

অধ্যায়-২: বীজগাণিতিক রাশি

প্রশ্ন ▶ ১ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $g(a) = \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি। [ঢা. বো. ১৬]

ক. $f(-3)$ এর মান কত? ২

খ. $f(x)$ কে $x - p$ এবং $x - q$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে সেখানে $p \neq q$, তবে দেখাও যে, $p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0$

গ. $g(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$
 $\therefore f(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 + 6(-3) + 8$
 $= -27 + 45 - 18 + 8 = 53 - 45 = 8$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$$\therefore f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

$f(x)$ কে $(x - p)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(p)$.

$$\therefore f(p) = p^3 + 5p^2 + 6p + 8$$

আবার, $f(x)$ কে $(x - q)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(q)$.

$$\therefore f(q) = q^3 + 5q^2 + 6q + 8$$

প্রশ্নানুসারে, $f(p) = f(q)$

$$\text{বা, } p^3 + 5p^2 + 6p + 8 = q^3 + 5q^2 + 6q + 8$$

$$\text{বা, } p^3 - q^3 + 5(p^2 - q^2) + 6(p - q) = 0$$

$$\text{বা, } (p - q)(p^2 + pq + q^2) + 5(p + q)(p - q) + 6(p - q) = 0$$

$$\text{বা, } (p - q)(p^2 + pq + q^2 + 5p + 5q + 6) = 0$$

যেহেতু $p \neq q$, সেহেতু $p - q \neq 0$

$$\therefore p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে, $g(a) = \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$

$$\text{ধরি, } \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2} \equiv \frac{A}{a+1} + \frac{Ba+C}{a^2+1} + \frac{Da+E}{(a^2+1)^2} \dots(i)$$

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(a+1)(a^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2a \equiv A(a^2+1)^2 + (Ba+C)(a+1)(a^2+1) + (Da+E)(a+1) \dots(ii)$$

(ii) নং এ $a = -1$ বসিয়ে পাই, $2(-1) = A(1+1)^2$

বা, $-2 = 4A$ বা, $A = -\frac{2}{4} \therefore A = -\frac{1}{2}$

(ii) নং থেকে,

$$2a \equiv A(a^4 + 2a^2 + 1) + (Ba + C)(a^3 + a + a^2 + 1) + Da^2 + Da + Ea + E$$

$$\text{বা, } 2a \equiv Aa^4 + 2Aa^2 + A + Ba^4 + Ba^2 + Ba^3 + Ba + Ca^3 + Ca + Ca^2 + C + Da^2 + Da + Ea + E$$

$$\therefore 2a \equiv (A + B)a^4 + (B + C)a^3 + (2A + B + C + D)a^2 + (B + C + D + E)a + (A + C + E)$$

a^4, a^3, a^2 ও a এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A + B = 0$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2} + B = 0 \left[\because A = -\frac{1}{2} \right]$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

আবার, $B + C = 0$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} + C = 0 \therefore C = -\frac{1}{2}$$

আবার, $2A + B + C + D = 0$

$$\text{বা, } 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + D = 0 \text{ বা, } -1 + D = 0 \therefore D = 1$$

আবার, $B + C + D + E = 2$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + E = 2 \text{ বা, } E = 2 - 1 \therefore E = 1$$

এখন, A, B, C, D ও E এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2} &= \frac{-\frac{1}{2}}{a+1} + \frac{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}}{a^2+1} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2(a+1)} + \frac{a-1}{2(a^2+1)} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2} \end{aligned}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ২ x, y, z এর একটি বহুপদী হলো, [ঢা. বো. ১৫]

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$,

$$x + y + z \neq 0 \text{ হয়, তবে দেখাও যে, } x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx. \quad 8$$

গ. যদি $x = b + c - a, y = c + a - b$ ও $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c)$

$$= 1 \text{ : 4.} \quad 8$$

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } F(y, z, x) &= y^3 + z^3 + x^3 - 3yzx = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= F(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{আবার, } F(z, x, y) &= z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= F(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\therefore F(x, y, z) = F(y, z, x) = F(z, x, y)$$

অতএব, $F(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y) - 3xyz \\ &= (x + y + z)^3 - 3(x + y)z(x + y + z) - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z) \{ (x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy \} \\ &= (x + y + z) \{ (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 - 3z(x + y) - 3xy \} \\ &= (x + y + z) \{ x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - z(x + y) - 3xy \} \\ &= (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

প্রশ্নমতে, $F(x, y, z) = 0$

$$\therefore (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

যেহেতু, $x + y + z \neq 0$

$$\text{সুতরাং } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$x = b + c - a$$

$$y = c + a - b$$

$$\text{এবং } z = a + b - c$$

‘খ’ হতে পাই,

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \frac{1}{2} (x + y + z) (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\ &= \frac{1}{2} (x + y + z) \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (b + c - a + c + a - b + a + b - c) \{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{1}{2} (a + b + c) \{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$$

$$= \frac{1}{2} (a + b + c) \{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} (a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

$$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \left[\because \frac{1}{2} (a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \right]$$

$$= 4 \cdot F(a, b, c).$$

$$\text{বা, } F(x, y, z) = 4 F(a, b, c)$$

$$\text{বা, } \frac{F(x, y, z)}{F(a, b, c)} = 4$$

$$\text{বা, } \frac{F(a, b, c)}{F(x, y, z)} = \frac{1}{4} \text{ [বিপরীতকরণ করে]}$$

$$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ▶ ৩ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ এবং $g(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$ দুটি ফাংশন। [রা. বো. ১৬]

ক. $f(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(-1)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদিও কেবল যদি $3x - 1 > 0$ হয়।

$$\text{বা, } 3x - 1 + 1 > 0 + 1 \text{ বা, } 3x > 1$$

$$\therefore x > \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{ফাংশনের ডোমেন} = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{3}\} \text{ (Ans.)}$$

খ ধরি, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

বা, $y^2 = \frac{1}{3x-1}$ [বর্গ করে]

বা, $3x-1 = \frac{1}{y^2}$ বা, $3x = \frac{1}{y^2} + 1$

বা, $3x = \frac{1+y^2}{y^2}$ বা, $x = \frac{1+y^2}{3y^2}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{3y^2}$ [$f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)$]

$$\therefore f^{-1}(-1) = \frac{1+(-1)^2}{3(-1)^2} = \frac{1+1}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2}{x^2-16} = \frac{x^2-16+16}{x^2-16} = \frac{x^2-16}{x^2-16} + \frac{16}{x^2-16} \\ &= 1 + \frac{16}{(x+4)(x-4)} \end{aligned}$$

ধরি, $\frac{16}{(x+4)(x-4)} \equiv \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4}$ (i)

(i) নং কে $(x+4)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$16 \equiv A(x-4) + B(x+4) \text{ (ii)}$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এ $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$$16 = A(-4-4) + B(-4+4)$$

বা, $16 = -8A$

$$\therefore A = -2$$

আবার, (ii) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 = A(4-4) + B(4+4)$$

বা, $16 = 8B$

$$\therefore B = 2$$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{16}{(x+4)(x-4)} = \frac{-2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} = 1 - \frac{2}{(x+4)} + \frac{2}{(x-4)} \text{ যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।}$$

প্রশ্ন ▶ ৪ $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$ এবং $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$.
[রা. বো. ১৫]

ক. $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূপে লিখে এর মূখ্যসহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$

x চলকের আদর্শরূপে লিখে পাই,

$$P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$$

এখানে, বহুপদীর মাত্রা = 3

\therefore মূখ্য সহগ = 10 (Ans.)

খ এখানে, $P(x)$ এর ধ্রুবপদ 9 এর উৎপাদকসমূহের সেট,

$$F_1 = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$$

$P(x)$ এর মূখ্য সহগ 10 এর উৎপাদক সমূহের সেট,

$$F_2 = \{1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\}$$

এখন, $P(x)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $x = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1, s \in F_2$

তাহলে,

$$x = 1 \text{ হলে, } P(1) = 10.(1)^3 - (1)^2 + 15.1 + 9 \neq 0$$

$$x = -1 \text{ হলে, } P(-1) = 10.(-1)^3 - (-1)^2 + 15.(-1) + 9 \neq 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ হলে, } P\left(\frac{1}{2}\right) = 10.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 15.\left(\frac{1}{2}\right) + 9 \neq 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ হলে, } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 15.\left(-\frac{1}{2}\right) + 9 = 0$$

$\therefore \left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$ বা, $\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন,

$$P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$$

$$= 10x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 3x + 18x + 9$$

$$= 10x^2\left(x + \frac{1}{2}\right) - 6x\left(x + \frac{1}{2}\right) + 18\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x + \frac{1}{2}\right) (10x^2 - 6x + 18) \\
&= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) (5x^2 - 3x + 9) \\
&= (2x + 1) (5x^2 - 3x + 9) \text{ (Ans.)}
\end{aligned}$$

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই,

$$\begin{aligned}
\therefore Q(x) &= x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x^2 + 3x - 2x - 6) \\
&= x\{x(x + 3) - 2(x + 3)\} = x(x + 3)(x - 2)
\end{aligned}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$$= \frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)} \quad [x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)]$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3} \dots\dots (i)$$

উভয়পক্ষকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 + x - 1 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2) \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$-1 = A \cdot (-2) \cdot 3 \text{ বা, } -6A = -1 \therefore A = \frac{1}{6}$$

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 + 2 - 1 = A(2 - 2)(2 + 3) + B \cdot 2 \cdot (2 + 3) + C \cdot 2(2 - 2)$$

$$\text{বা, } 4 + 2 - 1 = B \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{বা, } 10B = 5$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 + (-3) - 1 = A(-3 - 2)(-3 + 3) + B \cdot (-3)(-3 + 3) + C \cdot (-3)(-3 - 2)$$

$$\text{বা, } 9 - 3 - 1 = C \cdot (-3)(-5).$$

$$\text{বা, } 15C = 5$$

$$\therefore C = \frac{1}{3}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৫ $P(x) = x^2 + x - 12$, $Q(x) = 9x + 2$. [দি. বো. ১৬]

ক. $F(x) = \frac{2x}{x+3}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $2x - a$ এবং $2x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a + b + 2 = 0$ ৪

গ. $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{2x}{x+3}$

$F(x) = \frac{2x}{x+3} \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি $x + 3 \neq 0$ হয়

$$\therefore x \neq -3$$

$$\therefore \text{ডোম, } F = \nabla - \{-3\} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = x^2 + x - 12$

$P(x)$ কে $(2x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(\frac{a}{2}\right)$

$$\therefore P\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} - 12$$

আবার, $P(x)$ কে $(2x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(\frac{b}{2}\right)$ ।

$$\therefore P\left(\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b}{2} - 12$$

$$\text{শর্তানুসারে, } \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} - 12 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b}{2} - 12$$

$$\text{বা, } \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} - 12 = \frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} - 12$$

$$\text{বা, } a^2 + 2a - 48 = b^2 + 2b - 48$$

$$\text{বা, } a^2 + 2a - 48 - b^2 - 2b + 48 = 0$$

$$\text{বা, } a^2 - b^2 + 2a - 2b = 0$$

$$\text{বা, } (a + b)(a - b) + 2(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } (a + b + 2)(a - b) = 0$$

যেহেতু $a \neq b$

$$\therefore a + b + 2 = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$P(x) = x^2 + x - 12$$

$$\text{এবং } Q(x) = 9x + 2$$

$$\text{এখন, } x^2 + x - 12 = x^2 + 4x - 3x - 12 = x(x + 4) - 3(x + 4) \\ = (x + 4)(x - 3)$$

$$\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{9x + 2}{x^2 + x - 12} = \frac{9x + 2}{(x + 4)(x - 3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{9x + 2}{(x + 4)(x - 3)} \equiv \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 3} \dots \dots \dots (i)$$

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 4)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$9x + 2 \equiv A(x - 3) + B(x + 4) \dots \dots \dots (ii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$$9(-4) + 2 = A(-4 - 3) + B(-4 + 4)$$

$$\text{বা, } -36 + 2 = -7A$$

$$\text{বা, } -34 = -7A$$

$$\therefore A = \frac{34}{7}$$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$$9 \cdot 3 + 2 = A(3 - 3) + B(3 + 4)$$

$$\text{বা, } 29 = 7B$$

$$\therefore B = \frac{29}{7}$$

A ও B এর মান সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{9x + 2}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{\frac{34}{7}}{x + 4} + \frac{\frac{29}{7}}{x - 3}$$

$$\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{34}{7(x + 4)} + \frac{29}{7(x - 3)} \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ ৬ $f(y) = \frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3}$ [দি. বো. ১৫]

ক. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(y) = 0$ হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(y)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(y) = \frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3}$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3} \\ &= \frac{-\frac{1}{27} - 2 \cdot \frac{1}{9} + 1}{\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3} = \frac{-1 - 6 + 27}{1 + 6 - 27} = \frac{20}{27} \times \frac{9}{(-20)} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ (Ans.)

খ যদি, $f(y) = 0$ হয়,

$\therefore \frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = 0$

বা, $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$

ধরি, $g(y) = y^3 - 2y^2 + 1$

$\therefore g(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore (y - 1)$, $g(y)$ এর একটি উৎপাদক।

বা, $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$

বা, $y^3 - y^2 - y^2 + y - y + 1 = 0$

বা, $y^2(y - 1) - y(y - 1) - 1(y - 1) = 0$

বা, $(y - 1)(y^2 - y - 1) = 0$

হয়, $y - 1 = 0$ অথবা, $y^2 - y - 1 = 0$

$1 = 0$ এখানে, সমীকরণটিকে

$\therefore y = 1$ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে

তুলনা করে পাই,

$$a = 1, b = -1, c = -1$$

$$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$=$$

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-1)}}{2.1}$$

$$\therefore y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\therefore y$ এর মানগুলো $1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (Ans.)

গ রাশিটি : $\frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3}$

এখন, $\frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = \frac{y(y^2 - 2y - 3) + 3y + 1}{y^2 - 2y - 3}$

$$= y + \frac{3y + 1}{(y - 3)(y + 1)}$$

$\therefore \frac{3y + 1}{(y - 3)(y + 1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{3y + 1}{(y - 3)(y + 1)} \equiv \frac{A}{y - 3} + \frac{B}{y + 1}$(i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে $(y - 3)(y + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই-

$$3y + 1 \equiv A(y + 1) + B(y - 3)$$
.....(ii)

সমীকরণ (ii) নং এর উভয়পক্ষে $y = -1$ বসিয়ে পাই,

$$3(-1) + 1 = A(-1 + 1) + B(-1 - 3)$$

$$\text{বা, } -3 + 1 = A.0 - 4B$$

$$\text{বা, } -2 = -4B$$

$$\therefore B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

আবার, সমীকরণ (ii) নং এর উভয়পক্ষে $y = 3$ বসিয়ে পাই,

$$3.3 + 1 = A(3 + 1) + B(3 - 3)$$

$$\text{বা, } 9 + 1 = 4.A + B.0 \text{ বা, } 10 = 4A$$

$$\therefore A = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

A ও B এর মান সমীকরণ (i)নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3y+1}{(y-3)(y+1)} = \frac{\frac{5}{2}}{y-3} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ: } \frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = y + \frac{\frac{5}{2}}{y-3} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1}$$

$$= y + \frac{5}{2(y-3)} + \frac{1}{2(y+1)}$$

প্রশ্ন ▶ ৭ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$ দুটি বীজগণিতীয় সমীকরণ। [কু. বো. ১৭]

ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6)$$

$$= x(x^2 + 3x - 2x - 6) = x\{x(x+3) - 2(x+3)\}$$

$$= x(x+3)(x-2) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$

যেহেতু $(3x + 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক, তাই, $(3x + 2)$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\text{বা, } 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + a = 0$$

$$\text{বা, } -18 \cdot \frac{8}{27} + 15 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} + a = 0 \quad \text{বা, } a = \frac{16}{3} - \frac{20}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } a = \frac{16 - 20 - 2}{3} \quad \text{বা, } a = \frac{-6}{3}$$

$$\therefore a = -2 \text{ (Ans.)}$$

গ সৃজনশীল ৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮

প্রশ্ন ▶ ৮ $p(x) = x^3 + x^2 - 6x$ এবং $f(x) = x^2 - 9x - 6$ দুটি ফাংশন। [চ. বো. ১৬]

ক. $f(x)$ কে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

২

খ. $p(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + a + b = 6$. ৪

ভ (গ)
গ. $\frac{f(x)}{p(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$f(x) = x^2 - 9x - 6$$

এখন, $f(x)$ কে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-3)$ ।

$$\therefore f(-3) = (-3)^2 - 9(-3) - 6 = 9 + 27 - 6 = 30 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$p(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

$p(x)$ কে $(x - a)$ ও $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে যথাক্রমে $p(a)$ ও $p(b)$ ।
প্রশ্নানুসারে,

$$p(a) = p(b)$$

$$\text{বা, } a^3 + a^2 - 6a = b^3 + b^2 - 6b$$

$$\text{বা, } a^3 - b^3 + a^2 - b^2 - 6(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b)(a - b) - 6(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b - 6) = 0$$

$$\text{বা, } a^2 + ab + b^2 + a + b - 6 = 0 \text{ [যেহেতু } a \neq b \text{ সেহেতু } a - b \neq 0]$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 + a + b = 6 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ $\frac{f(x)}{p(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x^2 + x - 6)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x^2 + 3x - 2x - 6)}$

$$\therefore \frac{f(x)}{p(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3} \dots\dots\dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2) \dots\dots (ii)$$

যা x -এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$0 - 0 - 6 = A(0 - 2)(0 + 3) + 0 + 0$$

$$\text{বা, } -6 = -6A$$

$$\therefore A = 1$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 - 9 \cdot 2 - 6 = 0 + B \cdot 2(2 + 3) + 0$$

$$\text{বা, } -20 = 10B \therefore B = -2$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-3 - 2)$$

$$\text{বা, } 30 = 15C \therefore C = 2$$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশের প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৯ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $P(x) = \frac{x+3}{x^2+8x+15}$ [চ. বো. ১৫]

ক. $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $f(a)$ কে $(a-x)$ এবং $(a-y)$ দ্বারা ভাগ করলে
একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে,

$$x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0, \text{ যেখানে } x \neq y \text{।} \quad 8$$

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$$\therefore f(-2) = (-2)^3 + 5(-2)^2 + 6(-2) + 8 \\ = -8 + 20 - 12 + 8 = 8 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = \frac{x+3}{x^2+8x+15} = \frac{x+3}{x^2+5x+3x+15}$
$$= \frac{x+3}{(x+5)(x+3)} = \frac{1}{x+5}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে,

$f(a)$ কে $(a-x)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

এবং $f(a)$ কে $(a-y)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$$f(y) = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$$

শর্তানুসারে, $f(x) = f(y)$

$$\text{বা, } x^3 + 5x^2 + 6x + 8 = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$$

$$\text{বা, } x^3 - y^3 + 5(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0$$

$$\text{বা, } (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 5(x + y)(x - y) + 6(x - y) = 0$$

$$\text{বা, } (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5x + 5y + 6) = 0$$

$$\text{বা, } (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6) = 0$$

কিন্তু, $x - y \neq 0$

$$\therefore x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0 \text{ [যেখানে } x \neq y \text{] (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ১০ $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা

$p \neq 0, s \neq 0$ এবং $x - 1$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক। অপর একটি রাশি $Q(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16}$ । [সি. বো. ১৬]

ক. দেখাও যে, $p + q + r + s = 0$ । ২

খ. যদি $p = 1, q = 5, r = 6, s = 8$ হয় এবং $g(x)$ কে $x - k$ ও $x - l$ দ্বারা ভাগ করিলে একই অবশিষ্ট থাকে, যেখানে $k \neq l$ তবে দেখাও যে, $k^2 + l^2 + kl + 5k + 5l + 6 = 0$ । ৪

গ. $Q(x)$ -কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

$(x - 1), g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

অর্থাৎ, $g(1) = 0$

$$\text{বা, } p \cdot (1)^3 + q \cdot (1)^2 + r \cdot 1 + s = 0$$

$$\therefore p + q + r + s = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ এখানে,

$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

এবং $p = 1, q = 5, r = 6, s = 8$

$$\therefore g(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

অতঃপর সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৭

গ দেওয়া আছে,

$$Q(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16} = \frac{x(x^2 - 16) + 16x}{x^2 - 16} = x + \frac{16x}{x^2 - 16}$$

$$= x + \frac{16x}{(x+4)(x-4)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{16x}{(x+4)(x-4)} \equiv \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} \dots\dots\dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x+4)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$16x \equiv A(x-4) + B(x+4) \dots\dots\dots (ii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$$16 \times (-4) = A(-4-4) + B(-4+4)$$

$$\text{বা, } -64 = -8A \therefore A = 8$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 \times 4 = A(4-4) + B(4+4)$$

$$\text{বা, } 64 = 8B \therefore B = 8$$

A ও B এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$$\frac{16x}{(x+4)(x-4)} = \frac{8}{x+4} + \frac{8}{x-4} = 8 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} \right)$$

$$\therefore Q(x) = x + 8 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} \right)$$

যা প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ১১ $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ / য. বো. ১৭/

ক. $P(x)$ এর মাত্রা ও মুখ্য সহগের অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে $x - m$ এবং $x - n$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n + 11 = 0$. ৪

গ. $\frac{x^3}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

এখানে, চলক x এর সর্বোচ্চ ঘাত = 3

$\therefore P(x)$ এর মাত্রা = 3

এবং $P(x)$ এর মুখ্য সহগ = 1

\therefore মাত্রা ও মুখ্য সহগের অনুপাত = 3 : 1 (Ans.)

