অধ্যায়-৮: ত্রিকোণমিতি

পরীক্ষার্থী বন্ধুরা, এ অধ্যায়ে বোর্ড পরীক্ষা, ক্যাডেট কলেজ, শীর্ষস্থানীয় স্কুলসমূহের নির্বাচনি পরীক্ষা এবং বাছাইকৃত এক্সক্লুসিভ মডেল টেস্টের প্রশ্নগুলোর পূর্ণাঙ্গ সমাধান দেওয়া হয়েছে। এগুলো অনুশীলন করলে তোমরা এ অধ্যায় থেকে যেকোনো সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান সহজেই করতে পারবে।

প্রশ্ন ▶১ $\sin A + \cos A = P$ এবং $Q = \sec\theta - \tan\theta$. *[ঢা. বো. ১৭]*

ক. $32'4''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $P = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin A - \cos A = \pm 1$. ৪

গ. $Q = (\sqrt{3})^{-1}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $32'4'' = \left(32\frac{4}{60}\right)'$ [$\because 60'' = 1'$]

$= \left(32\frac{1}{15}\right)' = \left(\frac{481}{15}\right)'$

$= \left(\frac{481}{15\times 60}\right)^\circ$ [$\because 60' = 1^\circ$]

$= \left(\frac{481}{900}\right)^\circ = \left(\frac{481}{900}\times\frac{\pi}{180}\right)^c$ $\left[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= \left(\frac{481\pi}{162000}\right)^c = .0093^c$ (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sin A + \cos A = P$

প্রশ্নমতে, $P = 1$

বা, $\sin A + \cos A = 1$

বা, $(\sin A + \cos A)^2 = 1^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A = 1$

বা, $1 + 2\sin A\cos A = 1$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

বা, $2\sin A\cos A = 1 - 1$

$\therefore 2\sin A\cos A = 0$

এখন, $(\sin A - \cos A)^2 = (\sin A + \cos A)^2 - 4\sin A\cos A$

$= 1^2 - 0$ [মান বসিয়ে]

বা, $\sin A - \cos A = \pm\sqrt{1}$

$\therefore \sin A - \cos A = \pm 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q = \sec\theta - \tan\theta$

প্রশ্নমতে, $Q = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3} - \sqrt{3}\sin\theta = \cos\theta$

বা, $(\sqrt{3} - \sqrt{3}\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $3 + 3\sin^2\theta - 6\sin\theta = \cos^2\theta$

বা, $3 + 3\sin^2\theta - 6\sin\theta = 1 - \sin^2\theta$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

বা, $3\sin^2\theta + \sin^2\theta - 6\sin\theta + 3 - 1 = 0$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2(2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1) = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore (\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta - 1 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 1$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

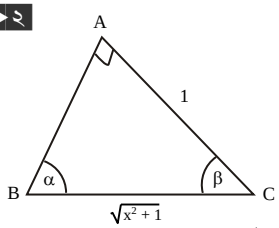
বা, $\sin\theta = \sin 90^\circ$ বা, $\sin\theta = \sin 30^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$ $\therefore \theta = 30^\circ$

কিন্তু $\theta = 90^\circ$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ θ সূক্ষ্মকোণ।

$\therefore \theta$ এর মান 30° **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২



[ঢা. বো. ১৬]

ক. $\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ এর মান কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha$. ৪

গ. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ হলে, α এর মান কত? ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্র থেকে পাই, ΔABC এর $\angle A = 90^\circ$

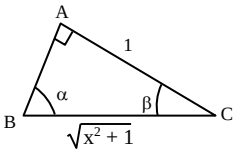
আমরা জানি,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

বা, $\alpha + \beta = 180^\circ - \angle A$

বা, $\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ$

$\therefore \alpha + \beta = 90^\circ$



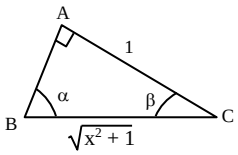
প্রদত্ত রাশি $= \sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

$= \sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1 + 0 = 1$ **(Ans.)**

খ চিত্রানুসারে পাই, $AC = 1$

$BC = \sqrt{x^2+1}$

যেহেতু $\angle BAC = 90^\circ$



$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2}$

$= \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = x$

এখন, $\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

বামপক্ষ $= (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$

$= \left(\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = \frac{(1-x)^2}{x^2+1}$

ডানপক্ষ $= 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 1 - 2.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{1-2x+x^2}{x^2+1} = \frac{(1-x)^2}{x^2+1}$

$\therefore (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্র থেকে পাই, $\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{x}$

বা, $\tan^2\alpha = \frac{1}{x^2}$ $\therefore \cot^2\alpha = x^2$

এখানে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

বা, $\cot^2\alpha + \tan^2\alpha = 2$ বা, $\frac{1}{\tan^2\alpha} + \tan^2\alpha = 2$

বা, $\frac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha} = 2$ বা, $\tan^4\alpha + 1 = 2\tan^2\alpha$

বা, $\tan^4\alpha - 2\tan^2\alpha + 1 = 0$ বা, $(\tan^2\alpha)^2 - 2.\tan^2\alpha.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\tan^2\alpha - 1)^2 = 0$ বা, $\tan^2\alpha - 1 = 0$

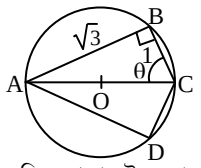
বা, $\tan^2\alpha = 1$

বা, $\tan\alpha = 1$ [$\because \alpha$ সূক্ষ্মকোণ, তাই $\tan\alpha$ এর মান ধনাত্মক নিয়ে]

বা, $\tan\alpha = \tan 45^\circ$

$\therefore \alpha = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩



উল্লেখিত চিত্রের আলোকে নিম্নের প্রশ্নের উত্তর দাও: *[ঢা. বো. ১৫]*

ক. চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে AC নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$. ৪

গ. $\sec\theta + \cos\theta = x$ হলে x-এর মান নির্ণয় কর ও সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে $\angle B$ কোণটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।
আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ 1 সমকোণ। $\therefore \angle B = 90°$
আবার, ΔABC-এ $\angle B = 90°$
$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ।
$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$
বা, $AC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$
বা, $AC^2 = 3 + 1$
বা, $AC^2 = 4$
$\therefore AC = 2$ একক **(Ans.)**

খ O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABCD বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।
$\therefore \angle A + \angle C = 180°$ [বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°]
এবং $\angle B + \angle D = 180°$
এখন, বামপক্ষ = $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D$
$= \tan A + \tan(180° - D) + \tan(180° - A) + \tan D$
$= \tan A + \tan(2 \times 90° - D) + \tan(2 \times 90° - A) + \tan D$
$= \tan A - \tan D - \tan A + \tan D$ [□ ২য় চতুর্থভাগে tan ঋণাত্মক]
= 0 = ডানপক্ষ
$\therefore \tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\sec\theta + \cos\theta = x$ ... ... (i)
এখানে, $\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$ [$\because AC = 2$ এবং $BC = 1$]
আবার, $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$
$\sec\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,
$2 + \frac{1}{2} = x$ বা, $\frac{4+1}{2} = x$ $\therefore x = \frac{5}{2}$
$\therefore$ নির্ণেয় x এর মান $\frac{5}{2}$
এখন, (i) নং থেকে, $\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$
বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$
বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$
বা, $2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$
বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$
$\therefore (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 2) = 0$
হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 2 = 0$
বা, $2\cos\theta = 1$ $\therefore \cos\theta = 2$
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$
$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$
কিন্তু, $\cos\theta \neq 2$ কারণ, $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪ মুসা ইব্রাহিম দেখল যে, 540 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $7'$ কোণ উৎপন্ন করে এবং তিনি একটি সমীকরণ লিখলেন:
$x = \tan\theta + \sec\theta$. *[রা. বো. ১৭]*

ক. পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। ২

খ. সমীকরণটি হতে প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. ৪

গ. $x = 1$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0° \le \theta < 90°$. ৪

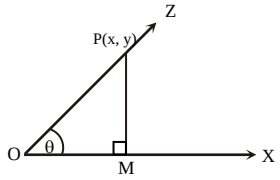
৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৪২

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$
বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$ বা, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = x$
বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]
বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$ বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$
বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]
বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
$\therefore \sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x = 1$
'খ' থেকে পাই, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
বা, $\sin\theta = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 + 1}$ [x এর মান বসিয়ে]
বা, $\sin\theta = \frac{0}{2}$ বা, $\sin\theta = 0$
বা, $\sin\theta = \sin 0°$ [□ $\sin 0° = 0$]
$\therefore \theta = 0°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫



[রা. বো. ১৬]

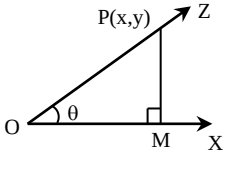
ক. $\sec\theta$- এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে,
$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$. ৪

গ. $\sqrt{x^2 + y^2} + x = \sqrt{3}y$ হলে,
θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্র থেকে পাই,
OM = x এবং PM = y [$\because$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)]
ΔOPM এ $\angle OMP = 90°$
পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
$OP^2 = OM^2 + PM^2$
বা, $OP^2 = x^2 + y^2$
$\therefore OP = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\therefore \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ **(Ans.)**

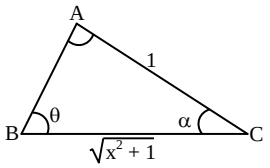


খ 'ক' থেকে পাই, $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$
বা, $\sec\theta = \frac{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}{1}$ [$\because x = 1, y = \sqrt{3}$]

বা, $\sec\theta = \sqrt{4}$ বা, $\sec\theta = 2$
বা, $\sec\theta = \sec 60°$ [□ $\sec 60° = 2$]
$\therefore \theta = 60°$
বামপক্ষ $= \sin 3\theta = \sin(3 \times 60°) = \sin 180°$
$= \sin(2 \times 90° + 0°) = -\sin 0° = 0$
ডানপক্ষ $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3\sin 60° - 4\sin^3 60°$
$= 3.\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4.\frac{3\sqrt{3}}{8}$
$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$
$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ **(প্রমাণিত)**

গ 'ক' থেকে পাই, OM = x, PM = y এবং $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$
আমরা জানি, $\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PM} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$
$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}$
দেওয়া আছে, $\sqrt{x^2 + y^2} + x = \sqrt{3}y$
বা, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y} = \frac{\sqrt{3}y}{y}$ [y দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + \frac{x}{y} = \sqrt{3}$
বা, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$
বা, $\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$
বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$
বা, $(1 + \cos\theta)^2 = (\sqrt{3}\sin\theta)^2$ [বর্গ করে]
বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta = 3\sin^2\theta$
বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 3(1 - \cos^2\theta) = 0$
বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 3 + 3\cos^2\theta = 0$
বা, $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$
বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$
বা, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$
হয়, $\cos\theta + 1 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$
বা, $\cos\theta = -1$ বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\cos\theta = \cos 180°$ বা, $\cos\theta = \cos 60°$ $\therefore \theta = 60°$
$\therefore \theta = 180°$, যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ θ সূক্ষ্মকোণ।
$\therefore$ নির্ণেয় মান : $\theta = 60°$

প্রশ্ন ▶৬



[রা. বো. ১৫]

