অধ্যায় ৫: বিন্যাস ও সমাবেশ

১ নং প্রশ্নের সমাধান:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\-3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}6 & -2 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$ ৩টি ম্যাট্রিক্স

ক. ‘CALCULUS’ শব্দটির বর্ণগুলি হতে সবগুলি বর্ণ একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর। এদের মধ্যে কতগুলিতে প্রথম ও শেষ অক্ষর U থাকে?

খ. ম্যাট্রিক্স A নির্ণয় কর।

গ. $A^{-1}X=P^T$ হতে গঠিত সমীকরণ জোটকে ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর।

(ক). এর সমাধান:

Calculus শব্দটিতে মোট ৪টি বর্ণ আছে যার মধ্যে ২টি c, ২টি l এবং ২টি u বাকিগুলো ভিন্ন।

সবগুলো নিয়ে সাজানো যায় $=\dfrac{8!}{2!2!2!}=5040(Ans.)$

আবার,

১ম ও শেষ অক্ষর u রেখে অবশিষ্ট ৬টি সাজানো যায় $\dfrac{6!}{2!2!}$ প্রকার।

$=180(Ans.)$

(খ). এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\-3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

এখন, $\det(A^{-1})=A^{-1}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\-3 & -3 & -1\\2 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$=1(0+1)-3(0+2)+2(-3+6)$

$=1-6+6=1$

A^{-1} ম্যাট্রিক্সের সহগুণক যথাক্রমে

$A_{11}=(0+1)=1; A_{12}=-(0+2)=-2; A_{13}=-3+6=3$

$A_{21}=-(0-2)=2; A_{22}=(0-4)=-4; A_{23}=-(1-6)=5$

$A_{31}=(-3+6)=3; A_{32}=-(-1+6)=-5; A_{33}=-3+9=6$

$$\therefore adj(A^{-1})=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 5\\3 & -5 & 6\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & -4 & -5\\3 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{\det(A^{-1})}adj(A^{-1})=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & -4 & -5\\3 & 5 & 6\end{bmatrix}(Ans.)$$

(গ). এর সমাধান:

$A^{-1}X=P^T$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} x+3y+2z \\ -3x-3y-z \\ 2x+y+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore x+3y+2z=6$

$-3x-3y-z=-2$

$2x+y=1$

এখানে, $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} =1(0+1)-3(0+2)+2(-3+6) \\ =1-6+6 \\ =1 \end{matrix}$

$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} =6(0+1)-3(0+1)+2(-2+3) \\ =6-3+2=5 \end{matrix}$

$D_y=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} =1(0+1)-6(0+2)+2(-3+4) \\ =1-12+2=-9 \end{matrix}$

$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} =1(-3+2)-3(-3+4)+6(-3+6) \\ =-1-3+18=14 \end{matrix}$

$\therefore x\frac{D^x}{D}=5; y=\frac{D_y}{\quad}=-9; z=\frac{D_z}{D}=14$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x,y,z)=(5,-9,14)$

২ নং প্রশ্নের সমাধান:

গণিতে ব্যবহৃত অঙ্কগুলি 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 এবং PERMUTATION শব্দটির অর্থ বিন্যাস।

ক. ঢাকা শহরের টেলিফোন নম্বরগুলি 9 অঙ্কের যার প্রথম দুইটি কোড নম্বর 02 হলে গাণিতিক অঙ্ক ব্যবহার করে কতগুলি টেলিফোন সংযোগ দেওয়া যাবে?

খ. প্রথম পাঁচটি অঙ্ক পাঁচটি সরলরেখার দৈর্ঘ্য সূচিত করলে রেখাগুলি দ্বারা কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে?

গ. স্বরবর্ণগুলিকে জোড় স্থানে রেখে উদ্দীপকের ইংরেজী শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায়?

(ক). এর সমাধান:

মোট অঙ্ক সংখ্যা 10 টি। টেলিফোন নম্বরগুলি 9 অঙ্কনবিশিষ্ট যার প্রথম দুইটি অঙ্ক 0 2 ।

$\therefore (9-2)$ বা 7 টি খালি ঘর রয়েছে। 10 টি অঙ্ক দ্বারা 7 টি খালিঘর পূরণ করা যাবে 7^{10} উপায়ে।
মোট টেলিফোন সংযোগ দেওয়া যাবে
$=7^{10}$ = 282475249 টি।

(খ). এর সমাধান:

প্রথম পাঁচটি অঙ্ক (1, 2, 3, 4, 5) সরলরেখার দৈর্ঘ্য সূচিত করলে এই 5 টি থেকে 3 টি সরলরেখা নিয়ে ত্রিভুজ ত্রিভুজ গঠন করা যায়।
$^5C_3$ অর্থাৎ 10টি। আমারা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর
ফলে (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5)
কম্বিনেশন দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় না।
নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা। 10-7 = 3 টি (Ans.)