খ $P(x)$ কে $(x - m)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(m)$

$$\therefore P(m) = m^3 - 6m^2 + 11m - 6$$

এবং $P(x)$ কে $(x - n)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(n)$

$$\therefore P(n) = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$

প্রশ্নমতে, $P(m) = P(n)$

$$\text{বা, } m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$

$$\text{বা, } m^3 - n^3 - 6m^2 + 6n^2 + 11m - 11n = 0$$

$$\text{বা, } (m - n)(m^2 + mn + n^2) - 6(m + n)(m - n) + 11(m - n) = 0$$

$$\text{বা, } (m - n)(m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n + 11) = 0$$

$$\text{স্ব } m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n + 11 = 0 \quad [\square m \neq n \text{ বলে } m - n \neq 0]$$

(দেখানো হলো)

$$\text{গ } P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$$

$$= x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\text{স্ব } \frac{x^3}{P(x)} = \frac{x^3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন▶১২ $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ এবং $Q(x) = x^2 - 2x - 8$. [য. বো. ১৬]

ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $\frac{x^2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $Q(x)$ হলে, a এবং b এর মান নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$Q(x) = x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8$$

$$= x(x - 4) + 2(x - 4) = (x - 4)(x + 2) \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ } \frac{x^2}{Q(x)} = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x^2 - 2x - 8) + (2x + 8)}{x^2 - 2x - 8}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 2x - 8} + \frac{2x + 8}{x^2 - 2x - 8}$$

$$= 1 + \frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} \text{ [ক হতে প্রাপ্ত]}$$

$$\therefore \frac{x^2}{Q(x)} = 1 + \frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} \dots\dots\dots (i)$$

ধরি, $\frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} \equiv \frac{A}{(x - 4)} + \frac{B}{(x + 2)}$ (ii)

(ii) নং কে $(x - 4)(x + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x + 8 \equiv A(x + 2) + B(x - 4) \text{ (iii)}$$

(iii) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$2 \cdot 4 + 8 = A(4 + 2) + B(4 - 4)$$

$$\text{বা, } 8 + 8 = A \cdot 6 + B \cdot 0$$

$$\text{বা, } 6A = 16 \text{ বা, } A = \frac{16}{6}$$

$$\therefore A = \frac{8}{3}$$

আবার, (iii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$2(-2) + 8 = A(-2 + 2) + B(-2 - 4)$$

$$\text{বা, } -4 + 8 = A \cdot 0 + B(-6)$$

$$\text{বা, } 4 = -6B \quad \text{বা, } B = \frac{-4}{6} \quad \therefore B = \frac{-2}{3}$$

এখন, A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{\frac{8}{3}}{x - 4} + \frac{\frac{-2}{3}}{x + 2} = \frac{8}{3(x - 4)} - \frac{2}{3(x + 2)}$$

$$(i) \text{ নং হতে পাই, } \frac{x^2}{Q(x)} = 1 + \frac{8}{3(x - 4)} - \frac{2}{3(x + 2)} \text{ (Ans.)}$$

গ 'ক' হতে পাই,

$$Q(x) = (x - 4)(x + 2)$$

$$\text{দেওয়া আছে, } P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$$

$(x - 4)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $P(4) = 0$ হবে।

$$\therefore P(4) = 4^3 - 4^2 + a(4) + b = 64 - 16 + 4a + b = 4a + b + 48$$

$$\text{শর্তমতে, } 4a + b + 48 = 0 \text{ (iv)}$$

আবার, $(x + 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $P(-2) = 0$ হবে।

$$\therefore P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + b$$

$$= -8 - 4 - 2a + b = -2a + b - 12$$

$$\text{শর্তমতে, } -2a + b - 12 = 0 \text{ (v)}$$

(iv) নং থেকে (v) নং বিয়োগ করে পাই,

$$4a + b + 48 + 2a - b + 12 = 0$$

$$\text{বা, } 6a + 60 = 0 \text{ বা, } 6a = -60 \therefore a = -10$$

a এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই,

$$-2(-10) + b - 12 = 0$$

$$\text{বা, } 20 + b - 12 = 0 \text{ বা, } b + 8 = 0 \therefore b = -8$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান } a = -10 \text{ এবং } b = -8$$

প্রশ্ন ১৩ $F(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ একটি বহুপদী। [য. বো. ১৫]

ক. $F(x)$ কে $(2x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. $F(x) = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x}{F(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

$$F(x) \text{ কে } (2x + 1) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $F\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \therefore F\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \\ &= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{4}{4} - \frac{6}{2} + 4 = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + 1 - 3 + 4 \\ &= \frac{1 - 6 + 16 - 48 + 64}{16} = \frac{27}{16} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ দেওয়া আছে, $F(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

$F(x)$ এর মুখ্য সহগ 1 এবং প্রবপদ 4

$F(x)$ এর প্রবপদ 4 এর উৎপাদকসমূহের সেট

$$= \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$$

$$\text{এখানে, } F(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 4(-1)^2 + 6(-1) + 4$$

$$= 1 - 3 + 4 - 6 + 4 = 0$$

$\therefore \{x - (-1)\}$, অর্থাৎ $(x + 1)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক

$$\text{আবার, } F(1) = (1)^4 + 3(1)^3 + 4(1)^2 + 6(1) + 4$$

$$= 18 \neq 0$$

$$F(-2) = (-2)^4 + 3(-2)^3 + 4(-2)^2 + 6(-2) + 4$$

$$= 16 - 24 + 16 - 12 + 4 = 0$$

∴ $\{x - (-2)\}$, অর্থাৎ $(x + 2)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

$$= x^4 + x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 4x + 4$$

$$= x^3(x + 1) + 2x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 4(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$$

$$= (x + 1)\{x^2(x + 2) + 2(x + 2)\}$$

$$= (x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$$

আবার, দেওয়া আছে, $F(x) = 0$

$$\text{বা, } x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\therefore (x + 1)(x + 2)(x^2 + 2) = 0$$

হয়, $x + 1 = 0$ অথবা $x + 2 = 0$ অথবা, $x^2 + 2 = 0$

$$\therefore x = -1 \quad \therefore x = -2, \quad \therefore x^2 = -2 \text{ (গ্রহণযোগ্য নয়)}$$

সুতরাং $x = -1, -2$ (Ans.)

গ $\frac{x}{F(x)} = \frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)}$ [$F(x)$ এর মান বসিয়ে]

$$\text{ধরি, } \frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} \dots \text{(i)}$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x \equiv A(x + 2)(x^2 + 2) + B(x + 1)(x^2 + 2)$$

$$+ (Cx + D)(x + 1)(x + 2) \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$-1 = A\{(-1) + 2\}\{(-1)^2 + 2\}$$

$$\text{বা, } -1 = A(1 \cdot 3) \text{ বা, } -1 = 3A$$

$$\therefore A = -\frac{1}{3}$$

আবার, (ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$-2 = B\{(-2) + 1\}\{(-2)^2 + 2\}$$

$$\text{বা, } -2 = B(-1) \times 6$$

$$\text{বা, } -2 = -6B$$

$$\therefore B = \frac{1}{3}$$

আবার, (ii) নং থেকে x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B + C = 0$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + C = 0$$

$$\therefore C = 0$$

$$\text{এবং } 2A + B + 3C + D = 0$$

$$\text{বা, } 2\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + D = 0$$

$$\text{বা, } \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} + D = 0 \quad \therefore D = \frac{1}{3}$$

(i) নং এ A, B, C, D এর মান বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x^2+2)} &= -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x^2+2)} \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+2} \right) \end{aligned}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১৪ $f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + c$, $g(x) = x^2 - 4x - 7$ এবং $h(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ হলো x চলকের তিনটি বহুপদী। [ব. বো. ১৭]

ক. $h(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে c এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{g(x)}{h(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $h(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

$$x = -1 \text{ বসালে } h(-1) = 0 \text{ হয়।}$$

অতএব $(x + 1)$, $h(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= x^3 - x^2 - 10x - 8 \\ &= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8 \\ &= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - 2x - 8) \\ &= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8) \\ &= (x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\} \\ &= (x + 1)(x + 2)(x - 4) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ সৃজনশীল ৭ (খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x^2 - 4x - 7$

“ক” থেকে পাই,

$$h(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)$$

$$\therefore \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x+2)(x-4)}$$

$$\therefore \frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x+2)(x-4)} \text{ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।}$$

$$\text{মনে করি, } \frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x+2)(x-4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4} \dots \dots (i)$$

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(x+1)(x+2)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x+2)(x-4) + B(x+1)(x-4) + C(x+1)(x+2) \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এর উভয় পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয় পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$1 + 4 - 7 = A(-1+2)(-1-4)$$

$$\text{বা, } -2 = A(-5) \therefore A = \frac{2}{5}$$

(ii) নং এর উভয় পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$4 + 8 - 7 = B(-2+1)(-2-4)$$

$$\text{বা, } 5 = B(-1)(-6) \therefore B = \frac{5}{6}$$

(ii) নং এর উভয় পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 - 16 - 7 = C(4+1)(4+2)$$

$$\text{বা, } -7 = C(5)(6)$$

$$\therefore C = -\frac{7}{30}$$

এখন A, B, C এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x+2)(x-4)} = \frac{2}{5(x+1)} + \frac{5}{6(x+2)} - \frac{7}{30(x-4)}$$

এটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১৫ $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ একটি ফাংশন যেখানে $x \neq 1$ ।/ব. বো. ১৬/

ক. $f(p) = k$ হলে, p এর মান k এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x^2)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$; যেখানে, $x \neq 1$

$$\therefore f(p) = \frac{2p + 2}{p - 1}$$

শর্তমতে, $f(p) = k$

$$\text{বা, } \frac{2p + 2}{p - 1} = k$$

$$\text{বা, } 2p + 2 = pk - k$$

$$\text{বা, } 2p - pk = -k - 2$$

$$\text{বা, } p(2 - k) = -(k + 2)$$

$$\text{বা, } p = \frac{-(k + 2)}{2 - k}$$

$$\therefore p = \frac{k + 2}{k - 2} \text{ (Ans.)}$$

১৮ ধরি, $y = f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$

$$\therefore y = \frac{2x + 2}{x - 1}$$

$$\text{বা, } xy - y = 2x + 2$$

$$\text{বা, } xy - 2x = y + 2$$

$$\text{বা, } x(y - 2) = y + 2$$

$$\text{বা, } x = \frac{y + 2}{y - 2}$$

$$\text{বা, } f^{-1}(y) = \frac{y + 2}{y - 2} \left[\begin{array}{l} \square f(x) = y \\ \therefore x = f^{-1}(y) \end{array} \right]$$

$$\therefore f^{-1}(3) = \frac{3 + 2}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5 \text{ (Ans.)}$$

১৯ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$

$$\therefore f(x^2) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{2(x^2 - 1 + 2)}{x^2 - 1} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 1} + \frac{4}{x^2 - 1}$$

$$\therefore f(x^2) = 2 + \frac{4}{(x + 1)(x - 1)} \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{ধরি, } \frac{4}{(x + 1)(x - 1)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} \dots\dots\dots(ii)$$

(ii) নং কে $(x + 1)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\therefore 4 \equiv A(x - 1) + B(x + 1) \dots\dots\dots(iii)$$

(iii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $4 = 2B \therefore B = 2$

(iii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই, $4 = -2A \therefore A = -2$

\therefore (ii) নং হতে পাই,

$$\frac{4}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

তাহলে (i) থেকে, $f(x^2) = 2 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1}$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১৬ $f(z) = z^3$ [রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ, রাজশাহী]

ক. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $\frac{1}{f(a)} + \frac{8}{f(b)} + \frac{27}{f(c)} = \frac{18}{abc}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 0 \text{ অথবা, } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \text{ ৪}$$

গ. $\frac{f(x)}{f(x)-1}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$$\therefore f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1 \\ = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$$

$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\text{এখন, } x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1 \\ = x^2(x + 1) + x(x + 1) + 1(x + 1) \\ = (x + 1)(x^2 + x + 1) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $\frac{1}{f(a)} + \frac{8}{f(b)} + \frac{27}{f(c)} = \frac{18}{abc}$

$$\text{বা, } \frac{1}{a^3} + \frac{8}{b^3} + \frac{27}{c^3} = \frac{18}{abc} \quad [\square f(z) = z^3]$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{2}{b}\right)^3 + \left(\frac{3}{c}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{c} = 0$$

$$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \quad \left[\frac{1}{a} = x, \frac{2}{b} = y \text{ I } z = \frac{3}{c} \text{ aGi} \right]$$

আমরা জানি,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\text{এখন, } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\
&= \frac{1}{2} \{(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)\} \\
&= \frac{1}{2} \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \\
\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
&= (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
&= \frac{1}{2} (x + y + z) \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} (x + y + z) \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

$$\text{বা, } (x + y + z) \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right) \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{b} - \frac{3}{c}\right)^2 + \left(\frac{3}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 \right\} = 0$$

[x, y ও z এর মান বসিয়ে]

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 0$$

আমরা জানি, কতগুলো রাশির বর্গের যোগফল 0 হলে তারা পৃথক পৃথকভাবে 0 হবে।

$$\text{অর্থাৎ } \frac{1}{a} - \frac{2}{b} = 0 \quad \text{এবং } \frac{2}{b} - \frac{3}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} = \frac{2}{b} \quad \text{বা, } \frac{2}{b} = \frac{3}{c}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} \quad \text{বা, } \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 0 \text{ অথবা, } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে, $f(z) = z^3$

$$\therefore \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{x^3}{x^3 - 1} = \frac{x^3}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

এখানে লবকে হর দ্বারা ভাগ করলে 1 হয়

$$\text{সুতরাং ধরি, } \frac{x^3}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \equiv 1 + \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \dots \dots \dots (i)$$

উভয়পক্ষকে $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^3 \equiv (x-1)(x^2+x+1) + A(x^2+x+1) + (Bx+c)(x-1) \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(ii) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = 0 + A(1+1+1) + 0$

$$\text{বা, } 1 = 3A \quad \therefore A = \frac{1}{3}$$

x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = -1 + 1 + A + B$$

$$\text{বা, } A + B = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{3} + B = 0 \quad \left[\square A = \frac{1}{3} \right]$$

$$\therefore B = -\frac{1}{3}$$

$$\text{এবং } 0 = 1 - 1 + A + C - B$$

$$\text{বা, } A + C - B = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{3} + C + \frac{1}{3} = 0 \quad \therefore C = -\frac{2}{3}$$

এখন, A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^2+x+1)} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1}$$

$$\therefore \frac{x^3}{x^3-1} = 1 + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} ; \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ ১৭ তোমার পাঠ্যবইয়ে অনেক বহুপদী আছে।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. $5x^4 + 3x^2 - 7x + 9$ বহুপদীটির মাত্রা, মূখ্য সহগ এবং ধ্রুবপদ লিখ। ২

খ. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $ax^3 + (a-1)x^2 - 2ax + 1$ ৪

গ. সরল কর : $\frac{a-b}{(x-a)(x-b)} + \frac{b-c}{(x-b)(x-c)} + \frac{c-a}{(x-c)(x-a)}$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত বহুপদী : $5x^4 + 3x^2 - 7x + 9$

বহুপদীটির মাত্রা : 4

মূখ্য সহগ : 5

ধ্রুব পদ : 9

খ ধরি, $P(x) = ax^3 + (a-1)x^2 - 2ax + 1$

এখানে, $P(1) = a.1^3 + (a-1)1^2 - 2a.1 + 1$

$$= a + a - 1 - 2a + 1 = 0$$

∴ $x - 1$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned} & ax^3 + (a - 1)x^2 - 2ax + 1 \\ &= ax^3 - ax^2 + (2a - 1)x^2 - 2ax + x - x + 1 \\ &= ax^2(x - 1) + (2a - 1)x(x - 1) - 1(x - 1) \\ &= (x - 1) \{ax^2 + (2a - 1)x - 1\} \\ &= (x - 1)(ax^2 + 2ax - x - 1) \end{aligned}$$

গ

$$\begin{aligned} & \frac{a - b}{(x - a)(x - b)} + \frac{b - c}{(x - b)(x - c)} + \frac{c - a}{(x - c)(x - a)} \\ &= \frac{(x - c)(a - b) + (x - a)(b - c) + (x - b)(c - a)}{(x - a)(x - b)(x - c)} \\ &= \frac{x(a - b) - ac + bc + x(b - c) - ab + ac + x(c - a) - bc + ab}{(x - a)(x - b)(x - c)} \\ &= \frac{x(a - b + b - c + c - a)}{(x - a)(x - b)(x - c)} \\ &= \frac{x \cdot 0}{(x - a)(x - b)(x - c)} \\ &= 0 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

প্রশ্ন ► ১৮ a, b, c এর একটি বহুপদী হলো,

$$F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \text{ [পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]}$$

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(a, b, c)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(a, b, c) = 0$, $a + b + c \neq 0$ হয় তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ৪

গ. যদি $a = y + z - x$, $b = z + x - y$ এবং $c = x + y - z$ হয় তবে, $F(x, y, z) \div F(a, b, c)$ নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২নং সমাধান এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন ► ১৯ $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 1)$ ।
[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\frac{1}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 1)$.

$$\therefore P(1) = 0$$

$$\text{বা, } 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + a = 0$$

$$\text{বা, } 1 - 2 + 2 - 2 + a = 0$$

$$\text{বা, } -1 + a = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ (Ans.)}$$

খ 'ক' হতে পাই, $a = 1$

$$\therefore P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

$$= x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + x^2 - x - x + 1$$

$$= x^3(x - 1) - x^2(x - 1) + x(x - 1) - 1(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$= (x - 1)\{x^2(x - 1) + 1(x - 1)\}$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x^2 + 1)$$

$$= (x - 1)^2(x^2 + 1) \text{ (Ans.)}$$

গ 'খ' হতে পাই, $P(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1)$

$$\therefore \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \dots \dots \text{ (i)}$$

(i) নং এর উভয়পক্ষ $(x - 1)^2(x^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$1 \equiv A(x - 1)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)^2 \dots \dots \dots \text{ (ii)}$$

