অধ্যায়-৩: জ্যামিতি

প্রশ্ন ▶১ ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।*[ঢা. বো. ১৫]*

ক. O বিন্দুটির নাম কি? O, AD কে কি অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে দেখাও যে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$. ৪

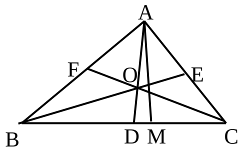
গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$. ৪

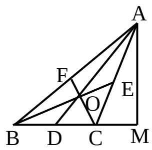
১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রায় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ O বিন্দু হচ্ছে ΔABC এর ভরকেন্দ্র এবং O, AD মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

খ





বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর মধ্যমা AD.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

অঙ্কন: A থেকে BC অথবা, BC-এর বর্ধিতাংশের উপর AM লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: মনে করি, $\angle ADB$ স্থূলকোণ,

অতএব, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DM$..... (i)

$\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ হলে,

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.\ DM$

বা, $AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD.\ DM$ [□ $BD = CD$] ..... (ii)

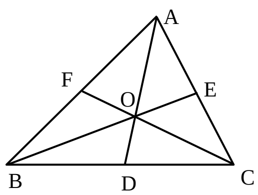
সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.\ DM + AD^2 + BD^2 - 2BD.DM$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ (দেখানো হলো)

গ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

প্রমাণঃ ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ …..........(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ …..........(ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ …............(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্য বিন্দু বলে,

2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ … ... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AO$

বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে, $4BE^2 = 9BO^2$ এবং $4CF^2 = 9CO^2$

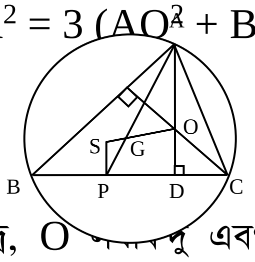
সুতরাং (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$

বা, $3\,(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9\,(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

$\therefore\ AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\,(AO^2 + BO^2 + CO^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ►২



ΔABC এর S পরিকেন্দ্র, O লম্ববিন্দু এবং G ভরকেন্দ্র, AP মধ্যমা। *[রা. বো. ১৭]*

ক. নববিন্দু বৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AG ঃ GP = 2 ঃ 1. ৪

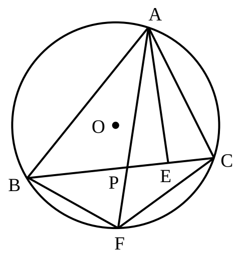
গ. AP-কে F পর্যন্ড় বর্ধিত করলে যদি তা বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, AF . BC = AB. CF + AC. BF. ৪

<u>২ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক **নববিন্দুবৃত্তঃ** কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলে।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

গ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, AP কে F পর্যন্ড় বর্ধিত করায় উৎপন্ন ABFC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CF এবং AC ও BF। AF ও BC চতুর্ভুজটির দুটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, AF.BC = AB.CF + AC.BF।

অঙ্কনঃ $\angle BAF$ কে $\angle CAF$ এর চেয়ে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AC রেখাংশের সাথে $\angle BAF$ এর সমান $\angle CAE$ আঁকি যেন AE রেখাংশ BC কর্ণকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে,

$\angle BAF = \angle CAE$

বা, $\angle BAF + \angle EAF = \angle CAE + \angle EAF$

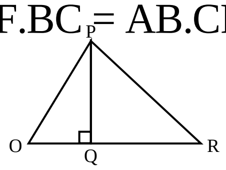
$\therefore\ \angle BAE = \angle CAF$

এখন, ΔABE ও ΔACF এর মধ্যে

$\angle BAE = \angle CAF$

$\angle ABE = \angle AFC$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]
এবং অবশিষ্ট $\angle AEB$ = অবশিষ্ট $\angle ACF$
$\therefore$ ΔABE ও ΔACF সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AF}$
অর্থাৎ, $AF.BE = AB.CF$ ... ... (i)
আবার, ΔABF ও ΔAEC এর মধ্যে,
$\angle BAF = \angle CAE$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle AFB = \angle ACE$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]
এবং অবশিষ্ট $\angle ABF$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$
$\therefore$ ΔABF ও ΔAEC সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{BF}{CE}$
অর্থাৎ, $AF.CE = AC.BF$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$AF.BE + AF.CE = AB.CF + AC.BF$
বা, $AF(BE + CE) = AB.CF + AC.BF$
$\therefore AF.BC = AB.CF + AC.BF$ [$\because BE + CE = BC$] **(প্রমাণিত)**

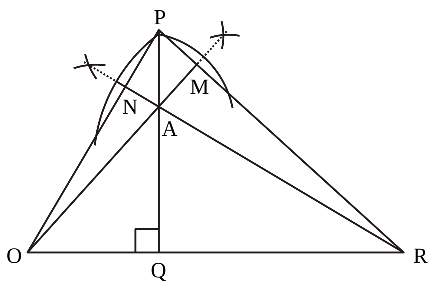
প্রশ্ন ▶৩



ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$ *[রা. বো. ১৬]*
ক. ΔPOR এর লম্ববিন্দু নির্ণয় কর। [অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক] ২
খ. প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$. ৪
গ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = OQ.QR$ ৪

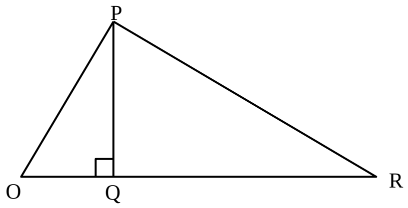
৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে $OM \perp PR$ এবং $RN \perp OP$ অংকন করা হলো। যেখানে PQ,OM ও RN লম্বত্রয় A বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং A বিন্দুই ΔPOR এর লম্ব বিন্দু।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$. প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$.

প্রমাণ: ΔOPQ এ $\angle OQP = 90°$

$\therefore PO^2 = PQ^2 + OQ^2$ .....(i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

আবার, ΔPQR এ $\angle PQR = 90°$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$= PQ^2 + (OR - OQ)^2$ [$\therefore QR = OR - OQ$]

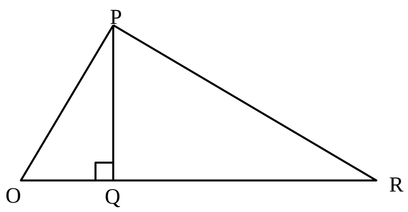
$= PQ^2 + OR^2 + OQ^2 - 2OR.OQ$

$= (PQ^2 + OQ^2) + OR^2 - 2OR.OQ$

$= PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$ [(i) নং থেকে]

$\therefore PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPOR এর $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = OQ.OR$

প্রমাণ: ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$

$\therefore \angle OPQ + \angle QPR = 90°$ .....(i)

আবার, ΔOPQ এবং $\angle OQP = 90°$ [$\therefore$ $PQ \perp OR$]

$\therefore$ $\angle POQ + \angle OPQ = 90°$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\angle OPQ + \angle QPR = \angle POQ + \angle OPQ$

$\therefore$ $\angle QPR = \angle POQ$

এখন, ΔOPQ ও ΔPQR এর মধ্যে

$\angle OQP = \angle PQR = 90°$

$\angle$ $POQ = \angle QPR$

এবং অবশিষ্ট $\angle OPQ$ = অবশিষ্ট $\angle PRQ$

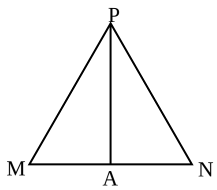
$\therefore$ ΔOQP ও ΔPQR সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore$ $\dfrac{OQ}{PQ} = \dfrac{PQ}{QR}$ বা, $OQ.QR = PQ^2$

$\therefore$ $PQ^2 = OQ.QR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪



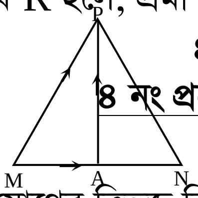
PMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $PM = PN$ এবং $PA \perp MN$. *[রা. বো. ১৫]*

ক. ΔAPM এর ক্ষেত্রে $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{MA}$ এবং $\overrightarrow{MP}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. B, MN রেখার ওপর যে কোনো বিন্দু হলে, দেখাও যে,
$PM^2 - PB^2 = MB.BN$. ৪

গ. PMN ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে,
$PM^2 = 2R.PA$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান



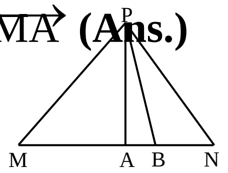
ক

এখন, ΔAPM-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}$ **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচন: ΔPMN-এ $PM = PN$। MN এর উপর যেকোনো বিন্দু B নিই।

P, B যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 - PB^2 = MB.\ BN.$

প্রমাণ: আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর ছেদবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

ΔPMN-এ $PM = PN$ এবং $PA \perp MN$

$\therefore \quad MA = AN$

APM সমকোণী ত্রিভুজে,

$PM^2 = PA^2 + MA^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

আবার, ΔPBA-এ সমকোণী ত্রিভুজে,

$PB^2 = PA^2 + AB^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

$\therefore \quad PM^2 - PB^2 = PA^2 + MA^2 - PA^2 - AB^2 = MA^2 - AB^2$

$= (MA + AB).(MA - AB)$

$= MB.\ (AN - AB)$ [□ $MA = AN$]

$= MB.BN$

$\therefore\ PM^2 - PB^2 = MB.BN$ (দেখানো হলো)

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, সমদ্বিবাহু ΔPMN-এ $PM = PN$। A থেকে MN-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব PA এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R। প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 = 2R.PA.$

অঙ্কন: PA-কে এমনভাবে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। N, E যোগ করি।

প্রমাণ: ΔPAN ও ΔPNE-এ,

$\angle PAN = \angle PNE$

[□ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle PNE = 90°$ এবং PA, MN এর ওপর লম্ব বলে $\angle PAN = 90°$]

$\angle EPN$ সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle PNA$ = অবশিষ্ট $\angle PEN$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore\ \frac{PA}{PN} = \frac{PN}{PE}$ [□ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $PN^2 = PE\ .\ PA$

$\therefore\ PM^2 = PE.\ PA$ [□ $PM = PN$] …………. (i)

এখন, $MA = NA$ [‘খ’ থেকে]

অর্থাৎ $PA \perp MN$ এবং PA, MN এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore\ PA$, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন কোন জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ PE, ΔPMN -এর পরিব্যাস।

$PE = 2R$ [□ R, ΔPMN-এর পরিব্যাসার্ধ]

তাহলে (i) হতে পাই,

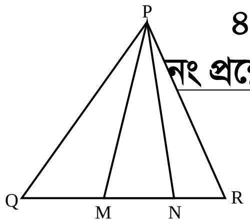
$PM^2 = 2R.PA$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫ ΔPQR এর QR বাহু M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়। *[দি. বো. ১৭]*

ক. তথ্যানুযায়ী চিহ্নিত চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$ ৪

গ. যদি $PQ = PR$ এবং M, QR এর উপর যে কোনো বিন্দু হলে দেখাও যে, $PQ^2 - PM^2 = QM.MR$ ৪



নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে, ΔPQR এর QR বাহুকে M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত করা হয়েছে।

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔPQR এর QR বাহু M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত। অর্থাৎ, $QM = MN = NR$। P, M ও P, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$.