ক. $\sin(\theta + \alpha)$ এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha$ ৪
গ. $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত তথ্যানুসারে, ΔABC-এ $\angle A = 90°$, $\angle B = \theta$ এবং $\angle C = \alpha$
$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180°$
বা, $90° + \theta + \alpha = 180°$
বা, $\theta + \alpha = 180° - 90°$
$\therefore \theta + \alpha = 90°$
$\therefore \sin(\theta + \alpha) = \sin 90° = 1$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত তথ্যানুসারে, $AB = \sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2} = x$
$\therefore \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ এবং $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\therefore$ বামপক্ষ $= (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$
$= \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$
ডানপক্ষ $= 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha = 1 + 2.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$= 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$
$\therefore (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}$
বা, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1}}$ [উভয় পক্ষকে $\sqrt{x^2+1}$ দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\sin\alpha + 1 = \sqrt{3}\cos\alpha$ ['খ' হতে পাই]
বা, $\sin(90° - \theta) + 1 = \sqrt{3}\cos(90° - \theta)$ ['ক' হতে পাই]
বা, $\cos\theta + 1 = \sqrt{3}\sin\theta$
বা, $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = (\sqrt{3}\sin\theta)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই]
বা, $\cos^2\theta + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 3\sin^2\theta$
বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta = 2\sin^2\theta$
বা, $\cos^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$ [2 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\cos^2\theta + \cos\theta = 1 - \cos^2\theta$
বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$
$\therefore (\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$
হয়, $\cos\theta = -1$ অথবা, $2\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \cos 180°$ বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
$\therefore \theta = 180°$ বা, $\cos\theta = \cos 60°$
$\therefore \theta = 60°$
$\theta = 180°$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ θ সূক্ষ্মকোণ।
$\therefore \theta = 60°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৭ একটি গাড়ি ঢাকা থেকে খুলনায় যাওয়ার সময় গাড়ির চাকা প্রতি মিনিটে 720 বার ঘুরে। চাকার ব্যাসার্ধ 0.25 মিটার। *[দি. বো. ১৭]*

ক. চাকার পরিধি নির্ণয় কর। ২
খ. গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪
গ. ঢাকা থেকে খুলনার দূরত্ব পৃথিবীর কেন্দ্রে 2° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাকা থেকে খুলনায় পৌঁছাতে গাড়িটির কত সময় লাগবে? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.] ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, চাকার ব্যাসার্ধ, r = 0.25 মিটার
$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r$ একক $= 2 \times 3.1416 \times 0.25$ মিটার
$= 1.5708$ মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই, চাকার পরিধি = 1.5708 মিটার (প্রায়)
আমরা জানি, চাকা একবার ঘুরে তার পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।
$\therefore$ গাড়িটি প্রতি মিনিটে ঘুরে অতিক্রম করে $= 720 \times 1.5708$ মিটার
$= 1130.976$ মিটার
$\therefore$ গাড়িটির গতিবেগ $= 1130.976$ মিটার/মিনিট
$= \frac{1130.976 \times 60}{1000}$ কি.মি./ঘন্টা
$= 67.86$ কি.মি./ঘন্টা **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ, R = 6440 কি.মি.
পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 2° = 2 \times \frac{\pi}{180}^c = 0.034907^c$
$\therefore$ ঢাকা ও খুলনার মধ্যবর্তী দূরত্ব = চাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta$
$= 6440 \times 0.034907$
$= 224.801$ কি.মি.

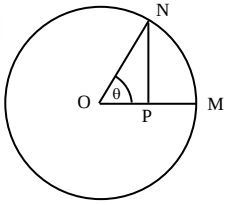
'খ' থেকে পাই, গাড়ীর গতিবেগ = 67.86 কি.মি./ঘন্টা

∴ ঢাকা থেকে খুলনায় পৌঁছাতে সময় লাগবে

= (224.801 ÷ 67.86) ঘন্টা

= 3.31 ঘন্টা (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮



চিত্রে O বৃত্তটির কেন্দ্র এবং OM = চাপ MN *[দি. বো. ১৬]*

ক. θ কে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, θ একটি ধ্রুব কোণ। ৪

গ. θ এর কোন মানের জন্য $\frac{PN}{ON} + \frac{OP}{ON} = \sqrt{2}$ হবে, যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ তা নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত চিত্রে θ একটি রেডিয়ান কোণ

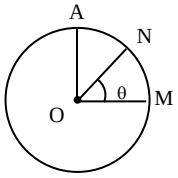
আমরা জানি, $\pi^c = 180°$

$$1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$$

$$\therefore \theta^c = \left(\frac{180\,\theta}{\pi}\right)° \textbf{ (Ans.)}$$

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে,

OM = চাপ MN। সুতরাং O কেন্দ্রবিশিষ্ট AMN বৃত্তে ∠MON একটি রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে ∠MON অর্থাৎ θ একটি ধ্রুব কোণ।



অঙ্কন: OM রেখাংশের উপর OA লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: OA লম্ব বৃত্তের পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে চাপ AM= পরিধির এক-চতুর্থাংশ

$= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$

এবং চাপ MN = OM = ব্যাসার্ধ r

$$\frac{\angle MON}{\angle AOM} = \frac{\text{Pvc } MN}{\text{Pvc } AM}$$

বা, $\angle MON = \frac{\text{Pvc } MN}{\text{Pvc } AM} \times \angle AOM = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times$ এক সমকোণ

[OA ব্যাসার্ধ এবং OM এর উপর লম্ব]

$\therefore \theta = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

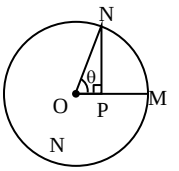
যেহেতু সমকোণ ও π ধ্রুবক সেহেতু θ একটি ধ্রুবক কোণ। **(প্রমাণিত)**

গ চিত্রে ΔOPN–এ PN ⊥ OP

$\therefore \angle OPN = 1$ সমকোণ

এখন OPN সমকোণী ত্রিভুজে

$\sin\theta = \frac{PN}{ON}$ এবং $\cos\theta = \frac{OP}{ON}$



দেওয়া আছে,

$\frac{PN}{ON} + \frac{OP}{ON} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta - \sqrt{2} = -\cos\theta$

বা, $(\sin\theta - \sqrt{2})^2 = (-\cos\theta)^2$

বা, $\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 2 = \cos^2\theta$

বা, $\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 2 = 1 - \sin^2\theta$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \sin 45°$

$\therefore \theta = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক। *[দি. বো. ১৫]*

ক. $\sec\theta$ এর মান কত? ২

খ. $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^{\frac{1}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক

আমরা জানি, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{AB}{AC}}$ [যেহেতু, $\cos\theta$ ঋণাত্মক]

$$= -\frac{AC}{AB} = \frac{-5}{4}$$

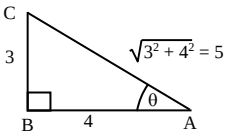
$\therefore \sec\theta = \frac{-5}{4}$ **(Ans.)**

খ 'ক' হতে, $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{-3}{5}$

[যেহেতু, $\tan\theta$ ধনাত্মক, তাই $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ উভয়েই ঋণাত্মক হবে]

আমরা জানি,

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{-3}{5}} = \frac{-5}{3}$$



আবার, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

সুতরাং $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{cosec}\theta - \cot\theta}$

$$= \sqrt{\frac{-5}{3} - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{-5-4}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{-9}{3}} = \sqrt{-3} \textbf{ (Ans.)}$$

গ 'ক' ও 'খ' হতে, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$,

$\sin\theta = -\frac{3}{5}$ এবং $\tan\theta = \frac{3}{4}$

সুতরাং, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ [$\because \cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sec(-\theta) = \sec\theta$]

$$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{\frac{-7}{5}}{\frac{-2}{4}} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{2} = \frac{14}{5}$$

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১০ $A = \sec\theta + \tan\theta$ এবং $B = \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ *[কু. বো. ১৭]*

ক. B এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $A = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ৪

গ. θ এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় কর যখন $A = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $B = \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\frac{25\pi}{6}$ [□ $\cos(-\theta) = \cos\theta$]

$$= \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

$\therefore B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

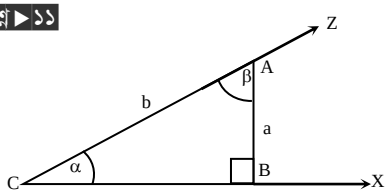
খ দেওয়া আছে, $A = \sec\theta + \tan\theta$
প্রশ্নমতে, $A = x$
অতঃপর সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২২

গ দেওয়া আছে, $A = \sec\theta + \tan\theta$
শর্তমতে, $A = \sqrt{3}$
বা, $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$
বা, $\sec\theta = \sqrt{3} - \tan\theta$
বা, $\sec^2\theta = (\sqrt{3} - \tan\theta)^2$ [বর্গ করে]
বা, $1 + \tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\tan\theta + \tan^2\theta$
বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 3 + \tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta$
বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 2$
বা, $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ [$\because 0 < \theta < 2\pi$]
বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6}$
$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ কিন্তু $\theta = \frac{7\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\theta = \frac{\pi}{6}$

প্রশ্ন ▶ ১১

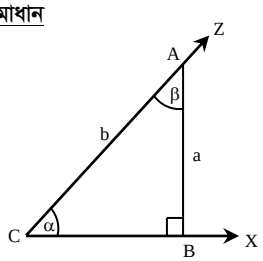


[কু. বো. ১৬]

ক. $\sec\alpha$-এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. $a = 1$ এবং $b = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ ৪
গ. $a + \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2}b$ হলে, β এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

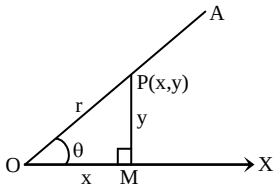
ক দেওয়া আছে, $AB = a$,
$AC = b$
ABC সমকোণী ত্রিভুজে
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2$
$\therefore BC = \sqrt{b^2 - a^2}$
$\therefore \sec\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ **(Ans.)**



খ দেওয়া আছে, $a = 1$ এবং $b = 2$
ΔABC-এ $\cos\beta = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ [□ AB = a, AC = b]
বা, $\cos\beta = \cos\frac{\pi}{3}$ $\therefore \beta = \frac{\pi}{3}$
বামপক্ষ $= \cos3\beta = \cos3.\frac{\pi}{3} = \cos\pi = -1$
ডানপক্ষ $= 4\cos^3\beta - 3\cos\beta = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\frac{1}{2}$
$= 4.\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$
$\therefore \cos3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ **(প্রমাণিত)**

গ 'ক' থেকে পাই, $BC = \sqrt{b^2 - a^2}$
ΔABC- এ $\sin\beta = \frac{BC}{AC}$
$\therefore \sin\beta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ [$\because AC = b$]
এবং $\cos\beta = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b}$ [$\because AB = a$]
দেওয়া আছে, $a + \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2}b$
বা, $\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{2}b}{b}$
বা, $\cos\beta + \sin\beta = \sqrt{2}$
$\therefore \cos\beta = \sqrt{2} - \sin\beta$
বা, $\cos^2\beta = 2 - 2\sqrt{2}\sin\beta + \sin^2\beta$
বা, $1 - \sin^2\beta = 2 - 2\sqrt{2}\sin\beta + \sin^2\beta$
বা, $2\sin^2\beta - 2\sqrt{2}\sin\beta + 1 = 0$
বা, $(\sqrt{2}\sin\beta - 1)^2 = 0$
বা, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\sin\beta = \sin45°$
$\therefore \beta = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১২

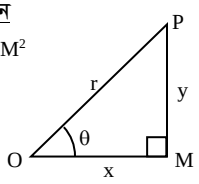


[কু. বো. ১৫]

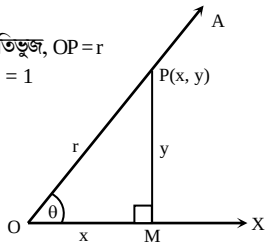
ক. $x = y$ হলে প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{2}x$. ২
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$. ৪
গ. $\frac{2y^2}{x^2 + y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। (যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$). ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক POM সমকোণী ত্রিভুজে, $OP^2 = OM^2 + PM^2$
বা, $r^2 = x^2 + y^2$
বা, $r^2 = x^2 + x^2$ [□ x = y]
বা, $r^2 = 2x^2$
$\therefore r = \sqrt{2}\,x$ **(প্রমাণিত)**



খ ΔPOM একটি সমকোণী ত্রিভুজ।
যার ভূমি, $OM = x$; লম্ব, $PM = y$ এবং অতিভুজ, $OP = r$
প্রমাণ করতে হবে যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
চিত্র থেকে আমরা পাই,



$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x}$
$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x}$
$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = \left(\frac{r}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$
$= \frac{r^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2 - y^2}{x^2}$
$= \frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2}$ ['ক' হতে পাই, $r^2 = x^2 + y^2$]
$= \frac{x^2}{x^2} = 1$
$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্র থেকে আমরা পাই, $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ['ক' হতে]
$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ['ক' হতে]
দেওয়া আছে, $\frac{2y^2}{x^2 + y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$
বা, $2\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 - 3\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$
বা, $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$
বা, $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$
বা, $2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