উভয়পক্ষ হতে ধ্রুব পদ, x , x^2 ও x^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$-A + B + D = 1 \dots \dots \dots \text{ (iii)}$$

$$A + C - 2D = 0 \dots \dots \dots \text{ (iv)}$$

$$-A + B - 2C + D = 0 \dots \dots \dots \text{ (v)}$$

$$A + C = 0 \dots \dots \dots \text{ (vi)}$$

(iv) ও (vi) নং হতে পাই, $D = 0$

D এর মান (iii) ও (v) নং এ বসিয়ে পাই,

$$-A + B = 1 \quad \therefore B = 1 + A \dots \dots \dots \text{ (vii)}$$

$$\text{এবং } -A + B - 2C = 0$$

$$\text{বা, } -A + 1 + A - 2C = 0$$

$$\text{বা, } 1 - 2C = 0$$

$$\text{বা, } 2C = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

C এর মান (vi) নং এ বসিয়ে পাই,

$$A + \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore A = -\frac{1}{2}$$

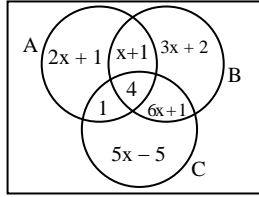
A এর মান (vii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A, B, C ও D এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{x}{2(x^2+1)} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ২০ U



সেট A, B ও C এর উপাদানগুলো ভেনচিত্রে দেওয়া হলো।

এখানে, $U = A \cup B \cup C$ [সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট]

ক. যদি $n(A) = n(B)$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $n(A \cap B \cap C)' = n(A' \cup B' \cup C')$ ৪

গ. $P(x) = n(A) n(B)$ এবং $Q(x) = n(C)$ হলে $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ভেনচিত্র অনুসারে,

$$\begin{aligned} n(A) &= (2x + 1) + (x + 1) + 4 + 1 \\ &= 3x + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{এবং } n(B) &= (3x + 2) + (x + 1) + 4 + (6x + 1) \\ &= 10x + 8 \end{aligned}$$

শর্তমতে, $n(A) = n(B)$

$$\text{বা, } 3x + 7 = 10x + 8$$

$$\text{বা, } 10x - 3x = 7 - 8$$

$$\text{বা, } 7x = -1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{7} \text{ (Ans.)}$$

খ ভেনচিত্র হতে পাই,

$$n(A \cap B \cap C)' = (2x + 1) + (x + 1) + (3x + 2) + 1 + (6x + 1) + 5x - 5 \\ = 17x + 1$$

$$x = 1 \text{ হলে পাই, } n(A \cap B \cap C)' = 17.1 + 1 = 18$$

$$\text{এবং } A' = \{3x + 2, 6x + 1, 5x - 5\}$$

$$B' = \{2x + 1, 1, 5x - 5\}$$

$$C' = \{2x + 1, x + 1, 3x + 2\}$$

$$\therefore A' \cup B' \cup C' = \{2x + 1, x + 1, 3x + 2, 1, 6x + 1, 5x - 5\}$$

$$\therefore n(A' \cup B' \cup C') = 2x + 1 + x + 1 + 3x + 2 + 1 + 6x + 1 + 5x - 5 \\ = 17x + 1$$

$$x = 1 \text{ হলে পাই, } n(A' \cup B' \cup C') = 17.1 + 1 = 18$$

$$\therefore n(A \cap B \cap C)' = n(A' \cup B' \cup C') \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ ভেনচিত্রানুসারে,

$$n(A) = 2x + 1 + x + 1 + 1 + 4 = 3x + 7$$

$$n(B) = x + 1 + 3x + 2 + 4 + 6x + 1 = 10x + 8$$

$$\text{এবং } n(C) = 1 + 4 + 6x + 1 + 5x - 5 = 11x + 1$$

$$\therefore P(x) = n(A) n(B) = (3x + 7) (10x + 8)$$

$$\text{এবং } Q(x) = n(C) = 11x + 1$$

$$\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{11x + 1}{(3x + 7) (10x + 8)} \dots \dots \dots \text{ (i)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{11x + 1}{(3x + 7) (10x + 8)} \equiv \frac{A}{3x + 7} + \frac{B}{10x + 8} \dots \dots \dots \text{ (ii)}$$

(ii) নং কে $(3x + 7) (10x + 8)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$11x + 1 \equiv A(10x + 8) + B(3x + 7) \dots \dots \dots \text{ (iii)}$$

(iii) নং এ $x = -\frac{4}{5}$ বসিয়ে পাই,

$$11 \cdot \frac{-4}{5} + 1 = 0 + B \left(3 \cdot \frac{-4}{5} + 7 \right)$$

$$\text{বা, } \frac{-44 + 5}{5} = B \left(\frac{-12 + 35}{5} \right)$$

$$\text{বা, } -39 = B(23)$$

$$\therefore B = \frac{-39}{23}$$

আবার, (iii) নং এ $x = \frac{-7}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$11. \frac{-7}{3} + 1 = A \left(10 \cdot \frac{-7}{3} + 8 \right) + 0$$

$$\text{বা, } \frac{-77 + 3}{3} = A \left(\frac{-70 + 24}{3} \right)$$

$$\text{বা, } -74 = A(-46)$$

$$\text{বা, } A = \frac{74}{46}$$

$$\therefore A = \frac{37}{23}$$

A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{11x + 1}{(3x + 7)(10x + 8)} = \frac{37}{23(3x + 7)} - \frac{39}{23(10x + 8)}$$

\therefore (i) নং হতে পাই,

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{37}{23(3x + 7)} - \frac{39}{46(5x + 4)} \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ২১ $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ এবং $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ দুইটি ফাংশন।

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা যাচাই কর। ৪

গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2x + 1 \geq 0$

অর্থাৎ $x \geq -\frac{1}{2}$ হয়।

$$\therefore f(x) \text{ এর ডোমেন} = \left\{ x \in \nabla : x \geq -\frac{1}{2} \right\} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

$f(x)$ ফাংশন এক-এক হবে যদিও কেবল যদি যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 \neq x_2$ এর

জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

$$\text{ধরি, } f(x_1) = f(x_2)$$

$$\text{বা, } \sqrt{2x_1 + 1} = \sqrt{2x_2 + 1}$$

$$\text{বা, } 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

$$\text{বা, } 2x_1 = 2x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

$\therefore f(x)$ এক-এক ফাংশন। (Ans.)

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 4x}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$

$$\therefore g(x) = x + \frac{4x}{(x + 2)(x - 2)} \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{ধরি, } \frac{4x}{(x + 2)(x - 2)} \equiv \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 2} \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং কে $(x + 2)(x - 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$4x \equiv A(x - 2) + B(x + 2) \dots \dots \dots (iii)$$

(iii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$4 \cdot 2 = A \cdot 0 + B(2 + 2)$$

$$\text{বা, } 8 = 4B \quad \therefore B = 2$$

আবার, (iii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$4 \cdot (-2) = A(-2 - 2) + B \cdot 0$$

$$\text{বা, } -8 = -4A \quad \therefore A = 2$$

A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{4x}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{2}{x + 2} + \frac{2}{x - 2}$$

$$\therefore (i) \text{ নং হতে পাই, } g(x) = x + \frac{2}{x + 2} + \frac{2}{x - 2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ২২ $P(x) = ax^3 + bx + c$, $Q(x) = \frac{2x}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. দেখাও যে, $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$ ২

খ. $P(x)$ কে $(x - m)$ দ্বারা ভাগ করে দেখাও যে, ভাগশেষ $P(m)$ এর সমান। ৪

গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

$$= (a - b)^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3$$

$$\begin{aligned}
&= (a - b)^3 + 3c(a^2 - b^2) - 3c^2(a - b) - (a^3 - b^3) \\
&= (a - b)^3 + 3c(a + b)(a - b) - 3c^2(a - b) - (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
&= (a - b) \{ (a - b)^2 + 3c(a + b) - 3c^2 - (a^2 + ab + b^2) \} \\
&= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ca + 3bc - 3c^2 - a^2 - ab - b^2) \\
&= (a - b) \{ 3c(b - c) - 3a(b - c) \} \\
&= 3(a - b)(b - c)(c - a) \text{ (Ans.)}
\end{aligned}$$

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪২

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন ▶ ২৩ $F(x) = x^3 + x^2 - 6x$ এবং $G(x) = x^2 - 9x - 6$.

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. $G(x)$ কে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ২

খ. $F(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে এবং $a - b$ অশূন্য হয় তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + a + b - 6 = 0$ ৪

গ. $\frac{G(x)}{F(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৮ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

প্রশ্ন ▶ ২৪ $f(x) = \frac{4x - 9}{x - 2}$, যেখানে, $x \neq 2$ এবং $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. দেখাও যে, $A \setminus B \subset A \cup B$. ২

খ. $4f^{-1}(x) = x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $x \in A \setminus B$

তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B'$

অর্থাৎ $A \setminus B$ সেটে সেই সকল উপাদান থাকবে যেগুলো A সেটে আছে কিন্তু B সেটে নেই।

এখানে, A ও B সেটের সকল উপাদান $A \cup B$ সেটে থাকবে।

$\therefore A \setminus B$ সেটের সকল উপাদান $A \cup B$ সেটে থাকবে।

অর্থাৎ $x \in A \setminus B$ হলে, অবশ্যই $x \in A \cup B$ হবে।

$\therefore A \setminus B \subset A \cup B$ (দেখানো হলো)

৫ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{4x - 9}{x - 2}$

ধরি, $f^{-1}(x) = m$

$\therefore x = f(m)$

বা, $x = \frac{4m - 9}{m - 2}$

বা, $mx - 2x = 4m - 9$

বা, $mx - 4m = 2x - 9$

বা, $m(x - 4) = 2x - 9$

বা, $m = \frac{2x - 9}{x - 4}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x - 9}{x - 4}$

প্রশ্নমতে, $4 f^{-1}(x) = x$

বা, $4 \left(\frac{2x - 9}{x - 4} \right) = x$

বা, $8x - 36 = x^2 - 4x$

বা, $x^2 - 12x + 36 = 0$

বা, $x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = 0$

বা, $(x - 6)^2 = 0$

বা, $x - 6 = 0$

$\therefore x = 6$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{a} \right)^3 + \left(\frac{1}{b} \right)^3 + \left(\frac{1}{c} \right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)^2 \right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore bc + ca + ab = 0$

$$\text{অথবা, } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

$$\text{সুতরাং } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

$$\therefore a = b$$

$$\text{আবার, } \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

$$\therefore b = c$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore bc + ca + ab = 0 \text{ অথবা, } a = b = c \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ২৫ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

[মনিপুর উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. $f(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(a)$ কে $a - p$ ও $a - q$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $p \neq q$ তবে

$$\text{দেখাও যে, } p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0 \quad 8$$

গ. $F(x, y, z) = 0$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে,

$$\text{প্রমাণ কর যে, } x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \quad 8$$

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

গ সৃজনশীল ২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন ▶ ২৬ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}$, $g(t) = \frac{3t+7}{5t^2-26t+5}$

[ঢাকা রেসিডেন্সিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. যে কোন সেট P, Q এর জন্য প্রমাণ কর যে,

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q). \quad 8$$

গ. $g(t)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}$

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2x + 7 > 0$ হয়

$$\text{বা, } 2x + 7 - 7 > 0 - 7$$

$$\text{বা, } 2x > -7$$

$$\therefore x > -\frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{ফাংশনের ডোমেন} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{7}{2} \right\} \quad (\text{Ans.})$$

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.১ এর প্রতিজ্ঞা-২ অনুরূপ। পৃষ্ঠা- ১৪

গ দেওয়া আছে, $g(t) = \frac{3t+7}{5t^2-26t+5}$

$$= \frac{3t+7}{5t^2-25t-t+5}$$

$$= \frac{3t+7}{5t(t-5)-1(t-5)}$$

$$= \frac{3t+7}{(t-5)(5t-1)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{3t+7}{(t-5)(5t-1)} \equiv \frac{A}{t-5} + \frac{B}{5t-1} \dots \dots \dots (i)$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(t-5)(5t-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$(3t+7) \equiv A(5t-1) + B(t-5) \dots \dots \dots (ii)$$

এখন, (ii) এর উভয়পক্ষে $t=5$ বসিয়ে পাই,

$$3 \times 5 + 7 = A(5 \times 5 - 1) + B(5 - 5)$$

$$\text{বা, } 22 = A(24) + 0$$

$$\text{বা, } A = \frac{22}{24}$$

$$\therefore A = \frac{11}{12}$$

আবার, (ii) এর উভয়পক্ষে $t = \frac{1}{5}$ বসিয়ে পাই,

$$3\left(\frac{1}{5}\right) + 7 = A\left(\frac{5}{5} - 1\right) + B\left(\frac{1}{5} - 5\right)$$

$$\text{বা, } \frac{3 + 35}{5} = 0 + B\left(\frac{1 - 25}{5}\right)$$

$$\text{বা, } \frac{38}{5} = B\left(-\frac{24}{5}\right)$$

$$\text{বা, } B = \frac{38}{5} \times \frac{-5}{24}$$

$$\therefore B = -\frac{19}{12}$$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3t + 7}{(t - 5)(5t - 1)} = \frac{11}{12(t - 5)} - \frac{19}{12(5t - 1)}; \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ ২৭ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $P(x) = \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}$

[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, ঢাকা]

ক. $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $f(a)$ কে $(a - x)$ এবং $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর

$$\text{যে, } x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0 \text{ যেখানে } x \neq y \quad ৪$$

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 8 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{5}{4} - 3 + 8 \\ &= \frac{-1 + 10 - 24 + 64}{8} \\ &= \frac{49}{8} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ $p(x) = \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2} = \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 - x^2 - 2}$

$$= \frac{x^2}{x^2 (x^2 + 2) - 1 (x^2 + 2)}$$

$$= \frac{x^2}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2 + 2)}$$

ধরি, $\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2 + 2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} \dots\dots(i)$

(i) এর উভয় পক্ষকে $(x+1)(x-1)(x^2 + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 \equiv A(x-1)(x^2 + 2) + B(x+1)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x+1)(x-1) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = B(1+1)(1+2)$

বা, $6B = 1 \therefore B = \frac{1}{6}$

(ii)-এ $x = -1$ বসিয়ে পাই, $1 = A(-1-1)(1+2)$

বা, $-6A = 1 \therefore A = -\frac{1}{6}$

(ii)-এর x^3 , x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B + C = 0 \text{ এবং } -A + B + D = 1$$

এখন, $A + B + C = 0$ তে $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$ বসিয়ে পাই, $C = 0$.

এবং $-A + B + D = 1$ তে $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{6}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$$

বা, $D = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}$

বা, $D = \frac{6-1-1}{6} = \frac{4}{6}$

$$\therefore D = \frac{2}{3}$$

এখন, A, B, C ও D এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2 + 2)} = \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{0 \cdot x + \frac{2}{3}}{x^2 + 2}$$

$$= -\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{6(x-1)} + \frac{2}{3(x^2+2)}$$

যা নির্ণয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন ▶ ২৮ $F(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ এবং $H(x) = x^3 - 3x - 2$ দুইটি বহুপদী।

[সামসুল হক খান স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. $F(x)$ কে $(x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{F(x)}{H(x)} = 0$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{F(x)}{H(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$F(x)$ কে $(x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $F(-1)$

$$\begin{aligned} \therefore F(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 + 1 \\ &= -1 - 2 + 1 \\ &= -2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ শর্তমতে, $\frac{F(x)}{H(x)} = 0$

বা, $F(x) = 0$

$$\text{বা, } x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^3 - x^2 - x^2 + x - x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x - 1) - x(x - 1) - 1(x - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 1 = 0 \text{ অথবা } x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad \therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore x \text{ এর মান } 1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $H(x) = x^3 - 3x - 2$

$$= x^3 + x^2 - x^2 - x - 2x - 2$$

$$\begin{aligned}
&= x^2(x+1) - x(x+1) - 2(x+1) \\
&= (x+1)(x^2 - x - 2) \\
&= (x+1)(x^2 - 2x + x - 2) \\
&= (x+1)\{x(x-2) + 1(x-2)\} \\
&= (x+1)(x-2)(x+1) \\
&= (x+1)^2(x-2)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{F(x)}{H(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{(x+1)^2(x-2)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{F(x)}{H(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{(x+1)^2(x-2)} \equiv 1 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \dots (i)$$

(i) নং কে $(x+1)^2(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^3 - 2x^2 + 1 \equiv (x+1)^2(x-2) + A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2) \dots (ii)$$

$$(ii) \text{ নং এ } x = 2 \text{ বসিয়ে পাই, } 8 - 8 + 1 = A \cdot 9 \therefore A = \frac{1}{9}$$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$-1 - 2 + 1 = C(-1 - 2)$$

$$\text{বা, } -2 = -3C \therefore C = \frac{2}{3}$$

(ii) এর উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$-2 = -2 + 2 + A + B$$

$$\text{বা, } A + B = -2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{9} + B = -2$$

$$\text{বা, } B = -2 - \frac{1}{9}$$

$$\therefore B = -\frac{19}{9}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{F(x)}{H(x)} = 1 + \frac{1}{9(x-2)} - \frac{19}{9(x+1)} + \frac{2}{3(x+1)^2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ২৯ $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ এবং $Q(x) = x(x^2 + 1)^2$

[মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. $P(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয় তবে $P(x, y, z)$ এবং $P(a, b, c)$ এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। ৪

গ. $\frac{1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

খ সৃজনশীল ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৫৮

প্রশ্ন ▶ ৩০ $P(a, b, c) = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

$P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ [আদমজী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, ঢাকা]

ক. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. যদি $P(a, b, c) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $a = b = c$
অথবা, $ab + bc + ca = 0$. ৪

গ. $P(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$,
তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$. ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc$

$= (a + b + c) \{ (a + b)^2 - (a + b)c + c^2 \} - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c) (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ (Ans.)