প্রমাণ: ΔPQN এর মধ্যমা PM

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$PQ^2 + PN^2 = 2(PM^2 + MN^2)$ ... ... (i)

আবার, ΔPMR এ মধ্যমা PN

$\therefore PM^2 + PR^2 = 2(PN^2 + MN^2)$ ... ... (ii)

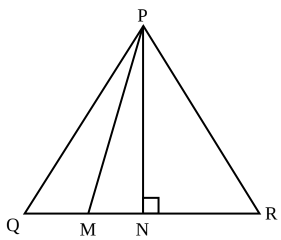
এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PN^2 + PM^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2MN^2 + 2PN^2 + 2MN^2$

বা, $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2PN^2 + 4MN^2 - PM^2 - PN^2$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$. **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔPQR এ $PQ = PR$ এবং M, QR এর উপর যে কোন বিন্দু। P, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে,

$PQ^2 - PM^2 = QM.MR.$

অঙ্কনঃ QR এর উপর PN লম্ব আঁকি।

প্রমাণঃ সমকোণী ΔPQN এ PQ অতিভুজ।

$\therefore PQ^2 = QN^2 + PN^2 \ldots \ldots \ldots (i)$

আবার, সমকোণী ΔPMN এ PM অতিভুজ।

$\therefore PM^2 = MN^2 + PN^2 \ldots \ldots \ldots (ii)$

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$PQ^2 - PM^2 = QN^2 + PN^2 - MN^2 - PN^2$

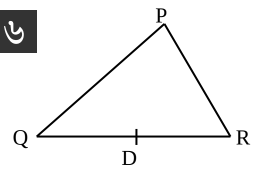
$= QN^2 - MN^2 = (QN + MN)(QN - MN)$

$= (NR + MN).QM$[সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে ভূমির উপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ, QN = NR]

$= MR.QM$

$\therefore PQ^2 - PM^2 = QM.MR.$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬



ΔPQR এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু।*[কু. বো. ১৫]*

ক. লম্ব বিন্দু ও ভরকেন্দ্র কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2 (PD^2 + QD^2)$. ৪

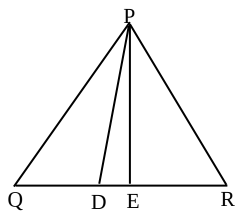
গ. $\angle Q = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$. ৪

<u>৬ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক **লম্ববিন্দুঃ** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে লম্ববিন্দু বলা হয়।

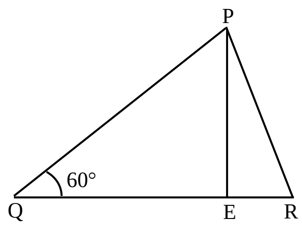
ভরকেন্দ্রঃ ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

খ



বিশেষ নির্বচন: ΔPQR-এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু। P, D যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$
অঙ্কন: QR বাহুর উপর PE লম্ব অঙ্কন করি।
প্রমাণ: ΔPQD এর $\angle PDQ$ স্থূলকোণ এবং QD রেখার বর্ধিতাংশের উপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE। স্থূলকোণের ক্ষেত্রে, পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,
$PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE$ .... (i)
এখানে, ΔPRD এর $\angle PDR$ সূক্ষ্মকোণ এবং DR রেখার ওপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.
$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে,
পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,
$PR^2 = PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$ .... (ii)
এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,
$PQ^2 + PR^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE + PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$
$= 2PD^2 + QD^2 + RD^2 + 2QD.DE - 2RD.DE$
$= 2PD^2 + QD^2 + QD^2 + 2QD.DE - 2QD.DE$
[□ QD = RD]
$= 2PD^2 + 2QD^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$.
অঙ্কন: $PE \perp QR$ টানি।
প্রমাণ: আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।
$\therefore$ ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ এবং তাহলে QE, QR এর ওপর PQ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore\ PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.QE$ ……. (i)

সমকোণী ΔPQE-এ লম্ব PE, ভূমি QE এবং অতিভুজ PQ.

$\therefore\ \cos\angle PQE = \dfrac{QE}{PQ}\left[\square\ \cos\theta = \dfrac{\text{f„wg}}{\text{AwZfzR}}\right]$

বা, $\cos 60° = \dfrac{QE}{PQ}$ $[\square\ \angle PQE = 60°]$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{QE}{PQ}$

$\therefore\ QE = \dfrac{1}{2}.PQ$

এখন, (i) নং-এ QE-এর মান বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ.\dfrac{1}{2}QR.$

$\therefore\ PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭ ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর লম্বত্রয় AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। *[চ. বো. ১৭]*

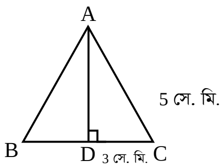
ক. AC = 5 সে. মি., CD = 3 সে. মি. হলে AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF. ৪

গ. দেখাও যে, BC.CD = AC.CE. ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



দেওয়া আছে, AC = 5 সে. মি. এবং CD = 3 সে. মি.

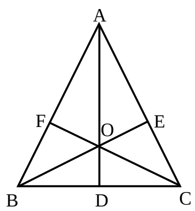
সমকোণী ত্রিভুজ ADC এ

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

বা, $AD^2 = AC^2 - CD^2 = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore$ AD = 4 সে. মি. **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABC-এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের ওপর লম্ব AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$AO.\ OD = BO.OE = CO.OF.$

প্রমাণঃ ΔBOF ও ΔCOE-এ

$\angle OFB = \angle OEC = 90°$ [$\because CF \perp AB, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOF = \angle COE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}$

$\therefore$ BO. OE = CO. OF. .... (i)

আবার, Δ BOD ও Δ AOE-এ

$\angle ODB = \angle OEA = 90°$ [$\because AD \perp BC, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOD = \angle AOE.$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

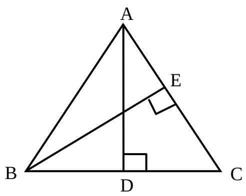
$\therefore \frac{BO}{AO} = \frac{OD}{OE}$

$\therefore$ AO.OD = BO. OE ... ... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\therefore$ AO.OD = BO.OE = CO. OF **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABC এর AD, BC এর ওপর এবং BE, AC-এর ওপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, BC. CD = AC. CE.

প্রমাণঃ আমরা জানি, যে কোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যে কোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

এখন, $AD \perp BC$ হওয়ায়, ΔABC- এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ।

[$\because \angle ACB <$ সমকোণ $\angle ADC$]

এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ বলে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ …… (i)

আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore$ উপরিউক্ত উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.\ CE$ ……. (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$AC^2 + BC^2 - 2BC.CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$

বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$

[উভয়পক্ষ হতে $AC^2 + BC^2$ বিয়োগ করে]

বা, $BC.CD = AC.CE$. [উভয় পক্ষকে (–2) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore BC.CD = AC.CE$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৮ ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।*[চ. বো. ১৫]*

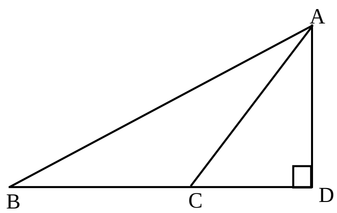
ক. AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$। ৪

গ. ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ ৪

<u>৮ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক



ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ

BC কে D পর্যন্ড় বর্ধিত করে $BD \perp AD$ আঁকি।

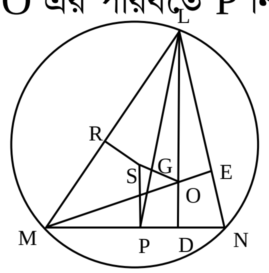
সুতরাং BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৫

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

[**বি. দ্র.** O এর পরিবর্তে P নিতে হবে।]

প্রশ্ন ▶৯



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে ΔLMN এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু, G ভরকেন্দ্র, LP মধ্যমা, $MN = a$, $LN = b$, $LM = c$ *[সি. বো. ১৭]*

ক. $OL = 9$ সে.মি. হলে SP এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. $\angle N$ সূক্ষ্মকোণ হলে, প্রমাণ কর যে, $a.ND = b.NE$ ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $OL = 9$ সে.মি.

আমরা জানি, কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ।

$\therefore OL = 2SP$

বা, $9 = 2SP$

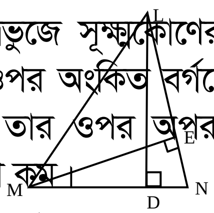
বা, $SP = \dfrac{9}{2}$

$\therefore SP = 4.5$ সে.মি. **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

[বি. দ্র. A, B ও C এর পরিবর্তে যথাক্রমে L, M ও N নিতে হবে।]

গ আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অংকিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অংকিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।



এখন $LD \perp MN$ হওয়ায় ΔLMN এর $\angle LNM$ সূক্ষ্মকোণ।

[$\because \angle LNM <$ সমকোণ $\angle LDN$]

এবং ND, MN বাহুতে LN বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore$ $LM^2 = LN^2 + MN^2 - 2MN.\ ND$ .... (i)

আবার, NE, LN বাহুতে MN বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore$ $LM^2 = MN^2 + LN^2 - 2LN.NE$ .... (ii)

(i) এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$LN^2 + MN^2 - 2MN.\ ND = MN^2 + LN^2 - 2LN\ .\ NE$

বা, $-\ 2MN.\ ND = -\ 2LN.\ NE$

[উভয় পক্ষ হতে $LN^2 + MN^2$ বিয়োগ করে]

বা, $MN.\ ND = LN.NE$ [উভয় পক্ষকে (– 2) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $a.\ ND = b.\ NE$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১০ ΔABC এর AD, BE এবং CF মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। *[য. বো. ১৭]*

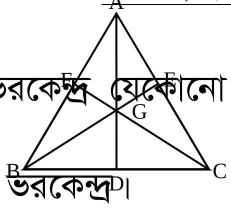
ক. GD = 2 সে.মি. হলে AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$. ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



আমরা জানি, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

এখানে, G হলো ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

স $AG : GD = 2 : 1$

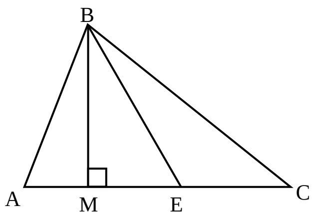
বা, $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ বা, $AG = 2GD$

বা, $AG = 2 \times 2$ [□ GD = 2 সে.মি.]

$\therefore$ $AG = 4$

স $AD = AG + GD = (4 + 2)$ সে.মি. = 6 সে. মি. **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ΔABC এর BE বাহু AC বাহুর উপর মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$

অঙ্কনঃ $BM \perp AC$ আঁকি।

প্রমাণঃ ΔABE এ $\angle AEB$ সূক্ষ্মকোণ এবং AE বাহুর উপর BE বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ ME
∴ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE.ME$ ... ... (i)

আবার, ΔBEC এ $\angle BEC$ স্থূলকোণ এবং CE বাহুর বর্ধিতাংশের উপর BE এর লম্ব অভিক্ষেপ ME.

