে.মি. (Ans.)

অধ্যায় ১৬ ১৬.৩

পরিমিতি
Mensuration

১. একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে, চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



এখানে, ব্যাসার্ধ r $= \frac{126}{2}$ সে.মি. $= 63$ সে.মি.

বৃওচাপের দৈর্ঘ্য s হলে,

আমরা জানি, $s = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

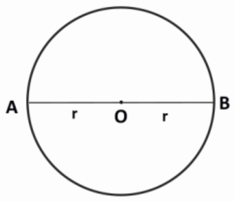
$= \frac{30}{360} \times 2 \times 3.1416 \times 63$ সে. মি. $= 32.987$ সে. মি.

∴ চাপের দৈর্ঘ্য $= 32.987$ সে. মি. (প্রায়)

Ans. 32.987 সে.মি. (প্রায়)

২. প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোনো বৃত্তাকার মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ r মিটার

∴ ব্যাস AB $= 2r$ মি.

ঘোড়াটি 1 মিনিটে যায় 66 মিটার

∴ ঘোড়াটি $1\frac{1}{2}$ বা, $\frac{3}{2}$ মিনিটে যায় $(66 \times \frac{3}{2})$ মিটার

$= 99$ মিটার

ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

শর্তমতে, $2\pi r = 99$

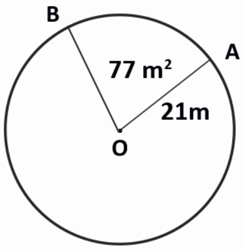
বা, $2r = \frac{99}{\pi} = \frac{99}{3.1416} = 31.513$

∴ ব্যাস 31.513 মিটার (প্রায়)

Ans. 31.513 মিটার (প্রায়)

৩. একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান:



দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 21$ মিটার

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = 77 বর্গমিটার

আমরা জানি, বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

যেখানে, $\theta =$ বৃত্তকলা কর্তৃক কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ (ডিগ্রিতে)

প্রশ্নমতে, $77 = \frac{\theta}{360} \times 3.1416 \times 21^2$

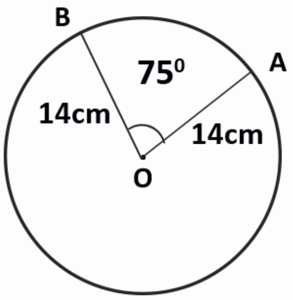
বা, $\theta = \frac{77 \times 360}{3.1416 \times 21 \times 21}$

$\therefore \theta = 20.008°$

Ans. 20.008° (প্রায়)

৪. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 14$ সে.মি. এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 75°$.

আমরা জানি, বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{75}{360} \times 3.1416 \times 14^2 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$$= \frac{75}{360} \times 3.1416 \times 196 \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$= 128.282$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

Ans. 128.282 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

৫. একটি বৃত্তাকার মাঠকে ঘিরে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ভিতরের পরিধি অপেক্ষা বাইরের পরিধি 44 মিটার বড়। রাস্তাটির চওড়া নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তাকার মাঠের ভিতরের ব্যাসার্ধ = r মি.
এবং রাস্তাটি x মি. চওড়া
∴ রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ =(r+x) মিটার

বৃত্তাকার মাঠের পরিধি = $2\pi r$ মিটার
রাস্তাসহ মাঠের পরিধি = $2\pi(r+x)$ মিটার

প্রশ্নমতে, $2\pi(r+x) = 2\pi r + 44$

বা, $2\pi\ (r+x) - 2\pi r = 44$

বা, $2\pi\ (r + x - r) = 44$

বা, $2\pi x = 44$

বা, $x = \frac{44}{2\pi}$

বা, $x = \frac{22}{3.1416}$

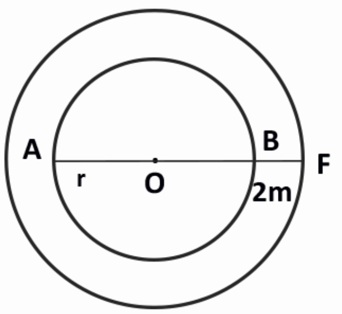
∴ $x = 7.003$

∴ রাস্তার চওড়া = 7.003 মি. (প্রায়)

Ans. 7.003 মি. (প্রায়)

৬. একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার। পার্কটিকে বেস্টন করে বাইরে 2 মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



দেওয়া আছে, বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 2r = 26 মিটার
∴ ব্যাসার্ধ $r = \frac{26}{2}$ মিটার = 13 মিটার
∴ পার্কের ক্ষেত্রফল = πr^2
= 3.1416×13^2 বর্গ মিটার
= 530.93 বর্গ মিটার (প্রায়)

আবার, পথের প্রস্থ = 2 মিটার
তাহলে পথসহ পার্কের ব্যাসার্ধ = (13 + 2) মিটার = 15 মিটার

$\therefore$ পথসহ পার্কের ক্ষেত্রফল $= \pi \times 15^2$

$= 3.1416 \times 225$ বর্গ মিটার

$= 706.86$ বর্গ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ পথটির ক্ষেত্রফল $= (706.80 - 530.93)$ বর্গ মিটার (প্রায়)

$= 175.93$ বর্গ মিটার (প্রায়)

Ans. 175.93 বর্গ মিটার (প্রায়)

৭. একটি গাড়ির সামনের চাকার ব্যাস 28 সে.মি, এবং পিছনের চাকা ব্যাস 35 সে.মি.। 88 মিটার পথ যেতে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা কত পূর্ণসংখ্যক বার বেশি ঘুরবে?

সমাধান: গাড়ির সামনের চাকার ব্যাসার্ধ $= \frac{28}{2}$ সে.মি. $= 14$ সে.মি.

গাড়ির পিছনের চাকার ব্যাসার্ধ $= \frac{35}{2}$ সে.মি.

অতএব, সামনের চাকার পরিধি

$= (2 \times 3.1416 \times 14)$ সে.মি.

$= 87.9648$ সে.মি. (প্রায়)

এবং পিছনের চাকার পরিধি

$= (2 \times 3.1416 \times \frac{35}{2})$ সে.মি.

$= 109.956$ সে.মি.

এখন, 88 মি. $= 88 \times 100$ সে.মি.

সুতরাং, 88 মিটার পথ যেতে গাড়ির সামনের চাকা ঘুরবে $= \frac{88 \times 100}{87.9648}$ বার

বা, 100.04 বার

বা, 100 বার (প্রায়)

এবং গাড়ির পিছনের চাকা ঘুরবে $= \frac{88 \times 100}{109.956}$ বার

বা, 80.032 বার

বা, 80 বার (প্রায়)

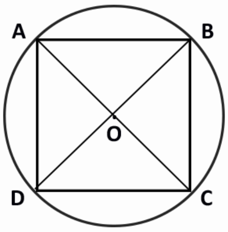
অতএব, সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা $(100 - 80)$

বা, 20 বার বেশি ঘুরবে

Ans. 20 বার

৮. একটি বৃত্তের পরিধি 220 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তলিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r মিটার এবং ABCD বর্গক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তলিখিত।

আমরা জানি, বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ একক

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 220$

বা, $r = \frac{220}{2\pi} = \frac{220}{2\times3.1416} = 35.014$

∴ বৃত্তের ব্যাস AC = 2r = 2×35.014 মি. = 70.028 মি.