বা, $(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta + 2 = 0$

বা, $\cos\theta = -2$ [যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ, $-1 \le \cos\theta \le 1$]

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$. *[চ. বো. ১৭]*

ক. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $m = 2$ হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$. ৪

গ. $m = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = m$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $m(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{m}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = 2$ [□ $m = 2$]

বা, $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = 2$ বা, $\frac{(\cos\theta + 1)^2}{\sin^2\theta} = 4$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = 4$ বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = 4$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = 4$

বা, $\frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{4 + 1}{4 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{5}{3}$

$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5} + 1}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - 1} = \frac{\frac{4 - 3 + 5}{5}}{\frac{4 + 3 - 5}{5}} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{2} = 3$

ডানপক্ষ $= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{5 + 4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{5} \times \frac{5}{3} = 3$

$\therefore \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = m$

বা, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ [□ $m = \sqrt{3}$]

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3} - \cot\theta$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\cot\theta + \cot^2\theta$

বা, $1 + \cot^2\theta - 3 + 2\sqrt{3}\cot\theta - \cot^2\theta = 0$

বা, $2\sqrt{3}\cot\theta - 2 = 0$

বা, $\cot\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$ বা, $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{\pi}{3} = \cot\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

কিন্তু $\theta = \frac{4\pi}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶ ১৪ *[চ. বো. ১৬]*

ক. $-700°$ এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে আছে, চিত্রসহ নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{5}{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

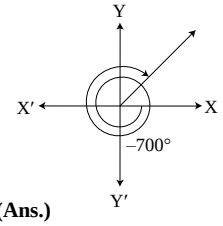
গ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-700° = -630° - 70°$

$= -7 \times 90° - 70°$

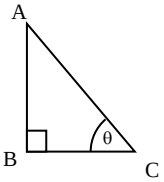
$-700°$ কোণটি ঋণাত্মক কোণ হওয়ায় ঘড়ির কাঁটার দিকে 7 সমকোণ ঘুরার পর একই দিকে আরও $70°$ কোণ ঘুরতে হয়েছে।



$\therefore -700°$ কোণটির অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে। **(Ans.)**

খ উদ্দীপক থেকে পাই, $\sec\theta = \frac{AC}{BC}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC}$



দেওয়া আছে,

$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $3 + 6\tan^2\theta = 5$

বা, $6\tan^2\theta = 2$ বা, $\tan^2\theta = \frac{2}{6}$

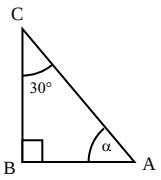
বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$ বা, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta$ এর ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই

$\tan\theta = \tan30°$ [□ θ সূক্ষ্মকোণ]

$\therefore \theta = 30°$ **(Ans.)**

গ ΔABC-এ



$\angle B = 90°$ এবং $\angle C = \theta = 30°$ [‘খ’ থেকে প্রাপ্ত]

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\alpha + 90° + 30° = 180°$

বা, $\alpha = 180° - (90° + 30°)$

$\therefore \alpha = 60°$

$\therefore \sin2\alpha = \sin(2 \times 60°) = \sin(90° + 30°)$

$= \cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার, $2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin60°.\cos60° = 2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{2\tan60°}{1 + \tan^2 60°}$

$= \frac{2.\sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ যদি $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = a$ হয়— *[চ. বো. ১৫]*

ক. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos\theta = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ ৪

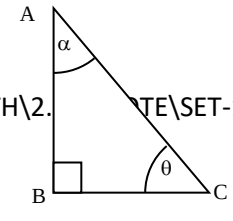
গ. দেখাও যে, $(a^2 + 1)\cos\theta + (a^2 + 1)\sin\theta = (a + 1)^2 - 2$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = a$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = a.(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = a.(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$



বা, $1 = a(\text{cosec}\theta - \cot\theta)$ [$\because \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$]

$\therefore \quad \text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{a}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\cot\theta + \text{cosec}\theta = a$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2-1}{a^2+1} = \frac{(\cot\theta + \text{cosec}\theta)^2 - (\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{(\cot\theta + \text{cosec}\theta)^2 + (\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}$

[□ $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$]

$= \frac{\cot^2\theta + 2\cot\theta.\text{cosec}\theta + \text{cosec}^2\theta - \text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta}{\cot^2\theta + 2\cot\theta.\text{cosec}\theta + \text{cosec}^2\theta + \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta}$

$= \frac{2\cot^2\theta + 2\cot\theta.\text{cosec}\theta}{2\cot\theta.\text{cosec}\theta + 2\text{cosec}^2\theta}$

$= \frac{2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.\frac{1}{\sin\theta}}{2.\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.\frac{1}{\sin\theta} + 2.\frac{1}{\sin^2\theta}}$

$= \frac{2\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\right)}{2\left(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\right)}$

$= \cos\theta =$ বামপক্ষ

$\therefore \cos\theta = \frac{a^2-1}{a^2+1}$ **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' থেকে পাই, $\cos\theta = \frac{a^2-1}{a^2+1}$

$\therefore \quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{a^4 + 2a^2 + 1}} = \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2 + 1 - a^4 + 2a^2 - 1}{a^4 + 2a^2 + 1}}$

$= \sqrt{\frac{4a^2}{(a^2+1)^2}} = \frac{2a}{a^2+1}$

বামপক্ষ $= (a^2+1)\cos\theta + (a^2+1)\sin\theta$

$= (a^2+1)(\cos\theta + \sin\theta)$

$= (a^2+1)\left(\frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2a}{a^2+1}\right)$

$= (a^2+1)\left(\frac{a^2-1+2a}{a^2+1}\right)$

$= a^2 - 1 + 2a = a^2 + 2a + 1 - 2 = (a+1)^2 - 2$

= ডানপক্ষ

$\therefore (a^2+1)\cos\theta + (a^2+1)\sin\theta = (a+1)^2 - 2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ $f(x) = \sin x$ *[সি. বো. ১৭]*

ক. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,

$af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. ৪

গ. সমাধান কর: $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$, যখন $0 \le x \le 2\pi$. ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ, $r = 5$ সে.মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60° = 60 \times \frac{\pi^c}{180} = \frac{\pi^c}{3}$

আমরা জানি, চাপ, $S = r\theta = 5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5 \times 3.1416}{3}$

$\therefore$ চাপের দৈর্ঘ্য $= 5.236$ সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

প্রশ্নমতে, $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$

বা, $a\sin\theta + b\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$

বা, $a\sin\theta + b\cos\theta = c$

বা, $a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta = c^2$ [বর্গ করে]

বা, $a^2(1 - \cos^2\theta) + b^2(1 - \sin^2\theta) + 2ab\sin\theta.\cos\theta = c^2$

বা, $a^2 - a^2\cos^2\theta + b^2 - b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta.\cos\theta = c^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta.\cos\theta$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = (a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 - 2a\cos\theta.b\sin\theta$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = (a\cos\theta - b\sin\theta)^2$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

$\therefore \quad af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$, যখন $0 \le x \le 2\pi$

বা, $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$

বা, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

বা, $\cos^2 x = (\sqrt{2} - \sin x)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\sin x + \sin^2 x$

বা, $1 - \sin^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\sin x + \sin^2 x$

বা, $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin x)^2 - 2\sqrt{2}\sin x.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

বা, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

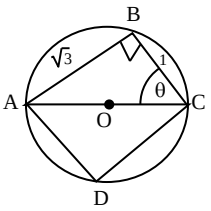
বা, $\sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

কিন্তু, $x = \frac{3\pi}{4}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭



O কেন্দ্রিক বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ *[সি. বো. ১৬]*

ক. θ এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। ২

খ. ΔABC এর ক্ষেত্রে দেখাও যে,
$\cos(B + C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C$. ৪

গ. ABCD যদি একটি বৃত্তাকার চাকা হয় এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 10 বার আবর্তিত হয়, তাহলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে? ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপকের চিত্র থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$ বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan 60° \therefore \theta = 60°$

আমরা জানি, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore 60° = \frac{\pi \times 60}{180} = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ উদ্দীপক এর চিত্র থেকে পাই,
ΔABC-এর, $\angle B$ = এক সমকোণ = 90°
এবং $\angle C = 60°$ ['ক' থেকে প্রাপ্ত]

বামপক্ষ $= \cos(B + C) = \cos(90° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos B\cos C - \sin B\sin C$
$= \cos 90°.\cos 60° - \sin 90°.\sin 60°$

$= 0.\cos60° - 1.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C$. **(দেখানো হলো)**

গ উদ্দীপক থেকে পাই, AB = $\sqrt{3}$ একক এবং BC = 1 একক

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

সুতরাং বৃত্তাকার চাকার ব্যাস = AC = 2 একক

$\therefore$ " " ব্যাসার্ধ, $r = \frac{2}{2}$ একক = 1 একক

$\therefore$ বৃত্তাকার চাকাটির পরিধি = $2\pi r$ একক = $2 \times 3.1416 \times 1$
= 6.2832 একক

আমরা জানি,

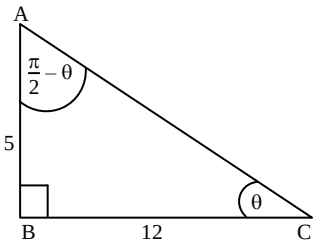
বৃত্তাকার চাকা 1 বার ঘুরে তার পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ চাকাটি 1 সেকেন্ডে অতিক্রম করে 10×6.2832 একক দূরত্ব

$\therefore$ চাকাটি 1 ঘন্টা বা 3600 সেকেন্ডে অতিক্রম করে $(10 \times 6.2832 \times 3600)$ "
= 226195.2 "

সুতরাং চাকাটির গতিবেগ ঘন্টায় 226195.2 একক। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮



[সি. বো. ১৫]

ক. 2.0071^c কে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। ২

খ. সকল অনুপাতের মানকে ধ্রুবক বিবেচনায় নিয়ে উদ্দীপকের ভিত্তিতে $\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. নিজস্ব চিত্র ব্যবহার করে এর A চিহ্নিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 2.0071^c

$= 2.0071 \times \frac{180°}{\pi}$ $\left[\because 1^c = \frac{180°}{\pi}\right]$

$= 114.998° = 115°$ (প্রায়)

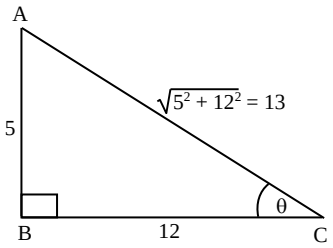
খ চিত্র হতে,

$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$

$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$



এখন, $\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{-\frac{5}{13} + \frac{12}{13}}{\frac{13}{12} + \frac{5}{12}} = \frac{\frac{7}{13}}{\frac{18}{12}}$

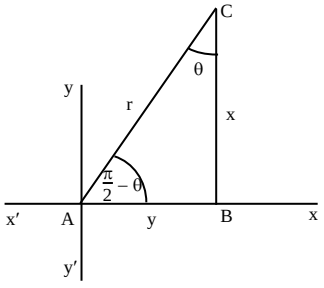
$= \frac{7}{13} \times \frac{12}{18} = \frac{14}{39}$ **(Ans.)**

গ ΔABC এর ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{r} = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{r} = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{y} = \cot\theta$



একইভাবে, $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$, $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$

এবং $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = P$. *[য. বো. ১৭]*

ক. $\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P = 4 হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \pm\sqrt{3}$. ৪

গ. P = 6 এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$

$= 7\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + 3\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$ $\left[\because \theta = \frac{\pi}{4}\right]$

$= 7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7+3}{2}$

$\therefore P = 5$ **(Ans.)**

খ প্রশ্নমতে, P = 4

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = 3$

$\therefore \cot\theta = \pm\sqrt{3}$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রশ্নমতে, P = 6

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 6$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 6$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 6$

বা, $4\sin^2\theta = 3$ বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

'+' নিয়ে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

'–' নিয়ে, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মানসমূহ: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ P = a cosθ এবং Q = bsinθ. *[য. বো. ১৬]*

ক. $\frac{P^2}{a^2} + \frac{Q^2}{b^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P − Q = c হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. ৪

গ. $a^2 = 3, b^2 = 7$ এবং $Q^2 + P^2 = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, P = a cosθ