∴ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

$BC^2 = CE^2 + BE^2 + 2CE.ME$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণের যোগ করে পাই,

$AB^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE.ME + CE^2 + BE^2 + 2CE.ME$

$= 2BE^2 + AE^2 + AE^2 - 2AE.ME + 2AE.ME$

$= 2BE^2 + 2AE^2$

∴ $AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত 'ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়' দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৮

প্রশ্ন ▶১১ ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R। *[য. বো. ১৬]*

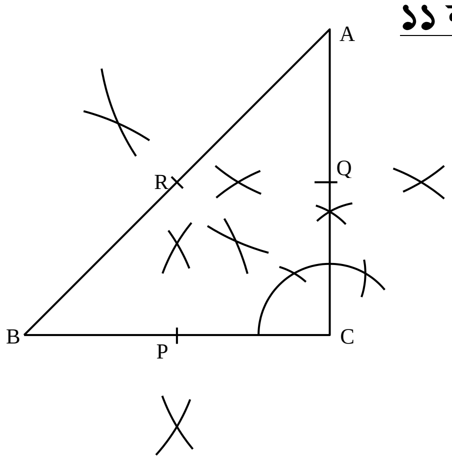
ক. উদ্দীপকের আলোকে নিখুঁত চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$. ৪

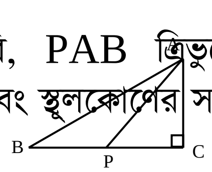
গ. প্রমাণ কর যে, $3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



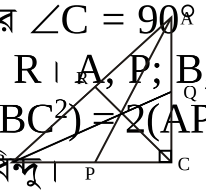
খ **বিশেষ নির্বচনঃ** মনে করি, PAB ত্রিভুজের $\angle BPA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় PB ও PA। BP



বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AP বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ PC। প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2.PB.PC$

প্রমাণঃ ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ACB$ সমকোণ।
সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + (PB + PC)^2$ [□ BC = PB + PC]
$= AC^2 + PB^2 + PC^2 + 2PB.PC$ .... (i)
আবার, ΔAPC সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ACP$ সমকোণ।
$\therefore AC^2 + PC^2 = PA^2$ .... (ii)
(i) নং থেকে পাই,
$AB^2 = AC^2 + PC^2 + PB^2 + 2PB.PC$
$= PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$ [(ii) নং হতে]
$\therefore AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচনঃ** ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R। A, P; B, Q; C, R যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$



প্রমাণঃ P, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।
সুতরাং $CP = \frac{1}{2} BC$
$\therefore CP^2 = \frac{1}{4} BC^2$
অনুরূপভাবে, $CQ^2 = \frac{1}{4} AC^2$
আবার, যেহেতু $\angle C = 90°$ এবং R, AB বাহুর মধ্যবিন্দু।
সুতরাং $CR = \frac{1}{2} AB$
$\therefore CR^2 = \frac{1}{4} AB^2$.
ΔAPC হতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
$AP^2 = AC^2 + CP^2$
$\therefore AP^2 = AC^2 + \frac{1}{4} BC^2$ .... (i)
আবার, ΔBQC হতে,
$BQ^2 = BC^2 + CQ^2$
$\therefore BQ^2 = BC^2 + \frac{1}{4} AC^2$ .... (ii)
আবার, ΔABC হতে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ .... (iii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$AP^2 + BQ^2 = AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + BC^2 + \frac{1}{4}AC^2$$

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + CR^2$

[উভয়পক্ষে CR^2 যোগ করে]

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + \frac{1}{4}AB^2$

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + \frac{1}{4}(AC^2 + BC^2)$

[(iii) নং থেকে]

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BC^2$

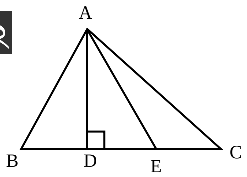
বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{6}{4}AC^2 + \frac{6}{4}BC^2$

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{3}{2}(AC^2 + BC^2)$

বা, $2(AP^2 + BQ^2 + CR^2) = 3(AC^2 + BC^2)$

$\therefore 3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১২



চিত্রে BD = ED = CE এবং $AD \perp BC$. *[ব. বো. ১৭]*

ক. DE = 2 সে.মি. এবং AD = 3 সে.মি. হলে, AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$. ৪

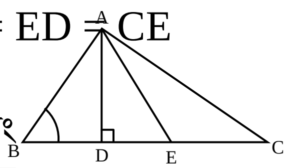
গ. প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$. ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, BD = ED = CE

$\therefore$ ED = CE

DE = 2 সে.মি. এবং



AD = 3 সে.মি. হলে,

সমকোণী ΔADC থেকে পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

বা, $AC^2 = AD^2 + (DE + CE)^2 = AD^2 + (DE + ED)^2$

$= AD^2 + (DE + DE)^2 = AD^2 + 4DE^2 = 3^2 + 4.2^2$

$= 9 + 4.4 = 9 + 16 = 25$

$\therefore$ AC = 5 সে.মি. **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC বাহু D ও E বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ BD = DE = EC।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$.

প্রমাণ: ΔABE-এর মধ্যমা AD [$\because$ BD = DE]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AE^2 = 2(AD^2 + DE^2)$ ……. (i)

আবার, ΔADC এর মধ্যমা AE [$\because$ DE = EC]

$\therefore AD^2 + AC^2 = 2(AE^2 + DE^2)$ ……. (ii)

এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AE^2 + AD^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2DE^2 + 2AE^2 + 2DE^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2AE^2 + 4DE^2 - AD^2 - AE^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.BC.BD$

প্রমাণঃ

ΔADC এর $\angle ADC$ সমকোণ

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ … … … (i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

চিত্রে, CD = BC – BD

$\therefore CD^2 = (BC - BD)^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC.BD$ … … … (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাওয়া যায়,

$AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC.BD$

$\therefore AC^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 - 2BC.BD$ .... (iii)

আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle D$ এক সমকোণ

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ … … … (iv) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৩ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. এবং $AD \perp BC$. *[ব. বো. ১৫]*

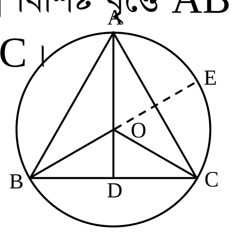
ক. AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য ব্যবহার করে ABC ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এবং বৃত্তক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে ABC সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত। পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. এবং $AD \perp BC$।



$\therefore AD = OA + OD$

$= OA + \frac{OA}{2}$

[O বিন্দুতে AD, 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়]

$= \left(4 + \frac{4}{2}\right)$ সে.মি. $= (4 + 2)$ সে.মি. $= 6$ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় AD এর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. **(Ans.)**

খ ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $AB.AC = BE.AD$

বা, $AB^2 = 8 \times 6$ বর্গ সে.মি. [ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AB = AC$ এবং $BE = 2.OB = 2.4$ সে.মি. $= 8$ সে.মি.]

বা, $AB^2 = 48$ বর্গ সে.মি.

বা, $AB = \sqrt{48}$ সে.মি.

$\therefore AB = 4\sqrt{3}$ সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সে.মি. **(Ans.)**

গ 'খ' হতে,

সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4\sqrt{3}$ সে.মি.।

আমরা জানি,

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2$ বর্গ সে.মি. $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 48$ বর্গ সে.মি. $= 12\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

$= 20.785$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক। (যেখানে r বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$= 3.1416 \times 4^2$ বর্গ সে.মি. [$\because r = 4$]

$= 3.1416 \times 16$ বর্গ সে.মি.

$= 50.2656$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC ও বৃত্তক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত

$$= \frac{20.785}{50.2656} = \frac{1}{2\cdot42} = 1 : 2.42 \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶১৪ ΔPQR এর QR বাহু A ও B বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। *[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ, রাজশাহী]*

ক. চিত্রসহ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য বিবৃত কর। ২

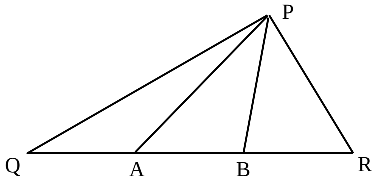
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$PQ^2 + PR^2 = AP^2 + PB^2 + 4AB^2$ ৪

গ. QR ব্যাসের ওপর ΔPQR অর্ধবৃত্ত। PR বাহু এবং QL জ্যা পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $QR^2 = PR.MR + QL.MQ$ ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭

খ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR-এর QR বাহু A ও B বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ $QA = AB = BR$। P, A এবং P, B যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = AP^2 + PB^2 + 4AB^2$.

প্রমাণ: ΔPQB-এর মধ্যমা AP $[\because QA = AB]$

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$PQ^2 + PB^2 = 2(AP^2 + AB^2) \ldots\ldots (i)$

আবার, ΔAPR এর মধ্যমা PB $[\because AB = BR]$

$\therefore AP^2 + PR^2 = 2(PB^2 + AB^2) \ldots\ldots (ii)$

এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

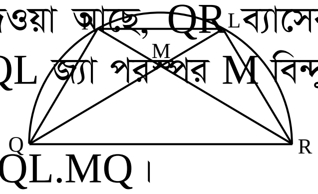
$PQ^2 + PB^2 + AP^2 + PR^2 = 2AP^2 + 2AB^2 + 2PB^2 + 2AB^2$

বা, $PQ^2 + PR^2 = 2AP^2 + 2PB^2 + 4AB^2 - AP^2 - PB^2$

বা, $PQ^2 + PR^2 = AP^2 + PB^2 + 4AB^2$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = AP^2 + PB^2 + 4AB^2$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, QR ব্যাসের ওপর QRLP একটি অর্ধবৃত্ত। PR বাহু ও QL জ্যা পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,



$QR^2 = PR.MR + QL.MQ$।

অঙ্কন: R, L ও L, P যোগ করি।

প্রমাণ: ΔLMP ও ΔMQR-এ

$\angle MPL = \angle MQR$ [একই চাপ RL-এর ওপর অবস্থিত]

$\angle PML = \angle QMR$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

অবশিষ্ট $\angle MLP$ = অবশিষ্ট $\angle QRM$

এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\frac{MQ}{PM} = \frac{MR}{LM}$$

বা, $MQ.LM = MR.PM.$

বা, $MQ.LM + MQ^2 = MR.PM + MQ^2$

[উভয়পক্ষে MQ^2 যোগ করে]

বা, $MQ (LM + MQ) = MR.PM + PM^2 + QP^2$

[QR ব্যাস বলে $\angle QPM = \angle QPR = 90°$;

$\therefore MQ^2 = QP^2 + PM^2$]

বা, $MQ.QL = PM (MR + PM) + QP^2$

বা, $MQ.QL = PM.PR + QR^2 – PR^2$

[$\angle QPR = 90°$ বলে ΔQPR -এ $QR^2 = QP^2 + PR^2$

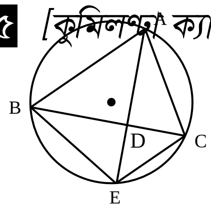
বা $QP^2 = QR^2 – PR^2$]

বা, $MQ.QL = QR^2 – PR (PR – PM)$

বা, $MQ.QL = QR^2 – PR.MR$

$\therefore QR^2 = MQ.QL + PR. MR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ *[কুমিলণ্ডা ক্যাডেট কলেজ, কুমিলণ্ডা]*



ক. যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. হয় তাহলে ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

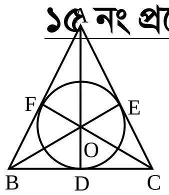
খ. প্রমাণ কর যে, AE . BC = AB . CE + BE . AC ৪

গ. যদি AE, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয় তাহলে প্রমাণ কর যে,

$AD^2 = AB.AC – BD.CD$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমবাহু ত্রিভুজের বাহু



$AB = BC = AC = 4$ সে.মি.

আমরা জানি, $4AD^2 = 3AB^2$

বা, $AD^2 = \frac{3}{4} \times 4^2 = 12$

$\therefore AD = 2\sqrt{3}$

আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রই তার অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র। আবার, ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে ভাগ করে।

$\therefore OD = \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ সে.মি.

$\therefore$ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$ সে.মি.