এখন, ABCD বর্গের কর্ণ AC = d

এবং বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে,

d = $\sqrt{2}$.a [∵ বর্গের প্রতিটি কোণ এক সমকোণ]

$\therefore a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{70.028}{\sqrt{2}} = 49.517$

∴ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 49.517 মি. (প্রায়)

Ans. 49.517 মিটার (প্রায়)

৯. একটি বৃত্তের পরিধি একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমার সমান। তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r

অতএব, বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πr^2

এবং পরিধি = $2\pi r$

প্রশ্নানুসারে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা = $2\pi r$

∴ এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = \frac{2\pi r}{3}$

এখন, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গএকক

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2\pi r}{3})^2$ বর্গএকক

$= \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{4\pi^2 r^2}{9}$ বর্গএকক

$= \frac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$ বর্গএকক

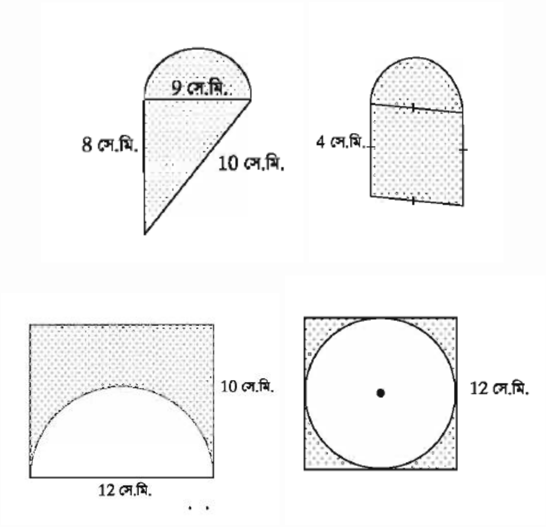
∴ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল : সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \pi r^2 : \frac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$

$= 3\sqrt{3} : \pi$

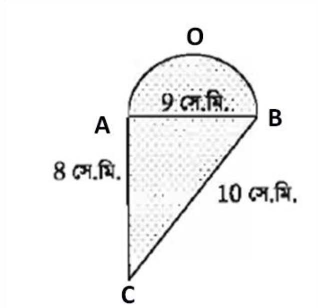
Ans. $3\sqrt{3} : \pi$

১০. নিচের চিত্রের তথ্য অনুযায়ী গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:



সমাধান:

প্রথম চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:



AOB অর্ধবৃত্তের ব্যাস $= 9$ সে.মি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $r = \frac{9}{2}$ সে.মি.

$= 4.5$ সে.মি.

$\therefore$ অর্ধবৃত্ত AOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi r^2}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{\pi \times (4.5)^2}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{63.617}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= 31.808$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

ΔABC এর $AB = 9$ সে.মি.,

$BC = 10$ সে.মি. ও $AC = 8$ সে.মি.

$\therefore$ ΔABC এর পরিসীমা, $2s = (9 + 10 + 8)$ সে.মি.

$= 27$ সে.মি.

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{27}{2}$ সে. মি.

$= 13.5$ সে.মি.

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{13.5\,(13.5-10)(13.5-8)(13.5-9)}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{13.5 \times 3.5 \times 5.5 \times 4.5}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{1169.4375}$ বর্গ সে.মি. $= 34.197$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

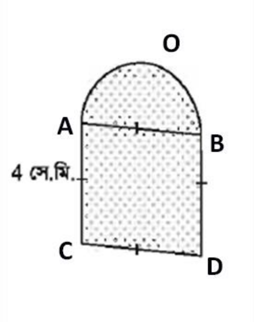
সুতরাং, প্রথম চিত্রের গাঢ় চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল

$= 31.808$ বর্গ সে.মি. $+ 34.197$ বর্গ সে.মি.

$= 66.005$ বর্গ সে.মি.

Ans. 66.005 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

২য় চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:



ABCD বর্গের ক্ষেত্রফল $= 4^2$ বর্গ সে.মি.

$= 16$ বর্গ সে.মি.

AOB অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{4}{2}$ সে.মি. $= 2$ সে.মি.

$\therefore$ AOB অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi \times (2)^2}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= 6.2832$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

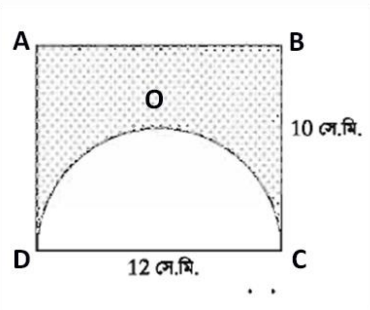
$\therefore$ দ্বিতীয় চিত্রের গাঢ় অংশের ক্ষেত্রফল

$= 16$ বর্গ সে.মি. $+ 6.2832$ বর্গ সে.মি.

$= 22.2832$ বর্গ সে.মি.

Ans. 22.2832 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

তৃতীয় চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:



ABCD আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AB = 12$ সে.মি.

এবং প্রস্থ $BC = 10$ সে.মি.

এবং COD অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{12}{2}$ সে.মি.

$= 6$ সে.মি.

ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= AB \times CD$ বর্গএকক

$= 12 \times 10$ বর্গ সে.মি. $= 120$ বর্গ সে.মি.

এবং COD অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi \times r^2}{2}$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{1}{2} \times 3.1416 \times 6^2$ বর্গ সে.মি.

$= 56.55$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

∴ গাঢ় চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল

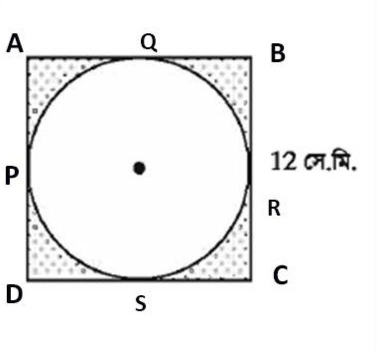
= ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – COD অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= (120 - 56.55)$ বর্গ সে.মি.

$= 63.45$ বর্গ সে.মি.

Ans. 63.45 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

চতুর্থ চিত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:



ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহু $= 12$ সে.মি.

∴ ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 12^2$ বর্গ সে.মি. $= 144$ বর্গ সে.মি.

PQRS বৃত্তের ব্যাস $= 12$ সে.মি.

ব্যাসার্ধ $r = \frac{12}{2}$ সে.মি. $= 6$ সে.মি.

∴ PQRS বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times 6^2$ বর্গ সে.মি.

$= 113.09$ বর্গ সে.মি.

∴ চতুর্থ চিত্রের গাঢ় চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল

= ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – PQRS বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= (144 - 113.09)$ বর্গ সে.মি.

$= 30.91$ বর্গ সে.মি.

Ans. 30.91 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

১. একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি., 5 সে.মি. হলে, এর পরিসীমার অর্ধেক কত সে.মি.?

ক. 12 খ. 20 গ. 24 ঘ. 28

ব্যাখ্যা: ∴ পরিসীমা $= 2(5 + 7) = 2 \times 12 = 24$ সে.মি.