খ সৃজনশীল ২৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৩

প্রশ্ন ▶ ৩১ $p(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, $a = x + y - z$,
[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

$b = y + z - x$, $c = z + x - y$ এবং $(m + n + r)(mn + nr + rm) = mnr$

ক. দেখাও যে, $a + b = -c$ হলে $p(a, b, c) = 0$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $p(x, y, z) \div p(a, b, c) = 1 \div 4$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(m + n + r)^3 = m^3 + n^3 + r^3$ ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a + b = -c$

$\therefore a + b + c = 0$

$$\begin{aligned}
p(a, b, c) &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
&= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\
&= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) \\
&= (a + b + c) \{ (a + b)^2 - (a + b)c + c^2 \} - 3ab(a + b + c) \\
&= 0 \text{ (দেখানো হলো)}
\end{aligned}$$

খ সৃজনশীল ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

গ বামপক্ষ = $(m + n + r)^3$

$$\begin{aligned}
&= (m + n + r)^3 - 3mnr + 3mnr \\
&= (m + n + r)^3 - 3(m + n + r)(mn + nr + rm) + 3mnr \\
&[\square mnr = (m + n + r)(mn + nr + rm)] \\
&= (m + n + r) \{ (m + n + r)^2 - 3(mn + nr + rm) \} + 3mnr \\
&= (m + n + r) (m^2 + n^2 + r^2 + 2mn + 2nr + 2rm - 3mn \\
&\quad - 3nr - 3rm) + 3mnr \\
&= (m + n + r) (m^2 + n^2 + r^2 - mn - nr - rm) + 3mnr \\
&= m^3 + n^3 + r^3 - 3mnr + 3mnr \\
&= m^3 + n^3 + r^3 \\
&= ডানপক্ষ
\end{aligned}$$

$$\therefore (m + n + r)^3 = m^3 + n^3 + r^3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ৩২ P(x) = x³ + 6x² + 11x + 6, Q(x) = x⁴ + 7x³ + 17x² + 17x + k এবং R(x) = x³ - x² - 10x - 8 [এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা]

ক. R(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. Q(x) এর একটি উৎপাদক (3x + 2) হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৪(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২

খ দেওয়া আছে,

Q(x) এর একটি উৎপাদক (3x + 2) অর্থাৎ $\left\{ x - \left(-\frac{2}{3} \right) \right\}$,

Q(x) = x⁴ + 7x³ + 17x² + 17x + k এর একটি উৎপাদক।

$$\therefore Q\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\text{বা, } \left(-\frac{2}{3}\right)^4 + 7\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 17\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 17\left(-\frac{2}{3}\right) + k = 0$$

$$\text{বা, } \frac{16}{81} - \frac{7 \times 8}{27} + 17 \times \frac{4}{9} - \frac{34}{3} + k = 0$$

$$\text{বা, } \frac{16}{81} - \frac{56}{27} + \frac{68}{9} - \frac{34}{3} + k = 0$$

$$\text{বা, } \frac{16 - 168 + 612 - 918 + 81k}{81} = 0$$

$$\text{বা, } -458 + 81k = 0$$

$$\text{বা, } 81k = 458$$

$$\text{বা, } k = \frac{458}{81}$$

$$\therefore k = 5 \frac{53}{81} \text{ (Ans.)}$$

গ $\frac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$\begin{aligned} \therefore P(-1) &= (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 \\ &= -1 + 6 - 11 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \{x - (-1)\}$ বা $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

তাহলে, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$$

$$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$$

$$= (x + 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$$

$$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$\therefore \frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}, \text{ যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3} \dots\dots (i)$$

(i) এর উভয় পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 \equiv A(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x + 1)(x + 2) \dots\dots (ii)$$

(ii)-এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$(-1)^2 = A(-1 + 2)(-1 + 3) + B(-1 + 1)(-1 + 3) + C(-1 + 1)(-1 + 2)$$

$$\text{বা, } 1 = A(1)(2)$$

$$\text{বা, } 2A = 1$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$(-2)^2 = A(-2 + 2)(-2 + 3) + B(-2 + 1)(-2 + 3) + C(-2 + 1)(-2 + 2)$$

$$\text{বা, } 4 = B(-1)(1)$$

$$\text{বা, } -B = 4$$

$$\therefore B = -4$$

(ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 = A(-3 + 2)(-3 + 3) + B(-3 + 1)(-3 + 3) + C(-3 + 1)(-3 + 2)$$

$$\text{বা, } 9 = C(-2)(-1)$$

$$\text{বা, } 2C = 9$$

$$\therefore C = \frac{9}{2}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-4}{x+2} + \frac{\frac{9}{2}}{x+3}$$

$$\therefore \frac{x^2}{P(x)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{x+2} + \frac{9}{2(x+3)} \text{ (যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ) (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৩৩ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $g(x) = \sqrt{2x - 3}$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি।

[বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]

ক. $f(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ কে $x - p$ এবং $x - q$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $p \neq q$, তবে দেখাও যে, $p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0$ ৪

গ. $g^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{2x - 3}$

$$\text{ধরি, } y = g(x) = \sqrt{2x - 3}$$

$$\text{বা, } y^2 = 2x - 3$$

$$\text{বা, } 2x = y^2 + 3$$

$$\text{বা, } x = \frac{y^2 + 3}{2}$$

$$\text{বা, } g^{-1}(y) = \frac{y^2 + 3}{2} \quad [\square g(x) = y \quad \therefore x = g^{-1}(y)]$$

$$\therefore g^{-1}(3) = \frac{3^2 + 3}{2} = 6 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৩৪ $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$ এবং $\frac{a^2 + a - 1}{a^3 + a^2 - 6a}$ দুইটি বীজগণিতীয়

রাশি। [সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর]

ক. সমমাত্রিক বহুপদী এবং চক্রক্রমিক রাশি কী? ২

খ. প্রথম রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. দ্বিতীয় রাশিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমমাত্রিক বহুপদী : কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, একে সমমাত্রিক বহুপদী (Homogeneous Polynomial) বলা হয়।

$x^2 + 2xy + 5y^2$ রাশিটি x, y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা ২)।

চক্র-ক্রমিক রাশি (Cyclic)

তিনটি চলক সংবলিত কোনো রাশিতে প্রথম চলক দ্বিতীয় চলকের, দ্বিতীয় চলক তৃতীয় চলকের এবং তৃতীয় চলক প্রথম চলকের স্থলে বসালে রাশিটি যদি পরিবর্তিত না হয়, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের উলিখিত ক্রমে একটি চক্র-ক্রমিক রাশি বা চক্র প্রতিসম রাশি বা Cyclically symmetric expression বলা হয়।

$$\begin{aligned} \text{খ} \quad & x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) \\ &= xy^2 - z^2x + yz^2 - x^2y + z(x + y)(x - y) \\ &= -x^2y + xy^2 - z^2x + yz^2 + (zx + yz)(x - y) \\ &= -xy(x - y) - z^2(x - y) + (zx + yz)(x - y) \\ &= (x - y)(-xy - z^2 + zx + yz) \\ &= (x - y)\{-x(y - z) + z(y - z)\} \\ &= (x - y)(y - z)(z - x) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮

প্রশ্ন ▶ ৩৫ সার্বিক সেট U এর যে কোন উপসেট A ও B এবং $P(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+4)}$ একটি

ফাংশন। [এম ই এইচ আরিফ কলেজ, গাজীপুর]

ক. প্রমাণ কর যে, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ । ২

খ. প্রমাণ কর যে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ । ৪

গ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.১ এর প্রতিজ্ঞা-১(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৮

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.১ এর প্রতিজ্ঞা-২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৪

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৬ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৭

প্রশ্ন▶৩৬ $P(x) = x^2 + x - 12$, $Q(x) = 9x + 2$

[এ.ভি.জে.এম. সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, মুন্সিগঞ্জ]

ক. $F(x) = \frac{2x}{x+3}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $2x - a$ এবং $2x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে, দেখাও যে, $a + b + 2 = 0$ । ৪

গ. $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮

প্রশ্ন▶৩৭ প্রদত্ত তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

$P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ এবং $Q(x) = x^2 - 2x - 8$

[ব্রাহ্মন্দী মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, নরসিংদী]

ক. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $Q(x)$ হলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^3}{x^4 + 5x^2 + 4}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $2x - 1 > 0$ অর্থাৎ $x > \frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore f(x)$ এর ডোমেন = $\left\{x \in \nabla : x > \frac{1}{2}\right\}$ (Ans.)

খ সৃজনশীল ১২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩১

গ $\frac{x^3}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{x^3}{x^4 + x^2 + 4x^2 + 4}$

$$= \frac{x^3}{x^2(x^2 + 1) + 4(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{x^3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং কে $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^3 \equiv (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1) \dots \dots \dots (ii)$$

এখন x^3, x^2, x এর সহগ ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$$A + C = 1 \dots \dots \dots (iii)$$

$$B + D = 0 \dots \dots \dots (iv)$$

$$4A + C = 0 \dots \dots \dots (v)$$

$$4B + D = 0 \dots \dots \dots (vi)$$

(v) হতে (iii) বিয়োগ করে পাই,

$$4A + C - A - C = 0 - 1$$

$$\text{বা, } 3A = -1 \quad \therefore A = -\frac{1}{3}$$

A এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{1}{3} + C = 1$$

$$\text{বা, } C = 1 + \frac{1}{3} \quad \therefore C = \frac{4}{3}$$

আবার, (vi) হতে (iv) বিয়োগ করে পাই,

$$4B + D - B - D = 0$$

$$\text{বা, } 3B = 0 \quad \therefore B = 0$$

B এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই, $0 + D = 0 \quad \therefore D = 0$

A, B, C ও D এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{-\frac{1}{3}x + 0}{x^2 + 1} + \frac{\frac{4}{3}x + 0}{x^2 + 4}$$

$$\therefore \frac{x^3}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{4x}{3(x^2 + 4)} - \frac{x}{3(x^2 + 1)} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ▶ ৩৮ $F(x) = \ln(x - 2)$ এবং $P(y) = \frac{y^3}{y^2 - 16}$ দুইটি ফাংশন।

[বিন্দুবাসিনী সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, টাঙ্গাইল]

ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $F^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $P(y)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \ln(x - 2) \in \nabla$ হবে যদিও কেবল যদি $x - 2 > 0$ অর্থাৎ $x > 2$ হয়।

$\therefore F(x)$ এর ডোমেন = $\{x : x \in \nabla \text{ এবং } x > 2\}$ (Ans.)

খ ধরি, $y = F(x) = \ln(x - 2)$

$$\therefore y = \ln(x - 2)$$

$$\text{বা, } e^y = e^{\ln(x - 2)}$$

$$\text{বা, } e^y = x - 2$$

$$\text{বা, } x = e^y + 2$$

$$\text{বা, } F^{-1}(y) = e^y + 2 \quad [\square y = F(x) \therefore x = F^{-1}(y)]$$

$$\therefore F^{-1}(x) = e^x + 2 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $P(y) = \frac{y^3}{y^2 - 16} = \frac{y(y^2 - 16) + 16y}{y^2 - 16} = y + \frac{16y}{y^2 - 16}$

$$\therefore P(y) = y + \frac{16y}{(y + 4)(y - 4)} \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{16y}{(y + 4)(y - 4)} \equiv \frac{A}{y + 4} + \frac{B}{y - 4} \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $(y + 4)(y - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$16y \equiv A(y - 4) + B(y + 4) \dots \dots \dots \text{(iii)}$$

(iii) নং এ $y = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 \times 4 = A.0 + B(4 + 4)$$

$$\text{বা, } 8B = 64 \therefore B = 8$$

(iii) নং এ $y = -4$ বসিয়ে পাই,

$$16(-4) = A(-4 - 4) + B(-4 + 4)$$

$$\text{বা, } -8A = -64 \therefore A = 8$$

A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{16y}{(y + 4)(y - 4)} = \frac{8}{y + 4} + \frac{8}{y - 4}$$

(i) নং এ প্রদত্ত মান বসিয়ে পাই,

$$P(y) = \frac{y^3}{y^2 - 16} = y + \frac{8}{y + 4} + \frac{8}{y - 4} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৩৯ $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ একটি বহুপদী এবং $Q(x) =$

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল]

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক ও সমমাত্রিক রাশি। ২

খ. $F(a, b, c) = 0$ হলে দেখাও যে, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ 8

গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ কর। 8

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$
প্রদত্ত রাশিটি a, b, c চলকের তিন মাত্রার বহুপদী।

(এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)

$$\begin{aligned}\text{আবার, } F(b, c, a) &= (b + c + a)(bc + ca + ab) - bca \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \\ &= F(a, b, c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore F(c, a, b) &= (c + a + b)(ca + ab + bc) - cab \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \\ &= F(a, b, c)\end{aligned}$$

$$\therefore F(a, b, c) = F(b, c, a) = F(c, a, b)$$

$\therefore F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি।

সুতরাং, $F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক ও সমমাত্রিক রাশি। (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = 0$

$$\text{বা, } (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$$

$$\text{বামপক্ষ} = (a + b + c)^3$$

$$= \{(a + b) + c\}^3$$

$$= (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2$$

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 + 3(a^2 + 2ab + b^2)c + 3ac^2 + 3bc^2$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3abc + 3a^2c + 3abc + 3c^2a$$

$$+ 3bc^2 + 3b^2c + 3abc - 3abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c)$$

$$+ 3bc(c + b + a) - 3abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + (a + b + c)(3ab + 3ac + 3bc) - 3abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 3abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$

$$\text{এখন, } \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x(x^2 + 2x - 3) + 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$= x + \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$= x + \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)}$$

$\therefore \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

$$\text{ধরি, } \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} \dots\dots\dots(i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(x - 1)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই-

$$3x + 1 \equiv A(x + 3) + B(x - 1) \dots\dots\dots(ii)$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot 1 + 1 = A(1 + 3) + B(1 - 1)$$

$$\text{বা, } 4 = 4A$$

$$\therefore A = 1$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$3(-3) + 1 = A(-3 + 3) + B(-3 - 1)$$

$$\text{বা, } -9 + 1 = 0 + B(-4)$$

$$\text{বা, } -8 = -4B$$

$$\therefore B = 2$$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)} \equiv \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 3}$$

$$\therefore Q(x) = x + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 3}; \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ ৪০ $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$ এবং

$$Q = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} - 3x^{-1}y^{-1}z^{-1}. \text{ [ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, মোমেনশাহী]}$$

ক. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর। ২

খ. $Q = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = y = z$ অথবা, $xy + yz + zx = 0$ ৪

গ. $P(x, y, z) = xyz$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(x + y + z)^5} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5}$ ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

$$\therefore P(y, z, x) = (y + z + x)(yz + zx + xy)$$

$$= (x + y + z) (xy + yz + zx)$$

$$\therefore P(z, x, y) = (z + x + y) (zx + xy + yz)$$

$$= (x + y + z) (xy + yz + zx)$$

সুতরাং এটি একটি চক্রক্রমিক রাশি।

আবার, x, y, z চলকের যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময় করলেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।
সুতরাং এটি একটি প্রতিসম রাশি।

খ সৃজনশীল ২৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬

গ দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z) (xy + yz + zx)$

$$\text{বা, } xyz = x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + xyz + yz^2 + zx^2 + z^2x$$

$$\text{বা, } x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + z^2x + yz^2 + x^2z + xyz = 0$$

$$\text{বা, } xy(x + y) + yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y) (xy + yz + z^2 + xz) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y) \{y(x + z) + z(z + x)\} = 0$$

$$\text{বা, } (x + y) (y + z) (z + x) = 0$$

$$\therefore x + y = 0 \text{ অথবা, } y + z = 0 \text{ অথবা } z + x = 0$$

$$\therefore x = -y \quad \therefore y = -z \quad \therefore z = -x$$

$$\text{এখন, } \frac{1}{(x + y + z)^5} = \frac{1}{(x - z + z)^5} = \frac{1}{x^5} \quad [\square y = -z]$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(-z)^5} + \frac{1}{z^5} \quad [\square y = -z]$$

$$= \frac{1}{x^5} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^5} = \frac{1}{x^5}$$

$$\therefore \frac{1}{(x + y + z)^5} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5} \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন▶৪১ $P(x) = 18x^3 + ax^2 + bx - 2$ বহুপদীটির দুইটি উৎপাদক $(3x - 2)$ ও $(2x + 1)$ । [জামালপুর জিলা স্কুল, জামালপুর]

ক. দেখাও যে, $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$ এর একটি উৎপাদক $(2x + 3)$ । ২

খ. a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $a = -27$ ও $b = 13$ হলে $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$

$$\therefore f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 8\left(-\frac{3}{2}\right) - 12$$

$$= -2 \cdot \frac{27}{8} + \frac{27}{4} + \frac{24}{2} - 12$$

$$= \frac{-54 + 54 + 96 - 96}{8}$$

$$= \frac{0}{8} = 0$$

$$\text{যেহেতু } f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

সুতরাং $(2x + 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + ax^2 + bx - 2$

এবং $(3x - 2)$ এবং $(2x + 1)$, $P(x)$ এর দুটি উৎপাদক।

$$\text{তাহলে } P\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \text{ এবং } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{এখন, } P\left(\frac{2}{3}\right) = 18\left(\frac{2}{3}\right)^3 + a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + b\left(\frac{2}{3}\right) - 2$$

$$\text{বা, } 0 = 18 \cdot \frac{8}{27} + a \frac{4}{9} + \frac{2b}{3} - 2$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{16}{3} + \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} - 2$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{48 + 4a + 6b - 18}{9}$$

$$\text{বা, } 4a + 6b + 30 = 0$$

$$\text{বা, } 6b = -4a - 30$$

$$\text{বা, } b = \frac{2(-2a - 15)}{6}$$

$$\therefore b = \frac{-2a - 15}{3} \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{এবং } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 18\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$\text{বা, } 0 = -18 \cdot \frac{1}{8} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - 2$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{-9}{4} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - 2$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{-9 + a - 2b - 8}{4}$$

$$\text{বা, } a - 2b - 17 = 0$$

$$\text{বা, } a - 2\left(\frac{-2a - 15}{3}\right) - 17 = 0 \text{ [(i) নং থেকে]}$$

$$\text{বা, } a + \frac{4a + 30}{3} - 17 = 0$$

$$\text{বা, } \frac{3a + 4a + 30 - 51}{3} = 0$$

$$\text{বা, } 7a - 21 = 0$$

$$\text{বা, } 7a = 21$$

$$\therefore a = 3$$

a এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$$b = \frac{-2 \cdot 3 - 15}{3} = \frac{-21}{3} = -7$$

\therefore নির্ণেয় মান: $a = 3, b = -7$ (Ans.)

গ $P(x) = 18x^3 + ax^2 + bx - 2$

$$= 18x^3 - 27x^2 + 13x - 2 \left[\begin{array}{l} a = -27, \\ b = 13 \end{array} \right]$$

$$= 18x^3 - 9x^2 - 18x^2 + 9x + 4x - 2$$

$$= 9x^2(2x - 1) - 9x(2x - 1) + 2(2x - 1)$$

$$= (2x - 1)(9x^2 - 9x + 2)$$

$$= (2x - 1)(9x^2 - 6x - 3x + 2)$$

$$= (2x - 1)\{3x(3x - 2) - 1(3x - 2)\}$$

$$= (2x - 1)(3x - 2)(3x - 1) \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন 8২ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $g(x) = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)}$.