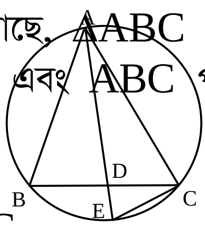
$\therefore$ অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = 3.1416 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= 4.19$ বর্গ সে.মি. **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

বি.দ্র. F এর স্থলে E, E এর স্থলে F এবং P এর স্থলে D নিতে হবে।

গ **বিশেষ নির্বচনঃ** দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে,

$AD^2 = AB.AC - BD.DC.$

অঙ্কনঃ C, E যোগ করি।

প্রমাণঃ ΔABD ও ΔACE- এ

$\angle BAD = \angle CAE$[$\because$ AD, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

এবং $\angle ABD = \angle AEC$[$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ADB$ = অবশিষ্ট $\angle ACE$

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$ [$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, AB. AC = AD. AE .... (i)

আবার, ΔABD ও ΔCDE- এ

$\angle ABD = \angle CED$[$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং $\angle ADB = \angle CDE$[$\because$ বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAD$ = অবশিষ্ট $\angle DCE$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{AD}{DC}$ [$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, AD. DE = BD. DC .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) হতে পাই,

AB. AC = AD.AE

= AD (AD + DE)[$\because$ AE = AD + DE]

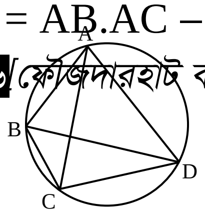
= AD.AD + AD.DE

= AD^2 + AD. DE

বা, AD^2 = AB. AC – AD. DE

$\therefore AD^2$ = AB.AC – BD. DC **(প্রমাণিত)** [সমীকরণ (ii) হতে মান বসিয়ে]

প্রশ্ন ▶১৬ *[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]*



ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত এবং AC, BD উহার দুইটি কর্ণ।

ক. টলেমির উপপাদ্য বিবৃত কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD ৪

গ. ΔABC এর মধ্যকগুলো G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,

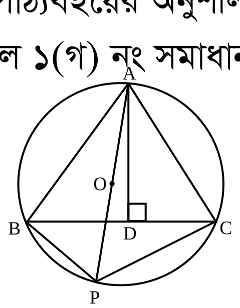
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক + খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৪

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶১৭



চিত্রে AP ব্যাস। *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্রের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. উপরোক্ত চিত্রের আলোকে প্রমাণ কর যে, AB.AC = AP.AD ৪

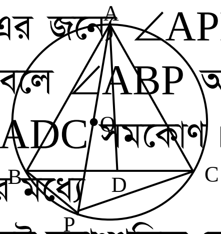
গ. ABCD চতুর্ভুজের জন্য প্রমাণ কর যে, AP.BC = AB.PC + BP.AC ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **লম্ব কেন্দ্র :** কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর ওপর অংকিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুকে ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র বলে।

পরিকেন্দ্র : ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখন্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABPC চতুর্ভুজে AP ব্যাস। $BC \perp AD$. প্রমাণ করতে হবে যে, AB.AC = AP.AD



প্রমাণ: একই চাপ AB এর জন্যে $\angle APB$ ও $\angle ACD$ বৃত্তাংশস্থিত কোণ। AP বৃত্তের ব্যাস বলে $\angle ABP$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ও BC বাহুর উপর AD লম্ব হওয়ায় $\angle ADC$ সমকোণ।

Δ ABP ও Δ ADC এর মধ্যে

$\angle APB = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\angle ABP$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = $\angle ADC$.

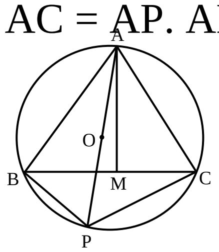
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle DAC$

$\therefore$ Δ ABP এবং ΔADC সদৃশকোণী

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

$\therefore$ AB. AC = AP. AD. **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন : বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABPC চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও PC এবং BP ও AC। AP ও BC উহার দুটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, AP.BC = AB.PC + BP.AC

অঙ্কন : $\angle BAP$ কে $\angle CAP$ থেকে ছোট ধরে A বিন্দুতে AP রেখাংশের সাথে $\angle BAP$ এর সমান করে $\angle CAM$ অঙ্কন করি যেন AM রেখা কর্ণ BC কে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAP = \angle CAM$ উভয়পক্ষে $\angle MAP$ যোগ করে পাই,

$\angle BAP + \angle MAP = \angle CAM + \angle MAP$

$\therefore \angle BAM = \angle CAP$

ΔABM ও ΔAPC এর মধ্যে, $\angle BAM = \angle CAP$

$\angle ABM = \angle APC$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle AMB$ = অবশিষ্ট $\angle ACP$

$\therefore \Delta ABM$ ও ΔAPC সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{BM}{PC} = \dfrac{AB}{AP}$

$\therefore BM.AP = AB.PC$ ... ... (i)

আবার, ΔABP ও ΔAMC এর মধ্যে,

$\angle BAP = \angle CAM$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle APB = \angle ACM$

এবং অবশিষ্ট $\angle ABP$ = অবশিষ্ট $\angle AMC$

$\therefore \Delta ABP$ ও ΔAMC সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{CM}{BP}$

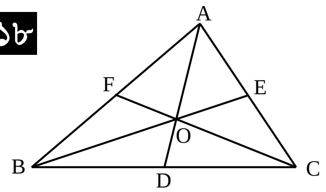
$\therefore AP.CM = BP.AC$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AP(BM + CM) = AB.PC + BP.AC$

$\therefore AP.BC = AB.PC + BP.AC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৮



চিত্রে ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. ভরকেন্দ্র কাকে বলে? O বিন্দু AD কে কী অনুপাতে ছেদ করেছে? ২

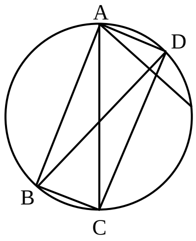
খ. ΔABC হতে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ ৪

গ. দেখাও যে, ΔABC এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶১৯



চিত্রে, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। $\angle BAC = \angle DAP$. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.। *[মনিপুর উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. টলেমির উপপাদ্যটি লিখ। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ ৪

গ. এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা প্রদত্ত বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক) ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **টলেমির উপপাদ্য:** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৪

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৪ এর সম্পাদ্য-৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৮৬

প্রশ্ন ▶২০ ΔABC এর AD, BE এবং CF মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। *[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. লম্ববিন্দু ও ভরকেন্দ্র কাকে বলে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

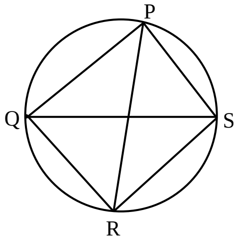
ক **লম্ববিন্দু :** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাই লম্ববিন্দু।

ভরকেন্দ্র : ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়।

খ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬০

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর "এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৮

প্রশ্ন ▶২১



PQRS চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ *[মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. নববিন্দু বৃত্ত কাকে বলে? নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি? ২

খ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + PS.QR ৪

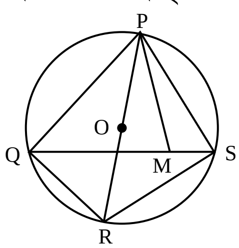
গ. ΔPQR এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,

$PQ^2 + QR^2 + PR^2 = 3(GP^2 + GQ^2 + GR^2)$ ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **নববিন্দুবৃত্তঃ** কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদ বিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলে। এবং ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

খ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। PR এবং QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + PS . QR.

অঙ্কনঃ $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ এর ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$-এর সমান করে $\angle SPM$ আঁকি যেন PM রেখা QS কর্ণকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে $\angle QPR = \angle SPM$

উভয়পক্ষে $\angle RPM$ যোগ করে পাই,

$\angle QPR + \angle RPM = \angle SPM + \angle RPM$

অর্থাৎ, $\angle QPM = \angle RPS$

এখন ΔPQM ও ΔPRS এর মধ্যে

$\angle PQM = \angle PRS$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PMQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore$ ΔPQM ও ΔPRS সদৃশকোণী।

$$\frac{QM}{RS} = \frac{PQ}{PR}$$

অর্থাৎ, $PR \cdot QM = PQ \cdot RS$ .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPMS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPM$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PRQ = \angle PSM$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PMS$

$\therefore$ ΔPQR ও ΔPMS সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$$

অর্থাৎ, $PR \cdot MS = QR \cdot PS$ ....(ii)

এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

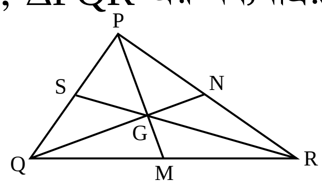
$PR \cdot QM + PR \cdot MS = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$

বা, $PR(QM + MS) = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$

অর্থাৎ, $PR \cdot QS = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$ [যেহেতু $QM + MS = QS$]

$\therefore$ $PR.QS = PQ.RS + PS.QR$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, ΔPQR এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে PM, QN ও RS পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।



প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + QR^2 + RP^2 = 3(PG^2 + QG^2 + RG^2)$

প্রমাণঃ ΔPQR এর PM, QN ও RS তিনটি মধ্যমা

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$PQ^2 + RP^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ ..... (i)

$PQ^2 + QR^2 = 2(QN^2 + RN^2)$ .... (ii)

এবং $QR^2 + RP^2 = 2(RS^2 + QS^2)$ .... (iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$2PQ^2 + 2QR^2 + 2RP^2 = 2PM^2 + 2QM^2 + 2QN^2 + 2RN^2 + 2RS^2 + 2QS^2$

বা, $2(PQ^2 + QR^2 + RP^2) = 2(PM^2 + QN^2 + RS^2) + 2(QM^2 + RN^2 + QS^2)$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + RP^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + (2QM)^2 + (2RN)^2 + (2QS)^2$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + RP^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + QR^2 + RP^2 + PQ^2$

বা, $3(PQ^2 + QR^2 + RP^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2)$ .... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো ছেদ বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{PG}{GM} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{GM}{PG} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{GM + PG}{PG} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{PM}{PG} = \frac{3}{2}$

বা, $2PM = 3PG$

বা, $4PM^2 = 9PG^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে $4QN^2 = 9QG^2$ এবং $4RS^2 = 9RG^2$

$\therefore$ (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$3(PQ^2 + QR^2 + RP^2) = 9PG^2 + 9QG^2 + 9RG^2$

বা, $3(PQ^2 + QR^2 + RP^2) = 9(PG^2 + QG^2 + RG^2)$

$\therefore PQ^2 + QR^2 + RP^2 = 3(PG^2 + QG^2 + RG^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২২ ΔABC এ $AB = AC$ এবং শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর AD লম্ব।
[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, ঢাকা]

ক. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

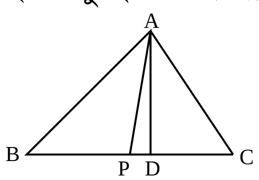
খ. ভূমি BC এর ওপর যে কোনো বিন্দু P হলে, প্রমাণ কর যে,
$AB^2 - AP^2 = BP. PC.$ ৪

গ. উদ্দীপকে উলিণ্ঢখিত ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 = 2R. AD.$ ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যঃ** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদের ছেদবিন্দু হতে কোনো বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

খ



বিশেষ নির্বচন: ΔABC এ $AB = AC$, $AD \perp BC$ এবং P, ভূমি BC এর উপর যেকোনো একটি বিন্দু। A, P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে,

$AB^2 - AP^2 = BP.PC$।

প্রমাণ: ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ …….. (i)

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ …….. (ii)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

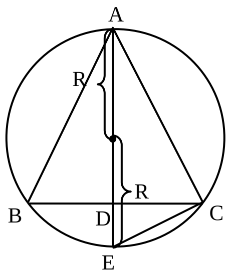
বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD).BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD).BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $BD = CD$]

বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP.PC$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ $AB = AC$। A থেকে BC-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R। প্রমাণ করতে হবে যে,

$AB^2 = 2R.AD$.