∴ অর্ধপরিসীমা $= 12$

২. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক. $3\sqrt{3}$ খ. $4\sqrt{3}$ গ. $6\sqrt{3}$ ঘ. $9\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ একক

∴ বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. হলে ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2$ বর্গ সে.মি. $= 9\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

৩. সমতলীয় জ্যামিতিতে-

i. সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট

ii. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি এক সমকোণ।

iii. ত্রিভুজের যে কোন বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তস্থ প্রত্যেকটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৪. বর্গক্ষেত্রে প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং কর্ণ d হলে-

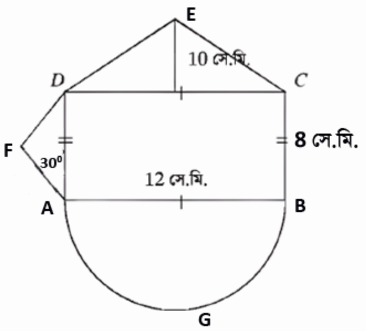
i. ক্ষেত্রফল a^2 বর্গ একক

ii. পরিসীমা 2ad একক

iii. d $=\sqrt{2}$a

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii



চিত্রের তথ্য অনুসারে (৫-৭) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

৫. ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক. 13 খ. 14 গ. 14.4 (প্রায়) ঘ. 15

MCQ Answers:
১। ক
২। ঘ
৩। ঘ
৪। গ
৫। গ
৬।
৭। খ

ব্যাখ্যা: ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 8^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{144 + 64}$ সে.মি. = 14.4 সে.মি. (প্রায়)

৬. ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক. 16　　খ. 32　　গ. 64　　ঘ. 128

[বি:দ্র: পর্যাপ্ত তথ্য না থাকায় প্রশ্নটির উত্তর করা সম্ভব হচ্ছে না]

৭. AGB অর্ধবৃত্তের পরিধি কত সে.মি.?

ক. 18　　খ. 18.85 (প্রায়)　গ. 37.7 (প্রায়)　ঘ. 96

ব্যাখ্যা: AGB অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ r = $\frac{12}{2}$ সে.মি. = 6 সে.মি.

∴ AGB অর্ধবৃত্তের পরিধি = $\frac{2\pi r}{2}$ সে.মি.

$= \frac{2 \times 3.1416 \times 6}{2}$ সে.মি. = 18.85 সে.মি. (প্রায়)

৮. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মিটার, 12 মিটার ও 4.5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য a = 16 মিটার, প্রস্থ b = 12 মিটার এবং উচ্চতা c = 4.5 মিটার।

আমরা জানি, আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = 2(ab + bc + ca) বর্গ একক

= 2(16 × 12 + 12 × 4.5 + 4.5 × 16) বর্গমি.

= 2(192 + 54 + 72) বর্গ মিটার

= 2×318 বর্গ মিটার।

= 636 বর্গ মিটার (Ans.)

∴ আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

$= \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + (4.5)^2}$ মিটার

$= \sqrt{256 + 144 + 20.25}$ মিটার

$= \sqrt{420.25}$ মিটার = 20.5 মিটার (Ans.)

এবং আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন = abc ঘন একক

= (16 × 12 × 4.5) ঘন মিটার

= 864 ঘন মিটার (Ans.)

৯. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 21:16:12 এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 87 সে.মি. হলে, ঘন বস্তুটির তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে a সে.মি., b সে.মি. এবং c সে.মি.

ধরি, a =21x, b = 16x এবং c = 12x

আয়তাকার ঘন বস্তুর কর্ণ = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ সে.মি.

প্রশ্নমতে, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 87$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = 87^2$

বা, $(21x)^2 + (16x)^2 + (12x)^2 = 87^2$

বা, $441x^2 + 256x^2 + 144x^2 = 7569$

বা, $841x^2 = 7569$

বা, $x^2 = \frac{7569}{841}$

বা, $x^2 = 9$

$\therefore x = 3$

ঘনবস্তুটির তলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গসে.মি.

$= 2(21x \times 16x + 16x \times 12x + 12x \times 21x)$ বর্গ সে.মি.

$= 2(336x^2 + 192x^2 + 252x^2)$ বর্গ সে.মি.

$= 2\times780x^2$ বর্গ সে.মি.

$= 1560 \times 3^2$ বর্গ সে.মি.

$= 1560 \times 9$ বর্গ সে.মি.

$= 14040$ বর্গ সে.মি.

১০. একটি আয়তাকার ঘনবস্তু 48 বর্গ মিটার ভূমির উপর দন্ডায়মান। এর উচ্চতা 3 মিটার এবং কর্ণ 13 মিটার। আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য = a মিটার এবং প্রস্থ = b মিটার

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল = ab বর্গ মিটার = 48 বর্গ মিটার

আমরা জানি, আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণ = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

দেওয়া আছে, উচ্চতা, c = 3 মিটার।

প্রশ্নমতে, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 13$

বা, $13 = \sqrt{a^2 + b^2 + 3^2}$

বা, $169 = a^2 + b^2 + 9$

বা, $a^2 + b^2 = 169 - 9 = 160$ .... (i)

আমরা জানি, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= 160 + 2 \times 48$

$= 256$

$\therefore a + b = 256 = 16$..........(ii)

আবার, $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$= 160 - 96$

$= 64$

$\therefore a - b = 8$ .... (iii)

এখন, (ii) + (iii) থেকে পাই, 2a = 24 বা, a = 12 এবং

(ii) – (iii) থেকে পাই, 2b = 8, বা, b = 4

অতএব, দৈর্ঘ্য = 12 মিটার এবং প্রস্থ = 4 মিটার (Ans.)

১১. একটি আয়তাকার কাঠের বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে ৪ সে.মি., 6 সে.মি., ও 4 সে.মি.। এর ভিতরের সম্পূর্ণ পৃষ্টের ক্ষেত্রফল ৪৪ বর্গ সে.মি.। বাক্সটির কাঠের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বাক্সটির কাঠের পুরুত্ব x সে.মি.

∴ বাক্সের ভিতরের পৃষ্ঠগুলোর দৈর্ঘ্য, $a = (6 - 2x)$ সে.মি.

প্রস্থ, $b = (4 - 2x)$ সে.মি.

এবং উচ্চতা, $c = (8 - 2x)$ সে.মি.

∴ বাক্সটির ভিতরের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ca)$

$= 2\{(6 - 2x)(4-2x) + (4-2x)(8-2x) + (8-2x)(6-2x)\}$ বর্গ সে.মি.

$= 2(24-20x+4x^2+32-24x + 4x^2+48-28x+4x^2)$ বর্গ সে.মি.

$= 2(12x^2 - 72x + 104)$ বর্গ সে.মি.

প্রশ্নমতে, $2(12x^2 - 72x + 104) = 88$

বা, $12x^2 - 72x + 104 = 44$

বা, $12x^2 - 72x + 104 - 44 = 0$

বা, $12x^2 - 72x + 60 = 0$

বা, $12(x^2 - 6x + 5) = 0$

বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$

বা, $x^2 - 5x - x + 5 = 0$

বা, $x(x - 5) - 1(x - 5) = 0$

বা, $(x - 5)(x - 1) = 0$

হয়, $(x - 5) = 0$

$\therefore x = 5$

অথবা, $(x-1) = 0$

$\therefore x = 1$

এখন বাক্সের কাঠের পুরুত্ব (x) বাক্সের উচ্চতার চেয়ে বড় হতে পারে না। অর্থাৎ $x \neq 5$

$\therefore x = 1$

কাঠের পুরুত্ব1 সে.মি.। (Ans.)

১২. একটি দেওয়ালের দৈর্ঘ্য 25 মিটার, উচ্চতা 6 মিটার এবং পুরুত্ব 30 সে.মি.। একটি ইটের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., প্রস্থ 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি.। দেওয়ালটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রয়োজনীয় ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দেওয়ালের দৈর্ঘ্য, $a = 25$ মিটার

$= 25\times100$ সে.মি.

$= 2500$ সে.মি.

উচ্চতা, $b = 6$ মিটার $= 6\times100$ সে.মি. $= 600$ সে.মি.

এবং পুরুত্ব, $c = 30$ সে.মি.

∴ দেওয়ালের আয়তন $= abc$ ঘন সে.মি.

$= 2500 \times 600 \times 30$ ঘন সেমি

$= 45000000$ ঘন সে.মি.

আবার, মনে করি, প্রতিটি ইটের দৈর্ঘ্য, $p = 10$ সে.মি.

প্রচ্ছ, $q = 5$ সে.মি.