[নেত্রকোণা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নেত্রকোণা]

ক. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ কে $x - p$ এবং $x - q$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে এবং $p \neq q$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0$. ৪

গ. $g(x)$ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 8$$

$$= -\frac{1}{27} + \frac{5}{9} - 2 + 8 = \frac{-1 + 15 + 162}{27} = \frac{176}{27} \text{ (Ans.)}$$

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

গ ধরি, $\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \dots\dots\dots (1)$

(1) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \dots\dots\dots (2)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (2) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$-6 = A(-2)(3) + 0 + 0 \therefore A = 1$$

আবার (2) নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$4 - 18 - 6 = 0 + B \cdot 2(5) + 0$$

$$\text{বা, } -20 = 10B \therefore B = -2$$

(2) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$$

$$\text{বা, } 30 = 15C$$

$$\therefore C = 2$$

A, B ও C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3} \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ ৪৩ $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ এবং $Q(x) = \frac{x+2}{x^3 + 8x^2 + 15x}$

[রাজবাড়ী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, রাজবাড়ী]

ক. $P(x)$ রাশিটির মাত্রা কত এবং $P(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $(x-a)$ এবং $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে,

$$a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0 \text{ যেখানে } a \neq b \text{। } 8$$

গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$P(x)$ রাশিটির মাত্রা : 3 (Ans.)

$$\therefore P(-2) = (-2)^3 + 5(-2)^2 + 6(-2) + 8$$

$$= -8 + 20 - 12 + 8 = 8 \text{ (Ans.)}$$

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = \frac{x+2}{x^3 + 8x^2 + 15x}$

$$= \frac{x+2}{x(x^2+8x+15)}$$

$$= \frac{x+2}{x(x+3)(x+5)}$$

ধরি, $Q(x) = \frac{x+2}{x(x+3)(x+5)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5}$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x+3)(x+5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x+2 \equiv A(x+3)(x+5) + Bx(x+5) + Cx(x+3) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x=0$ বসিয়ে পাই,

$$0+2 = A(0+3)(0+5) + B.0 + C.0$$

বা, $2 = 15A \therefore A = \frac{2}{15}$

আবার, (ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$-3+2 = A.0 + B(-3)(-3+5) + C.0$$

বা, $-1 = -6B \therefore B = \frac{1}{6}$

আবার, (ii) নং এ $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$$-5+2 = A.0 + B.0 + C(-5)(-5+3)$$

বা, $-3 = 10C \therefore C = \frac{-3}{10}$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$Q(x) = \frac{2}{15x} + \frac{1}{6(x+3)} - \frac{3}{10(x+5)} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ 88 $F(x) = \frac{3x}{x-2}; x \neq 2$ এবং $\frac{x^2}{(3x+1)(x+2)^2} = P$

[ফরিদপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফরিদপুর]

ক. $F^{-1}(4)$ নির্ণয় কর।

২

খ. $F(x) + F^{-1}(x) = \frac{5x^2 - 13x}{x^2 - 5x + 6}$ প্রমাণ কর। ৪

গ. P এর মানকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

88 নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $y = F(x) = \frac{3x}{x-2}$

বা, $xy - 2y = 3x$

বা, $xy - 3x = 2y$

$$\text{বা, } x(y - 3) = 2y$$

$$\text{বা, } x = \frac{2y}{y - 3}$$

$$\text{বা, } F^{-1}(y) = \frac{2y}{y - 3} \quad [\square F(x) = y \quad \therefore x = F^{-1}(y)]$$

$$\text{বা, } F^{-1}(x) = \frac{2x}{x - 3}$$

$$\text{বা, } F^{-1}(4) = \frac{2 \cdot 4}{4 - 3}$$

$$\therefore F^{-1}(4) = 8 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{3x}{x - 2}$

‘ক’ হতে পাই, $F^{-1}(x) = \frac{2x}{x - 3}$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) + F^{-1}(x) &= \frac{3x}{x - 2} + \frac{2x}{x - 3} \\ &= \frac{3x(x - 3) + 2x(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} \\ &= \frac{3x^2 - 9x + 2x^2 - 4x}{x^2 - 2x - 3x + 6} \\ &= \frac{5x^2 - 13x}{x^2 - 5x + 6} \text{ (প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

গ ধরি, $P = \frac{x^2}{(3x + 1)(x + 2)^2} \equiv \frac{A}{3x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2} \dots \dots \dots \text{ (i)}$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(3x + 1)(x + 2)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 \equiv A(x + 2)^2 + B(3x + 1)(x + 2) + C(3x + 1) \dots \dots \dots \text{ (ii)}$$

(ii) নং এ $x = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{3} + 2\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{9} = A \cdot \frac{25}{9}$$

$$\therefore A = \frac{1}{25}$$

(ii) নং হতে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + 3B = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{25} + 3B = 1$$

$$\text{বা, } 3B = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore B = \frac{8}{25}$$

$$\text{এবং } 4A + 7B + 3C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{4}{25} + \frac{56}{25} + 3C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{60}{25} + 3C = 0$$

$$\text{বা, } 3C = -\frac{60}{25}$$

$$\text{বা, } 3C = -\frac{12}{5}$$

$$\therefore C = -\frac{4}{5}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$P = \frac{1}{25(3x+1)} + \frac{8}{25(x+2)} - \frac{4}{5(x+2)^2} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ▶ ৪৫ $f(x) = x^2 - 9x - 6$, $g(x) = x^3 + x^2 - 6x$ এবং A ও B যেকোন ২টি সান্ড সেট।
[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা]

ক. $x^2 - 6x + 9 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক নির্ণয়ের মাধ্যমে এর মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি নির্ণয় কর।
২

খ. $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\therefore \text{সমীকরণটির নিশ্চায়ক} = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

যেহেতু নিশ্চায়ক শূন্য।

সুতরাং মূলদ্বয় বাস্‌ড্র, সমান ও মূলদ। (Ans.)

খ সৃজনশীল ৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.১ এর প্রতিজ্ঞা-২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৪

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

এবং $G = p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$ । [পাবনা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পাবনা]

ক. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা কারণসহ উল্লেখ কর। ২

খ. $G = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p = q = r$ অথবা $pq + qr + rp = 0$ । ৪

গ. $P(x, y, z) = xyz$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(x+y+z)^7} = \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7}$ ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৪০(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০

খ সৃজনশীল ২৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬

গ দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

বা, $xyz = x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + xyz + yz^2 + zx^2 + z^2x$

বা, $x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + z^2x + yz^2 + x^2z + xyz = 0$

বা, $xy(x + y) + yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) = 0$

বা, $(x + y)(xy + yz + z^2 + xz) = 0$

বা, $(x + y)\{y(x + z) + z(z + x)\} = 0$

বা, $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$

$\therefore x + y = 0$ অথবা, $y + z = 0$ অথবা $z + x = 0$

$\therefore x = -y$ $\therefore y = -z$ $\therefore z = -x$

এখন, $\frac{1}{(x + y + z)^7} = \frac{1}{(x - z + z)^7} = \frac{1}{x^7}$ [$\square y = -z$]

আবার, $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7} = \frac{1}{x^7} + \frac{1}{(-z)^7} + \frac{1}{z^7}$ [$\square y = -z$]

$$= \frac{1}{x^7} - \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^7} = \frac{1}{x^7}$$

$\therefore \frac{1}{(x + y + z)^7} = \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৪৭ $P(x) = x^2 + x - 12$, $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

[বগুড়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বগুড়া]

ক. $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $(2x - a)$ ও $(2x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a + b + 2 = 0$ ৪

গ. $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x}{x+2}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x+2 \neq 0$ বা $x \neq -2$ হয়।

$\therefore f(x)$ এর ডোমেন = $\{x \in \nabla : x \neq -2\}$ (Ans.)

খ সৃজনশীল ৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯

গ দেওয়া আছে,

$P(x) = x^2 + x - 12$ ও $Q(x) = x^2 + 3x + 2$

$\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 12} = \frac{x^2 + 2x + x + 2}{x^2 + 4x - 3x - 12} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+4)(x-3)}$

ধরি, $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+4)(x-3)} \equiv 1 + \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-3} \dots \dots \dots$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(x+4)(x-3)$ গুণ করে পাই,

$(x+2)(x+1) \equiv (x+4)(x-3) + A(x-3) + B(x+4) \dots \dots \dots$ (ii)

(ii) নং এ $x=3$ বসিয়ে পাই, $(3+2)(3+1) = B(3+4)$

বা, $5 \cdot 4 = 7B$

$\therefore B = \frac{20}{7}$

আবার, (ii) নং এ $x=-4$ বসিয়ে পাই,

$(-4+2)(-4+1) = A(-4-3)$

বা, $(-2)(-3) = -7A$

বা, $6 = -7A$

$\therefore A = \frac{-6}{7}$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{Q(x)}{P(x)} = 1 - \frac{6}{7(x+4)} + \frac{20}{7(x-3)}$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ 8b $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $P(x) = \frac{x+3}{x^2 + 8x + 15}$

[আর্মড পুলিশ ব্যাটালিয়ন পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া]

ক. $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $f(a)$ কে $(a-x)$ এবং $(a-y)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে, প্রমাণ কর যে,

$x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0$, যেখানে $x \neq y$ । ৪

৪b নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৯ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

প্রশ্ন ▶ ৪৯ $P(x) = x^2 - 7x + 12$ এবং $Q(x) = 3 - 4x - x^2$ দুইটি বহুপদী।

[রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট]

ক. $P(x) = 0$ সমীকরণের মূলের ধরণ ও প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $Q(x) = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = x^2 - 7x + 12$

প্রশ্নমতে, $P(x) = 0$

$$\therefore x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\text{নিশ্চায়ক} = (-7)^2 - 4.1.12 = 49 - 48 = 1 > 0$$

যেহেতু, নিশ্চায়ক ধনাত্মক এবং পূর্ণবর্গ।

সুতরাং সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, মূলদ ও অসমান হবে। (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $Q(x) = 3 - 4x - x^2$

এখানে, $Q(x) = 0$

$$\text{বা, } 3 - 4x - x^2 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 7}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{2.(-2 \pm \sqrt{7})}{2} = -2 \pm \sqrt{7}\end{aligned}$$

এখন, (+) ve চিহ্ন নিয়ে পাই, $x = -2 + \sqrt{7}$

এবং (-)ve চিহ্ন নিয়ে পাই, $x = -2 - \sqrt{7}$

\therefore নির্ণেয় মূলদ্বয় $(-2 + \sqrt{7})$ এবং $(-2 - \sqrt{7})$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে, $P(x) = x^2 - 7x + 12$

এবং $Q(x) = 3 - 4x - x^2$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} &= \frac{3 - 4x - x^2}{x^2 - 7x + 12} \\ &= \frac{-(x^2 + 4x - 3)}{x^2 - 3x - 4x + 12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(x^2 + 4x + 4 - 4 - 3)}{x(x-3) - 4(x-4)} \\
&= \frac{-\{(x+2)^2 - 7\}}{(x-3)(x-4)} \\
&= \frac{-\{(x+2)^2 - (\sqrt{7})^2\}}{(x-3)(x-4)} \\
&= \frac{-\{(x+2+\sqrt{7})(x+2-\sqrt{7})\}}{(x-3)(x-4)}
\end{aligned}$$

এখানে লবকে হর দ্বারা ভাগ করলে -1 হয়।

$$\text{মনে করি, } \frac{-\{(x+2+\sqrt{7})(x+2-\sqrt{7})\}}{(x-3)(x-4)} \equiv -1 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \quad \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$-\{(x+2+\sqrt{7})(x+2-\sqrt{7})\} = -(x-3)(x-4) + A(x-4) + B(x-3) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$$-\{(3+2+\sqrt{7})(3+2-\sqrt{7})\} = -(3-3)(3-4) + A(3-4) + B(3-3)$$

$$\text{বা, } -\{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})\} = 0 + A(-1) + 0$$

$$\text{বা, } -\{(5)^2 - (\sqrt{7})^2\} = -A$$

$$\text{বা, } -(25-7) = -A$$

$$\therefore A = 18$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x=4$ বসিয়ে পাই,

$$-\{(4+2+\sqrt{7})(4+2-\sqrt{7})\} = -(4-3)(4-4) + A(4-4) + B(4-3)$$

$$\text{বা, } -\{(6+\sqrt{7})(6-\sqrt{7})\} = 0 + 0 + B$$

$$\text{বা, } -(36-7) = B$$

$$\therefore B = -29$$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{-\{(x+2+\sqrt{7})(x+2-\sqrt{7})\}}{(x-3)(x-4)} = -1 + \frac{18}{x-3} + \frac{(-29)}{x-4}$$

$$= -1 + \frac{18}{x-3} - \frac{29}{x-4}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৫০ $f: \mathbb{N} - \{1\} \rightarrow \mathbb{N} - \{2\}$ এবং $g: A \rightarrow \mathbb{N}$ ফাংশন দুইটি $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ এবং

$g(x) = \sqrt{x-2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত অপর একটি রাশি $Q(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$ ।

[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর]

ক. সার্বিক সেট U এর যে কোন উপসেট A ও B এর জন্য প্রমাণ কর যে,

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad ২$$

খ. যদি $5f^{-1}(x) = g^{-1}(2)$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.১ এর প্রতিজ্ঞা ১(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮

খ ধরি, $y = f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

$$\text{বা, } yx - y = 2x + 2$$

$$\text{বা, } yx - 2x = y + 2$$

$$\text{বা, } x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-2} \quad [y = f(x) \text{ হলে } x = f^{-1}(y)]$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

আবার, ধরি, $y = g(x) = \sqrt{x-2}$

$$\text{বা, } y^2 = x - 2$$

$$\text{বা, } x = y^2 + 2$$

$$\text{বা, } g^{-1}(y) = y^2 + 2 \quad [y = g(x) \text{ হলে } x = g^{-1}(y)]$$

$$\therefore g^{-1}(x) = x^2 + 2$$

$$\text{এবং } g^{-1}(2) = 2^2 + 2 = 6$$

দেওয়া আছে, $5f^{-1}(x) = g^{-1}(2)$

$$\text{বা, } 5 \cdot \frac{x+2}{x-2} = 6$$

$$\text{বা, } 6x - 12 = 5x + 10$$

$$\text{বা, } 6x - 5x = 10 + 12$$

$$\therefore x = 22 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$Q(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25} = \frac{x^2 - 25 + 25}{x^2 - 25} = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 25} + \frac{25}{x^2 - 25}$$

$$= 1 + \frac{25}{(x + 5)(x - 5)}$$

ধরি, $\frac{25}{(x + 5)(x - 5)} \equiv \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 5}$ (i)

(i) কে $(x + 5)(x - 5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$25 \equiv A(x - 5) + B(x + 5) \text{ (ii)}$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) এ $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$$25 \equiv A(-5 - 5) + B(-5 + 5)$$

বা, $25 = -10A \quad \therefore A = -\frac{5}{2}$

আবার, (ii) এ $x = 5$ বসিয়ে পাই,

$$25 = A(5 - 5) + B(5 + 5)$$

বা, $25 = 10B \quad \therefore B = \frac{5}{2}$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{25}{(x + 5)(x - 5)} = \frac{-\frac{5}{2}}{x + 5} + \frac{\frac{5}{2}}{x - 5}$$

$\therefore g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25} = 1 - \frac{5}{2(x + 5)} + \frac{5}{2(x - 5)}$ যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৫১ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + K$, $Q(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ এবং $R(x) = \frac{x^3}{x^2 - 25}$ । [ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বিইউএসএমএস, পার্বতীপুর, দিনাজপুর]

ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে, K এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $R(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৪(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৩২

খ সৃজনশীল ৭(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

গ দেওয়া আছে, $R(x) = \frac{x^3}{x^2 - 25} = \frac{x(x^2 - 25) + 25x}{x^2 - 25}$

$$= x + \frac{25x}{x^2 - 25} = x + \frac{25x}{(x+5)(x-5)}$$

ধরি, $\frac{25x}{(x+5)(x-5)} \equiv \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5}$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x+5)(x-5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$25x \equiv A(x-5) + B(x+5) \text{ (ii)}$$

যা x এর সকলমানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$$25 \times (-5) = A(-5-5) + B(-5+5)$$

$$\text{বা, } -125 = -10A$$

$$\therefore A = \frac{25}{2}$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 5$ বসিয়ে পাই,

$$25 \times 5 = A(5-5) + B(5+5)$$

$$\text{বা, } 125 = 10B$$

$$\therefore B = \frac{25}{2}$$

A ও B এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$$\frac{25x}{(x+5)(x-5)} = \frac{25}{2(x+5)} + \frac{25}{2(x-5)}$$

$$\therefore R(x) = x + \frac{25}{2(x+5)} + \frac{25}{2(x-5)}; \text{ যা প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত}$$

রূপ। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৫২ $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$, $Q(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ এবং $R(x) = x^2 - 4x - 7$ তিনটি বহুপদী। [রংপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $\frac{R(x)}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $(x-a)$ ও $(x-b)$ উভয়ই $P(x)$ এর উৎপাদক হয় তবে প্রমাণ কর যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ যেখানে $a \neq b$ । ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৪(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২

খ সৃজনশীল ১৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২

গ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন ▶ ৫৩ (i) $P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (ii) $f(x) = \frac{3x + 1}{5x + 2}$ হলে

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর]

ক. $P(a, b, c)$ প্রতিসম কিনা যাচাই কর। ২

খ. $P(a, b, c)$ উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। $P(a, b, c) = 0$ এবং

$(a + b + c) \neq 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $a = b = c$. ৪

গ. f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ফাংশনটি এক-এক কিনা যাচাই কর। ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\therefore P(b, c, a) = b^3 + c^3 + a^3 - 3b.c.a$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = P(a, b, c)$$

সুতরাং যে কোন দুটি চলক স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।

$\therefore P(a, b, c)$ প্রতিসম রাশি।

খ $P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$$

$$= (a + b + c) \{ (a + b)^2 - (a + b)c + c^2 \} - 3ab(a + b + c)$$

$$= (a + b + c) (a^2 + 2ab + b^2 - ca - bc + c^2) - 3ab(a + b + c)$$

$$= (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ca - bc - 3ab)$$

$$= (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমতে, $P(a, b, c) = 0$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} (a + b + c) \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \quad [\square a + b + c \neq 0]$$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথক শূন্য হবে।

$$\therefore (a - b)^2 = 0$$

$$\text{বা, } a - b = 0$$

$$\therefore a = b$$

$$\text{এবং } (b - c)^2 = 0$$

$$\text{বা, } b - c = 0$$

$$\therefore b = c$$

সুতরাং $a = b = c$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x + 1}{5x + 2}$

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি

$$5x + 2 \neq 0$$

$$\text{বা, } x \neq -\frac{2}{5} \text{ হয়}$$

$$\therefore \text{ডোমেন } f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{5} \right\} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{ধরি, } y = f(x) = \frac{3x + 1}{5x + 2}$$

$$\text{বা, } 5xy + 2y = 3x + 1$$

$$\text{বা, } 5xy - 3x = 1 - 2y$$

$$\text{বা, } x = \frac{1 - 2y}{5y - 3}$$

$$\therefore f^{-1}(y) = \frac{1 - 2y}{5y - 3} \quad [\because y = f(x) \therefore x = f^{-1}(y)]$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1 - 2x}{5x - 3}$$

বিপরীত ফাংশনের ডোমেন মূল ফাংশনের রেঞ্জ হবে।

এখন, $f^{-1}(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি

$$5x - 3 \neq 0 \quad \text{বা, } x \neq \frac{3}{5} \text{ হয়}$$

$$\therefore \text{রেঞ্জ } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{5} \right\} \text{ (Ans.)}$$

আবার, যে কোন $x_1 \in \text{ডোম } f$, $x_2 \in \text{ডোম } f$ এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল

$$\text{যদি, } \frac{3x_1 + 1}{5x_1 + 2} = \frac{3x_2 + 1}{5x_2 + 2}$$

$$\text{বা, } (3x_1 + 1)(5x_2 + 2) = (3x_2 + 1)(5x_1 + 2)$$

$$\text{বা, } 15x_1x_2 + 5x_2 + 6x_1 + 2 = 15x_1x_2 + 5x_1 + 6x_2 + 2$$

$$\text{বা, } 6x_1 - 5x_1 = 6x_2 - 5x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

প্রশ্ন ▶ ৫৪ $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$, $Q(x) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3}$ ।

[পুলিশ লাইন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]

ক. $a^3 - a^2 - 10a - 8$ এর উৎপাদক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(x)$ এর আরেকটি উৎপাদক $(rx - 1)$ যেখানে, $a \neq 0$ ৪

গ. $Q(x) = \frac{3}{pqr}$ হলে দেখাও যে, $pq + qr + rp = 0$ অথবা $p = q = r$ ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৪(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩২

খ দেওয়া আছে,

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a \dots\dots\dots (i)$$

[যেখানে a, b, c প্রসংগিক এবং $a \neq 0$]

যেহেতু $(x - r)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক, সেহেতু $P(r) = 0$.

$$\text{এখন, } P(r) = ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a$$

$$\therefore ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

$$\text{ধরি, } rx - 1 = 0$$

$$\text{বা, } rx = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{r}$$

এখন (i) নং বহুপদীটিতে $x = \frac{1}{r}$ বসালে যদি উক্ত বহুপদীর মান শূন্য হয়, তবে $(rx - 1)$

উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে।

$$\therefore P\left(\frac{1}{r}\right) = a\left(\frac{1}{r}\right)^5 + b\left(\frac{1}{r}\right)^4 + c\left(\frac{1}{r}\right)^3 + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a$$

$$= \frac{a}{r^5} + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^3} + \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a$$

$$= \frac{a + br + cr^2 + cr^3 + br^4 + ar^5}{r^5}$$

$$= \frac{ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a}{r^5}$$

$$= \frac{0}{r^5} \quad [(ii)\text{নং থেকে মান বসিয়ে}]$$

$$= 0$$

যেহেতু (i) নং বহুপদীতে $x = \frac{1}{r}$ বসালে প্রদত্ত বহুপদীর মান শূন্য হয়, সেহেতু $(rx - 1)$

উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক।

$\therefore (rx - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

গ সৃজনশীল ২৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬

প্রশ্ন ▶ ৫৫ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $p(x) = \frac{x^2}{(2x + 1)(x + 3)^2}$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী]

ক. $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $p(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $f(a)$ কে $(a - x)$ এবং $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে,

$$x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0 \text{ যেখানে } x \neq y \quad ৪$$

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৯(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

খ দেওয়া আছে, $p(x) = \frac{x^2}{(2x + 1)(x + 3)^2}$

ধরি,
$$\frac{x^2}{(2x + 1)(x + 3)^2} \equiv \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{(x + 3)^2} \dots\dots (1)$$