অঙ্কন: AD-কে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ: ΔADC ও ΔACE-এ,

$\angle ADC = \angle ACE$[$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ACE = 90°$ এবং AD, BC এর ওপর লম্ব বলে $\angle ADC = 90°$]

$\angle EAC$ সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle ACD$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$ [$\because$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $AC^2 = AE . AD$

$\therefore AB^2 = AE. AD$ [$\because AB = AC$] ....(i)

সমকোণী ΔABD ও ΔACD এর মধ্যে

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [দেওয়া আছে]

এবং AD সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$

অর্থাৎ $AD \perp BC$ এবং AD, BC এর সমদ্বিখন্ডক।

$\therefore$ AD, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

[কেন্দ্র থেকে জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]

$\therefore$ AE, ΔABC -এর পরিব্যাস

AE = 2R [$\because$ R, ΔABC-এর পরিব্যাসার্ধ]

তাহলে (i) হতে পাই,

অর্থাৎ , $AB^2 = 2R.AD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৩ ΔABC এ AB = AC এবং AC বাহুকে D বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যেন AC = CD। ফলে ABD একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। *[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]*

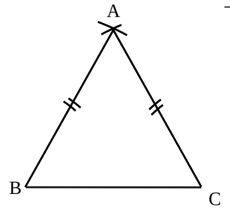
ক. উপরের তথ্যের আলোকে ΔABC-এর একটি চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $BD^2 = 2BC^2 + AC^2$ ৪

গ. যদি ABC এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখা AB কে D বিন্দুতে ও AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $BE^2 - CE^2 = BC.DE$ ৪

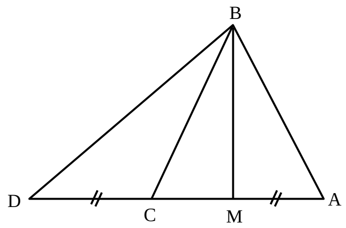
২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔABC এ AB = AC

খ



বিশেষ নির্বচন : ΔABC এ $AB = AC$। AC বাহুকে D পর্যন্ড় এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $AC = CD$ হয়। B, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD^2 = 2BC^2 + AC^2$.

অঙ্কন : AD এর উপর BM লম্ব অংকন করি।

প্রমাণ : ধাপ যথার্থতা

(১) ΔBCD এ $\angle BCD$ স্থূলকোণ

এবং $BM \perp CD$ [পিথাগোরাসের

$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2CD.CM$ উপপাদ্যের বিস্দৃতি অনুসারে]

$\therefore BD^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC.CM$ ... ... (i) [□ $AC = CD$]

(২) ΔABC এ $\angle ACB$ সূক্ষকোণ এবং $BM \perp AC$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CM$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্দৃতি অনুসারে]

বা, $AC^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CM$ [□ $AB = AC$]

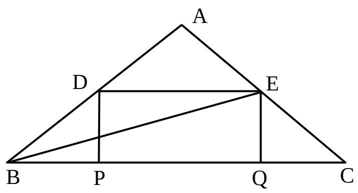
$\therefore 2AC.CM = BC^2$ ... ... (ii)

(৩) (i) ও (ii) হতে পাই,

$BD^2 = BC^2 + AC^2 + BC^2$

$\therefore BD^2 = 2BC^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, সমদ্বিবাহু ΔABC-এর ভূমি BC এবং $AB = AC$. ভূমি BC এর সমান্ড়রাল সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। B, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $BE^2 - CE^2 = BC.\ DE$.

অঙ্কনঃ $DP \perp BC$ এবং $EQ \perp BC$ টানি।

প্রমাণঃ DPQE আয়তক্ষেত্র [$\because$ DE || PQ এবং $\angle P = \angle Q$ = এক সমকোণ, $\because$ $\angle D = \angle E$ = এক সমকোণ]

$\therefore$ DP = EQ এবং DE = PQ [আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান বলে]

এখন, ΔDBP ও ΔECQ এর মধ্যে,

$\angle DPB = \angle EQC$ [$\because$ উভয় এক সমকোণ]

$\angle DBP = \angle ECQ$ [$\because$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান অর্থাৎ $\angle ABC = \angle ACB$]

এবং DP = EQ

$\therefore$ $\Delta DBP \cong \Delta ECQ$

সুতরাং BP = CQ.

আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যে কোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

এখন, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান কোণদ্বয় উভয়ই সূক্ষ্মকোণ বলে,

ΔBEC এর $\angle C$ একটি সূক্ষ্মকোণ। ΔBEC এ $EQ \perp BC$

$\therefore$ CQ, BC এর ওপর CEএর লম্ব অভিক্ষেপ।

কাজেই উপরিউক্ত উপপাদ্য অনুসারে,

$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2BC.\ CQ$

বা, $BE^2 - CE^2 = BC^2 - 2BC.CQ$

বা, $BE^2 - CE^2 = BC\ (BC - 2CQ)$

বা, $BE^2 - CE^2 = BC.\ \{BC - (CQ + CQ)\}$

বা, $BE^2 - CE^2 = BC\ \{BC - (CQ + BP)\}$ [$\because$ CQ = BP]

বা, $BE^2 - CE^2 = BC.\ PQ$

বা, $BE^2 - CE^2 = BC.\ DE$ [$\because$ PQ = DE]

$\therefore$ $BE^2 - CE^2 = BC.\ DE.$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৪ ΔABC এর S পরিকেন্দ্র এবং O লম্ববিন্দু।

[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

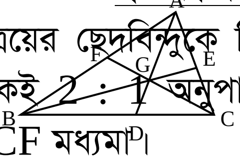
ক. ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলতে কী বোঝায়? ২

খ. যদি G, ΔABC এর ভরকেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ কর যে, S, O, G সমরেখ। ৪

গ. যদি $\angle B = 120°$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$ ৪

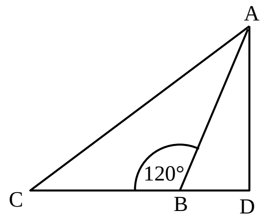
<u>২৪ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক কোনো ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয়। ভরকেন্দ্র প্রতিটি মধ্যমাকেই 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। চিত্রে, G ভরকেন্দ্র, AD, BE ও CF মধ্যমা।



খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭২

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle B = 120°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$.

অঙ্কন: CB এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব টানি।

প্রমাণ: আমরা জানি, স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ দুই বাহুর যে কোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

এখন, ΔABC-এ $\angle ABC = 120°$ অর্থাৎ একটি কোণ স্থূলকোণ

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD \ldots \ldots \ldots$ (i)

CD সরলরেখার উপর $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ দুইটি সন্নিহিত কোণ।

$\therefore \angle ABC + \angle ABD = 180°$

বা, $120° + \angle ABD = 180°$

বা, $\angle ABD = 180° - 120°$

$\therefore \angle ABD = 60°$

এখন, সমকোণী ΔABD এর ভূমি = BD এবং অতিভুজ = AB.

$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB} \left[\square \cos\theta = \frac{\text{f„wg}}{\text{AwZfzR}}\right]$

বা, $\cos 60° = \frac{BD}{AB}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \frac{1}{2} AB.$

(i) নং-এ BD এর মান বসিয়ে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.\frac{1}{2}AB$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৫ ΔABC এর পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং AP একটি মধ্যমা।

[বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]

ক. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র কাকে বলে? ২

খ. ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র G হলে দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. ΔABC সমবাহু হলে, শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R.AD$। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

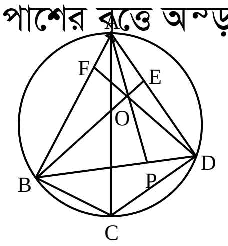
ক **পরিকেন্দ্র :** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখন্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭২

গ সৃজনশীল ২২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৫

প্রশ্ন ▶২৬ পাশের বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD একটি চতুর্ভুজ।



[সাভার ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, ঢাকা]

ক. টলেমির উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ ৪

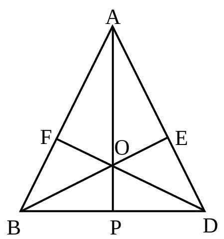
গ. AP, BE ও DF লম্বত্রয় যদি O বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে প্রমাণ কর যে, $AO.OP = BO.OE = DO.OF$ ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **টলেমির উপপাদ্য :** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৪

গ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABD-এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের ওপর লম্ব AP, BE ও DF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AO.\ OP = BO.OE = DO.OF$.

প্রমাণঃ ΔBOF ও ΔDOE-এ

$\angle OFB = \angle OED = 90°$ [$\because DF \perp AB, BE \perp AD$]

এবং $\angle BOF = \angle DOE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{OF}{OE}$

$\therefore$ BO. OE = DO. OF. .... (i)

আবার, Δ BOP ও Δ AOE-এ

$\angle OPB = \angle OEA = 90°$ [$\because AP \perp BD, BE \perp AD$]

এবং $\angle BOP = \angle AOE$. [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

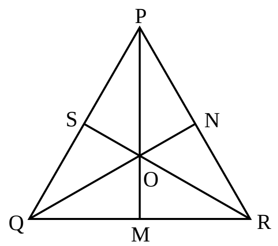
$\therefore \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{OP}{OE}$

$\therefore$ AO.OP = BO. OE ... ... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\therefore$ AO.OP = BO.OE = DO. OF **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৭ ΔPQR এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



[এম ই এইচ আরিফ কলেজ, গাজীপুর]

ক. O বিন্দুটির নাম কী? O বিন্দু PM কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. ΔPQR হতে প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ ৪

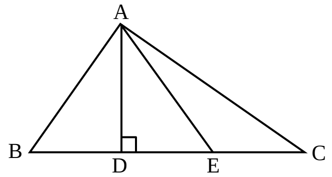
গ. দেখাও যে, ΔPQR এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিন গুণ। ৪

<u>**২৭ নং প্রশ্নের সমাধান**</u>

সৃজনশীল ১ নং সমাধানের অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৫৬

[বি.দ্র. A, B, C, D, E ও F এর পরিবর্তে যথাক্রমে P, Q, R, M, N ও S নিতে হবে]

প্রশ্ন ▶ ২৮



চিত্রে $BD = DE = CE$ এবং $AD \perp BC$.