Q = b sinθ

প্রদত্ত রাশি = $\frac{P^2}{a^2} + \frac{Q^2}{b^2} = \frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\sin\theta)^2}{b^2}$

$= \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = \frac{a^2b^2\cos^2\theta + a^2b^2\sin^2\theta}{a^2b^2}$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P - Q = c$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$ [বর্গ করে]

বা, $a^2\cos^2\theta - 2.a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\sin^2\theta = c^2$

বা, $a^2(1-\sin^2\theta) - 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2(1-\cos^2\theta) = c^2$

বা, $a^2 - a^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta = c^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = a^2\sin^2\theta + 2.a\sin\theta.b\cos\theta + b^2\cos^2\theta$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a^2 = 3$

$b^2 = 7$

এবং $Q^2 + P^2 = 4$

এখন, $Q^2 + P^2 = 4$

বা, $b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = 4$ [দেওয়া আছে]

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ [a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে]

বা, $7(1-\cos^2\theta) + 3\cos^2\theta = 4$ বা, $7 - 7\cos^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

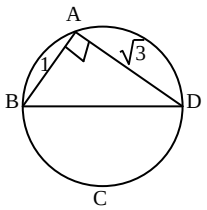
বা, $4\cos^2\theta = 3$ বা, $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ বা, $\frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{3}{4}$ বা, $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta = \frac{4}{3}$ বা, $\tan^2\theta = \frac{4}{3} - 1$ বা, $\tan^2\theta = \frac{4-3}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ২১



এবং $P = \frac{\cot B + \operatorname{cosec} B - 1}{\cot B - \operatorname{cosec} B + 1}$; $Q = \frac{1 + \sin D}{\cos D}$ *[য. বো. ১৫]*

ক. ABCD বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos(B - D) = \cos B\cos D + \sin B\sin D$. ৪

গ. দেখাও যে, $P = Q$। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ABCD বৃত্তটিতে $\angle BAD$ এক সমকোণ

$\therefore \angle BAD$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

সুতরাং, BD বৃত্তটির ব্যাস

ΔABD-এ

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

বা, $BD^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$

বা, $BD = \sqrt{1+3}$

$\therefore BD = 2$

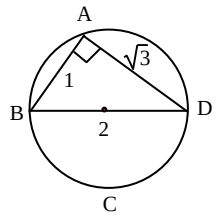
$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{BD}{2} = \frac{2}{2} = 1$ **(Ans.)**

খ ΔABD-এ, $\cos B = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$

$\cos D = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin B = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin D = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$



আবার, $\cos B = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore B = \frac{\pi}{3}$

$\cos D = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore D = \frac{\pi}{6}$

বামপক্ষ $= \cos(B - D) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos B\cos D + \sin B\sin D$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$ [মান বসিয়ে পাই]

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos(B - D) = \cos B\cos D + \sin B\sin D$ **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' থেকে প্রাপ্ত, $B = \frac{\pi}{3}$, $D = \frac{\pi}{6}$

বামপক্ষ $= P = \frac{\cot B + \operatorname{cosec} B - 1}{\cot B - \operatorname{cosec} B + 1} = \frac{\cot\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} - 1}{\cot\frac{\pi}{3} - \operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} + 1}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 1} = \frac{\frac{1+2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{1-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}$

ডানপক্ষ $= Q = \frac{1+\sin D}{\cos D} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore P = Q$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২২ $A = x\cos\theta$ এবং $B = y\sin\theta$, যেখানে $0 < \theta < 2\pi$. *[ব. বো. ১৭]*

ক. $\frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A + B = z$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$x\sin\theta - y\cos\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$. ৪

গ. $x^2 = 3$, $y^2 = 7$ এবং $A^2 + B^2 = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = x\cos\theta$ এবং $B = y\sin\theta$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} = \frac{(x\cos\theta)^2}{x^2} + \frac{(y\sin\theta)^2}{y^2}$

$= \frac{x^2\cos^2\theta}{x^2} + \frac{y^2\sin^2\theta}{y^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A + B = z$

বা, $x\cos\theta + y\sin\theta = z$

বা, $(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 = z^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta.\cos\theta = z^2$

বা, $x^2(1-\sin^2\theta) + y^2(1-\cos^2\theta) + 2xy\sin\theta\cos\theta = z^2$

বা, $x^2 - x^2\sin^2\theta + y^2 - y^2\cos^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta = z^2$

বা, $x^2 + y^2 - z^2 = x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta$

বা, $x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta = x^2 + y^2 - z^2$

বা, $(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

$\therefore x\sin\theta - y\cos\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $A = x\cos\theta$ এবং $B = y\sin\theta$

এখানে, $A^2 + B^2 = 4$

বা, $(x\cos\theta)^2 + (y\sin\theta)^2 = 4$

বা, $x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta = 4$

এখন, $x^2 = 3$, $y^2 = 7$ হলে, আমরা পাই, $3\cos^2\theta + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3(1-\sin^2\theta) + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3 - 3\sin^2\theta + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3 + 4\sin^2\theta = 4$ বা, $4\sin^2\theta = 4 - 3$

বা, $4\sin^2\theta = 1$ বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{1}{2}$ [বর্গমূল করে]

'+' নিয়ে, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

'–' নিয়ে, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৩ মনে কর, $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$ এবং $Q = \sec\theta + \tan\theta$ *[ব. বো. ১৬]*

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, P = Q ৪

গ. যদি $Q = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan 10x = \cot 5x$

বা, $\tan 10x = \tan(90° - 5x)$

বা, $10x = 90° - 5x$

বা, $10x + 5x = 90°$

বা, $15x = 90°$

$\therefore x = 6°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$$= \frac{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$= Q$ [দেওয়া আছে, $Q = \sec\theta + \tan\theta$]

$\therefore P = Q$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q = \sec\theta + \tan\theta$

শর্তমতে, $Q = \sqrt{3}$

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta = \sqrt{3} - \tan\theta$

বা, $\sec^2\theta = (\sqrt{3} - \tan\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\tan\theta + \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 3 + \tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 2$ বা, $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}, \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ [$\because 0 < \theta < 2\pi$]

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}, \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ কিন্তু $\theta = \frac{7\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ এর প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\theta = \frac{\pi}{6}$

প্রশ্ন ▶২৪ $A = 1 - \sin\theta$, $B = \sec\theta - \tan\theta$ এবং $C = 1 + \sin\theta$. *[ব. বো. ১৫]*

ক. দেখাও যে, $B = A\sec\theta$. ২

খ. $B = (\sqrt{3})^{-1}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AC^{-1} = B^2$. ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = 1 - \sin\theta$

$B = \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

$= (1 - \sin\theta).\frac{1}{\cos\theta} = A.\sec\theta$ [$\because A = 1 - \sin\theta$]

$\therefore B = A.\sec\theta$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $A = 1 - \sin\theta$, $B = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because B = \sec\theta - \tan\theta$]

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

বা, $3(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta) = \cos^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $3 - 6\sin\theta + 3\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ [এটি গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ θ সূক্ষ্মকোণ]

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

গ বামপক্ষ $= AC^{-1} = \frac{A}{C}$

$= \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$ [$\because A = 1 - \sin\theta$ এবং $1 + \sin\theta$]

$= \frac{(1 - \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = \frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}$

$= \frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

$= B^2$ [$\because B = \sec\theta - \tan\theta$]

= ডানপক্ষ

$\therefore AC^{-1} = B^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৫ $\cot A = \frac{p}{q}$ এবং $\tan^2\theta + \cot^2\theta = m$ *[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]*

ক. $\tan\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রথম সমীকরণ হতে sinA এবং cosA এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ৪

গ. m = 2 হলে ২য় সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(4 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\left(-\tan\frac{\pi}{6}\right)$ [n = 4 ও চতুর্থ চতুর্ভাগ]

$= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\cot A = \frac{p}{q}$

বা, $\cot^2 A = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\operatorname{cosec}^2 A - 1 = \frac{p^2}{q^2}$

বা, $\operatorname{cosec}^2 A = \frac{p^2}{q^2} + 1$

বা, $\frac{1}{\sin^2 A} = \frac{p^2 + q^2}{q^2}$

বা, $\sin^2 A = \frac{q^2}{p^2 + q^2}$

$\therefore \quad \sin A = \pm\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$

আবার, $\cot A = \frac{p}{q}$

বা, $\frac{1}{\tan A} = \frac{p}{q}$

বা, $\tan A = \frac{q}{p}$

বা, $\tan^2 A = \frac{q^2}{p^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\sec^2 A - 1 = \frac{q^2}{p^2}$

বা, $\sec^2 A = \frac{q^2}{p^2} + 1$

বা, $\frac{1}{\cos^2 A} = \frac{q^2 + p^2}{p^2}$

বা, $\cos^2 A = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$

$\therefore \quad \cos A = \pm\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$

$\therefore \quad \sin^2 A + \cos^2 A = \frac{q^2}{p^2 + q^2} + \frac{p^2}{p^2 + q^2}$

$= \frac{q^2 + p^2}{q^2 + p^2} = 1$

$\therefore \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $m = 2$

আবার, $\tan^2\theta + \cot^2\theta = m$

বা, $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

বা, $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

বা, $\tan^4\theta + 1 = 2\tan^2\theta$ [উভয় পক্ষকে $\tan^2\theta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4\theta - 2\tan^2\theta + 1 = 0$

বা, $(\tan^2\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\tan^2\theta - 1 = 0$

বা, $\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \pm 1$

এখন, $\tan\theta = 1$ নিয়ে পাই, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}, \tan(\pi + \frac{\pi}{4})$ (শর্তানুসারে)

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}, \tan\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

আবার, $\tan\theta = -1$ নিয়ে পাই, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan\theta = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}), \tan(2\pi - \frac{\pi}{4})$ (শর্তানুসারে)

বা, $\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{4}, \tan\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

প্রশ্ন ▶ ২৬ $\sec\theta + \tan\theta = \frac{a}{b}$ *[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ময়মনসিংহ]*

ক. প্রমাণ কর যে, $a = \frac{b(1 + \sin\theta)}{\cos\theta}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ৪

গ. যদি $a = \sqrt{3}$ এবং $b = 1$ হয়, তবে উদ্দীপকের সমীকরণটি সমাধান কর। যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

$\therefore a = \frac{b(1 + \sin\theta)}{\cos\theta}$ **(প্রমাণিত)**

খ 'ক' থেকে পাই, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

$\therefore \sin\theta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a = \sqrt{3}$ এবং $b = 1$

$\therefore \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3} - \sec\theta$

বা, $(\tan\theta)^2 = (\sqrt{3} - \sec\theta)^2$[বর্গ করে]

বা, $\tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\sec\theta + \sec^2\theta$

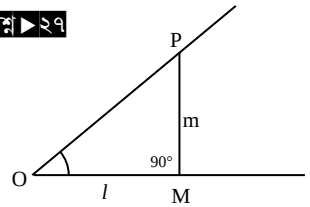
বা, $\sec^2\theta - 1 = 3 - 2\sqrt{3}\sec\theta + \sec^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\sec\theta = 4$

বা, $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৭



[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ, রাজশাহী]

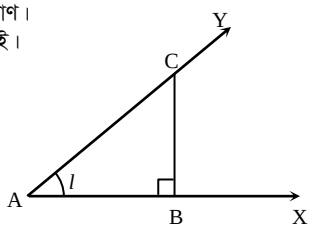
ক. প্রমাণ কর যে, $\sin A + \cos A > 1$ ২

খ. $l = 5$ সে.মি. এবং $m = 12$ সে.মি. হলে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1 - \sin POM}{1 + \sin POM}} = \sec POM - \tan POM$ ৪

গ. $\angle POM = \theta$ হলে $2\sqrt{3}\frac{l^2}{l^2 + m^2} + \frac{4}{\sqrt{l^2 + m^2}}m + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{l^2 + m^2}}m - 2 - 2\sqrt{3} = 0$ সমীকরণ ব্যবহার করে θ এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। ৪

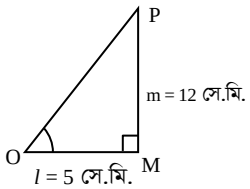
২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\angle XAY$ একটি সূক্ষ্মকোণ। AY বাহুতে C যেকোনো বিন্দু নিই।