এবং উচ্চতা, $r = 3$ সে.মি.

∴ প্রতিটি ইটের আয়তন $= pqr$ ঘন সে.মি.

$= 10 \times 5 \times 3$ ঘন সে.মি.

$= 150$ ঘন সে.মি.

ধরি, দেওয়ালে মোট xটি ইট লাগে।

তাহলে, দেওয়ালের মোট আয়তন $=$ x সংখ্যক ইটের আয়তন

$= x \times 150$ ঘন সে.মি.

$= 150x$ ঘন সে.মি.

প্রশ্নানুসারে, $150x = 45000000$

বা, $x = \frac{45000000}{150}$

$\therefore x = 300000$

$\therefore$ দেওয়ালটি তৈরি করতে 300000টি ইট লাগবে (Ans.)

১৩. একটি ঘনক আকৃতির বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 2400 বর্গ সে.মি. হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঘনক আকৃতি বস্তুটির ধার a সে.মি.

$\therefore$ ঘনক আকৃতি বস্তুটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $=$ 6a বর্গ সে.মি.

প্রশ্নানুসারে, $6a^2 = 2400$

বা, $a^2 = 400$

$\therefore a = 20$

$\therefore$ ঘনক আকৃতি বস্তুটির ধার 20 সে.মি.

$\therefore$ ঘনক আকৃতি বস্তুটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$ a সে.মি.

$= \sqrt{3} \times 20$ সে.মি.

$= 34.641$ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

১৪. 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বেলনের উচ্চতা, $h = 12$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = 5$ সে.মি.।

$\therefore$ বেলনের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r\ (r{+}h)$ বর্গ সে.মি.

$= 2 \times \pi \times 5 \times (5{+}12)$ বর্গ সে.মি. $= 2\pi \times 5 \times 17$ বর্গ সে.মি.

$= 534.071$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন সে,মি..

$= \pi \times 5^2 \times 12$ ঘন সে.মি.

$= 942.48$ ঘন সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

১৫. একটি বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং আয়তন 150 ঘন সে.মি.। বেলনের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বেলনটির উচ্চতা h সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ সে.মি.

$\therefore$ বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ সে.মি. এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন সে.মি. প্রশ্নমতে, $2\pi rh = 100$ ... ... (i)

$\pi r^2 h = 150$ ... ... (ii)

(ii) $\div$ (i) থেকে পাই,

$\frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{150}{100}$

বা, $\frac{r}{2} = 1.5$

বা, $r = 1.5 \times 2$

বা, $r = 3$

অর্থাৎ ভূমির ব্যাসার্ধ = 3 সে.মি. (Ans)

(i) এ এর মান বসিয়ে পাই, $2\pi \times 3 \times h = 100$

বা, $h = \frac{100}{6\times\pi}$

$\therefore h = 5.305$

অর্থাৎ উচ্চতা = 5.305 সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

১৬. একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 4400 বর্গ সে.মি.। এর উচ্চতা 30 সে.মি. হলে, সমগ্রতল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের উচ্চতা, $h = 30$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r সে.মি. $\therefore$ সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi rh$ বর্গ সে.মি.

$= 2 \times \pi \times r \times 30$ বর্গ সে.মি.

$= 60 \times \pi \times r$ বর্গ সে.মি.

প্রশ্নানুসারে, $60 \times \pi \times r = 4400$

বা, $r = \frac{4400}{60\pi}$

বা, $r = \frac{220}{3\pi}$

$\therefore$ সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= 4400 + 2\,\pi\,(\frac{220}{3\pi})^2$ বর্গ সে.মি.

$= 4400 + 3423.6$ বর্গ সে.মি.

$= 7823.6$ বর্গ সে. মি. (প্রায়) (Ans.)

১৭. একটি লোহার পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে 12 সে.মি. ও 14 সে.মি. এবং পাইপের উচ্চতা 5 মিটার। 1 ঘন সে.মি. লোহার ওজন 7.2 গ্রাম হলে, পাইপের লোহার ওজন নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, পাইপের ভিতরের ব্যাস = 12 সে.মি.

বাইরের ব্যাস = 14 সে.মি.

উচ্চতা $h = 5$ মিটার $= 5 \times 100$ সে.মি. $= 500$ সে.মি.

এবং 1 ঘন সে.মি. লোহার ওজন = 7.2 গ্রাম।

আমরা জানি, বেলনের আয়তন $= \pi \times r^2 \times h$ ঘন একক

$\therefore$ পাইপের বাইরের আয়তন $= \pi \times (\frac{14}{2})^2 \times 500$ ঘন সে.মি.

$= 24500\pi$ ঘন সে.মি.

এবং পাইপের ভিতরের আয়তন $= \pi \times (\frac{12}{2})^2 \times 500$ ঘন সে.মি.

$= 18000\pi$ ঘন সে.মি.

পাইপের লোহার আয়তন = বাইরের আয়তন – ভিতরের আয়তন

$= (24500\pi - 18000\pi)$ ঘন সে.মি.

$= 6500\pi$ ঘন সে.মি.

∴ পাইপের লোহার ওজন $= 6500\pi \times 7.2$ গ্রাম

$= 147026.54$ গ্রাম

$= \frac{147026.54}{100}$ কিলোগ্রাম

$= 147.027$ কিলোগ্রাম (প্রায়)(Ans.)

১৮. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার। আয়তাকার ক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রে আছে যেখানে আয়তাকার ক্ষেত্র দ্বারা অনধিকৃত অংশে ঘাস লাগানো হলো।

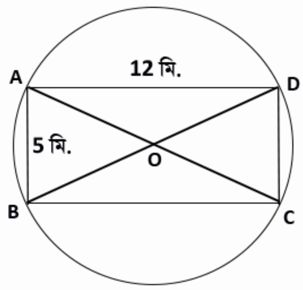
ক. উপরের তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র আঁক।

খ. বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস নির্ণয় কর।

গ. প্রতি বর্গ মিটার ঘাস লাগাতে 50 টাকা খরচ হলে, মোট খরচ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক.



মনে করি, ABCD একটি আয়তাকার ক্ষেত্র। যার দৈর্ঘ্য AD = BC = 12 মিটার, প্রস্থ AB = CD = 5 মিটার এবং কর্ণ AC= BD.

AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। ABCD আয়তাকার ক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র আছে। গাঢ় চিহ্নিত অংশটুকুতে ঘাস লাগানো হয়েছে।

খ. চিত্র থেকে পাই, ABCD আয়তাকার ক্ষেত্রটির কর্ণ AC = BD

ABCD আয়তাকার ক্ষেত্রটির কর্ণ AC বা BD হবে বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস।

অতএব, ABC সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 5^2 + 12^2$

$= 25 + 144 = 169$

$AC = \sqrt{169} = 13$

∴ বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস = 13 মিটার (Ans.)

গ. এখন, বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস 13 মিটার

∴ বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাসার্ধ, $r = \frac{13}{2}$ মিটার = 6.5 মিটার

∴ বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ মিটার

$= \pi \times 6.5^2$ বর্গ মিটার

$= 42.25\pi$ বর্গ মিটার (প্রায়)

দেওয়া আছে, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 12 মিটার এবং প্রস্থ = 5 মিটার

∴ আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (12×5) বর্গ মিটার

= 60 বর্গ মিটার

∴ বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির আয়তাকার ক্ষেত্র দ্বারা অনধিকৃত অংশের ক্ষেত্রফল = $(42.25\pi - 60)$ বর্গ মিটার।

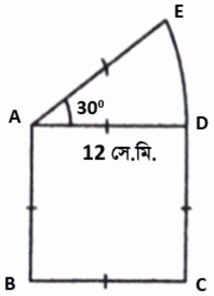
= 72.7323 বর্গ মিটার

প্রতি বর্গ মিটারে ঘাস লাগাতে খরচ হয় 50 টাকা।

∴ 72.7323 বর্গ মিটার ঘাস লাগাতে খরচ হয় (72.7323×50) টাকা

= 3636.62 টাকা (প্রায়) (Ans.)