[এ.ভি.জে.এম. সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, মুন্সিগঞ্জ]

ক. $DE = 2$ সে.মি. এবং $AD = 3$ সে.মি. হলে, AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

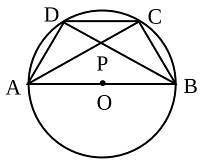
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$. ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১২ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬১

প্রশ্ন ▶ ২৯ প্রদত্ত চিত্রের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



[ব্রাহ্মন্দী মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, নরসিংদী]

ক. নববিন্দু বৃত্ত কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AC.BD = AB.CD + AD.BC$ ৪

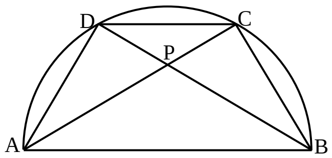
গ. AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৪

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত। AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC. AP + BD. BP$।

অঙ্কন: A, D; B, C ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ: ΔCPD ও ΔAPB-এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC-এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$[বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$

বা, $AP.CP = BP.DP.$

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$ [উভয়পক্ষে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP (CP + AP) = BP.DP + DP^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP= \angle ADB = 90°$;

$\therefore AP^2 = AD^2 + DP^2$]

বা, $AP.AC = DP (BP + DP) + AD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 – BD^2$

[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD -এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ বা $AD^2 = AB^2 – BD^2$]

বা, $AP.AC = AB^2 – BD (BD – DP)$

বা, $AP.AC = AB^2 – BD.BP$

$\therefore AB^2 = AP.AC + BD. BP$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩০ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত যার AC ও BD দুইটি কর্ণ এবং $\angle BAC < \angle DAC$. *[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, মোমেনশাহী]*

ক. উপরোক্ত তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ ৪

গ. উক্ত বৃত্তের ব্যাস AB এবং AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৪

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৪

গ সৃজনশীল ২৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭

প্রশ্ন ▶৩১ ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ এবং AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।

[জামালপুর জিলা স্কুল, জামালপুর]

ক. AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অংকন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD.$ ৪

গ. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ ৪

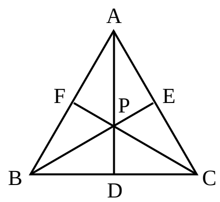
৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৫৯

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৫

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶৩২



ΔABC এর AD, BE এবং CF মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে p বিন্দুতে ছেদ করেছে।

[নেত্রকোণা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নেত্রকোণা]

ক. টলেমির উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$ ৪

গ. প্রদত্ত ত্রিভুজ থেকে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2).$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **টলেমির উপপাদ্যঃ** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭।

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬ [বি.দ্র.: O এর স্থলে P হবে]

প্রশ্ন ▶৩৩ ΔPQR এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

[রাজবাড়ী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, রাজবাড়ী]

ক. O বিন্দুটির নাম কী? O বিন্দু AD কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$। ৪

গ. দেখাও যে, ΔPQR এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১ নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶৩৪ ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC। *[নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ]*

ক. AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ৪

গ. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৫৯

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৫

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶৩৫ ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা]

ক. ভরকেন্দ্র কী? ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে কী অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$ ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **ভরকেন্দ্র:** ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়। ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶৩৬ ΔABC এ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ এবং এদের উপর অংকিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e, f. *[পাবনা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পাবনা]*

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ চিত্রটি আঁক। ২

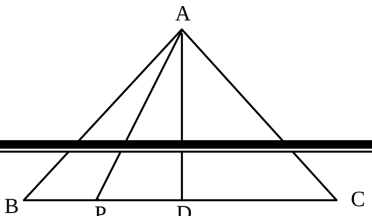
খ. প্রমাণ কর যে, $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$। ৪

গ. AB = AC এবং BC এর উপর P যেকোন বিন্দু হলে দেখাও যে,
$AB^2 - AP^2 = BP.CP.$ ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর "এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ড়" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৮

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর "এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ড়" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৮



গ

বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABC-এ $AB = AC$। ভূমি BC-এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.CP$

অঙ্কনঃ $AD \perp BC$ টানি।

প্রমাণঃ ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ …….. (i)

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ …….. (ii)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

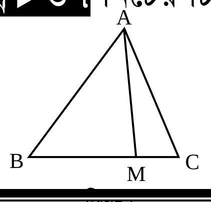
বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD).BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD).BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $BD = CD$]

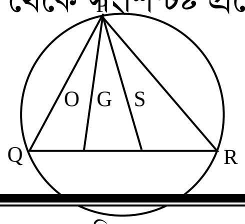
বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore$ $AB^2 - AP^2 = BP.\ CP$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৭ নিচের চিত্র থেকে সংশ্লিষ্ট প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্র-১



চিত্র-২

চিত্র-১, এ AB = AC এবং M, BC এর উপর যে কোন বিন্দু। চিত্র-২ এ O, G ও S যথাক্রমে লম্ববিন্দু, ভরকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র। *[বগুড়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বগুড়া]*

ক. $\angle BAC = 80°$ হলে $\angle ABC$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AM^2 = BM.MC.$ ৪

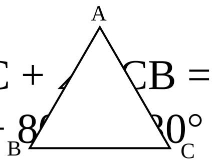
গ. প্রমাণ কর যে, S, G ও O বিন্দু তিনটি সমরেখ। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC এ,

$AB = AC$ এবং $\angle BAC = 80°$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$



এখন, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

বা, $\angle ABC + \angle ABC + 80° = 180°$

বা, $2\angle ABC = 180° - 80°$

বা, $\angle ABC = \frac{1}{2}.100°$

$\therefore \angle ABC = 50°$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৫(গ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৫৮

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭২

প্রশ্ন ▶৩৮ ΔABC এর AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

[আর্মড পুলিশ ব্যাটালিয়ন পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া]

ক. O বিন্দুটির নাম কি? O, AD কে কি অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + CO^2 + BO^2)$ ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶৩৯ ΔABC এর $\angle C$ = এক সমকোণ এবং AD মধ্যমা।

[রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট]

ক. উপরোক্ত তথ্যের আলোকে চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

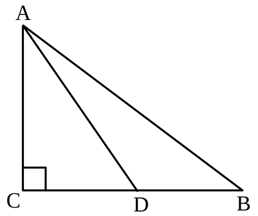
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$. ৪

গ. ΔABC এর তিনটি মধ্যমা যথাক্রমে AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি G বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে,

$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ৪

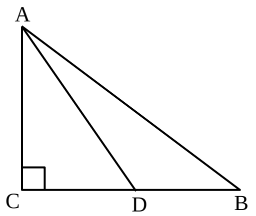
৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



এখানে, ΔABC এর $\angle C$ = এক সমকোণ এবং AD মধ্যমা।

খ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$.

প্রমাণঃ ΔABC এর $\angle C = 90°$

অর্থাৎ সমকোণী ΔABC এর অতিভুজ = AB

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$ [$\because BC = BD + CD$]

$= AC^2 + BD^2 + 2BD.CD + CD^2$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD.BD$

[$\because$ D, BC-এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $BD = CD$]

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [$\because$ ΔACD-এর $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶৪০ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। AC ও BD এর দুইটি কর্ণ।

[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর]

ক. নববিন্দুবৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD ৪

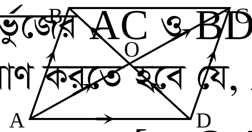
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **নববিন্দুবৃত্তঃ** কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদ বিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলে।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৪

গ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণঃ $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore$ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ $AB \,||\, DC$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪১ ΔABC এ BC এর মধ্যবিন্দু D।

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বিইউএসএমএস, পার্বতীপুর, দিনাজপুর]

ক. ত্রিভুজের মধ্যমা ও ভরকেন্দ্র কাকে বলে? ২

খ. $\angle B = 60^\circ$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **মধ্যমাঃ** ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু এবং বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সংযোগ রেখাই ত্রিভুজের মধ্যমা।

ভরকেন্দ্র : ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলে।

খ সৃজনশীল ৬(গ) নং অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৫৮

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭২

প্রশ্ন ▶৪২ PQRS একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ।
[রংপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রংপুর]

ক. নববিন্দু বৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. উদ্দিপকে উলেণ্ঢখিত চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রে টলেমীর উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। ৪

গ. ΔPQR-এর তিনটি মধ্যমা PA, QB ও RC হলে প্রমাণ কর যে,
$3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PA^2 + QB^2 + RC^2)$ ৪

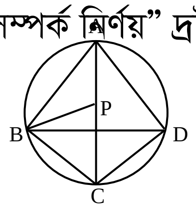
৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

খ সৃজনশীল ২১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৪

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে "ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৮

প্রশ্ন ▶৪৩



P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ।
[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর]

ক. লম্ববিন্দু ও নববিন্দুবৃত্তের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 = 2(BP^2 + AP^2)$ ৪

গ. AC.BD = AB.CD + BC.AD প্রমাণ কর।৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **লম্ববিন্দু :** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে লম্ববিন্দু বলে।

নববিন্দু বৃত্ত : সৃজনশীল ২(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭
[বি.দ্র. A এর স্থলে B, B এর স্থলে A এবং D এর স্থলে P নিতে হবে।]

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৪

প্রশ্ন ▶৪৪ ABC বৃত্তে ΔABC এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং ভরকেন্দ্র G। AP একটি মধ্যমা। *[পুলিশ লাইন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]*

ক. তথ্য অনুযায়ী চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, S, G, O বিন্দুগুলো সমরেখ।৪

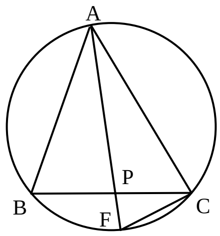
গ. যদি ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AP, BC কে P বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে দেখাও যে, $AP^2 = AB.AC - BP.PC$। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ এর চিত্র দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ BC কে P বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AP^2 = AB.\ AC - BP.PC$.

অঙ্কন: C, F যোগ করি।

প্রমাণ: ΔABP ও ΔACF- এ

$\angle BAP = \angle CAF$ [$\because$ AP, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

এবং $\angle ABP = \angle AFC$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle APB$ = অবশিষ্ট $\angle ACF$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{AB}{AF}$

[$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AB.\ AC = AP.\ AF$ .... (i)

আবার, ΔABP ও ΔCPF- এ

$\angle ABP = \angle CFP$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং $\angle APB = \angle CPF$ [$\because$ বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle PCF$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \quad \frac{BP}{PF} = \frac{AP}{PC}$

[∵ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AP. PF = BP. PC$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) হতে পাই,

$AB. AC = AP.AF$

$= AP (AP + PF)$[∵ $AF = AP + PF$]

$= AP.AP + AP.PF$

$= AP^2 + AP. PF$

বা, $AP^2 = AB. AC - AP. PF$

$\therefore AP^2 = AB.AC - BP. PC$ [সমীকরণ (ii) হতে মান বসিয়ে]

অর্থাৎ, $AP^2 = AB.AC - BP. PC$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৪৫ PQRS বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের PR ও SQ দুইটি কর্ণ। এবং ΔBCD এর $BC = BD$ এবং X, CD এর যে কোন একটি বিন্দু।

[সৈয়দপুর সরকারি কারিগরি কলেজ, নীলফামারী]

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি ব্যাখ্যা কর। ২

খ. দেখাও যে, $BC^2 - BX^2 = CX.XD$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ.SR + SP.QR = PR.SQ$ ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৭

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৫৭

[P, M, N, A এর স্থলে যথাক্রমে B, C, D, X নিতে হবে।]

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ (টলেমির উপপাদ্য) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৪

প্রশ্ন ▶৪৬ ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় পরস্পর 'O' বিন্দুতে ছেদ করে।

[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা]

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য লিখ ও ব্যাখ্যা কর। ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে প্রমাণ কর যে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ এর "বর্ণনা ও বিশেষ নির্বচন" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৭

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর "এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৮

প্রশ্ন ▶৪৭ ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $c = 5.8$ সে. মি.; অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $s = 8$ সে. মি., d, e, f ত্রিভুজটির তিনটি মধ্যমা। ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু যথাক্রমে S, G এবং O

[গভর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, কুমিলণ্ডা]