C থেকে AX এর ওপর CB লম্ব টানি। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ CAB গঠিত হলো।
এখন, ΔCAB সমকোণী ত্রিভুজে,
$\sin A = \frac{BC}{AC}$ এবং $\cos A = \frac{AB}{AC}$
আমরা জানি, BC + AB > AC
বা, $\frac{BC}{AC} + \frac{AB}{AC} > 1$
∴ sinA + cosA > 1 **(প্রমাণিত)**

খ ΔPOM এ



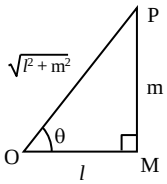
$OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}$
$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$
∴ $\sin POM = \frac{12}{13}$, $\sec POM = \frac{13}{5}$
এবং $\tan POM = \frac{12}{5}$

$$\therefore \sqrt{\frac{1 - \sin POM}{1 + \sin POM}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{12}{13}}{1 + \frac{12}{13}}} = \sqrt{\frac{\frac{13 - 12}{13}}{\frac{13 + 12}{13}}}$$
$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{13}}{\frac{25}{13}}} = \sqrt{\frac{1}{13} \times \frac{13}{25}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

এবং $\sec POM - \tan POM = \frac{13}{5} - \frac{12}{5} = \frac{13 - 12}{5} = \frac{1}{5}$

∴ $\sqrt{\frac{1 - \sin POM}{1 + \sin POM}} = \sec POM - \tan POM$ **(প্রমাণিত)**

গ ΔPOM এ



$OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{l^2 + m^2}$
∴ $\sin POM = \frac{PM}{OP}$
∴ $\sin\theta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}$
এবং $\cos POM = \frac{OM}{OP}$
∴ $\cos\theta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}$

এখন, $2\sqrt{3}\frac{l^2}{l^2 + m^2} + \frac{4}{\sqrt{l^2 + m^2}}m + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{l^2 + m^2}}m - 2 - 2\sqrt{3} = 0$
বা, $2\sqrt{3}\left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right)^2 + 4.\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} + \sqrt{3}\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} - 2 - 2\sqrt{3} = 0$
বা, $2\sqrt{3}(\cos\theta)^2 + 4.\sin\theta + \sqrt{3}.\sin\theta - 2 - 2\sqrt{3} = 0$
বা, $2\sqrt{3}\cos^2\theta + 4\sin\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 2 - 2\sqrt{3} = 0$
বা, $2\sqrt{3}(1 - \sin^2\theta) + 4\sin\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 2 - 2\sqrt{3} = 0$
বা, $2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sin^2\theta + 4\sin\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 2 - 2\sqrt{3} = 0$
বা, $2\sqrt{3}\sin^2\theta - 4\sin\theta - \sqrt{3}\sin\theta + 2 = 0$
বা, $2\sin\theta(\sqrt{3}\sin\theta - 2) - 1(\sqrt{3}\sin\theta - 2) = 0$
∴ $(\sqrt{3}\sin\theta - 2)(2\sin\theta - 1) = 0$
∴ $\sqrt{3}\sin\theta - 2 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$
বা, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$
[গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $-1 \le \sin\theta \le 1$] ∴ $\theta = \frac{\pi}{6}$
∴ θ এর মান $\frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৮ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ক্ষেত্রে—
[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. প্রমাণ কর যে, $\sin^4x - \sin^2x = \cos^4x - \cos^2x$ ২

খ. যদি $\tan x = \frac{a}{b}$ হয়, তবে $\sec^4x - \sec^2x$ কে a ও b এর মাধ্যমে নির্ণয় কর এবং সরলীকরণ কর। ৪

গ. সমাধান কর: $5\sec^2x - 7\tan x.\sec x - 2\tan^2x = 0$ ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin^4x - \sin^2x = (\sin^2x)^2 - \sin^2x$
$= (1 - \cos^2x)^2 - (1 - \cos^2x)$
$= 1 - 2\cos^2x + \cos^4x - 1 + \cos^2x$
$= \cos^4x - \cos^2x$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $\tan x = \frac{a}{b}$
বা, $\tan^2x = \frac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]
বা, $\sec^2x - 1 = \frac{a^2}{b^2}$
বা, $\sec^2x = 1 + \frac{a^2}{b^2}$
বা, $\sec^2x = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$
বা, $\sec^4x = \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^4}$ [বর্গ করে]
এখন, $\sec^4x - \sec^2x = \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^4} - \frac{a^2 + b^2}{b^2}$
$= \frac{a^2 + b^2}{b^2}\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} - 1\right)$
$= \frac{a^2 + b^2}{b^2}\left(\frac{a^2 + b^2 - b^2}{b^2}\right)$
$= \frac{a^2 + b^2}{b^2}.\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^4}(a^2 + b^2)$ **(Ans.)**

গ $5\sec^2x - 7\tan x.\sec x - 2\tan^2x = 0$
বা, $\frac{5}{\cos^2x} - 7.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} - 2.\frac{\sin^2x}{\cos^2x} = 0$
বা, $5 - 7\sin x - 2\sin^2x = 0$
বা, $2\sin^2x + 7\sin x - 5 = 0$
বা, $\sin x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-5)}}{2.2}$
বা, $\sin x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 40}}{4}$
বা, $\sin x = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{4}$
∴ $\sin x = 0.608$ অথবা, $\sin x = -4.108$ [গ্রহণযোগ্য নয়।]
∴ $x = 0.654$
∴ $x = 0.654$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৯ $2\sin x.\cos x = \sin x$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।
[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]

ক. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের একক কি এবং কেন? ২

খ. $0 < x \le 2\pi$ সীমার মধ্যে সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

গ. যদি $\operatorname{cosec}A = \frac{a}{b}$; যেখানে $a > b > 0$ হয় তাহলে, প্রমাণ কর যে, ৪

$$\tan A = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের একক নাই।
কারণ: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ হলো দুইটি সমজাতীয় রাশির ভাগফল।

খ দেওয়া আছে, $2\sin x\cos x = \sin x$; $0 < x \le 2\pi$
বা, $2\sin x\cos x - \sin x = 0$
∴ $\sin x(2\cos x - 1) = 0$
হয়, $\sin x = 0$ অথবা, $2\cos x - 1 = 0$
বা, $\sin x = \sin 0 = \sin\pi = \sin 2\pi$ বা, $\cos x = \frac{1}{2}$
∴ $x = 0, \pi, 2\pi$ বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
∴ $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
$0 < x \le 2\pi$ সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মানসমূহ $= \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

গ দেওয়া আছে, $\text{cosec}A = \frac{a}{b}$

বা, $\text{cosec}^2A = \frac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \cot^2A = \frac{a^2}{b^2}$ [□ $\text{cosec}^2A - \cot^2A = 1$]

বা, $\cot^2A = \frac{a^2}{b^2} - 1$ বা, $\frac{1}{\tan^2A} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

বা, $\tan^2A = \frac{b^2}{a^2 - b^2}$ বা, $\tan A = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2}}$

$\therefore \tan A = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩০ $A = \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$ এবং $B = \sec\theta + \tan\theta$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. $\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে A ও B এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $B = \sqrt{A}$ ৪

গ. যদি $B = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ হয় তবে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$ ও $B = \sec\theta + \tan\theta$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে, $A = \frac{1 + \sin\frac{\pi}{3}}{1 - \sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

$= \frac{(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3}{4 - 3}$

$= 7 + 4\sqrt{3}$ **(Ans.)**

এবং $B = \sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3} = 2 + \sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ ডানপক্ষ $= \sqrt{A} = \sqrt{\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + \tan\theta = B =$ বামপক্ষ

$\therefore B = \sqrt{A}$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৫

প্রশ্ন ▶৩১ এহসান সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 10 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। চাপটি কেন্দ্রে 28° কোণ উৎপন্ন করে। সাইকেলের চাকা প্রতি সেকেন্ডে চার বার ঘুরে এবং এর ব্যাস 0.84 মিটার।

[কুমিলণ্ডা ক্যাডেট কলেজ, কুমিলণ্ডা]

ক. যদি $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ হয় তাহলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0° < \theta < 90°$ ২

খ. এহসানের গতিবেগ কি.মি/ ঘণ্টায় বের কর। ৪

গ. বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-১৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৭০

খ দেওয়া আছে, চাকার ব্যাস = 0.84 মি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \frac{0.84}{2} = 0.42$ মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 0.42 = 2.64$ মিটার

যেহেতু চাকা এক বার ঘুরে তার পরিধির সমান পথ অতিক্রম করে এবং প্রতি সেকেন্ডে চাকাটি চারবার ঘুরে।

$\therefore$ 10 সেকেন্ডে অতিক্রান্ড় দূরত্ব $= 2.64 \times 4 \times 10$

$= 105.6$ মিটার $= 0.1056$ কি.মি.

$\therefore$ 3600 সেকেন্ডে বা 1 ঘণ্টায় অতিক্রান্ড় দূরত্ব

$= \frac{0.1056 \times 3600}{10} = 38.016$ কি.মি.

$\therefore$ এহসানের গতিবেগ 38.016 কি.মি./ঘণ্টা **(Ans.)**

গ 'খ' থেকে পাই, বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য = এহসানের 10 সেকেন্ডে অতিক্রান্ড় দূরত্ব

বা, $S = 105.6$ মিটার

এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 28° = \frac{28 \times \pi}{180°} = 0.488693$

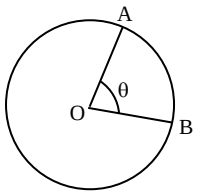
আমরা জানি, $\frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} =$ কোণের বৃত্তীয় মান

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \frac{\text{চাপ}}{\text{কোণের বৃত্তীয় মান}} = \frac{105.6}{0.488693} = 216.087$ মিটার

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi \times (216.087)^2$

$= 146692.59$ বর্গ মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩২



[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ক. যদি $\theta = 39°12'38''$ হয় তবে θ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $\theta = \frac{\pi}{15}$ হলে $\cos^2\theta + \cos^2\frac{13\theta}{2} + \cos^2 16\theta + \cos^2\frac{47\theta}{2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. সমাধান কর : $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$ যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\theta = 39°12'38'' = 39°\left(12\frac{38}{60}\right)' = 39°\left(\frac{379}{30}\right)'$

$= \left(39\frac{379}{30 \times 60}\right)° = \left(39\frac{379}{1800}\right)° = 39.21°$

$= 39.21 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$= \frac{39.21 \times 3.1416}{180}$ রেডিয়ান

$= 0.6843$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ $\cos^2\theta + \cos^2\frac{13\theta}{2} + \cos^2 16\theta + \cos^2\frac{47\theta}{2}$

$= \cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13}{2}.\frac{\pi}{15} + \cos^2 16.\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{47}{2}.\frac{\pi}{15}$ $\left[\because \theta = \frac{\pi}{15}\right]$

$= \cos^2\frac{\pi}{15} + \left(\cos\frac{13\pi}{30}\right)^2 + \left(\cos\frac{16\pi}{15}\right)^2 + \left(\cos\frac{47\pi}{30}\right)^2$

$= \cos^2\frac{\pi}{15} + \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{15}\right)\right\}^2$

$+ \left\{\cos\left(2\pi - \frac{13\pi}{30}\right)\right\}^2$

$= \cos^2\frac{\pi}{15} + \left(\sin\frac{\pi}{15}\right)^2 + \left(-\cos\frac{\pi}{15}\right)^2 + \left(\cos\frac{13\pi}{30}\right)^2$

$= \cos^2\frac{\pi}{15} + \sin^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{\pi}{15} + \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right)\right\}^2$

$= 1 + \cos^2\frac{\pi}{15} + \sin^2\frac{\pi}{15} = 1 + 1 = 2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

বা, $4(1 - \sin^2\theta + \sin\theta) = 5$

বা, $4 - 4\sin^2\theta + 4\sin\theta = 5$

বা, $4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\sin\theta - 1 = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

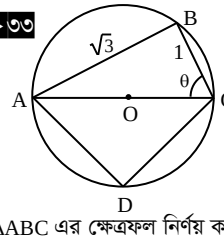
বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}, \sin(\pi - \frac{\pi}{6})$ [শর্তানুসারে]

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, যা, $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