১৯. চিত্রটি বর্গক্ষেত্র এবং বৃত্তকলায় বিভক্ত।



ক. বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং পরিসীমা নির্ণয় কর।

খ. সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান বাহুবিশিষ্ট কোনো সুষম ষড়ভুজ কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে বৃত্তের অনধিকৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে,

বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = 12$ সে.মি.

আমরা জানি,

বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{2}\,a$ একক

= $(\sqrt{2} \times 12)$ সে.মি.

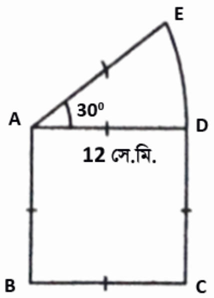
= 16.971 সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

এবং বর্গক্ষেত্রটির পরিসীমা = $4a$ একক

= (4×12) সে.মি.

= 48 সে.মি. (Ans.)

খ.



দেওয়া আছে, বৃত্তাংশের ব্যাসার্ধ r = AD = AE = 12cm

ধরি, কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ θ

ADE বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = $c \times \pi r^2$

$= \frac{\theta}{360} \times \pi \times (12)^2$ ব. সে. মি.

$= 0.4\ \pi\ \theta$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)

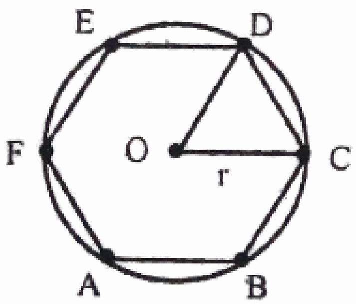
∴ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB^2 বর্গ একক

$= 12^2$ বর্গ সে. মি.

= 144 বর্গ সে. মি.

∴ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $(0.4\theta + 144)$ ব. সে. মি. (প্রায়) (Ans.)

গ.



মনে করি, সুষম ষড়ভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য, r = 12 সে.মি.

এবং সুষম ষড়ভুজের বাহুর সংখ্যা n = 6

আমরা জানি, সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{na^2}{4} \cot \frac{180°}{n}$

∴ সুষম ষড়ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{6 \times 12^2}{4} \cot \frac{180°}{6}$

$= \frac{6 \times 144}{4} \cot 30°$

$= 6 \times 36 \times \sqrt{3}$

$= 216\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r = 12 সে.মি.

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi. 12^2$ বর্গ সে.মি. $= 144\ \pi$ বর্গ সে.মি.

∴ বৃত্তের অনধিকৃত অংশের ক্ষেত্রফল $= (144\ \pi - 216\sqrt{3})$ বর্গ সে.মি.

= 78.267 বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans.)

২০. একটি সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এবং একটি আয়তক্ষেত্র BCEF উভয়ের ভূমি BC.

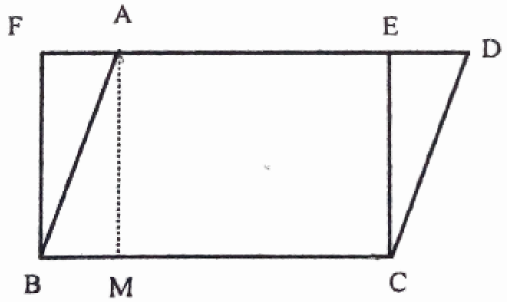
ক. একই উচ্চতা বিবেচনা করে সামান্তরিক ক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁক।

খ. দেখাও যে, ABCD ক্ষেত্রটির পরিসীমা BCEF ক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

গ. আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5 : 3 এবং ক্ষেত্রটির পরিসীমা 48 মিটার হলে, সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক.



একই ভূমি BC এর উপর ABCD একটি সামান্তরিক ক্ষেত্র ও BCEF একটি আয়তক্ষেত্র। যাদের উচ্চতা AM.

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD সামান্তরিকের পরিসীমা BCEF আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রমাণ: এখানে $BF = CE = AM$

এখন, ΔABM এ $\angle AMB = 90°$

$\therefore$ AB, ΔABM-এর অতিভুজ।

$\therefore AB > AM$

অর্থাৎ $AB > BF$

অনুরূপভাবে, $CD > CE$

এবং $BC = AD = EF$.

$\therefore BC + CD + DA + AB > BC + CE + FE + BF$.

$\therefore$ ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রটির পরিসীমা > BCEF আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা। (দেখানো হলো)

গ. আয়তক্ষেত্রের, দৈর্ঘ্য : প্রস্থ = 5 : 3

পরিসীমা = 48 মিটার

ধরি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, BC = 5x মিটার এবং প্রস্থ, BF = 3x মিটার

প্রশ্নমতে, $2(5x + 3x) = 48$

বা, $2 \times 8x = 48$

বা, $16x = 48$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = সামান্তরিকের ভূমি = 5x মিটার = 5×3 মিটার = 15 মিটার

এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = সামান্তরিকের উচ্চতা = 3x মিটার = 3×3 মিটার = 9 মিটার

$\therefore$ সামান্তরিক ক্ষৈত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল = (ভূমি× উচ্চতা) বর্গ একক = 15×9 বর্গমিটার = 135 বর্গমিটার

$\therefore$ সামান্তরিক ক্ষৈত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল = 135 বর্গ মিটার (Ans.)

২১. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার।

ক. x চলকের মাধ্যমে আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর।

খ. বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. আয়তাকার ক্ষেত্রের বাইরে চতুর্দিকে 1.5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা তৈরি করতে 25×12.5 বর্গ সে.মি. তলবিশিষ্ট ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. ধরি,

আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = x মিটার এবং দৈর্ঘ্য = 3x মিটার

∴ আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2(x + 3x) = 2 × 4x = 8x মি. (Ans.)

খ. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (3x × x) বর্গ মি. = $3x^2$ বর্গ মি.

প্রশ্নমতে, $3x^2 = 1200$

বা, $x^2 = \frac{1200}{3}$

বা, $x^2 = 400$

∴ x = 20 মিটার

∴ আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = 20 মিটার

এবং দৈর্ঘ্য = (3 × 20) মিটার = 60 মিটার

∴ আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2(60 + 20) মি.

= (2 × 40) মি.

= 160 মিটার

ধরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার

∴ 4a = 160

বা, a = $\frac{160}{4}$ মিটার

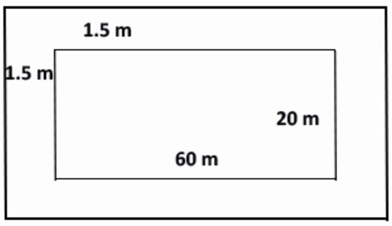
∴ a = 40 মিটার

আমরা জানি, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক

= $(40)^2$ বর্গ মিটার

= 1600 বর্গমিটার (Ans.)

গ. এখানে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 60 মিটার, প্রস্থ = 20 মিটার



রাস্তাসহ আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = (60 +2×1.5) মি.

= (60 + 3) মি. = 63 মি.

রাস্তাসহ আয়তাকার ক্ষেত্রের প্রস্থ = (20 + 2×1.5) মি.

= (20 + 3) মি. = 23 মি.

রাস্তাসহ আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য× প্রস্থ) ব. একক

= (63 ×23) ব. মি.= 1449 ব.মি.