(1) এর উভয় পক্ষকে $(2x + 1)(x + 3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 \equiv A(x + 3)^2 + B(2x + 1)(x + 3) + C(2x + 1) \dots\dots (2)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (2) এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 = C\{2 \cdot (-3) + 1\}$$

$$\text{বা, } 9 = C(-6 + 1)$$

$$\text{বা, } -5C = 9$$

$$\therefore C = -\frac{9}{5}$$

আবার, (2) নং এ $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{2} + 3\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{4} = A\left(\frac{-1 + 6}{2}\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{4} = A \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{4} = A \cdot \frac{25}{4}$$

$$\text{বা, } 25A = 1$$

$$\therefore A = \frac{1}{25}$$

আবার, (2) নং থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + 2B = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{25} + 2B = 1$$

$$\text{বা, } 2B = 1 - \frac{1}{25}$$

$$\text{বা, } 2B = \frac{25 - 1}{25}$$

$$\text{বা, } 2B = \frac{24}{25}$$

$$\text{বা, } B = \frac{24}{25 \times 2}$$

$$\therefore B = \frac{12}{25}$$

A, B, C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} &= \frac{\frac{1}{25}}{2x+1} + \frac{\frac{12}{25}}{x+3} + \frac{\frac{-9}{5}}{(x+3)^2} \\ &= \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2} \end{aligned}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন ▶ ৫৬ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ এবং $g(x) = \sqrt{2x-3}$ দুটি বীজগণিতীয় রাশি।
[কুমিলগা জিলা স্কুল, কুমিলগা]

ক. $g(x) = 5$ হলে x এর মান বের কর। ২

খ. $f(x)$ কে $(x-a)$ ও $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকলে প্রমাণ কর যে, $a^2 + b^2 + ab + 3a + 3b = 0$, যেখানে $a \neq b$

গ. $g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{2x-3}$

শর্তমতে, $g(x) = 5$

$$\text{বা, } \sqrt{2x-3} = 5$$

$$\text{বা, } 2x-3 = 25 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 2x = 25 + 3$$

$$\text{বা, } 2x = 28$$

$$\therefore x = 14 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$

$$\therefore f(a) = a^3 + 3a^2 + 1$$

আবার, $f(x)$ কে $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(b)$

$$\therefore f(b) = b^3 + 3b^2 + 1$$

শর্তমতে, $f(a) = f(b)$

$$\text{বা, } a^3 + 3a^2 + 1 = b^3 + 3b^2 + 1$$

$$\text{বা, } a^3 + 3a^2 + 1 - b^3 - 3b^2 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2) + 3(a - b)(a + b) = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b) = 0$$

$$\therefore a \neq b \quad \therefore a - b \neq 0$$

$$\text{সুতরাং } a^2 + b^2 + ab + 3a + 3b = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ ধরি, $y = g(x) = \sqrt{2x - 3} \quad \therefore x = g^{-1}(y)$

$$\text{বা, } y^2 = 2x - 3$$

$$\text{বা, } 2x = y^2 + 3$$

$$\text{বা, } x = \frac{y^2 + 3}{2}$$

$$\text{বা, } g^{-1}(y) = \frac{y^2 + 3}{2}$$

$$\text{বা, } g^{-1}(-3) = \frac{(-3)^2 + 3}{2}$$

$$\text{বা, } g^{-1}(-3) = \frac{9 + 3}{2}$$

$$\text{বা, } g^{-1}(-3) = \frac{12}{2}$$

$$\therefore g^{-1}(-3) = 6 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৫৭ $F(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$ [গভর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, কুমিলগা]

ক. দেখাও যে, $(x - 4)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক। ২

খ. যদি $F(x)$ কে $(x - 2a)$ ও $(x + 3b)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে দেখাও যে,

$$8a^3 + 27b^3 - 16a^2 + 36b^2 + 2a + 3b = 0 \quad 8$$

গ. $\frac{x}{F(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$

$(x - 4)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $F(4) = 0$ হয়।

$$\therefore F(4) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 64 - 64 = 0$$

$\therefore (x - 4)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

খ $F(x)$ কে $(x - 2a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $F(2a)$.

$$\begin{aligned}\therefore F(2a) &= (2a)^3 - 4(2a)^2 + 2a - 4 \\ &= 8a^3 - 16a^2 + 2a - 4\end{aligned}$$

আবার, $F(x)$ কে $(x + 3b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $F(-3b)$.

$$\begin{aligned}\therefore F(-3b) &= (-3b)^3 - 4(-3b)^2 - 3b - 4 \\ &= -27b^3 - 36b^2 - 3b - 4\end{aligned}$$

প্রশ্নমতে, $F(2a) = F(-3b)$

$$\text{বা, } 8a^3 - 16a^2 + 2a - 4 = -27b^3 - 36b^2 - 3b - 4$$

$$\therefore 8a^3 + 27b^3 - 16a^2 + 36b^2 + 2a + 3b = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ
$$\frac{x}{F(x)} = \frac{x}{x^3 - 4x^2 + x - 4} = \frac{x}{x^2(x - 4) + 1(x - 4)} = \frac{x}{(x - 4)(x^2 + 1)}$$

ধরি,
$$\frac{x}{(x - 4)(x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{x - 4} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \dots \dots \dots (i)$$

(i) এর উভয়পক্ষে $(x - 4)(x^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x \equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 4) \dots \dots \dots (ii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) এর উভয় পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$4 = A(4^2 + 1) + 0 \quad \therefore A = \frac{4}{17}$$

(ii) এর উভয়পক্ষে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 0 \text{ বা, } B = -A \quad \therefore B = -\frac{4}{17}$$

$$\text{এবং } C - 4B = 1 \text{ বা, } C = 1 + 4B = 1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17}$$

এখন, A , B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(x - 4)(x^2 + 1)} = \frac{4}{17(x - 4)} + \frac{-\frac{4x}{17} + \frac{1}{17}}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{4}{17(x-4)} + \frac{1-4x}{17(x^2+1)} \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ ৫৮ $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ [কুমিলগা মডার্ন হাই স্কুল, কুমিলগা]

ক. $P(x)$ কে $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে, একে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

২

খ. যদি $P(x)$ কে $x-a$ এবং $x-b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $2a^2 + 2b^2 + 2ab - 5a - 5b + 7 = 0$

গ. $\frac{6x-1}{P(x)-2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $P(x)$ কে $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$

$$\begin{aligned} \therefore P(2) &= 2 \cdot (2)^3 - 5(2)^2 + 7(2) - 8 \\ &= 16 - 20 + 14 - 8 \\ &= 2 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$

$P(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a)$

$$\therefore P(a) = 2a^3 - 5a^2 + 7a - 8$$

আবার, $P(x)$ কে $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(b)$

$$\therefore P(b) = 2b^3 - 5b^2 + 7b - 8$$

প্রশ্নানুসারে, $P(a) = P(b)$

$$\text{বা, } 2a^3 - 5a^2 + 7a - 8 = 2b^3 - 5b^2 + 7b - 8$$

$$\text{বা, } 2(a^3 - b^3) - 5(a^2 - b^2) + 7(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } 2\{(a-b)(a^2 + ab + b^2)\} - 5(a+b)(a-b) + 7(a-b) = 0$$

$$\text{বা, } (a-b) \cdot (2a^2 + 2ab + 2b^2 - 5a - 5b + 7) = 0$$

যেহেতু $a \neq b$, সেহেতু $a - b \neq 0$

$$\therefore 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 5a - 5b + 7 = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{6x-1}{P(x)-2} &= \frac{6x-1}{2x^3 - 5x^2 + 7x - 10} = \frac{6x-1}{2x^2(x-2) - x(x-2) + 5(x-2)} \\ &= \frac{6x-1}{(x-2)(2x^2 - x + 5)} \end{aligned}$$

মনে করি, $\frac{6x - 1}{(x - 2)(2x^2 - x + 5)} \equiv \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{2x^2 - x + 5} \dots \dots \dots (i)$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x - 2)(2x^2 - x + 5)$ দ্বারা গুণ করে,

$6x - 1 \equiv A(2x^2 - x + 5) + (Bx + C)(x - 2) \dots \dots \dots (ii)$

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে,

$11 = 11A + 0$

$\therefore A = 1$

(ii) নং এর উভয়পক্ষ হতে প্রকৃত পদ সমীকৃত হবে,

$-1 = 5A - 2C$

বা, $-1 = 5 - 2C$

বা, $2C = 6$

$\therefore C = 3$

(ii) নং এর উভয়পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে,

$0 = 2A + B$

বা, $0 = 2 + B$

বা, $4 = -2B$

$\therefore B = -2$

এখন, A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{6x - 1}{(x - 2)(2x^2 - x + 5)} = \frac{1}{x - 2} + \frac{(-2)x + 3}{2x^2 - x + 5}$
 $= \frac{1}{x - 2} - \frac{2x - 3}{2x^2 - x + 5}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৫৯ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$, $Q(x) = 2x + 1$, $R(x) = 3x + 1$
 [আল-আমিন একাডেমি স্কুল এন্ড কলেজ, চাঁদপুর]

ক. $\frac{1}{Q(x)}$ এর ডোমেন বের কর। ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\frac{R(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q(x) = 2x + 1$

$\therefore \frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{2x + 1}$

এখন, $\frac{1}{Q(x)} \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি $2x + 1 \neq 0$

বা, $x \neq -\frac{1}{2}$ হয়

$$\therefore \text{ডোমেন} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \text{ (Ans.)}$$

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-১৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৪৬

গ দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$$= (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1) \text{ [‘খ’ থেকে]}$$

$$R(x) = 3x + 1$$

$$\text{ধরি, } \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{3x + 1}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} \equiv \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x + 2} + \frac{C}{3x - 1}$$

... .. (i)

(i) নং কে $(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$3x + 1 \equiv A(3x + 2)(3x - 1) + B(2x + 1)(3x - 1) + C(2x + 1)(3x + 2)$$

... .. (ii)

এখন (ii) নং এ $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = A \left\{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right\} \left\{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\}$$

$$+ B \cdot 0 + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } -\frac{3}{2} + 1 = A \left(\frac{-3}{2} + 2\right) \left(-\frac{3}{2} - 1\right)$$

$$\text{বা, } \frac{-3 + 2}{2} = A \left(\frac{-3 + 4}{2}\right) \left(\frac{-3 - 2}{2}\right)$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2} = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \therefore A = \frac{2}{5}$$

আবার, (ii) নং এ $x = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = A \cdot 0 + B \cdot \left\{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right\} \left\{3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) - 1\right\} + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } -2 + 1 = B \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot (-3)$$

$$\text{বা, } -1 = B$$

$$\therefore B = -1$$

আবার, (ii) নং এ $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} + 1\right) \left(3 \cdot \frac{1}{3} + 2\right)$$

$$\text{বা, } 1 + 1 = C \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) (1 + 2)$$

$$\text{বা, } 2 = C \cdot \frac{5}{3} \cdot 3$$

$$\therefore C = \frac{2}{5}$$

এখন, A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x + 1}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} = \frac{\frac{2}{5}}{2x + 1} + \frac{-1}{3x + 2} + \frac{\frac{2}{5}}{3x - 1}$$

$$\therefore \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{2}{5(2x + 1)} - \frac{1}{(3x + 2)} + \frac{2}{5(3x - 1)} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ▶ ৬০ $P(x) = ax^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$, $(x + 3)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক।
[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. a এর মান নির্ণয় কর।

২

খ. $P(x) = (x + 3)$ হলে $Q(x)$ নির্ণয় কর এবং $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

৪

গ. $\frac{x}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তরে এদের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $P(x) = ax^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x + 3)$

অর্থাৎ, $P(-3) = 0$

$$\text{বা, } a(-3)^4 + 7(-3)^3 + 17(-3)^2 + 17(-3) + 6 = 0$$

$$\text{বা, } 81a - 189 + 153 - 51 + 6 = 0$$

$$\text{বা, } 81a = 81$$

$$\therefore a = 1 \quad (\text{Ans.})$$

খ $P(x) = ax^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$$= x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 \quad [\because a = 1]$$

$$= x^4 + 3x^3 + 4x^3 + 12x^2 + 5x^2 + 15x + 2x + 6$$

$$= x^3(x + 3) + 4x^2(x + 3) + 5x(x + 3) + 2(x + 3)$$

$$= (x + 3)(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$$

প্রশ্নমতে, $P(x) = (x + 3)Q(x)$

$$\text{বা, } (x + 3)(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) = (x + 3)Q(x)$$

$$\therefore Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \quad (\text{Ans.})$$

$$= (x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 4x + x + 2)$$

$$\begin{aligned}
&= \{x^2(x+2) + 2x(x+2) + 1(x+2)\} \\
&= (x+2)(x^2 + 2x + 1) \\
&= (x+2)(x+1)^2 \text{ (Ans.)}
\end{aligned}$$

গ $\frac{x}{P(x)} = \frac{x}{x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6}$

$$= \frac{x}{(x+2)(x+3)(x+1)^2}$$

ধরি, $\frac{x}{(x+2)(x+3)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \dots$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(x+2)(x+3)(x+1)^2$ গুণ করে পাই,

$$x \equiv A(x+3)(x+1)^2 + B(x+2)(x+1)^2 + C(x+1)(x+2)(x+3) + D(x+2)(x+3) \dots \dots$$
 (ii)

$x = -3$ হলে (ii) নং থেকে পাই,

$$-3 = 0 + B(-3+2)(-3+1)^2 + 0 + 0$$

বা, $-3 = -4B \therefore B = \frac{3}{4}$

$x = -1$ হলে (ii) নং থেকে পাই,

$$-1 = 0 + 0 + 0 + D(-1+2)(-1+3)$$

বা, $-1 = 2D \therefore D = \frac{-1}{2}$

$x = -2$ হলে (ii) নং থেকে পাই,

$$-2 = A(-2+3)(-2+1)^2 + 0 + 0 + 0$$

$\therefore A = -2$

(ii) নং এর উভয় পাশে x^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B + C = 0$$

বা, $C = -A - B$

বা, $C = -(-2) - \frac{3}{4} \therefore C = \frac{5}{4}$

A, B, C ও D এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{P(x)} &= \frac{x}{(x+2)(x+3)(x+1)^2} \\
&= \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{4(x+3)} + \frac{5}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} \text{ (Ans.)}
\end{aligned}$$

প্রশ্ন ▶ ৬১ $P(x) = \frac{x^3}{x^3 - 25x}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ এবং $f(x) = \sqrt{2-4x}$ তিনটি ফাংশন।

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ]

ক. $f(x)$ বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $g^{-1}(x) = g(x)$ 8

গ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক অধ্যায়-১ এর সৃজনশীল প্রশ্ন ৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

ধরি, $y = g(x)$

বা, $y = \frac{x+2}{x-1}$

বা, $xy - y = x + 2$

বা, $xy - x = y + 2$

বা, $x(y-1) = y+2$

বা, $x = \frac{y+2}{y-1}$ $y = g(x)$

বা, $g^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-1} \therefore g^{-1}(y) = g^{-1}g(x)$

বা, $g^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1} \therefore x = g^{-1}(y)$

$\therefore g^{-1}(x) = g(x)$ (দেখানো হলো)

গ $P(x) = \frac{x^3}{x^3 - 25x} = \frac{x^3}{x(x^2 - 25)} = \frac{x^2}{x^2 - 25}$
 $= \frac{x^2 - 25 + 25}{x^2 - 25} = 1 + \frac{25}{x^2 - 25}$

$\therefore P(x) = 1 + \frac{25}{(x+5)(x-5)} \dots\dots\dots (i)$

এখানে, $\frac{25}{(x+5)(x-5)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ,

ধরি, $\frac{25}{(x+5)(x-5)} \equiv \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5} \dots\dots\dots (ii)$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+5)(x-5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$25 \equiv A(x-5) + B(x+5) \dots\dots\dots (iii)$

(iii) একটি অভেদ, তাই x এর সকল মানের জন্য ইহা সত্য।

(iii) এ $x = 5$ বসিয়ে পাই,

$25 = A \times 0 + B(5+5)$

বা, $10B = 25 \therefore B = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

(iii) এ $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$$25 = A(-5 - 5) + B \times 0$$

বা, $25 = -10A$

বা, $-10A = 25$

$$\therefore A = \frac{25}{-10} = -\frac{5}{2}$$

(ii) এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{25}{(x+5)(x-5)} &= \frac{-\frac{5}{2}}{x+5} + \frac{\frac{5}{2}}{x-5} \\ &= -\frac{5}{2(x+5)} + \frac{5}{2(x-5)} = \frac{5}{2(x-5)} - \frac{5}{2(x+5)} \end{aligned}$$

(i) থেকে পাই, $P(x) = \frac{x^3}{x^3 - 25x} = 1 + \frac{5}{2(x-5)} - \frac{5}{2(x+5)}$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ৬২ $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$ ।

[ডাঃ খান্সাজীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. দেখাও যে, $(x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক। ২

খ. যদি $(x-s), P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে দেখাও যে, $(sx-1)$ ও $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

গ. $a = b = c = 1$ হলে, $\frac{P(x)}{(x^2+1)(x^6-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$$

$(x+1)$ অর্থাৎ $(x - (-1))$, $P(x)$ এর উৎপাদক হলে, $P(-1) = 0$ হবে।

$$\begin{aligned} \text{এখন, } P(-1) &= a(-1)^5 + b(-1)^4 + c(-1)^3 + c(-1)^2 + b(-1) + a \\ &= -a + b - c + c - b + a \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore (x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল ৫৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৪

গ $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

$a = b = c = 1$ হলে,

$$P(x) = 1.x^5 + 1.x^4 + 1.x^3 + 1.x^2 + 1.x + 1$$

$$\begin{aligned}
&= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
&= x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + 1(x + 1) \\
&= (x + 1)(x^4 + x^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{এখন, } \frac{P(x)}{(x^2 + 1)(x^6 - 1)} &= \frac{(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)}{(x^2 + 1)\{(x^2)^3 - 1^3\}} \\
&= \frac{(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)} \\
&= \frac{(x + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)} \\
&= \frac{1}{(x^2 + 1)(x - 1)}
\end{aligned}$$

$$\text{মনে করি, } \frac{1}{(x - 1)(x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \dots \dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$1 \equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে,

$$1 = A(1 + 1) + \{B(1) + C\}(1 - 1)$$

$$\text{বা, } 1 = 2A + 0$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 0 \quad \text{এবং} \quad -B + C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} + B = 0 \quad \text{বা, } \frac{1}{2} + C = 0$$

$$\therefore B = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = -\frac{1}{2}$$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x - 1)(x^2 + 1)} &= \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2(x - 1)} + \frac{-\frac{1}{2}(1 + x)}{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{(1+x)}{2(x^2+1)}$$

$\therefore \frac{P(x)}{(x^2+1)(x^6-1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{(1+x)}{2(x^2+1)}$ ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৬৩ $g(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 1}{z^2 - 2z - 3}$ [ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. $g\left(-\frac{1}{7}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $g(z) = 0$ হলে z এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(z)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 1}{z^2 - 2z - 3}$

$$\begin{aligned} \therefore g\left(-\frac{1}{7}\right) &= \frac{\left(-\frac{1}{7}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{7}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{1}{7}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{7}\right) - 3} \\ &= \frac{-\frac{1}{343} - \frac{2}{49} + 1}{\frac{1}{49} + \frac{2}{7} - 3} = \frac{-1 - 14 + 343}{1 + 14 - 147} \\ &= \frac{328}{-132} = \frac{328}{343} \times \frac{49}{-132} = -\frac{82}{231} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ সৃজনশীল ৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯

f ও y এর স্থলে যথাক্রমে g ও z ধরতে হবে।

গ সৃজনশীল ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৯

f ও y এর স্থলে যথাক্রমে g ও z ধরতে হবে।

প্রশ্ন ▶ ৬৪ $F(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$ এবং $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ যেখানে, a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম]