প্রশ্ন ▶ ৩৩



ABCD একটি সমবৃত্ত চতুর্ভুজ।

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0$ ৪

গ. θ এর মান নির্ণয় কর এবং θ এর মান দ্বারা $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ অভেদকটি যাচাই কর। ৪

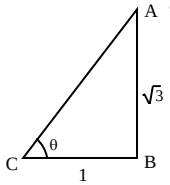
৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\angle ABC$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

হওয়ায় $\angle ABC$ = এক সমকোণ।

এখন, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের

ভূমি BC = 1 একক এবং লম্ব AB = $\sqrt{3}$ একক



$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AB$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

খ ABCD সমবৃত্ত চতুর্ভুজে $\angle A + \angle C = \pi$ এবং $\angle B + \angle D = \pi$

এখন, $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D$

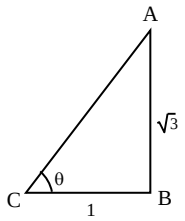
$= \cot A + \cot B + \cot(\pi - A) + \cot(\pi - B)$

$= \cot A + \cot B - \cot A - \cot B = 0$

$\therefore$ $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0$ **(Ans.)**

গ চিত্র হতে, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**



$\sin 3\theta = \sin\left(3.\frac{\pi}{3}\right)$ $[\because \theta = \frac{\pi}{3}]$

$= \sin\pi = \sin\left(2.\frac{\pi}{2} + 0\right)$

$= \sin 0 = 0$

আবার, $3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3\sin\frac{\pi}{3} - 4\sin^3\frac{\pi}{3}$ $[\because \theta = \frac{\pi}{3}]$

$= 3.\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4.\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৩৪ $a = \operatorname{cosec}\theta$, $b = \cot\theta$, $c = x$ *[সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট]*

ক. $\theta = \frac{\pi}{12}$ হলে, $\tan\theta.\tan5\theta.\tan7\theta.\tan11\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a - b = \frac{1}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ৪

গ. $\frac{2}{a} - 3b = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0 < \theta < \pi$. ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan\theta\ \tan5\theta\ \tan7\theta\ \tan11\theta$

$= \tan\frac{\pi}{12}\ \tan\frac{5\pi}{12}\ \tan\frac{7\pi}{12}\ \tan\frac{11\pi}{12}$ $[\because \theta = \frac{\pi}{12}]$

$= \tan15°\ \tan75°\ \tan105°\ \tan165°$

$= \tan15°\ \tan(90° - 15°)\ \tan(90° + 15°)\ \tan(180° - 15°)$

$= \tan15°\ \cot15°\ (-\cot15°)\ (-\tan15°)$

$= \tan^2 15°\ \cot^2 15°$

$= \tan^2 15° \times \frac{1}{\tan^2 15°} = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = \operatorname{cosec}\theta$, $b = \cot\theta$, $c = x$

শর্তমতে, $a - b = \frac{1}{c}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $\frac{1}{x}.(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) = 1$

বা, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)^2 = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = x^2$

বা, $\frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore \cos\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a = \operatorname{cosec}\theta$, $b = \cot\theta$

শর্তমতে, $\frac{2}{a} - 3b = 0$

বা, $\frac{2}{\operatorname{cosec}\theta} - 3\cot\theta = 0$

বা, $2\sin\theta - 3\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $-(2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2) = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

$\therefore$ $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

যেহেতু, $0 < \theta < \pi$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$

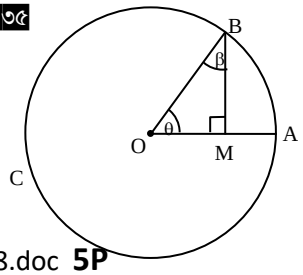
অথবা, $\cos\theta + 2 = 0$

$\therefore$ $\cos\theta = -2$

যা গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ $-1 \le \cos\theta \le 1$

প্রশ্ন ▶ ৩৫



চাপ AB = ব্যাসার্ধ OA *[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]*

ক. রেডিয়ান কোণ কি? ২

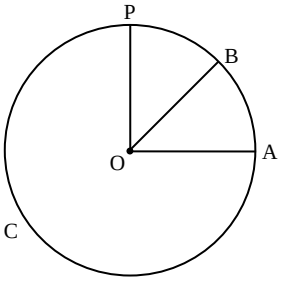
খ. প্রমাণ কর যে, ∠AOB একটি ধ্রুবক কোণ। ৪

গ. $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$ হলে β এর মান রেডিয়ানে নির্ণয় কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **রেডিয়ান কোণ:** কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে ∠AOB একটি রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOB একটি ধ্রুব কোণ।

অঙ্কন : OA রেখাংশের (ব্যাসার্ধের) ওপর OP লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : OP লম্ব বৃত্তের পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে চাপ PA = পরিধির এক-চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$

এবং চাপ AB = ব্যাসার্ধ r [∠AOB = এক রেডিয়ান]

আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$$\frac{\angle AOB}{\angle POA} = \frac{\text{Pvc } AB}{\text{Pvc } PA}$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \frac{\text{Pvc } AB}{\text{Pvc } PA} \times \angle POA = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times \text{এক সমকোণ}$$

[OP ব্যাসার্ধ এবং OA এর উপর লম্ব]

$= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

যেহেতু সমকোণ ও π ধ্রুবক সেহেতু ∠AOB একটি ধ্রুব কোণ। **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

বা, $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0$

বা, $2\cos\beta\sin\beta - \sin\beta = 0$

∴ $\sin\beta(2\cos\beta - 1) = 0$

বা, $\sin\beta = 0 = \sin 0°$

∴ $\beta = 0$; ইহা গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ, β সূক্ষ্মকোণ।

অথবা, $2\cos\beta - 1 = 0$

হয়, $\cos\beta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

∴ $\beta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৬ $\sec\theta + \tan\theta = y$ এবং $5\,\text{cosec}^2\alpha - 7\,\text{cosec}\alpha\cot\alpha = z$ *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*

ক. যদি $A = \frac{\pi}{3}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$ ৪

গ. যদি $z = 2$ হয় তাহলে, α এর মান নির্ণয় কর। যখন $0 < \alpha < 2\pi$. ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \sin 2A = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\because A = \frac{\pi}{3}\right]$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A} = \frac{2\tan\frac{\pi}{3}}{1 + \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1+3} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$ **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১২২

গ দেওয়া আছে, $5\,\text{cosec}^2\alpha - 7\,\text{cosec}\alpha\cot\alpha = z$.

শর্তমতে, $z = 2$

বা, $5\,\text{cosec}^2\alpha - 7\,\text{cosec}\alpha\cot\alpha = 2$

বা, $\frac{5}{\sin^2\alpha} - \frac{7\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - 2 = 0$

বা, $5 - 7\cos\alpha - 2\sin^2\alpha = 0$

বা, $5 - 7\cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha) = 0$

বা, $5 - 7\cos\alpha - 2 + 2\cos^2\alpha = 0$

বা, $2\cos^2\alpha - 7\cos\alpha + 3 = 0$

বা, $2\cos^2\alpha - 6\cos\alpha - \cos\alpha + 3 = 0$

বা, $2\cos\alpha(\cos\alpha - 3) - 1(\cos\alpha - 3) = 0$

বা, $(2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 3) = 0$

হয়, $2\cos\alpha - 1 = 0$ অথবা, $\cos\alpha - 3 = 0$

বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ∴ $\cos\alpha = 3$; যা গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ $-1 \le \cos\alpha \le 1$

বা, $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3}, \cos(2\pi - \frac{\pi}{3})$

∴ $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, যা প্রদত্ত সীমা $0 < \alpha < 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত

∴ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে α এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৭ $f(x) = \sin x$. *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যে চাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $af(\alpha) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = c$ হয়, তবে দেখাও যে, $af\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - bf(\alpha) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. ৪

গ. সমাধান কর : $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$, যখন $0 < x < 2\pi$. ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৭

প্রশ্ন ▶ ৩৮ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ যেখানে, $\cos\theta$ ঋণাত্মক এবং $2\sin^2 A + 3\cos A = 3$. *[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]*

ক. $\text{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{\sec(-\theta) + \tan\theta}{\sin\theta + \cos(-\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

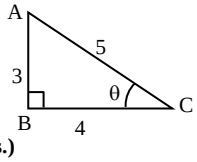
গ. A এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0 \le A \le 2\pi$. ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

চিত্রানুযায়ী পাই,

$\text{cosec}\theta = \frac{5}{3}$



∵ $\cos\theta$ ঋণাত্মক সুতরাং $\text{cosec}\theta = \frac{-5}{3}$ **(Ans.)**

খ 'ক' এর চিত্র থেকে পাই, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$

$\because \cos\theta$ ঋণাত্মক। সুতরাং $\cos\theta = \frac{-4}{5}$, $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ এবং $\sec\theta = -\frac{5}{4}$

$$\therefore \frac{\sec(-\theta)+\tan\theta}{\sin\theta+\cos(-\theta)} = \frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}{-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{-2}{4}}{\frac{-7}{5}}$$

$$= \frac{2}{4}\times\frac{5}{7} = \frac{5}{14}$$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $2\sin^2A + 3\cos A = 3$

বা, $2(1-\cos^2A) + 3\cos A - 3 = 0$

বা, $2 - 2\cos^2A + 3\cos A - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2A + 3\cos A - 1 = 0$

বা, $-(2\cos^2A - 3\cos A + 1) = 0$

বা, $2\cos^2A - 3\cos A + 1 = 0$

বা, $2\cos^2A - 2\cos A - \cos A + 1 = 0$

বা, $2\cos A(\cos A - 1) - 1(\cos A - 1) = 0$

বা, $(2\cos A - 1)(\cos A - 1) = 0$

$\therefore$ হয় $2\cos A - 1 = 0$

বা, $\cos A = \frac{1}{2}$

বা, $\cos A = \cos\frac{\pi}{3}, \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore A = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

অথবা, $\cos A - 1 = 0$

বা, $\cos A = 1$

বা, $\cos A = \cos 0, \cos 2\pi$

$\therefore A = 0, 2\pi$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $A = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

প্রশ্ন ▶৩৯ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin A = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ *[ভিকারুন্নিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. $75°30'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\tan A + \sec A = x$ ৪

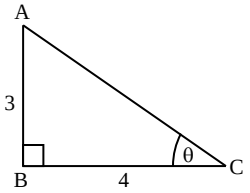
৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $75°30' = \left(75\frac{30}{60}\right)^\circ$ [$\because 60' = 1°$]

$= \left(75\frac{1}{2}\right)^\circ = \frac{151}{2}\times\left(\frac{\pi}{180}\right)^c$ $\left[\because 1° = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= 1.317727^c$ (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$



বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ $AB = 3, BC = 4$

$\therefore$ $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

যেহেতু $\sin\theta$ ঋণাত্মক তাই, $\sin\theta = -\frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$ বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$ বা, $\frac{-\frac{3}{5}}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $\cos\theta = -\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{4}{5}$ এবং $\sec\theta = -\frac{5}{4}$

বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \frac{-\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)}{-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}}$

$= -\frac{7}{5}\times\frac{4}{-2} = \frac{14}{5}$ = ডানপক্ষ

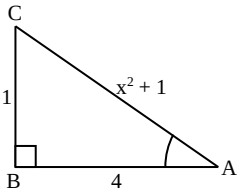
$\therefore$ $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \frac{14}{5}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

বা, $\frac{BC}{AC} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$\therefore$ $BC = x^2-1$, $AC = x^2+1$

$\therefore$ $AB = \sqrt{AC^2-BC^2} = \sqrt{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2} = \sqrt{4x^2.1} = 2x$



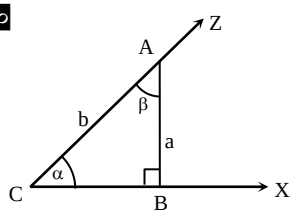
বামপক্ষ $= \tan A + \sec A$

$= \frac{BC}{AB} + \frac{AC}{AB} = \frac{BC+AC}{AB} = \frac{x^2-1+x^2+1}{2x}$

$= \frac{2x^2}{2x} = x$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ $\tan A + \sec A = x$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪০



[মনিপুর উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. BC বাহুকে a ও b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $a = 1$ এবং $b = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ ৪