রাস্তাবাদে আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য× প্রস্থ) ব.একক

$= (60 \times 20)$ বর্গমি. $= 1200$ বর্গ মি.

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল $= (1449 - 1200)$ বর্গমি. $= 249$ বর্গমিটার

দেওয়া আছে, ইটের তলের ক্ষেত্রফল $= 25 \times 12.5$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{25 \times 12.5}{100 \times 100}$ বর্গ. মি.

$= 0.03125$ বর্গ মিটার

সুতরাং ইটের সংখ্যা $= \frac{249}{0.03125}$ টি

$= 79.68$ টি (Ans.)

অধ্যায় ১৭

পরিসংখ্যান
Statistics

১. উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা হলে প্রতি শ্রেণিতে যতগুলো উপাত্ত অন্তর্ভুক্ত হয় তার নির্দেশক নিচের কোনটি?

ক. শ্রেণি সীমা খ. শ্রেণির মধ্যবিন্দু

গ. শ্রেণি সংখ্যা ঘ. শ্রেণির গণসংখ্যা

২. পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। উপাত্তের এই প্রবণতাকে বলা হয়।

ক. প্রচুরক খ. কেন্দ্রিয় প্রবণতা গ. গড় ঘ. মধ্যক

৩. সারণিতে-

তাপমাত্রা	6° – 8°	8° – 10°	10° – 12°
গণসংখ্যা	5	9	4

i. শ্রেণিব্যাপ্তি 3

ii. মধ্যক শ্রেণি 8° - 10°

iii. তাপমাত্রা অবিচ্ছিন্ন চলক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) সঠিক নয়। কারণ, শ্রেণিব্যাপ্তি বা শ্রেণি ব্যবধান = যেকোনো শ্রেণির উর্ধ্বসীমা – তারপূর্ববর্তী শ্রেণির উধ্বসীমা = 10 – 8 = 2.

৪. আয়তলেখ অঙ্কন করতে দরকার—

i. x অক্ষ বরাবর অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিব্যাপ্তি

ii. y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা

iii. শ্রেণির মধ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৫. উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রচুর-

i. কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ

ii. সবচেয়ে বেশী বার উপস্থাপিত মান

iii. সবক্ষেত্রে অনন্য নাও হতে পারে

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

MCQ Answers:
১। ঘ
২। খ
৩। গ
৪। ক
৫। ঘ
৬। ঘ
৭। গ
৮। ক
৯। ক

শীতকালে বাংলাদেশের কোনো একটি অঞ্চলের 10 দিনের তাপমাত্রার (সেন্ট্রিগ্রেড) পরিসংখ্যান হলো: 10°, 9°, ৪°, 6°, 11°, 12°, 7°, 13°, 14°, 5°।

এই পরিসংখ্যানের প্রেক্ষিতে (৬-৮) পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

৬. উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের প্রচুরক কোনটি?

ক. 12° খ. 5° গ. 14° ঘ. প্রচুরক নেই

ব্যাখ্যা: প্রচুর অর্থ সবচেয়ে বেশি বার ঘটমান সংখ্যা। যেহেতু এখানে বারবার ঘটমান কোনো সংখ্যা নেই সুতরাং প্রচুরক নেই।

৭. উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের গড় তাপমাত্রা কোনটি?

ক. ৪° খ. 8.5° গ. 9.5° ঘ. 9

ব্যাখ্যা: গাণিতিক গড় $= \frac{10°+9°+8°+6°+11°+12° + 7° +13°+14°+5°}{10} = \frac{95°}{10} = 9.5°$

৮. উপাত্তসমূহের মধ্যক কোনটি?

ক. 9.5° খ. 9° গ. 8.5° ঘ. ৪°

ব্যাখ্যা: যেহেতু 10 একটি জোড় সংখ্যা, সুতরাং মধ্যক হবে $\frac{10}{2}$ ও $(\frac{10}{2}+1)$ তম পদদ্বয়ের গাণিতিক গড়। উপাত্তটি ঊর্ধ্বক্রমে বিন্যাস্ত করে পাই, 5°, 6°, 7°, 8°, 9°, 10°, 11°, 12°, 13°, 14°

৫ম ও ৬ষ্ঠ পদদ্বয়ের গাণিতিক গড় $= \frac{9°+10°}{10} = 9.5°$

৯. সারণিভুক্ত শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হলো n, মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা L, মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা F_C, মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা f_m এবং শ্রেণি ব্যাপ্তি h। এই তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র?

(ক) $L + (\frac{n}{2} - F_C) \times \frac{h}{f_m}$ (খ) $L + (\frac{n}{2} - f_m) \times \frac{h}{F_m}$

(গ) $L - (\frac{n}{2} - F_C) \times \frac{h}{f_m}$ (ঘ) $L - (\frac{n}{2} - f_m) \times \frac{h}{F_m}$

১০. ১০ম শ্রেণির 50 জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁক।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

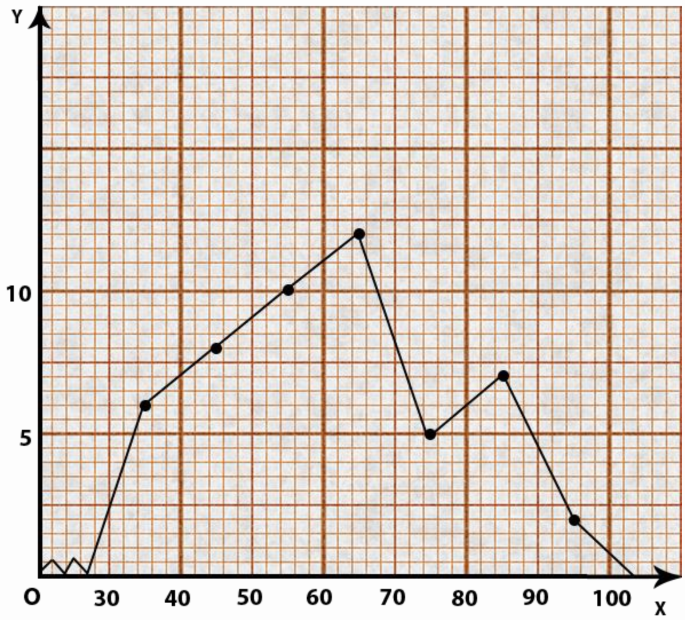
সমাধান: এখানে প্রদত্ত উপাত্ত বিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক।

শিক্ষার্থীদের গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
31 – 40	35.5	6
41 –50	45.5	8
51 –60	55.5	10
61 –70	65.5	12

71 –80	75.5	5
81 –90	85.5	7
91 –100	95.5	2

গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন: X- অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দুর 2 একক ধরে এবং Y- অক্ষ বরাবর ছক কাগজের 2 ঘরকে গণসংখ্যার 1 একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো।



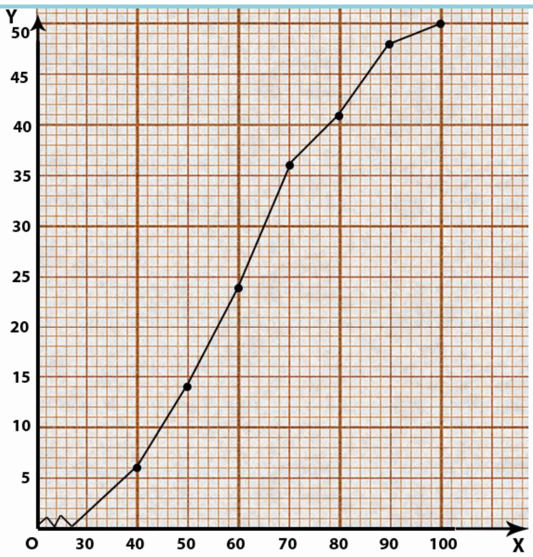
↑গণসংখ্যা → শ্রেণি মধ্যবিন্দু

চিত্র: শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা বহুভুজ

আজিভ রেখা অঙ্কনের সারণি:

প্রাপ্ত নম্বর	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
31 – 40	6	6
41 –50	8	14
51 –60	10	24
61 –70	12	36
71 –80	5	41
81 –90	7	48
91 –100	2	50

X অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমার দুই একক এবং Y অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হলো।



↑ক্রমযোজিত গণসংখ্যা → শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমা

চিত্র: অজিভ রেখা

১১. নিচে 50 জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন(কেজি)	45	50	55	60	65	70
গণসংখ্যা	2	6	8	16	12	6

সমাধান: শিক্ষার্থীদের ওজনের মধ্যক নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় সারণি:

ওজন (কেজি)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
45	2	2
50	6	8
55	8	16
60	16	32
65	12	44
70	6	50
মোট	$n = 50$	

এখানে $n = 50$ যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যক $= \dfrac{\frac{50}{2} \text{ তম ও } (\frac{10}{2}+1) \text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{2}$

$= \dfrac{25 \text{ তম ও } 26 \text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{2}$

$= \dfrac{60+60}{2} = \dfrac{120}{2} = 60$

সুতরাং মধ্যক 60 কেজি।

উত্তর: মধ্যক 60 কেজি।

১২. কোনো বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ৯ম শ্রেণির 50 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ:

76, 55, 98, 79, 64, 68, 56, 73, 83, 57, 55, 92, 45, 77, 87, 46, 32, 75, 89, 48, 97, 88, 55, 73, 93, 58, 41, 69, 63, 39, 84, 56, 45, 73, 93, 62, 67, 69, 65, 53, 78, 64, 85, 53, 73, 34, 75, 82, 67, 62

ক. প্রদত্ত তথ্যটির ধরন কীরূপ? কোনো নিবেশনে একটি শ্রেণির গণসংখ্যা কী নির্দেশ করে?

খ. উপযুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন তৈরি কর।

গ. সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. প্রদত্ত তথ্যটি একটি অবিন্যস্ত উপাত্ত।

একটি শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা ঐ শ্রেণিতে উপাত্তের যতগুলো মান অন্তর্ভুক্ত হয় তার সংখ্যা নির্দেশ করে।

খ. এখানে সর্বনিম্ন প্রাপ্ত নম্বর $= 32$ এবং সর্বোচ্চ প্রাপ্ত নম্বর $= 98$

$\therefore$ পরিসর $= (98 - 32) + 1 = 66 + 1 = 67$

শ্রেণিব্যাপ্তি 10 ধরে শ্রেণিসংখ্যা $= \frac{67}{10} = 6.7$

অর্থাৎ শ্রেণিসংখ্যা হবে 7

গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
30 – 39	|||	3
40 –49	~~||||~~	5
50 –59	~~||||~~ ||	7
60 –69	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
70 –79	~~||||~~ ~~||||~~	10
80 –89	~~||||~~ ||	7
90 –99	~~||||~~	5
মোট		50

গ. সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়:

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

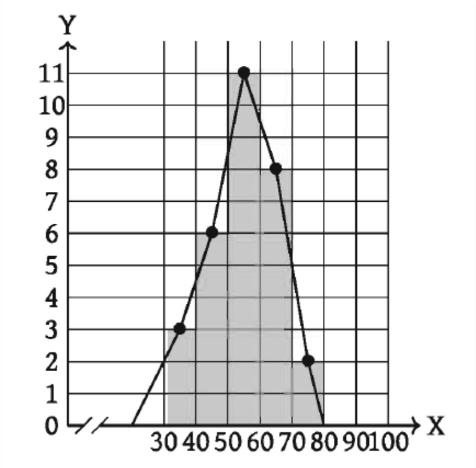
শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা $\times$ ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$
30 – 39	34.5	3	–3	–9
40 –49	44.5	5	–2	–10

50 –59	54.5	7	–1	–7
60 –69	64.5 = a	13	0	0
70 –79	74.5	10	1	10
80 –89	84.5	7	2	14
90 –99	94.5	5	3	15
মোট		n = 50		$\sum f_i u_i = 13$

$\therefore$ গড় $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h = 64.5 + \frac{13}{50} \times 10 = 67.1$

উত্তর: গড় 67.1

১৩.



ক. উপরের চিত্রে, প্রথম শ্রেণিটির শ্রেণি মধ্যমান ও শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা কত?

খ. চিত্রে প্রদর্শিত তথ্যটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. 'খ'-অংশে প্রাপ্ত ছক থেকে নিবেশনটির মধ্যক নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. প্রদত্ত চিত্রে, প্রথম শ্রেণি (30 – 40) এর মধ্যমান $= \frac{30 + 40}{2} = \frac{70}{2} = 35$

চিত্র অনুযায়ী শেষ শ্রেণি (70 – 80) যার গণসংখ্যা 2

উত্তর: মধ্যমান 35, গণসংখ্যা 2

খ. প্রদত্ত চিত্রটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ করে পাই:

প্রাপ্ত নম্বর	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
30 - 40	3	3
40 - 50	6	9
50 - 60	11	20
60 - 70	8	28
70 - 80	2	30
মোট	n = 30	

গ. মধ্যক নির্ণয়: এখানে, $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$। অতএব, মধ্যক হলো 15তম পদের মান। অর্থাৎ (50-60) এই শ্রেণিতে মধ্যক রয়েছে।

এখানে, $L= 50, n = 30, F_C = 9, f_m = 11, h =10$

$\therefore$ মধ্যক $= L + (\frac{n}{2} - F_C) \times \frac{h}{f_m}$

$= 50 + (\frac{30}{2} - 9) \times \frac{10}{11}$

$= 50 + 5.45$

$= 55.45$ (প্রায়)

উত্তর: মধ্যক 55.45 (প্রায়)

১৪. কোনো শ্রেণির 60 জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

শ্রেণিব্যাপ্তি	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74
গণসংখ্যা	4	8	10	20	12	6

ক. মধ্যক নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।

খ. প্রদত্ত তথ্য থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।

গ. উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক. মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র:

মধ্যক $= L + (\frac{n}{2} - F_C) \times \frac{h}{f_m}$

এখানে, L = মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা

F_C = মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা

f_m = মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা।

h = শ্রেণি ব্যবধান।

খ. যেহেতু (60–64) শ্রেণির গণসংখ্যা সবচেয়ে বেশি। সুতরাং (60 – 64) হলো প্রচুরক শ্রেণি