ক. ভাগশেষ উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. $F(x, y, z) = 0$ হলে, দেখাও যে, $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3$ ৪

গ. $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে দেখাও যে, $(rx - 1)$ ও $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

8

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ভাগশেষ উপপাদ্য: যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয়, তবে $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে।

খ দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = 0$

$$\text{বা, } (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = 0$$

$$\therefore (x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$$

$$\text{বামপক্ষ} = (x + y + z)^3$$

$$= \{(x + y) + z\}^3$$

$$= (x + y)^3 + z^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2$$

$$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + z^3 + 3(x^2 + 2xy + y^2)z + 3xz^2 + 3yz^2$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3xyz + 3x^2z + 3xyz + 3z^2x$$

$$+ 3yz^2 + 3y^2z + 3xyz - 3xyz$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3xz(x + y + z)$$

$$+ 3yz(z + y + x) - 3xyz$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + (x + y + z)(3xy + 3xz + 3yz) - 3xyz$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - 3xyz$$

$$= x^3 + y^3 + z^3$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ সৃজনশীল ৫৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৪

প্রশ্ন ▶ ৬৫ $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

$$\text{এবং } P(x) = \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8} + \frac{16}{x^{16} - 1}$$

[আগ্রাবাদ সরকারী কলোনী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. $P(x)$ এর ৩য় ও ৪র্থ পদের যোগফল নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{1}{1 + x} + P(x)$ কে সরল কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$ ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8} + \frac{16}{x^{16} - 1}$

$P(x)$ এর ৩য় ও ৪র্থ পদের সমষ্টি

$$\begin{aligned}
& \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1} \\
&= \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)} \\
&= \frac{8(x^8-1)+16}{(x^8+1)(x^8-1)} \\
&= \frac{8x^8-8+16}{(x^8+1)(x^8-1)} \\
&= \frac{8x^8+8}{(x^8+1)(x^8-1)} \\
&= \frac{8}{x^8-1} \text{ (Ans.)}
\end{aligned}$$

৫ প্রদত্ত রাশি = $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{x^8-1}$$

[‘ক’ হতে $\frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1} = \frac{8}{x^8-1}$]

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \left\{ \frac{4(x^4-1)+8}{(x^4+1)(x^4-1)} \right\} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1} \\
&= \frac{1}{1+x} + \left\{ \frac{2(x^2-1)+4}{(x^2+1)(x^2-1)} \right\} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{x^2-1} \\
&= \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{1}{x-1} \text{ (Ans.)}
\end{aligned}$$

গ সৃজনশীল ২৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬

প্রশ্ন ▶ ৬৬ $\frac{y^3 + 2y^2 + 1}{y^2 + 2y - 3}$ মূলদ বীজগাণিতীয় ভগ্নাংশ।

[সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট]

ক. $f(x) = \frac{4x + 3}{2x + 5}$ ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. ভগ্নাংশটির লবকে $y - p$ এবং $y - q$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $p \neq q$

$$\text{তবে দেখাও যে, } p^2 + pq + q^2 + 2p + 2q = 0 \quad 8$$

গ. ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{4x + 3}{2x + 5}$

এখন, $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2x + 5 \neq 0$

$$\text{বা, } 2x \neq -5$$

$$\text{বা, } x \neq -\frac{5}{2} \text{ হয়}$$

$$\therefore \text{ডোমেন } f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \text{ (Ans.)}$$

খ $\frac{y^3 + 2y^2 + 1}{y^2 + 2y - 3}$ ভগ্নাংশটির লব $y^3 + 2y^2 + 1$

$$\text{ধরি, } F(y) = y^3 + 2y^2 + 1$$

এখন, $F(y)$ কে $(y - p)$ এবং $(y - q)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে যথাক্রমে $F(p)$ এবং $F(q)$.

$$\therefore F(p) = p^3 + 2p^2 + 1 \text{ এবং } F(q) = q^3 + 2q^2 + 1$$

প্রশ্নানুসারে, $F(p) = F(q)$

$$\text{বা, } p^3 + 2p^2 + 1 = q^3 + 2q^2 + 1$$

$$\text{বা, } p^3 - q^3 + 2p^2 - 2q^2 + 1 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } p^3 - q^3 + 2(p^2 - q^2) = 0$$

$$\text{বা, } (p - q)(p^2 + pq + q^2) + 2(p + q)(p - q) = 0$$

$$\text{বা, } (p - q)(p^2 + pq + q^2 + 2p + 2q) = 0$$

যেহেতু $p \neq q$ তাই $p - q \neq 0$

$$\therefore p^2 + pq + q^2 + 2p + 2q = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ সৃজনশীল ৩৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০

প্রশ্ন ▶ ৬৭ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$ এবং $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$ দুইটি বীজগাণিতীয় সমীকরণ। [সরকারি জুবিলী উচ্চ বিদ্যালয়, সুনামগঞ্জ]

ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৭নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

প্রশ্ন ▶ ৬৮ $f(x) = x^3 - 7x - 6$ ও $g(x) = 2x^2 + x - a$ দুইটি বহুপদী।
[বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার]

ক. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হলে, $f(x)$ ও $g(x)$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদকটি নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{g(x)}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 7x - 6$

এখানে, $f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 7 - 7 = 0$

$\therefore x - (-1)$ বা $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7x - 6 = x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6$

$$= x^2(x + 1) - x(x + 1) - 6(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x - 6)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 3x + 2x - 6)$$

$$= (x + 1)\{x(x - 3) + 2(x - 3)\}$$

$$= (x + 1)(x - 3)(x + 2)$$

$$= (x - 3)(x + 1)(x + 2)$$

ইহাই $f(x)$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণিত রূপ।

খ এখানে, $g(x) = 2x^2 + x - a$ এবং $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - a$$

$$\text{বা, } 0 = 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - a$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - a$$

$$\text{বা, } 0 = 1 - a$$

$$\therefore a = 1$$

$$\text{অতএব, } g(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$= 2x^2 + 2x - x - 1$$

$$= 2x(x + 1) - 1(x + 1)$$

$$= (x + 1)(2x - 1)$$

‘ক’ থেকে পাই, $f(x) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে, $f(x)$ ও $g(x)$ বহুপদীয়দ্বয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক হল $(x + 1)$

(Ans.)

গ $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - 7x - 6} = \frac{(x + 1)(2x - 1)}{(x - 3)(x + 1)(x + 2)} = \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

মনে করি, $\frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 3)} \equiv \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3}$

বা, $\frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 3)} \equiv \frac{A(x - 3) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)}$

বা, $2x - 1 \equiv A(x - 3) + B(x + 2) \dots\dots\dots (i)$

(i) নং এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$2(-2) - 1 = A(-2 - 3) + B(-2 + 2)$$

বা, $-4 - 1 = A(-5) + B \cdot 0$

বা, $-5 = -5A$

$\therefore A = 1$

আবার (i) নং এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই

$$2 \times 3 - 1 = A(3 - 3) + B(3 + 2)$$

বা, $6 - 1 = A \cdot 0 + B \times 5$

বা, $5 = 5B \therefore B = 1$

$$\therefore \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 3}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৬৯ $f(x) = \frac{2x + 2}{3 - 2x}$ এবং $P(y) = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$.

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর]

ক. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $(y - m)$ ও $(y - n)$, $P(y)$ বহুপদীর সাধারণ উৎপাদক হলে

দেখাও যে, $m^2 + n^2 + mn + 2m + 2n + 3 = 0$, যেখানে $m \neq n$. ৪

গ. $f^{-1}(x) = 1$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x + 2}{3 - 2x}$

$$\therefore f\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{-1}{3}\right) + 2}{3 - 2\left(\frac{-1}{3}\right)} = \frac{-\frac{2}{3} + 2}{\frac{9 + 2}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{11} = \frac{4}{11} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(y) = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$

$(y - m)$, $P(y)$ বহুপদীর সাধারণ উৎপাদক হলে $P(m) = 0$ হবে।

$$\therefore m^3 + 2m^2 + 3m + 1 = 0 \dots \dots \text{(i)}$$

আবার, $(y - n)$, $P(y)$ বহুপদীর সাধারণ উৎপাদক হলে $P(n) = 0$ হবে।

$$\therefore n^3 + 2n^2 + 3n + 1 = 0 \dots \dots \text{(ii)}$$

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$m^3 - n^3 + 2m^2 - 2n^2 + 3m - 3n + 1 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } m^3 - n^3 + 2(m^2 - n^2) + 3(m - n) = 0$$

$$\text{বা, } (m - n)(m^2 + mn + n^2) + 2(m + n)(m - n) + 3(m - n) = 0$$

$$\therefore (m - n)(m^2 + mn + n^2 + 2m + 2n + 3) = 0$$

যেহেতু $m \neq n$ সুতরাং $m - n \neq 0$

$$\therefore m^2 + mn + n^2 + 2m + 2n + 3 = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ ধরি, $y = f(x) = \frac{2x + 2}{3 - 2x}$

$$\text{বা, } 2x + 2 = 3y - 2xy$$

$$\text{বা, } 2x + 2xy = 3y - 2$$

$$\text{বা, } x(2 + 2y) = 3y - 2$$

$$\text{বা, } x = \frac{3y - 2}{2y + 2}$$

$$\text{বা, } f^{-1}(y) = \frac{3y - 2}{2y + 2} \quad [\square f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)]$$

$$\text{বা, } f^{-1}(x) = \frac{3x - 2}{2x + 2}$$

$$\text{বা, } 1 = \frac{3x - 2}{2x + 2} \quad [\text{দেওয়া আছে}]$$

$$\text{বা, } 3x - 2 = 2x + 2$$

$$\therefore x = 4 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৭০ $F: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ ফাংশনটি $F(x) = \frac{5x-3}{2x-1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত এবং $A =$

$$\frac{2}{1-y^3} \quad [বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল]$$

ক. $F(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $F(x)$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন। ৪

গ. A কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{5x-3}{2x-1}$

$F(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2x-1 \neq 0$ বা $x \neq \frac{1}{2}$ হয়।

$$\therefore F(x) \text{ এর ডোমেন} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2}\right\} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{ধরি, } y = F(x) = \frac{5x-3}{2x-1} \therefore F^{-1}(y) = x$$

$$\text{বা, } 2xy - y = 5x - 3$$

$$\text{বা, } 2xy - 5x = y - 3$$

$$\text{বা, } x(2y - 5) = y - 3$$

$$\therefore x = \frac{y-3}{2y-5} \in \mathbb{R}$$

হবে যদি $2y-5 \neq 0$ অর্থাৎ $y \neq \frac{5}{2}$ হয়।

$$\therefore F(x) \text{ এর রেঞ্জ} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{5}{2}\right\} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{5x-3}{2x-1}$

$F(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যেকোন $a, b \in \text{ডোম } F$ এর জন্য $F(a) = F(b)$ হলে $a = b$ হয়।

$$\text{ধরি, } F(a) = F(b)$$

$$\text{বা, } \frac{5a-3}{2a-1} = \frac{5b-3}{2b-1}$$

$$\text{বা, } 10ab - 6b - 5a + 3 = 10ab - 5b - 6a + 3$$

$$\text{বা, } -5a + 6a = 6b - 5b$$

$$\therefore a = b$$

∴ F(x) এক-এক ফাংশন। (দেখানো হলো)

‘ক’ হতে পাই, F(x) এর রেঞ্জ = $\nabla - \left\{ \frac{5}{2} \right\} =$ কোডোমেন

∴ F(x) অনটু ফাংশন। (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $A = \frac{2}{1-y^3}$

$$= \frac{2}{(1-y)(1+y+y^2)}$$

ধরি, $A = \frac{2}{(1-y)(1+y+y^2)} \equiv \frac{P}{1-y} + \frac{Qy+R}{1+y+y^2} \dots \dots (i)$

(i) নং $(1-y)(1+y+y^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2 \equiv P(1+y+y^2) + (Qy+R)(1-y) \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$$2 = P(1+1+1^2)$$

বা, $2 = 3P \quad \therefore P = \frac{2}{3}$

(ii) নং হতে y^2 ও y এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$P - Q = 0 \text{ বা, } \frac{2}{3} - Q = 0 \therefore Q = \frac{2}{3}$$

এবং $P + Q - R = 0$

বা, $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - R = 0$

বা, $\frac{4}{3} - R = 0$

$$\therefore R = \frac{4}{3}$$

P, Q ও R এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$A = \frac{2}{3(1-y)} + \frac{\frac{2y}{3} + \frac{4}{3}}{1+y+y^2}$$
$$= \frac{2}{3(1-y)} + \frac{2y+4}{3(1+y+y^2)} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৭১ $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ একটি ফাংশন যেখানে $x \neq 1$

[বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল]

ক. $f(a) = k$ হলে a এর মান k এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $f^{-1}(5)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{f(x)}{x(x-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

শর্তমতে, $f(a) = k$

$$\text{বা, } \frac{2a+3}{a-1} = k$$

$$\text{বা, } 2a+3 = ak-k$$

$$\text{বা, } 2a-ak = -k-3$$

$$\text{বা, } a(2-k) = -(k+3)$$

$$\therefore a = \frac{k+3}{k-2} \text{ (Ans.)}$$

খ ধরি, $f^{-1}(5) = a$

$$\text{বা, } 5 = f(a)$$

$$\text{বা, } 5 = \frac{2a+3}{a-1}$$

$$\text{বা, } 5a-5 = 2a+3$$

$$\text{বা, } 5a-2a = 5+3$$

$$\text{বা, } 3a = 8$$

$$\text{বা, } a = \frac{8}{3}$$

$$\therefore f^{-1}(5) = \frac{8}{3} \text{ (Ans.)}$$

গ $\frac{f(x)}{x(x-1)} = \frac{2x+3}{x(x-1)(x-1)} = \frac{2x+3}{x(x-1)^2}$

$$\text{ধরি, } \frac{2x+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \dots \dots \text{ (i)}$$

(i) নং কে $x(x-1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x+3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \dots \dots \text{ (ii)}$$

(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$2 \cdot 0 + 3 = A(0-1)^2 + B \cdot 0 + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } 3 = A$$

$$\therefore A = 3$$

আবার, (ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$2 \cdot 1 + 3 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C$$

$$\therefore C = 5$$

উভয়পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 0$$

$$\text{বা, } 3 + B = 0$$

$$\therefore B = -3$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x + 3}{x(x - 1)^2} = \frac{3}{x} - \frac{3}{x - 1} + \frac{5}{(x - 1)^2}$$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৭২ $G(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$ এবং

$Q(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$. [সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]

ক. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $\frac{8x^2 - 2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. $G(x, y, z) = xyz$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(x + y + z)^7} = \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7}$ ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$
 $= a^2b - ca^2 + b^2c - ab^2 + c^2(a - b)$
 $= a^2b - ab^2 - ca^2 + b^2c + c^2(a - b)$
 $= ab(a - b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a - b)$
 $= (a - b) \{ab - c(a + b) + c^2\}$
 $= (a - b) (ab - ca - bc + c^2)$
 $= (a - b) \{a(b - c) - c(b - c)\}$
 $= (a - b) (b - c) (a - c)$
 $= - (a - b) (b - c) (c - a)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2 \\ &= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2 \\ &= 4x^3(x + 1) + 8x^2(x + 1) - x(x + 1) - 2(x + 1) \\ &= (x + 1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2) \\ &= (x + 1) \{4x^2(x + 2) - 1(x + 2)\} \\ &= (x + 1)(x + 2)(4x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x + 1)(x + 2) \{(2x)^2 - 1^2\} \\
&= (x + 1)(x + 2)(2x + 1)(2x - 1) \\
\text{আবার, } 8x^2 - 2 &= 2(4x^2 - 1) \\
&= 2\{(2x)^2 - 1^2\} \\
&= 2(2x + 1)(2x - 1) \\
\therefore \frac{8x^2 - 2}{Q(x)} &= \frac{2(2x + 1)(2x - 1)}{(x + 1)(x + 2)(2x + 1)(2x - 1)} = \frac{2}{(x + 1)(x + 2)}
\end{aligned}$$

$$\text{ধরি, } \frac{2}{(x + 1)(x + 2)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} \dots \dots \dots (i)$$

এখন, (i) নং কে $(x + 1)(x + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2 \equiv A(x + 2) + B(x + 1) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A(-1 + 2) + B \cdot 0$$

বা, $A = 2$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A \cdot 0 + B(-2 + 1)$$

$$\therefore B = -2$$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{2}{x + 1} - \frac{2}{x + 2} = 2\left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}\right)$$

$$\therefore \frac{8x^2 - 2}{Q(x)} = 2\left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}\right) \text{ (Ans.)}$$

গ সৃজনশীল ৪৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪২

প্রশ্ন ▶ ৭৩ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$ বহুপদীর একটি উৎপাদক

$Q(x) = 6x^2 + 7x + a$ [পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী]

ক. $Q(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a = 2$ হলে দেখাও যে, $c = 2b$. ৪

গ. 'খ' তে প্রাপ্ত b ও c এর মান ব্যবহার করে $\frac{x}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q(x) = 6x^2 + 7x + a$

যেহেতু $(2x + 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক, তাই ভাগশেষ শূন্য। অর্থাৎ $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\text{বা, } 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a = 0$$

$$\text{বা, } \frac{6}{4} - \frac{7}{2} + a = 0$$

$$\text{বা, } a = \frac{7}{2} - \frac{6}{4}$$

$$\text{বা, } a = \frac{14 - 6}{4}$$

$$\text{বা, } a = \frac{8}{4}$$

$$\therefore a = 2 \text{ (Ans.)}$$

$$\begin{aligned} \text{৩} \quad Q(x) &= 6x^2 + 7x + a \\ &= 6x^2 + 7x + 2 \quad [\square a = 2] \\ &= 6x^2 + 4x + 3x + 2 \\ &= 2x(3x + 2) + 1(3x + 2) \\ &= (3x + 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

এখানে, যেহেতু $Q(x) = (3x + 2)(2x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। তাই $P(x)$ এর

$$\text{ভাগশেষ শূন্য হবে অর্থাৎ } P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \text{ বা, } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore P\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{2}{3}\right) + c$$

$$\text{বা, } 0 = -18 \cdot \frac{8}{27} + 15 \cdot \frac{4}{9} - \frac{2b}{3} + c$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{-16}{3} + \frac{20}{3} - \frac{2b}{3} + c$$

$$\text{বা, } c + \frac{20}{3} - \frac{16}{3} - \frac{2b}{3} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{3c + 20 - 16 - 2b}{3} = 0$$

$$\therefore 3c + 4 - 2b = 0 \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$\text{আবার, } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 18\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c$$

$$\text{বা, } 0 = -18 \cdot \frac{1}{8} + 15 \cdot \frac{1}{4} - \frac{b}{2} + c$$

$$\text{বা, } 0 = -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} - \frac{b}{2} + c$$

$$\text{বা, } c - \frac{9}{4} + \frac{15}{4} - \frac{b}{2} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{4c - 9 + 15 - 2b}{4} = 0$$

$$\therefore 4c + 6 - 2b = 0 \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

$$\text{(i) ও (ii) নং হতে পাই, } 3c + 4 - 2b = 4c + 6 - 2b$$

$$\text{বা, } 4 - 6 = 4c - 3c$$

$$\therefore c = -2$$

c এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$3(-2) + 4 - 2b = 0$$

$$\text{বা, } -6 + 4 - 2b = 0$$

$$\text{বা, } 2b = -2$$

$$\text{বা, } b = -1$$

$$\therefore c = -2 = 2 \times (-1) = 2 \times b$$

অতএব, $c = 2b$ (দেখানো হলো)

গ 'খ' হতে পাই $b = -1$ এবং $c = -2$

$$\text{এখন, } \frac{x}{P(x)} = \frac{x}{18x^3 + 15x^2 - x - 2}$$

$$= \frac{x}{18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2}$$

$$= \frac{x}{9x^2(2x+1) + 3x(2x+1) - 2(2x+1)}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)(9x^2 + 3x - 2)}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)(9x^2 + 6x - 3x - 2)}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)\{3x(3x+2) - 1(3x+2)\}}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)(3x+2)(3x-1)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x}{(2x+1)(3x+2)(3x-1)} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3x+2} + \frac{C}{3x-1} \dots \dots \dots \text{(i)}$$

(i) এর উভয় পক্ষে $(2x+1)(3x+2)(3x-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x \equiv A(3x + 2)(3x - 1) + B(2x + 1)(3x - 1) + C(2x + 1)(3x + 2) \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) এর উভয় পক্ষে $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{1}{2} = A \left\{ 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 2 \right\} \left\{ 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 1 \right\} + B \cdot 0 + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2} = A \left(-\frac{3}{2} + 2 \right) \left(-\frac{3}{2} - 1 \right)$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2} = A \left(\frac{-3 + 4}{2} \right) \cdot \left(\frac{-3 - 2}{2} \right)$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2} = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{2} \therefore A = \frac{2}{5}$$

(ii) এ $x = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{2}{3} = A \cdot 0 + B \left\{ 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 1 \right\} \left\{ 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - 1 \right\} + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } -\frac{2}{3} = B \left(\frac{-4}{3} + 1 \right) (-2 - 1)$$

$$\text{বা, } -\frac{2}{3} = B \left(\frac{-4 + 3}{3} \right) (-3) \therefore B = -\frac{2}{3}$$

(ii) এ $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{3} = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \right) \left(3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \right)$$

$$\text{বা, } \frac{1}{3} = C \cdot \left(\frac{2}{3} + 1 \right) \cdot 3 \therefore C = \frac{1}{15}$$

এখন, A , B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} = \frac{2}{5(2x + 1)} - \frac{2}{3(3x + 2)} + \frac{1}{15(3x - 1)} \text{ যা নির্ণেয়}$$

আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৭৪ $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$ একটি ভগ্নাংশ। [মতিঝিল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. হরকে $x + 3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২

খ. ভগ্নাংশটির লবকে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0$ 8

গ. ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

৭৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$ ভগ্নাংশটির হর $x^2 + 2x - 3$

ধরি, $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f(x)$ কে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-3)$

\therefore ভাগশেষ = $f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ (Ans.)