গ. $a + \sqrt{b^2-a^2} = \sqrt{2}b$ হলে β এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC হতে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, $AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $a^2 + BC^2 = b^2$

বা, $BC^2 = b^2 - a^2$

$\therefore BC = \sqrt{b^2-a^2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = 1$ এবং $b = 2$

ΔABC এ, $\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

বা, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2^2-1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\alpha = \cos30°$

$\therefore \alpha = 30°$

বামপক্ষ $= \cos3\alpha = \cos(3\times30°) = \cos90° = 0$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\cos^330° - 3\cos30°$

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore$ $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৫

প্রশ্ন ▶৪১ $P(\theta) = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$ *[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. $A = \frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2A}$. ২

খ. $P(\theta) - 4 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cot\theta \pm \sqrt{3} = 0$. ৪

গ. $P(\theta) = 6$ এবং $0° < \theta < 360°$ শর্তে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{6}$

$\therefore A = 30°$

$\therefore \tan2A = \tan(2\times30°) = \tan60° = \sqrt{3}$

এখন, $\frac{2\tan A}{1-\tan^2A} = \frac{2\tan30°}{1-(\tan30°)^2} = \frac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $P(\theta) - 4 = 0$

$\therefore P(\theta) = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $\frac{7\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{3\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{4}{\cos^2\theta}$ [$\cos^2\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $7\tan^2\theta + 3 = 4\sec^2\theta$

বা, $7\tan^2\theta + 3 = 4(1 + \tan^2\theta)$

বা, $7\tan^2\theta + 3 = 4 + 4\tan^2\theta$

বা, $7\tan^2\theta - 4\tan^2\theta = 4 - 3$

বা, $3\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1}{\cot^2\theta} = \frac{1}{3}$

বা, $\cot^2\theta = 3$ বা, $\cot\theta = \pm\sqrt{3}$

$\therefore \cot\theta \pm \sqrt{3} = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ $P(\theta) = 6$ হলে, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 6$

বা, $\frac{7\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{3\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{6}{\cos^2\theta}$ [$\cos^2\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $7\tan^2\theta + 3 = 6\sec^2\theta$

বা, $7\tan^2\theta + 3 = 6(1 + \tan^2\theta)$

বা, $7\tan^2\theta + 3 = 6 + 6\tan^2\theta$

বা, $7\tan^2\theta - 6\tan^2\theta = 6 - 3$

বা, $\tan^2\theta = 3$

$\therefore \tan\theta = \pm\sqrt{3}$

আবার, $\tan\theta = \sqrt{3}$ হলে,

$\tan\theta = \tan 60°, \tan(180° + 60°)$

$\therefore \theta = 60°, 240°$ [□ $0° < \theta < 360°$]

আবার, $\tan\theta = -\sqrt{3}$ হলে,

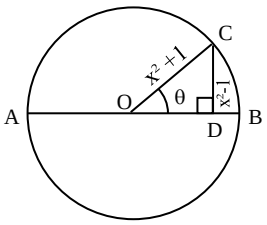
$\tan\theta = -\tan 60° = \tan(180° - 60°), \tan(360° - 60°)$

$= \tan 120°, \tan 300°$ [□ $0° < \theta < 360°$]

$\therefore \theta = 120°, 300°$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মান $60°, 120°, 240°, 300°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪২ *[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, ঢাকা]*



চিত্রে O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে ব্যাসার্ধ, OB = BC চাপের দৈর্ঘ্য = 35 সে. মি.।

ক. θ কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। ২

খ. রেডিয়ান কোণ বলতে কি বুঝ? প্রমাণ কর যে, রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ। ৪

গ. চিত্রে, COD সমকোণী ত্রিভুজে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে,

$\sec\theta + \tan\theta = x$ ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রানুসারে, ব্যাসার্ধ, OB = r = 35 সে. মি.

চাপ, BC = S = 35 সে. মি.

আমরা জানি, $S = r\theta$ বা, $\theta = \frac{S}{r}$ বা, $\theta = \frac{35}{35}$

$\therefore \theta = 1$ রেডিয়ান **(Ans.)**

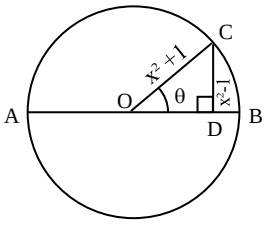
খ কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে রেডিয়ান কোণ বলে।

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩৬

গ চিত্র হতে পাই, $\sin\theta = \frac{CD}{CO}$

বা, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$



$= \sqrt{1 - \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}} = \frac{2x}{x^2+1}$

এখন, $\tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}} + \frac{1}{\frac{2x}{x^2+1}}$

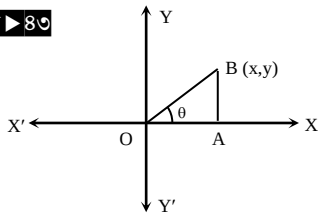
$= \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{2x}\right) + \left(1 \times \frac{x^2+1}{2x}\right)$

$= \frac{x^2-1}{2x} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x^2-1+x^2+1}{2x}$

$= \frac{2x^2}{2x} = x$

$\therefore \tan\theta + \sec\theta = x$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩



$P = \cos\theta$ এবং $Q = \sin\theta$. *[সামসুল হক খান স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. $75°30'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $aP - bQ = c$ হলে প্রমাণ কর যে,

$aQ + bP = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ৪

গ. $\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $75°30' = \left(75\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(75\frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{151}{2}\right)^\circ$

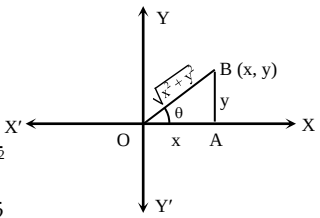
$= \frac{151}{2} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= 1.3177$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৮

গ চিত্রানুসারে,

$\sin\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

এবং $\cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$



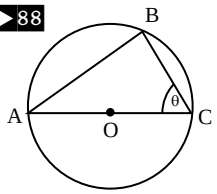
শর্তমতে, $\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

বা, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

অতঃপর উচ্চতর গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-১৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭০

প্রশ্ন ▶ ৪৪



মায়িশা ABC বৃত্তাকার পথে সাইকেলে চড়ে 10 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করল। *[মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. $30°12'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. বৃত্তচাপটি কেন্দ্র $28°$ কোণ উৎপন্ন করলে এবং বৃত্তের ব্যাস 180 মিটার হলে মায়িশার গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি AB = $\sqrt{3}$, BC = 1 এবং $\sec\theta + \cos\theta = P$ হয় তবে P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৩(i) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৩৯

খ পাঠ্যবয়িের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৪২

গ দেওয়া আছে, AB = $\sqrt{3}$

BC = 1

$\therefore$ AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

আবার, $P = \sec\theta + \cos\theta = \frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ **(Ans.)**

$\therefore \sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2 + 2\cos^2\theta = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta - 2 = 0$

বা, $\cos\theta = 2$, যা গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ $-1 \le \cos\theta \le 1$

আবার, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৫ $f(x) = \sin x$ *[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]*

ক. 33°22′11″ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$ হলে প্রমাণ কর যে, $af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ৪

গ. $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$ সমাধান কর যেখানে $0 \le x \le 2\pi$. ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $33°22'11'' = 33°\left(22\frac{11}{60}\right)' = 33°\left(\frac{1331}{60}\right)' = \left(33\frac{1331}{60 \times 60}\right)°$

$= \left(\frac{120131}{3600}\right)° = \frac{120131}{3600} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$= \frac{120131\pi}{648000}$ রেডিয়ান = 0.5824 রেডিয়ান (প্রায়)

$\therefore 33°22'11'' = 0.5824$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৭

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৭

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $A = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$ এবং $B = \tan\theta + \sec\theta$.

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, ঢাকা]

ক. $\theta = \frac{\pi}{6}$ হলে দেখাও যে, $B = \sqrt{3}$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, A – B = 0. ৪

গ. $B = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ = $B = \tan\theta + \sec\theta = \tan\frac{\pi}{6} + \sec\frac{\pi}{6}$ [□ $\theta = \frac{\pi}{6}$]

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ = ডানপক্ষ

$\therefore B = \sqrt{3}$ **(দেখানো হলো)**

খ বামপক্ষ = A – B

$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} - (\tan\theta + \sec\theta)$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} - (\tan\theta + \sec\theta)$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} - (\tan\theta + \sec\theta)$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(1 - \sec\theta + \tan\theta)} - (\tan\theta + \sec\theta)$

$= \sec\theta + \tan\theta - \tan\theta - \sec\theta$

$= 0$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ A – B = 0 **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ২৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

প্রশ্ন ▶ ৪৭ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. $\cot(-\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{\sin(-\theta) + \cos\theta}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

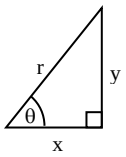
গ. যদি $\tan\theta + \sec\theta = P$ হয়, তবে P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

$\therefore \cot(-\theta) = -\cot\theta = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ যেহেতু $\tan\theta$ ধনাত্মক এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক সুতরাং θ কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে আছে।



$\therefore \tan\theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{y}{x}$

$\therefore x = -\sqrt{3}, y = -1$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}, \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\sin(-\theta) + \cos\theta}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$

$= \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$ [□ $\sec(-\theta) = \sec\theta$]

$= \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}}{\frac{-2-1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = P$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = P$ [$\because$ 'খ' হতে প্রাপ্ত]

বা, $\frac{1 - 2}{\sqrt{3}} = P$

$\therefore P = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

প্রদত্ত সমীকরণ, $\tan\theta + \sec\theta = P$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\sec\theta$

বা, $\left(\tan\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = (-\sec\theta)^2$

বা, $\tan^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta + \frac{1}{3} = \sec^2\theta$

বা, $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta + \frac{1}{3} = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

বা, $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta + \frac{1}{3} = 1$

বা, $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta = 1 - \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

কিন্তু $\theta = \frac{\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = \frac{\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \quad 0 < \theta < 2\pi$ সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মান হচ্ছে $= \frac{7\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮ $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$ এবং $Q = \sec\theta + \tan\theta$.

[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, P = Q. ৪

গ. যদি $Q = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২৩ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

প্রশ্ন ▶ ৪৯ $p = \sin\theta$, $q = \cos\theta$ *[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. $ap + bq = c$ হলে প্রমাণ কর যে, $a\cos\theta - b\sin\theta = \pm\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}$ ৪

গ. $p^2 - q^2 = q$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যখন $0 \le \theta \le 2\pi$ ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 5 সে.মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

আমরা জানি, চাপ $S = r\theta = 5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5 \times 3.1416}{3} = 5.236$ সে.মি.