এখানে, প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা, $L= 60$

$f_1 = 20 - 10 = 10$

$f_2 = 20 - 12 = 8$

শ্রেণি ব্যবধান $h = 5$

প্রচুরক $= L+ \frac{f_1}{f_1+f_2} \times h$

$= 60 + \frac{10}{10 + 8} \times 5$

$= 60 + 2.8$

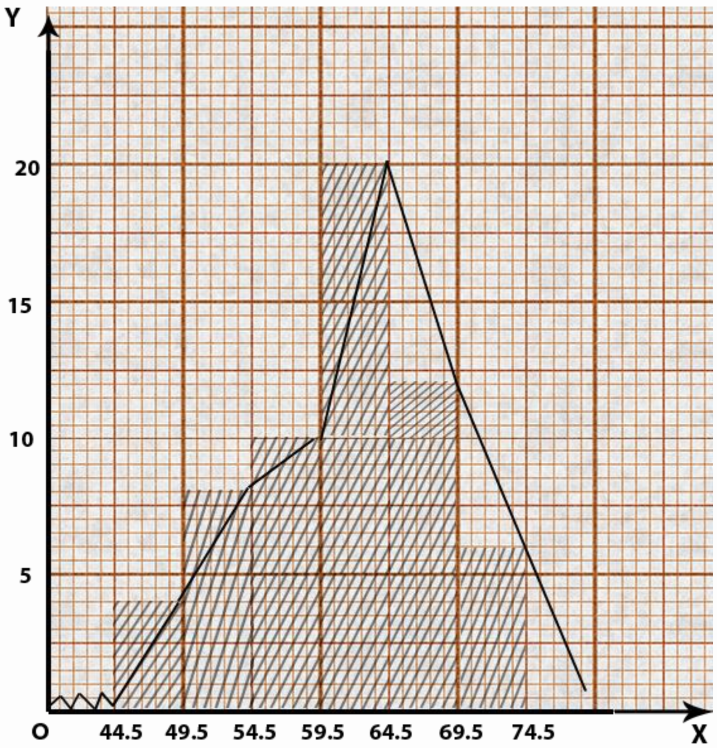
$= 62.8$

প্রচুরক 62.8 কেজি (প্রায়)

গ. আয়তলেখ অঙ্কন: প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপরে শ্রেণি ব্যবধান বিচ্ছিন্ন। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করা হলে প্রদত্ত সারণি হবে:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি সীমা	মধ্যমান	গণসংখ্যা
45 –49	44.5 –49.5	47	4
50 –54	49.5 –54.5	52	8
55 –59	54.5 –59.5	57	10
60 –64	59.5 –64.5	62	20
65 –69	64.5 –69.5	67	12
70 –74	69.5 –74.5	72	6

এখন ছক কাগজের X-অক্ষ বরাবর প্রতি ঘরকে এক একক ধরে শ্রেণি সীমা এবং Y-অক্ষ বরাবর প্রতি দুই ঘরকে গণসংখ্যার এক একক ধরে আয়তলেখ আঁকা হয়েছে। মূলবিন্দু থেকে 44.5 পর্যন্ত পূর্ববর্তী ঘরগুলো আছে বোঝাতে ভাঙা চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।



↑গণসংখ্যা → শ্রেণি সীমা

১৫. তাপমাত্রা পরিবর্তনশীল। বাংলাদেশের সাধারণত জানুয়ারি মাসের ১ম সপ্তাহের তাপমাত্রা কম এবং জুন মাসে ৪র্থ সপ্তাহে তাপমাত্রা বেশি থাকে। 52 সপ্তাহের তাপমাত্রা ডিগ্রী সেলসিয়াস এককে নিম্নরূপ:

35, 30, 27, 42, 20, 19, 27, 36, 39, 14, 15, 38, 37, 40, 40, 12, 10, 9, 7, 20, 21, 24, 33, 30, 29, 21, 19, 31, 28, 26, 32, 30, 22, 23, 24, 41, 26, 23, 25, 22, 17, 19, 21, 23, 8, 13, 23, 24, 20, 32, 11, 17

ক. শ্রেণিব্যাপ্তি 5 ধরে শ্রেণিসংখ্যা নির্ণয় কর।

খ. প্রদত্ত উপাত্তসমূহের সারণি আকারে প্রকাশ করে সারণি থেকে সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ তাপমাত্রার গড় নির্ণয় কর।

গ. খ এর সারণি ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কনের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক. এখানে, সর্বোচ্চ সংখ্যা = 42 এবং সর্বনিম্ন সংখ্যা = 7

∴ পরিসর = (42 - 7) + 1 = 35 +1 = 36

শ্রেণি ব্যবধান 5 ধরে,

শ্রেণিসংখ্যা = $\frac{36}{5}$ = 7.2 ≈ ৪ টি

খ. প্রদত্ত উপাত্তসমূহকে সারণিতে প্রকাশ করা হলো।

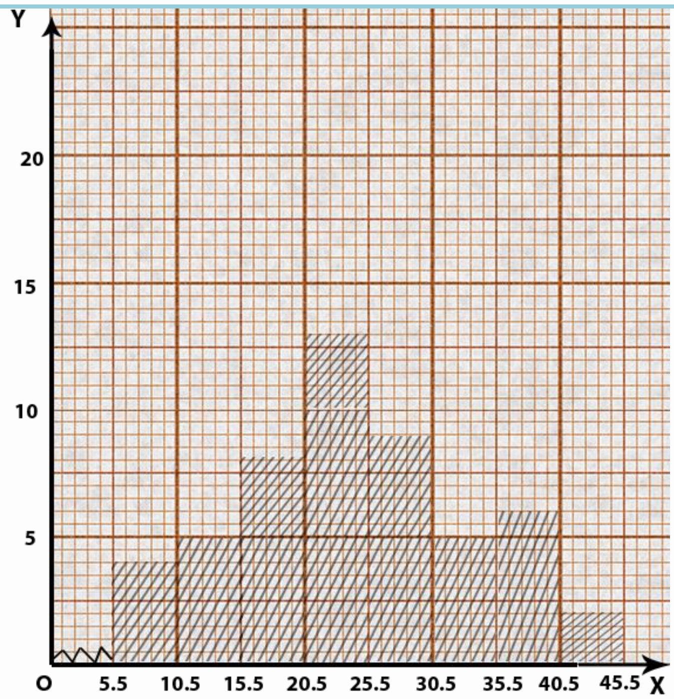
শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	ট্যালি	গণসংখ্যা f_i	মধ্যমান × গণসংখ্যা $f_i x_i$
6 – 10	8	||||	4	32
11 –15	13	~~||||~~	5	65
16 –20	18	~~||||~~ |||	8	144
21 –25	23	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13	299
26 –30	28	~~||||~~ ||||	9	252
31 –35	33	~~||||~~	5	165
36 –40	38	~~||||~~ |	6	228
41–45	43	||	2	86
মোট			n = 52	$\sum f_i x_i$ = 1271

∴ নির্ণেয় গড় = $\frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{1271}{52} = 24.44$

অতএব সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ তাপমাত্রার গড় 24.44 (প্রায়)

গ. আয়তলেখ অঙ্কনের জন্য শ্রেণিব্যাপ্তি অবিচ্ছিন্ন করা হলো:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা
6 – 10	5.5 –10.5	4
11 –15	10.5 –15.5	5
16 –20	15.5 –20.5	8
21 –25	20.5 –25.5	13
26 –30	25.5 –30.5	9
31 –35	30.5 –35.5	5
36 –40	35.5 –40.5	6
41–45	40.5 –45.5	2



↑গণসংখ্যা → শ্রেণি সীমা

ছক কাগজের X অক্ষ বরাবর প্রতি ঘরকে অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমার এক একক এবং Y অক্ষ বরাবর প্রতি দুই ঘরকে গণসংখ্যার এক একক ধরে প্রদত্ত আয়তলেখ অঙ্কন করা হলো। মূলবিন্দু হতে 5.5 পর্যন্ত আছে বোঝাতে ভাঙ্গা চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে। আয়তলেখ হতে দেখা যায় যে বেশি তাপমাত্রা 20.5-25.5 শ্রেণিতে। তাই প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য আয়তের উপরিভাগের কৌণিক বিন্দুদ্বয় থেকে দুইটি আড়াআড়ি রেখাংশের আগের ও পরের আয়তের উপরিভাগের কৌণিক বিন্দুর সাথে সংযোগ করা হয়েছে। এদের ছেদ বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর যে লম্ব টানা হয়েছে তা x-অক্ষকে 23.5 বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং প্রচুরক হলো 23.5 (প্রায়)।

My School 4D