খ সৃজনশীল ৬৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৯

গ সৃজনশীল ৩৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪০

প্রশ্ন ▶ ৭৫ $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-1}}$ এবং $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

[মতিঝিল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $F(x)$ এক-এক কিনা যাচাই কর এবং $F^{-1}(1)$ নির্ণয় কর। 8

গ. $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6 = 0$ 8

৭৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ফাংশন, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-1}} \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \nabla$

এবং $5x - 1 > 0$ অর্থাৎ $x > \frac{1}{5}$ হয়।

\therefore ডোমেন, $F = \left\{ x : x \in \nabla \text{ and } x > \frac{1}{5} \right\}$ (Ans.)

খ যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি $x_1 = x_2$ হয়।

মনে করি, $F(x_1) = F(x_2)$

বা, $\frac{1}{\sqrt{5x_1-1}} = \frac{1}{\sqrt{5x_2-1}}$

বা, $5x_1 - 1 = 5x_2 - 1$

বা, $5x_1 = 5x_2 \therefore x_1 = x_2$

$\therefore F(x)$ ফাংশনটি এক-এক। (Ans.)

মনে করি, $F^{-1}(x) = a$

$$\text{বা, } x = F(a)$$

$$\text{বা, } x = \frac{1}{\sqrt{5a-1}}$$

$$\text{বা, } x^2(5a-1) = 1$$

$$\text{বা, } 5a-1 = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{বা, } 5a = \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\text{বা, } a = \frac{1+x^2}{5x^2}$$

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{5x^2}$$

$$\therefore F^{-1}(1) = \frac{1+1^2}{5 \times 1^2} = \frac{2}{5} \text{ (Ans.)}$$

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৩

প্রশ্ন ▶ ৭৬ $F(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ একটি বহুপদী।

[খিলগাঁও সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. দেখাও যে, $P(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। ১২

খ. $F(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\frac{2x}{F(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\therefore P(b, c, a) = b^3 + c^3 + a^3 - 3bca = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\text{এবং } P(c, a, b) = c^3 + a^3 + b^3 - 3cab = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\therefore P(a, b, c) = P(b, c, a) = P(c, a, b)$$

অর্থাৎ $P(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। (দেখানো হলো)

খ $F(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$

$F(x)$ বহুপদীর সহগসমূহ পূর্ণসংখ্যা এবং প্রবপদ = 1, মুখ্য সহগ = 1

এখানে, প্রবপদ \times মুখ্য সহগ = $1 \times 1 = 1$

$$\therefore F(x) \text{ এর উৎপাদক } x-1 \text{ বা } x+1$$

$$\text{এখন, } F(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + 2(-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= -1 + 1 - 2 + 2 - 1 + 1 = 0$$

$\therefore x+1, F(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned}\therefore F(x) &= x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ &= x^4(x + 1) + 2x^2(x + 1) + 1(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^4 + 2x^2 + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 1)^2 \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

গ $\frac{2x}{F(x)} = \frac{2x}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1} = \frac{2x}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$
অতঃপর সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন▶৭৭ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $F(x) = \frac{2x}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি। [তেজগাঁও সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ কে $x - m$ এবং $x - n$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m^2 + n^2 + mn + 5m + 5n + 6 = 0$ ৪

গ. $F(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$$\begin{aligned}\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 8 \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{5}{9} - 2 + 8 = \frac{-1 + 15 + 162}{27} = \frac{176}{27} \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন▶৭৮ $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ এবং $Q(x) = x^2 - 2x - 8$

[জয়পুরহাট সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট]

ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $Q(x)$ হলে, a এবং b এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q(x) = x^2 - 2x - 8$

$$\begin{aligned}&= x^2 - 4x + 2x - 8 \\ &= x(x - 4) + 2(x - 4) \\ &= (x - 4)(x + 2) \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

খ 'ক' হতে পাই, $Q(x) = (x - 4)(x + 2)$

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$

যেহেতু, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $Q(x)$ সুতরাং

$$P(-2) = 0$$

$$\text{বা, } (-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + b = 0$$

$$\text{বা, } -8 - 4 - 2a + b = 0$$

$$\therefore b = 2a + 12 \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{এবং } P(4) = 0$$

$$\text{বা, } 4^3 - 4^2 + a \cdot 4 + b = 0$$

$$\text{বা, } 64 - 16 + 4a + 2a + 12 = 0$$

$$\text{বা, } 6a = -60 \therefore a = -10 \text{ (Ans.)}$$

a এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$b = 2 \times (-10) + 12 = -8 \text{ (Ans.)}$$

গ

$$\frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{x^3 - x^2 + ax + b}$$

$$= \frac{x^2}{x^3 - x^2 - 10x - 8} \text{ [‘খ’ হতে পাই, } a = -10, b = -8]$$

$$= \frac{x^2}{x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8}$$

$$= \frac{x^2}{x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)}$$

$$= \frac{x^2}{(x + 1)(x^2 - 2x - 8)}$$

$$= \frac{x^2}{(x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)}$$

$$= \frac{x^2}{(x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\}}$$

$$= \frac{x^2}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 4} \dots \dots (i)$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করি,

$$x^2 \equiv A(x + 2)(x - 4) + B(x + 1)(x - 4) + C(x + 1)(x + 2) \dots \dots (ii)$$

$x = -1$ হলে, (ii) হতে পাই,

$$(-1)^2 = A(-1 + 2)(-1 - 4) + 0 + 0$$

$$\text{বা, } 1 = -5A$$

$$\therefore A = -\frac{1}{5}$$

$x = -2$ হলে, (ii) হতে পাই,

$$(-2)^2 = 0 + B(-2 + 1)(-2 - 4) + 0$$

$$\text{বা, } 4 = 6B$$

$$\therefore B = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$x = 4$ হলে (ii) হতে পাই,

$$4^2 = 0 + 0 + C(4 + 1)(4 + 2)$$

$$\text{বা, } 16 = 30C \therefore C = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

A, B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\therefore \frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x-4)} = \frac{-1}{5(x+1)} + \frac{2}{3(x+2)} + \frac{8}{15(x-4)} ; \text{ যা নির্ণেয়}$$

আংশিক ভগ্নাংশ। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৭৯ $M = \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{a^{16}-1}$

$$N = F(p, q, r) = p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$$

[কালেক্টরেট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, নীলফামারী]

ক. দেখাও যে, $F(p, q, r)$ একটি চক্র ক্রমিক রাশি। ২

খ. দেখাও যে, $M = \frac{1}{a-1} + \frac{8}{a-1}$

গ. $F(p, q, r) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $p = q = r$ অথবা $pq + qr + rp = 0$

৭৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $N = F(p, q, r) = p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$

$$\therefore F(q, r, p) = q^{-3} + r^{-3} + p^{-3} - 3q^{-1}r^{-1}p^{-1}$$

$$= p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$$

আবার, $F(r, p, q) = r^{-3} + p^{-3} + q^{-3} - 3r^{-1}p^{-1}q^{-1}$

$$= p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$$

$$\therefore F(p, q, r) = F(q, r, p) = F(r, p, q)$$

$\therefore F(p, q, r)$ একটি চক্র ক্রমিক রাশি। (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $M = \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{a^{16}-1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{(a^8+1)(a^8-1)} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \left\{ \frac{8(a^8-1)+16}{(a^8+1)(a^8-1)} \right\} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8(a^8+1)}{(a^8+1)(a^8-1)} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{a^8-1} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1+a^2} + \left\{ \frac{4(a^4-1)+8}{(a^4+1)(a^4-1)} \right\} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4(a^4+1)}{(a^4+1)(a^4-1)} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{a^4-1} \\
&= \frac{1}{a+1} + \left\{ \frac{2(a^2-1)+4}{(a^2+1)(a^2-1)} \right\} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2(a^2+1)}{(a^2-1)(a^2+1)} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{2}{a^2-1} \\
&= \frac{a-1+2}{(a+1)(a-1)} \\
&= \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} \\
\therefore M &= \frac{1}{a-1} \text{ (দেখানো হলো)}
\end{aligned}$$

গ সৃজনশীল ২৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬

প্রশ্ন ▶ চ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

এবং $Q(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

[আওয়ার লেডি অব ফাতেমা গার্লস হাই স্কুল, কুমিল্লা]

ক. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $Q(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক $(x+2)$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 \quad ৪$$

৮০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-১৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৬

খ দেওয়া আছে, $Q(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

যেহেতু $x + 2$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক সেহেতু, $Q(-2) = 0$

$$\text{বা, } 4(-2)^4 + 12(-2)^3 + 7(-2)^2 - 3(-2) - a = 0$$

$$\text{বা, } 4 \times 16 + 12 \times (-8) + 7 \times 4 + 6 - a = 0$$

$$\text{বা, } 64 - 96 + 28 + 6 - a = 0$$

$$\text{বা, } 2 - a = 0 \therefore a = 2 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$

$$\text{বা, } a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + ca^2 + abc + c^2a = abc$$

$$\text{বা, } a^2b + ab^2 + abc + b^2c + c^2a + bc^2 + a^2c + abc = 0$$

$$\text{বা, } ab(a + b) + bc(a + b) + c^2(a + b) + ac(a + b) = 0$$

$$\text{বা, } (a + b)(ab + bc + c^2 + ac) = 0$$

$$\text{বা, } (a + b)\{b(a + c) + c(c + a)\} = 0$$

$$\text{বা, } (a + b)(b + c)(c + a) = 0$$

$$\therefore a + b = 0 \text{ অথবা, } b + c = 0 \text{ অথবা } c + a = 0$$

$$\therefore a = -b \quad \therefore b = -c \quad \therefore c = -a$$

$$\text{এখন, } (a + b + c)^3 = (a - c + c)^3 = a^3 \quad [\square b = -c]$$

$$\text{আবার, } a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + (-c)^3 + c^3 \quad [\square b = -c]$$

$$= a^3 - c^3 + c^3 = a^3$$

$$\therefore (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ▶ ৮১ $F(x) = \frac{1}{x-5}$, $Q(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$, $R(x) = x^2 - 4x - 7$

[আগ্রাবাদ বালিকা বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. $F(x) = 2$ হলে, x -এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $F^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{R(x)}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৮১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{1}{x-5}$

প্রশ্নমতে, $F(x) = 2$

$$\text{বা, } \frac{1}{x-5} = 2$$

$$\text{বা, } x - 5 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} + 5 = \frac{1 + 10}{2} = \frac{11}{2} \text{ (Ans.)}$$

খ ধরি, $y = F(x) = \frac{1}{x - 5}$

$$\text{বা, } y = \frac{1}{x - 5}$$

$$\text{বা, } xy - 5y = 1$$

$$\text{বা, } xy = 1 + 5y$$

$$\text{বা, } x = \frac{1 + 5y}{y}$$

$$\text{বা, } F^{-1}(y) = \frac{1 + 5y}{y} \quad [\square y = F(x) \therefore x = F^{-1}(y)]$$

$$\text{বা, } F^{-1}(x) = \frac{1 + 5x}{x} \quad [y \text{ কে } x \text{ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে}]$$

$$\therefore F^{-1}(3) = \frac{1 + 5 \cdot 3}{3} = \frac{1 + 15}{3} = \frac{16}{3} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$

$$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 4)$$

$$\therefore \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x^2 + 4)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x^2 + 4)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \dots\dots\dots (i)$$

(i) এর উভয় পক্ষকে $(x + 1)(x^2 + 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x + 1) \dots\dots\dots (ii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (ii) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$(-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 7 = A(1 + 4)$$

$$\text{বা, } 1 + 4 - 7 = 5A$$

$$\text{বা, } 5A = -2 \therefore A = -\frac{2}{5}$$

আবার, (ii) নং থেকে x^2 , x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 1 \text{ বা, } -\frac{2}{5} + B = 1 \quad \therefore B = \frac{7}{5}$$

$$\text{এবং } B + C = -4$$

$$\text{বা, } C = -4 - \frac{7}{5} \therefore C = -\frac{27}{5}$$

(i) নং এ A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{-2}{5(x+1)} + \frac{\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}}{x^2+4} = \frac{-2}{5(x+1)} + \frac{7x-27}{5(x^2+4)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ চ২ $F(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$ এবং

$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$

[উখিয়া সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, কক্সবাজার]

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক ও সমমাত্রিক রাশি। ২

খ. $F(x, y, z) = 0$ হলে, প্রমাণ করো যে,

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3. \quad 8$$

গ. $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে দেখাও যে,

$(rx - 1)$ ও $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

চ২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$

প্রদত্ত রাশিটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী।

(এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)

আবার, $F(y, z, x) = (y + z + x)(yz + zx + xy) - yzx$

$$= (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$$

$$\therefore F(z, x, y) = (z + x + y)(zx + xy + yz) - zxy$$

$$= (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$$

$$\therefore F(x, y, z) = F(y, z, x) = F(z, x, y)$$

$\therefore F(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক ও সমমাত্রিক রাশি। (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল ৬৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৮

গ সৃজনশীল ৫৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৪

প্রশ্ন ▶ চ৩ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $P(x) = \frac{x+3}{x^2+8x+15}$

[কক্সবাজার সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কক্সবাজার]

ক. $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $f(a)$ কে $(a - x)$ এবং $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে,

$$x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0, \text{ যেখানে } x \neq y \quad 8$$

৮৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৯(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

খ সৃজনশীল ৯(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

গ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭

প্রশ্ন►৮৪ $f(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$

এবং $g(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$ [বান্দরবান সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, বান্দরবান]

ক. $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $(3x + 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে b এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{8x^2 - 2}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৮৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$

$$\begin{aligned} \therefore f(-2) &= 18(-2)^3 + b(-2)^2 - (-2) - 2 \\ &= -144 + 4b + 2 - 2 \\ &= 4b - 144 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$

$(3x + 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

$$\therefore f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\text{এখন, } f\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + b\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) - 2$$

$$\text{বা, } 0 = -18 \cdot \frac{8}{27} + b \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 2$$

$$\text{বা, } 0 = \frac{4b}{9} + \frac{2}{3} - \frac{16}{3} - 2$$

$$\text{বা, } \frac{4b}{9} = 2 + \frac{16}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{4b}{9} = \frac{20}{3} \quad \text{বা, } b = \frac{20}{3} \times \frac{9}{4} \therefore b = 15 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$$\therefore \frac{8x^2 - 2}{g(x)} = \frac{8x^2 - 2}{4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8x^2 - 2}{4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - 3x - 2} \\
&= \frac{8x^2 - 2}{4x^3(x + 1) + 8x^2(x + 1) - (x^2 + x + 2x + 2)} \\
&= \frac{8x^2 - 2}{4x^3(x + 1) + 8x^2(x + 1) - x(x + 1) - 2(x + 1)} \\
&= \frac{8x^2 - 2}{(x + 1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2)} \\
&= \frac{8x^2 - 2}{(x + 1)\{4x^2(x + 2) - 1(x + 2)\}} \\
&= \frac{8x^2 - 2}{(x + 1)(x + 2)(4x^2 - 1)} \\
&= \frac{2(4x^2 - 1)}{(x + 1)(x + 2)(4x^2 - 1)} \\
&= \frac{2}{(x + 1)(x + 2)}
\end{aligned}$$

ধরি, $\frac{2}{(x + 1)(x + 2)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$ (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2 \equiv A(x + 2) + B(x + 1) \text{ (ii)}$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1)$$

$$\text{বা, } 2 = B(-1) \therefore B = -2$$

আবার, (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A(-1 + 2) + B(-1 + 1)$$

$$\text{বা, } 2 = A \therefore A = 2$$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{2}{x + 1} - \frac{2}{x + 2}$$

$$\therefore \frac{8x^2 - 2}{g(x)} = \frac{2}{x + 1} - \frac{2}{x + 2}; \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ চ৫ চলক x এর তিনটি বহুপদী $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + k$,

$$N(x) = x^2 - 4x - 7 \text{ এবং } D(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$

[দি বাডস রেসিডেনসিয়াল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, শ্রীমঙ্গল, মৌলভীবাজার]

ক. $D(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{N(x)}{D(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৮৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $D(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

$$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$$

$$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$$

$$= (x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\}$$

$$= (x + 1)(x + 2)(x - 4) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + k$

যেহেতু $(3x + 2)$ বা, $3\left(x + \frac{2}{3}\right)$ বা, $3\left\{x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক; সেহেতু

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

$$\text{এখানে, } P\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + k$$

$$= -18 \cdot \frac{8}{27} + 15 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + k$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} + k$$

$$= \frac{-16 + 20 + 2 + 3k}{3}$$

$$= \frac{6 + 3k}{3} = 2 + k$$

শর্তানুসারে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

$$\text{বা, } 2 + k = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $N(x) = x^2 - 4x - 7$

‘ক’ থেকে পাই, $D(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)$

$$\therefore \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$$

এখানে, $\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

$$\text{মনে করি, } \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 4} \dots\dots\dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x + 2)(x - 4) + B(x + 1)(x - 4) + C(x + 1)(x + 2) \dots\dots (ii)$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$1 + 4 - 7 = A(-1 + 2)(-1 - 4)$$

$$\text{বা, } -2 = A(-5)$$

$$\therefore A = \frac{2}{5}$$

(ii) নং এর উভয় পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$4 + 8 - 7 = B(-2 + 1)(-2 - 4)$$

$$\text{বা, } 5 = B(-1)(-6) \therefore B = \frac{5}{6}$$

(ii) নং এর উভয় পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 - 16 - 7 = C(4 + 1)(4 + 2)$$

$$\text{বা, } -7 = C(5)(6) \therefore C = -\frac{7}{30}$$

এখন A, B, C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} = \frac{2}{5(x + 1)} + \frac{5}{6(x + 2)} - \frac{7}{30(x - 4)}$$

এটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।