(গ). এর সমাধান:

PERMUTATION শব্দটিতে মোট 11 টি অক্ষর আছে, যার মধ্যে 5টি স্বরবর্ণ এবং 6 টি ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। 1 থেকে 11 এর মধ্যে জোড় স্থান 5 টি এবং বিজোড় স্থান 6টি আছে।
এখন, 5টি স্বরবর্ণ দ্বারা 5টি জোড় স্থানকে পূরণ করা যাবে 5!উপায়ে।
আবার, যেহেতু ব্যঞ্জনবর্ণের মধ্যে 2 টি T রয়েছে। সুতরাং 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা 6টি বিজোড় স্থানকে পূরণ করা যাবে $\frac{6!}{2!}$ উপায়ে।

$\therefore$ শব্দটিতে মোট বিন্যাস সংখ্যা = $5!\times\frac{6!}{2!}=120\times\frac{720}{2}=43200(Ans.)$

৩ নং প্রশ্নের সমাধান:

কোন শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে 6 জন বিজ্ঞান ও 4 জন কলা বিভাগের শিক্ষার্থী GEOGRAPHY নেয়নি।
ক. $^{n-c}C_6 = {}^{n-a}C_8$ হলে, n এর মান নির্ণয় কর।
খ. অন্তত 2জন বিজ্ঞান ও 2জন কলা বিভাগের শিক্ষার্থীদের নিয়ে 6 জনের কমিটি কত উপায়ে গঠন করা যাবে?
গ. 'GEOGRAPHY' শব্দটির স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে না রেখে কত প্রকারে বিন্যাস করা যায়।

(ক). এর সমাধান:

ক. দেওয়া আছে, $^{n-c}C_6 = {}^{n-a}C_8$
বা, $\frac{(n-1)!}{6!(n-7)!}=\frac{(n-1)!}{8!(n-9)!}$
বা, $\frac{1}{(n-7)(n-8)}=\frac{1}{7\times 8}$
বা, 56 = n^2 - 15n + 56
বা, n(1 - 15)=0
$\therefore n=0,15$
n = 0 গ্রহণযোগ্য নয়।
অর্থাৎ n এর মান 15 (Ans.)

(খ). এর সমাধান:

অন্তত 2 জন বিজ্ঞান ও 2জন কলা বিভাগের শিক্ষার্থীদের নিয়ে 6 জনের কমিটি নিম্নরুপে গঠন করা যায়:

বিজ্ঞান বিভাগ	কলা বিভাগ
2	4
3	3
4	2

∴ নির্ণেয় উপায় সংখ্যা = $^6C_2 \times ^4C_4 + ^6C_3 \times ^4C_3 + ^6C_4 \times ^4C_2$

$= 15 + 80 + 90 = 185 (Ans.)$

(গ). এর সমাধান:

GEOGRAPHY শব্দটিতে E, O, A এই তিনটি স্বরবর্ণ আছে। আবার বাকি 6 টি ব্যাঞ্জনবর্ণের মধ্যে G আছে 2 বার বিদ্যমান।

∴ স্বরবর্ণগুলিকে একটি বর্ণ বিবেচনা করে মোট বর্ণ হয় 7 টি।

7 টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায় $\frac{7!}{2!}$ উপায় = 2520 উপায়ে

আবার 3টি স্বরবর্ণকে নিজেদের মধ্যে সাজানো যায়

= 3! উপায়ে = 6 উপায়ে

∴ স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে রেখে বিন্যাস করা যায়

$(6 \times 2520) = 15120$ উপায়ে

এখন GEOGRAPHY শব্দের 9 টি বর্ণকে নিজেদের মধ্যে বিন্যাস করা যায় = $\frac{9!}{2!}$ উপায়ে = 181440 উপায়ে

∴ স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে না রেখে বিন্যাস সংখ্যা

= (181440 - 15120) টি = 166320 টি (Ans.)

৪ নং প্রশ্নের সমাধান:

"MATHEMATICS" একটি ইংরেজী শব্দ।

ক. শব্দটির সবগুলি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

খ. প্রমাণ করো যে, n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক ও (r – 1) সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যার সমষ্টি, (n + 1) সংখ্যক বস্তু থেকে r সনংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যার সমান।

গ. প্রদত্ত শব্দটির বর্ণগুলি হতে 1টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জন বর্ণ নিয়ে কতগুলি বিন্যাস পাওয়া যাবে?

(ক). এর সমাধান:

"MATHEMATICS" **শব্দটিতে মোট অক্ষর** 11 **টি যার মধ্যে** 2 **টি** M, 2**টি** A, 2 **টি** T, **এবং অবশিষ্টগুলো ভিন্ন ভিন্ন।**

সুতরাং, মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{11!}{2!2!2!} = 4989600 (Ans.)$

(খ). এর সমাধান:

$$^nC_r + ^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-r+1)(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right\}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= {}^{n+1}C_r$$

(গ). এর সমাধান:

"MATHEMATICS " শব্দটিতে স্বরবর্ণ 4টি এবং ব্যঞ্জনবর্ণ 7টি।

$\therefore$ শব্দটির বর্ণগুলি হতে 1টি স্বরবর্ণ ও 2টি ভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = ${}^3C_1 \times {}^5C_2 \times 3! = 180$

এবং 1 টি স্বরবর্ণ ও 2 জোড়া অভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ থেকে 1 জোড়া নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = ${}^3C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{3!}{2!} = 18$

$\therefore$ মোট বিন্যাস = 180 +18 = 198 (Ans.)