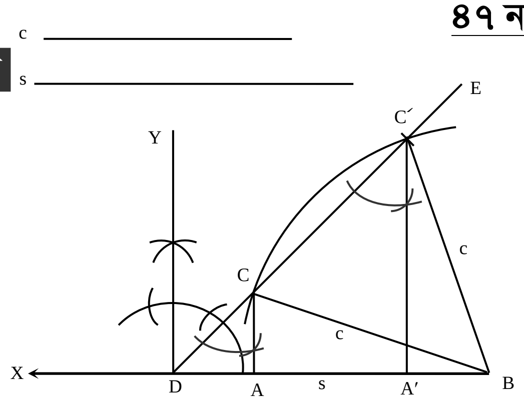
ক. ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, S, G এবং O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3c^2 = 2(d^2 + e^2 + f^2)$ ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ c এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ ১: যেকোনো রশ্মি BX হতে s এর সমান করে BD অংশ কেটে নিই।

ধাপ ২: D বিন্দুতে BD এর ওপর DY লম্ব অঙ্কন করি এবং $\angle BDY$ এর অর্ধেকের সমান করে $\angle BDE$ অঙ্কন করি।

ধাপ ৩: B বিন্দুকে কেন্দ্র করে অতিভুজ c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি।

ধাপ ৪: বৃত্তচাপটি DE রেখাকে C ও C´ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫: B, C ও B, C´ যোগ করি।

ধাপ ৬: এখন, C ও C´ বিন্দুতে $\angle CDB$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle DCA$ এবং $\angle DC'A'$ অঙ্কন করি।

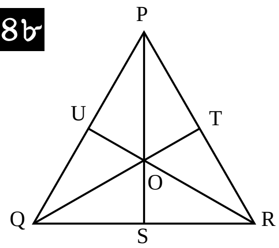
ধাপ ৭: CA ও C´A´ রেখাদ্বয় DB রেখাকে যথাক্রমে A ও A´ বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC অথবা $\Delta A'BC'$ -ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর "সিদ্ধান্ড়: এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৮

প্রশ্ন ▶ ৪৮



ΔPQR এর PS, QT এবং RU মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

[নবাব ফয়জুন্নেছা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিলণ্ডা]

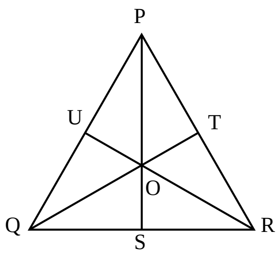
ক. প্রমাণ কর যে, $OP = 2OS$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$ ৪

গ. $QR = a, PR = b, PQ = c, PS = d, QT = e, RU = f$. প্রমাণ কর যে,
$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$ ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔPQR এ PS, QT এবং RU মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
সুতরাং O ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র। ভরকেন্দ্র O, PS বাহুকে OP এবং OS অংশে বিভক্ত করেছে।
যেখানে, $OP > OS$.
আমরা জানি, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। সুতরাং OP ঃ OS = 2 ঃ 1

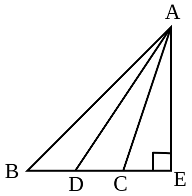
বা, $\frac{OP}{OS} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ $OP = 2.OS$ **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল ৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৮

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ এর "সিদ্ধান্ড়ঃ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৮

প্রশ্ন ▶৪৯



[কুমিলণ্ডা মডার্ন হাই স্কুল, কুমিলণ্ডা]

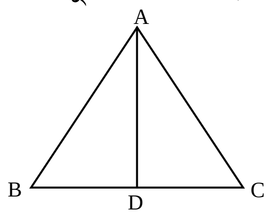
ক. চিত্র এঁকে মধ্যমার সংজ্ঞা দাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CE$ ৪

গ. D, BC এর মধ্যবিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **মধ্যমা :** ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব রেখাংশকে মধ্যমা বলে।



চিত্রে, ABC ত্রিভুজে AD মধ্যমা।

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-৬৫

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭

প্রশ্ন ▶৫০ ΔABC এর S পরিকেন্দ্র, O লম্ববিন্দু, G ভরকেন্দ্র এবং AP মধ্যমা। *[আল-আমিন একাডেমি স্কুল এন্ড কলেজ, চাঁদপুর]*

ক. নববিন্দু বৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AG : GP = 2 : 1$ ৪

গ. AP কে F পর্যন্ড় বর্ধিত করলে যদি তা বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, $AF. BC = AB.CF + AC.BF$ ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

প্রশ্ন ▶৫১ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে এমনভাবে অন্ড়র্লিখিত হয়েছে যেন AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে।

[লক্ষ্মীপুর আদর্শ সামাদ সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর]

ক. নব বিন্দু বৃত্ত কী ? ২

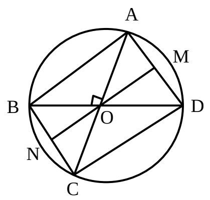
খ. উদ্দীপকের চতুর্ভুজটির $\angle AOD$ এর সমদ্বিখণ্ডক OM কে বিপরীত দিকে বর্ধিত করলে তা BC কে N বিন্দুতে ছেদ করে প্রমাণ কর যে, BN = CN 8

গ. প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয় যে কোন কোণে ছেদ করলেও কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। 8

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৬

খ



বিশেষ নির্বচন: বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। চতুর্ভুজটির $\angle AOD$ এর সমদ্বিখণ্ডক OM কে বিপরীত দিকে বর্ধিত করলে তা BC কে N বিন্দুতে ছেদ কর। প্রমাণ করতে হবে যে, BN = CN

প্রমাণ: ধাপ	**যথার্থতা**
$\angle DAC = \angle DBC$	[একই চাপ CD এর উপর দণ্ডায়মান বলে]
অর্থাৎ, $\angle DAO = \angle OBN$	
আবার, $\angle DAO = \angle DOM$	[উভয়ে একই $\angle AOM$ এর পূরক কোণ বলে]
আবার, $\angle DOM = \angle NOB$	[বিপ্রতীপ কোণ]
সুতরাং $\angle OBN = \angle NOB$	
ফলে OBN ত্রিভুজে ON = BN ...(i)	
অনুরূপভাবে দেখা যায় যে,	
$\angle NCO = \angle ADO =$	

$\angle AOM = \angle CON$
ফলে OCN ত্রিভুজে
$ON = NC$ .... (ii)
(i) ও (ii) হতে **(প্রমাণিত)**
পাই, $BN = NC$

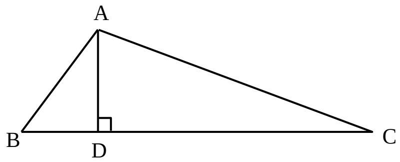
গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৪

প্রশ্ন ▶৫২ ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর বাহুদ্বয় যথাক্রমে AC ও BC এবং BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।
[নোয়াখালী জিলা স্কুল, নোয়াখালী]

ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ ত্রিভুজটি অংকন কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ৪
গ. ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান ভাগে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

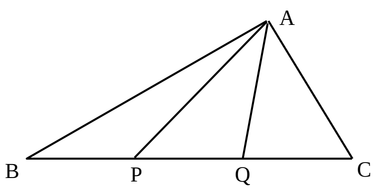
ক



চিত্রে, ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং BC এর উপর A বিন্দু থেকে AD লম্ব টানা হলো। সুতরাং BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD.

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৬

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ $BP = PQ = QC$। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ: ΔABQ-এর মধ্যমা AP $[\because BP = PQ]$

∴ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2) \ldots\ldots. \text{(i)}$$

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ $[\because PQ = QC]$

$$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2) \ldots\ldots. \text{(ii)}$$

এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫৩ ΔABC এর তিনটি মধ্যমা AD, BE ও CF।

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. চিত্রসহ লম্ব অভিক্ষেপের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর ৩(খ) লম্ব অভিক্ষেপ অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৪

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ড়দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৮

প্রশ্ন ▶৫৪ ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু যথাক্রমে S এবং O, AP মধ্যমাকে S এবং O এর সংযোজক সরলরেখা G বিন্দুতে ছেদ করে।

[ডাঃ খাস্ড়গীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. উদ্দীপকের আলোকে চিহ্নিত চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, G ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র। ৪

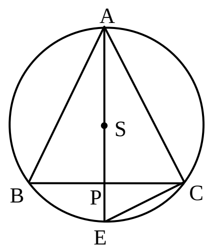
গ. ΔABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2AS.AP$। ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

গ

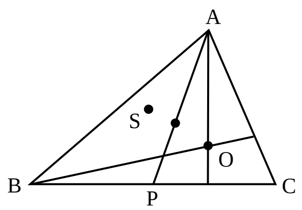


বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, সমদ্বিবাহু ΔABC-এ $AB = AC$। A থেকে BC-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AP এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ AS। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2AS.AP$.
অঙ্কনঃ AP-কে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।
প্রমাণঃ ΔAPC ও ΔACE-এ,
$\angle APC = \angle ACE$
[$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ACE = 90°$ এবং AP, BC এর ওপর লম্ব বলে $\angle APC = 90°$]
$\angle EAC$ সাধারণ কোণ।
এবং অবশিষ্ট $\angle ACP$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।
$\therefore \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AC}{AE}$
[$\because$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]
বা, $AC^2 = AE . AP$
$\therefore AB^2 = AE. AP$ [$\because AB = AC$] ....(i)
সমকোণী ΔABP ও ΔACP এর মধ্যে
অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [দেওয়া আছে]
এবং AP সাধারণ বাহু।
$\therefore \Delta ABP \cong \Delta ACP$
$\therefore BP = CP$
অর্থাৎ $AP \perp BC$ এবং AP, BC এর সমদ্বিখন্ডক।
$\therefore$ AP, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।
[কেন্দ্র থেকে জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
$\therefore$ AE, ΔABC -এর পরিব্যাস
$AE = 2AS$ [$\because$ AS, ΔABC-এর পরিব্যাসার্ধ]
তাহলে (i) হতে পাই,
অর্থাৎ, $AB^2 = 2AS.AP$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫৫ ΔABC এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং AP একটি মধ্যমা হলে– *[ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*
ক. তথ্যানুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর। ২
খ. যদি ΔABC এর ভরকেন্দ্র G হয় তাহলে দেখাও যে, $AG : GP = 2 : 1$. ৪
গ. যদি ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু এবং $AD \perp BC$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R.AD$ যেখানে পরিব্যাসার্ধ R. ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

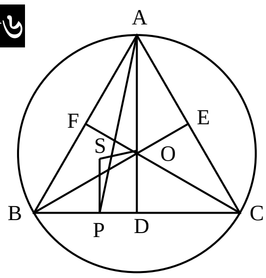


ΔABC এ AP মধ্যমা, S পরিকেন্দ্র ও O লম্ববিন্দু।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

গ সৃজনশীল ২২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৫

প্রশ্ন ▶৫৬



ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু যথাক্রমে S, O এবং AP মধ্যমা।

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম]

ক. প্রমাণ কর যে, $SP \perp BC$ ২

খ. SP ও OA এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. $DQ \perp AB$ হলে প্রমাণ কর যে, $DQ^2 = AQ.BQ$ ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে, ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু যা AO এর অবস্থিত।

$\therefore AD \perp BC$

আবার, পরিকেন্দ্র S হতে BC এর লম্বদূরত্ব SP।

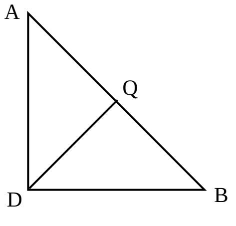
$\therefore SP \perp BC$ **(প্রমাণিত)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

গ চিত্রে, ΔABD সমকোণী। [□ $AD \perp BD$]

এখন, সমকোণী ΔABD এর অতিভুজ AB এর লম্ব DQ।

অর্থাৎ, $DQ \perp AB$



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABD-এর $\angle D = 90°$। DQ, AB এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $DQ^2 = AQ.\ BQ$

প্রমাণ: ΔABD-এ $\angle D = 90°$

$\therefore \angle ADQ + \angle BDQ = 90°$ .... (i)

আবার, Δ AQD-এ $\angle AQD = 90°$ [$\because DQ \perp AB$]

$\therefore \angle DAQ + \angle ADQ = 90°$.............. (ii)

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle ADQ + \angle BDQ = \angle DAQ + \angle ADQ$

$\therefore \angle BDQ = \angle DAQ$

এখন, ΔAQD ও ΔBQD-এ

$\angle AQD = \angle BQD = 90°$

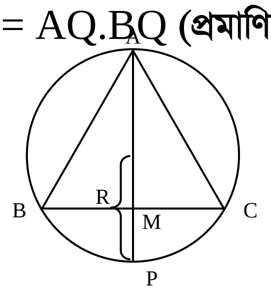
এবং $\angle DAQ = \angle BDQ$

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{AQ}{DQ} = \frac{DQ}{BQ}$$

অর্থাৎ, $DQ^2 = AQ.BQ$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫৭



চিত্রে AB = AC এবং R হলো বৃত্তের পরিব্যাসার্ধ।

[সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট]

ক. অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. যদি $AM \perp BC$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R\ .\ AM$ ৪

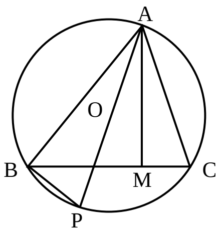
গ. যদি $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AP হয় তবে দেখাও যে,

$AM^2 = AB^2 - BM.MC$ ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য:** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখন্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

খ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং AP পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। ΔABC এর শীর্ষ A থেকে বিপরীত বাহু BC এর ওপর AM লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2R \, . \, AM$

অঙ্কনঃ B, P যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ AB এর জন্য $\angle APB$ ও $\angle ACB$ বা $\angle ACM$ বৃত্তাংশস্থিত কোণ। AP বৃত্তের ব্যাস বলে $\angle ABP$ অর্ধঃবৃত্তস্থ কোণ এবং BC বাহুর ওপর AM লম্ব হওয়ায় $\angle AMC = 1$ সমকোণ। ΔABC এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে, $R = \frac{1}{2}AP$ $\therefore$ $AP = 2R$

এখন ΔAPB ও ΔAMC এর মধ্যে $\angle APB = \angle ACM$

[একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান।]

$\angle ABP$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = $\angle AMC$.

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle CAM$.

$\therefore$ ΔABP ও ΔAMC সদৃশকোণী।

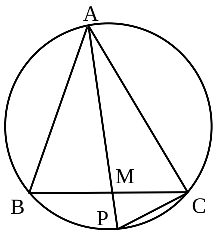
$$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AP}{AC}$$

বা, $AB.AC = AP.AM$

বা, $AB.AB = 2R.AM$

$\therefore$ $AB^2 = 2R. \, AM$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ AP, BC কে M বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AM^2 = AB^2 - BM.MC$.

অঙ্কনঃ C, P যোগ করি।

প্রমাণঃ ΔABM ও ΔACP- এ

$\angle BAM = \angle CAP$[$\because$ AM, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

এবং $\angle ABM = \angle APC$[$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AMB =$ অবশিষ্ট $\angle ACP$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AP}$ [$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AB.\ AC = AM.\ AP$ .... (i)

আবার, ΔABM ও ΔCMP- এ

$\angle ABM = \angle CPM$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং $\angle AMB = \angle CMP$ [$\because$ বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAM =$ অবশিষ্ট $\angle MCP$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{BM}{MP} = \frac{AM}{MC}$ [$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AM.\ MP = BM.\ MC$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) হতে পাই,

$AB.\ AC = AM.AP$

$= AM\ (AM + MP)$ [$\because AP = AM + MP$]

$= AM.AM + AM.MP$

$= AM^2 + AM.\ MP$

বা, $AM^2 = AB.\ AC - AM.\ MP$

$\therefore AM^2 = AB.AC - BM.\ MC$ [সমীকরণ (ii) হতে মান বসিয়ে]

অর্থাৎ, $AM^2 = AB.AC - BM.\ MC$

অতপর, যেহেতু $AB = AC$

$\therefore AM^2 = AB.AB - BM.MC$

$\therefore AM^2 = AB^2 - BM.MC$ (**দেখানো হলো**)

প্রশ্ন ▶ ৫৮ ΔABC এর $\angle A = 90°$, $AB = AC$। BC, AC ও AB বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা যথাক্রমে AP, BQ ও CR পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয় এবং BC বাহুর উপর মধ্যবিন্দু ব্যতিত যেকোন বিন্দু L।

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর]

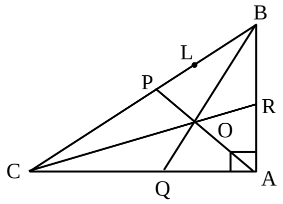
ক. $OP = 3$ cm হলে OA এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AC^2 - AL^2 = BL \cdot CL$. ৪

গ. দেখাও যে, $3BC^2 = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$. ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



আমরা জানি, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

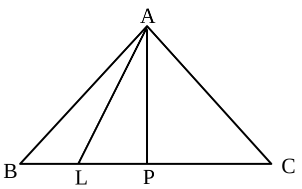
AO ঃ OP = 2 ঃ 1

বা, $\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{2}{1}$

বা, $\dfrac{OA}{3} = \dfrac{2}{1}$ [□ OP = 3 সে. মি.]

$\therefore$ OA = 6 সে. মি. **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABC-এ $\angle A = 90°$ এবং $AB = AC$। ভূমি BC-এর উপর L যেকোনো একটি বিন্দু BC বাহুর মধ্যমা AP। সুতরাং $AP \perp BC$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 - AL^2 = BL.CL$

প্রমাণঃ ΔABP এর $\angle APB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AP^2 + BP^2$ …….. (i)

আবার, ΔALP এর $\angle APL$ = এক সমকোণ এবং AL অতিভুজ

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AL^2 = AP^2 + LP^2$ …….. (ii)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AL^2 = AP^2 + BP^2 - AP^2 - LP^2$

বা, $AC^2 - AL^2 = BP^2 - LP^2$ $[\because AB = AC]$

বা, $AC^2 - AL^2 = (BP + LP)(BP - LP)$

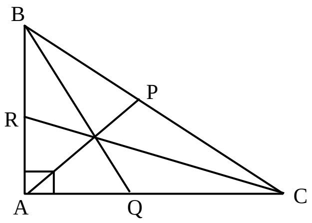
বা, $AC^2 - AL^2 = (BP + LP).BL$

বা, $AC^2 - AL^2 = (CP + LP).BL$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $BP = CP$]

বা, $AC^2 - AL^2 = LC.BL$

$\therefore$ $AC^2 - AL^2 = BL.\ LC$ **(প্রমাণিত)**

গ



ΔABC এ $\angle A = 90°$

$\therefore BC^2 = AC^2 + AB^2$

এখন, ΔABC এ AP মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AP^2 + BP^2)$

$= 2AP^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$ $[\because BP = \frac{1}{2}BC]$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AP^2 = (AB^2 + AC^2) - \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AP^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{2}$ .... (i)

অনুরূপভাবে পাই,

$$2BQ^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{2} \text{ .... (ii)}$$

$$2CR^2 = \frac{2\,(AC^2 + BC^2) - AB^2}{2} \text{ .... (iii)}$$

(i) + (ii) + (iii) নং হতে পাই,

$$2(AP^2 + BQ^2 + CR^2) = \frac{4(AB^2 + BC^2 + AC^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$$

$$= \frac{3\,(AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$$

$$= \frac{3\,(BC^2 + BC^2)}{2} \quad [\therefore BC^2 = AC^2 + AB^2]$$

$$= \frac{3.2\,BC^2}{2}$$

$\therefore 2\,(AP^2 + BQ^2 + CR^2) = 3BC^2$. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৫৯ ABC ত্রিভুজের $\angle A$ স্থূলকোণ, BC স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে AB ও AC।

[বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল]

ক. লম্ব অভিক্ষেপ কী? AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর। ২

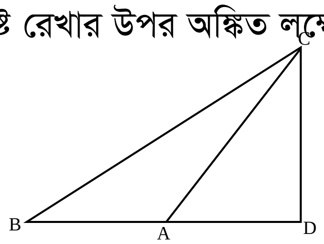
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.AD$ ৪

গ. ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হল, প্রমাণ কর যে,

$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়।



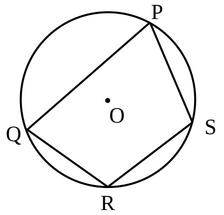
ΔABC এর $\angle A$ স্থূলকোণ। AB কে D পর্যন্ড় বর্ধিত করে $AB \perp CD$ আঁকি।

$\therefore$ AB বাহুর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ AD.

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৫

গ সৃজনশীল ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৫৬

প্রশ্ন ▶৬০



O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQRS একটি বৃত্ত।*[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]*

ক. ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক সূচক সমীকরণটি লিখ। ত্রিভুজটি সমকোণী হলে সম্পর্কটি কিরূপ হবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, PQ.RS + PS.QR = PR.QS ৪

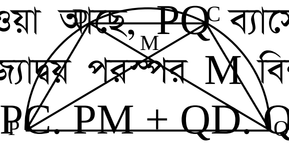
গ. PQ কে ব্যাস ধরে অর্ধবৃত্তের দুটি জ্যা PC এবং QD পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = PC.PM + QD.QM$ ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ এর সিদ্ধান্ড় : "এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৮

খ সৃজনশীল ২১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৪

গ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, PQ ব্যাসের ওপর PQCD একটি অর্ধবৃত্ত। PC ও QD জ্যাদ্বয় পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = PC.PM + QD.QM$।



প্রমাণ: ΔCMD ও ΔPMQ-এ

$\angle MDC = \angle MPQ$ [একই চাপ QC-এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DMC = \angle PMQ$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\frac{PM}{DM} = \frac{QM}{CM}$$

বা, $PM.CM = QM.DM$

বা, $PM.CM + PM^2 = QM.DM + PM^2$

[উভয়পক্ষে PM^2 যোগ করে]

বা, $PM (CM + PM) = QM.DM + DM^2 + PD^2$

[PQ ব্যাস বলে $\angle PDM = \angle PDQ = 90°$;

$\therefore PM^2 = PD^2 + DM^2$]

বা, $PM.PC = DM (QM + DM) + PD^2$

বা, $PM.PC = DM.QD + PQ^2 – QD^2$

[$\angle PDQ = 90°$ বলে ΔPQD -এ $PQ^2 = PD^2 + QD^2$

বা $PD^2 = PQ^2 – QD^2$]

বা, $PM.PC = PQ^2 – QD (QD – DM)$

বা, $PM.PC = PQ^2 – QD.QM$

$\therefore PQ^2 = PM.PC + QD. QM$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬১ ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে এবং $AD \perp BC$.
[পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী]

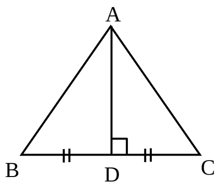
ক. তথ্য অনুযায়ী চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

গ. AC ও AB বাহুর উপর মধ্যমা BE ও CF নিয়ে প্রমাণ কর যে,
$3(BC^2 + CA^2 + AB^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে এবং $AD \perp BC$.

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৭

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ড় "ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৮