খ দেওয়া আছে, $p = \sin\theta$ ও $q = \cos\theta$

শর্তমতে, $ap + bq = c$

বা, $a\sin\theta + b\cos\theta = c$

অতঃপর সৃজনশীল ১৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৭

গ শর্তমতে, $p^2 - q^2 = q$

বা, $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-১৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭১

প্রশ্ন ▶ ৫০ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক। *[এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\cot(-\theta)$ এর মান নির্ণয় কর এবং θ কোণটি কোন চতুর্ভাগে আছে তা উল্লেখ কর। ২

খ. $\frac{\sin(-\theta) + \cos\theta}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\tan\theta + \sec\theta = P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর যখন $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৪৭নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩৮

প্রশ্ন ▶ ৫১ $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = P$. *[বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে P এর মান কত? ২

খ. P = 4 হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \pm\sqrt{3}$ ৪

গ. P = 6 হলে এবং $0 \le \theta \le 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৯ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৮

প্রশ্ন ▶ ৫২ $M = \sin\theta$ এবং $N = \cos\theta$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।

[সাভার ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, ঢাকা]

ক. $10°6'3''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{M}{N} + \frac{1}{N} = b$ হলে দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{b^2 - 1}{b^2 + 1}$ ৪

গ. $M + N = \sqrt{2}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$। ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $10°6'3'' = 10°\left(6\frac{3}{60}\right)' = 10°\left(6\frac{1}{20}\right)' = 10°\left(\frac{121}{20}\right)'$

$= \left(10\frac{121}{20 \times 60}\right)° = \left(\frac{12121}{1200}\right)° = \frac{12121}{1200} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$= 0.1763$ রেডিয়ান $= 0.18$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $M = \sin\theta$ এবং $N = \cos\theta$

শর্তমতে, $\frac{M}{N} + \frac{1}{N} = b$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = b$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = b$

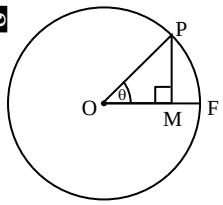
অতঃপর সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা–১২২

গ শর্তমতে, $M + N = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অধ্যায় ৮.৩ এর উদাহরণ-১৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭০

প্রশ্ন ▶ ৫৩



চিত্রে O বৃত্তটির কেন্দ্র এবং OF = চাপ FP. *[সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর]*

ক. θ কে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, θ একটি ধ্রুবক কোণ। ৪

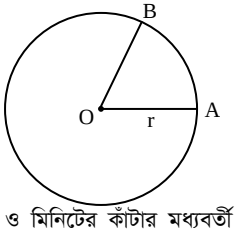
গ. θ এর কোন মানের জন্য $\frac{MP}{OP} + \frac{OM}{OP} = \sqrt{2}$ হবে, যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ তা নির্ণয় কর। ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৮ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৪

প্রশ্ন ▶ ৫৪ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA = r এবং চাপ AB এর দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এর সমান।

[এম ই এইচ আরিফ কলেজ, গাজীপুর]



ক. 9:30 টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রি? ২

খ. দেখাও যে, ∠AOB একটি ধ্রুবক কোণ। ৪

গ. $\sec\theta + \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা H, মিনিটের কাঁটা M এবং ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\theta = \left|\frac{60H - 11M}{2}\right|$

$= \left|\frac{60 \times 9 - 11 \times 30}{2}\right|$ [H = 9, M = 30]

$= \left|\frac{540 - 330}{2}\right| = 105°$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৩৬
[বি.দ্র. P এর পরিবর্তে A এবং A এর পরিবর্তে P নিতে হবে]

গ দেওয়া আছে, $\sec\theta + \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$ যখন $0 < \theta < 2\pi$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$

বা, $\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{2}\cos^2\theta - 3\cos\theta + \sqrt{2} = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + \sqrt{2} = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta(\cos\theta - \sqrt{2}) - 1(\cos\theta - \sqrt{2}) = 0$

$\therefore (\cos\theta - \sqrt{2})(\sqrt{2}\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta - \sqrt{2} = 0$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{2}$

ইহা অসম্ভব। কারণ $\cos\theta$ এর সর্বোচ্চ মান 1

অথবা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$ বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৫ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$. *[এ.ভি.জে.এম. সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, মুন্সিগঞ্জ]*

ক. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $m = 2$ হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ ৪

গ. $m = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৩ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৬

প্রশ্ন ▶৫৬ প্রদত্ত তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

$A = x\sin\theta$, $B = y\cos\theta$ *[ব্রাহ্মন্দী মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, নরসিংদী]*

ক. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} = 1$ ২

খ. $A + B = z$ হলে উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$x\cos\theta - y\sin\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে $x^2 = 3$, $y^2 = 7$ এবং $A^2 + B^2 = 4$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর যখন $0 < \theta < 2\pi$। ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = x\sin\theta$ ও $B = y\cos\theta$

বামপক্ষ $= \frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} = \frac{(x\sin\theta)^2}{x^2} + \frac{(y\cos\theta)^2}{y^2}$

$= \frac{x^2\sin^2\theta}{x^2} + \frac{y^2\cos^2\theta}{y^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ১৬(খ) নং সমাধান এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১২৭

গ দেওয়া আছে, $A = x\sin\theta$ ও $B = y\cos\theta$

শর্তমতে, $A^2 + B^2 = 4$

বা, $(x\sin\theta)^2 + (y\cos\theta)^2 = 4$

বা, $x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta = 4$

বা, $3\sin^2\theta + 7\cos^2\theta = 4$

বা, $3(1 - \cos^2\theta) + 7\cos^2\theta = 4$

বা, $3 - 3\cos^2\theta + 7\cos^2\theta = 4$

বা, $4\cos^2\theta = 4 - 3$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore \cos\theta = \pm\frac{1}{2}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}, \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

(–) চিহ্ন নিয়ে পাই, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ $0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে θ এর মান $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৭ (i) $P = \sec\theta + \tan\theta$ (ii) $Q = \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

[বিন্দুবাসিনী সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, টাঙ্গাইল]

ক. Q এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P = x$ হলে দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ৪

গ. $P = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় কর। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q = \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \sin\left(8\times\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২২

গ সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৫

প্রশ্ন ▶৫৮ মনে কর, $P = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta + 1}$ এবং $Q = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল]

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $P = Q$ ৪

গ. যদি $Q^{-1} = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

খ বামপক্ষ $= P = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta + 1}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}$ [লব ও হরকে $\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{\tan\theta + 1 - \sec\theta}{\tan\theta - 1 + \sec\theta} = \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}$

$= \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}$

$= \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{1}{\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = Q$ = ডানপক্ষ

$\therefore P = Q$ **(দেখানো হলো)**

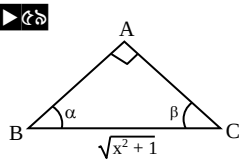
গ প্রশ্নমতে, $Q^{-1} = \sqrt{3}$ বা, $\frac{1}{Q} = \sqrt{3}$ বা, $\frac{1}{\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$ বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

অতঃপর সৃজনশীল ২৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

প্রশ্ন ▶৫৯



[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, মোমেনশাহী]

ক. $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ এর মান কত? ২

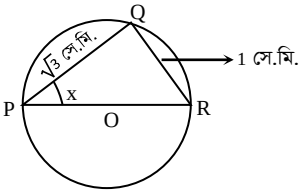
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha$ ৪

গ. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ হলে, α এর মান কত? ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২১

প্রশ্ন ▶ ৬০



চিত্রে PQR বৃত্তের কেন্দ্র O এবং PR ব্যাস।

[জামালপুর জিলা স্কুল, জামালপুর]

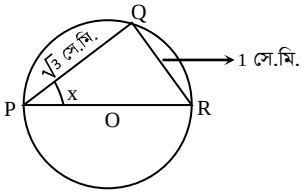
ক. ∠Q এর বৃত্তীয়মান এবং PR এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{P+Q}{2} + \tan\frac{P+Q}{2} = \cos\frac{R}{2}\left(1+\text{cosec}\frac{R}{2}\right)$. ৪

গ. $\sec^2x + \tan^2x = a$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটির সমাধান কর। যেখানে $0 < x < 2\pi$। ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔPQR-এ ∠PQR = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = 90°

∴ $\angle PQR = \frac{\pi^c}{2}$ **(Ans.)**

ΔPQR এ, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$

∴ PR = 2 সে.মি. **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই, ∠Q = 90°

আবার, $\tan\angle P = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

∴ ∠P = 30°

এবং $\tan\angle R = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \tan 60°$

∴ ∠R = 60°

বামপক্ষ $= \sin\frac{P+Q}{2} + \tan\frac{P+Q}{2}$

$= \sin\frac{30°+90°}{2} + \tan\frac{30°+90°}{2}$

$= \sin 60° + \tan 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos\frac{R}{2}\left(1+\text{cosec}\frac{R}{2}\right)$

$= \cos\frac{60°}{2}\left(1+\text{cosec}\frac{60°}{2}\right)$

$= \cos 30°\,(1+\text{cosec } 30°)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(1+2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

∴ $\sin\frac{P+Q}{2} + \tan\frac{P+Q}{2} = \cos\frac{R}{2}\left(1+\text{cosec}\frac{R}{2}\right)$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\sec^2x + \tan^2x = a$

বা, $\sec^2 30° + \tan^2 30° = a$ ['খ' থেকে $x = \angle P = 30°$]

বা, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = a$

বা, $\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = a$

∴ $a = \frac{5}{3}$

এখন, $\sec^2x + \tan^2x = \frac{5}{3}$

বা, $1 + \tan^2x + \tan^2x = \frac{5}{3}$

বা, $2\tan^2x = \frac{5}{3} - 1$

বা, $2\tan^2x = \frac{5-3}{3}$

বা, $\tan^2x = \frac{2}{3\times 2}$

বা, $\tan^2x = \frac{1}{3}$

∴ $\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

'+' চিহ্ন নিয়ে $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan x = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

∴ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

'–' চিহ্ন নিয়ে $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan x = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan x = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6}$

∴ $x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬১ $f(x) = \sin x$ *[শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]*

ক. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = c$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,

$af\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. ৪

গ. সমাধান কর : $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sqrt{2}$ যখন $0 \le x \le 2\pi$. ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৭

প্রশ্ন ▶ ৬২ $m = a\cos\theta$ এবং $n = b\sin\theta$.

[নেত্রকোণা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নেত্রকোণা]

ক. রেডিয়ান কোণ কাকে বলে? এক রেডিয়ানকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ যখন $m - n = c$. ৪

গ. $a^2 = 3$, $b^2 = 7$ এবং $m^2 + n^2 = 4$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. ৪

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **রেডিয়ান কোণ:** কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।

আমরা জানি, $\pi^c = 180°$

∴ $1^c = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.1416} = 57.2956°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $m = a\cos\theta$, $n = b\sin\theta$

এখন, $m - n = c$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

অতপর: সৃজনশীল ২০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৮

গ দেওয়া আছে, $m = a\cos\theta$ এবং $n = b\sin\theta$

এখন, $m^2 + n^2 = 4$

বা, $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = 4$

বা, $3\cos^2\theta + 7\sin^2\theta = 4$ [□ $a^2 = 3$, $b^2 = 7$]

অতপর: পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৫

প্রশ্ন ▶ ৬৩ 570 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় 9′ কোণ উৎপন্ন করে। *[রাজবাড়ী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, রাজবাড়ী]*

ক. 9′ কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। ৪

গ. $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ । ৪

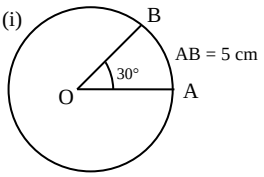
৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $9' = \left(\frac{9}{60}\right)^\circ = \left(\frac{3}{20}\right)^\circ = \frac{3}{20}\times\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান
$= 0.0026$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ আমরা জানি, r ব্যাসার্ধের বৃত্তের কেন্দ্রে S চাপ এবং θ কোণ উৎপন্ন করলে, $S = r\theta$
এখানে, $\theta = 9' = 0.0026$ রেডিয়ান
$r = 570$ কি.মি.
∴ পাহাড়ের উচ্চতা $S = r\theta = 570 \times 0.0026$
$= 1.482$ কি.মি. $= 1482$ মি. **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৯(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৮
অতঃপর $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

প্রশ্ন ▶ ৬৪ (i)



(ii) $\tan\theta + \sec\theta = x$
(iii) $2\sin^2 A + 3\cos A = 0;\ [0^\circ \le A \le 540^\circ]$
[ফরিদপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফরিদপুর]

ক. (i) নং এ প্রদত্ত বৃত্তটির পরিধি বের কর। ২
খ. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$ প্রমাণ কর। ৪
গ. A এর সম্ভাব্য সকল মান বের কর। ৪

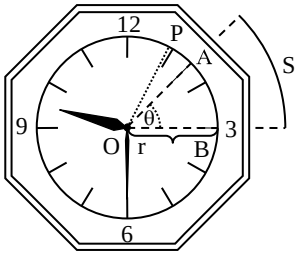
৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রানুযায়ী, চাপ $AB = S = 5$ cm
$\angle AOB = \theta = 30^\circ$
∴ আমরা জানি, $S = r\theta$ বা, $5 = r.30^\circ$
বা, $5 = r \times 30 \times \frac{\pi}{180}$ বা, $\pi r = \frac{5\times180}{30}$ ∴ $\pi r = 30$
∴ বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 30 = 60$ সে.মি. **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২২
অতঃপর $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}$
$= \frac{\sqrt{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{4x^2}}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$
∴ $\sin\theta + \cos\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-1+2x}{x^2+1}$
$= \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,
$2\sin^2 A + 3\cos A = 0$
বা, $2(1-\cos^2 A) + 3\cos A = 0$
বা, $2 - 2\cos^2 A + 3\cos A = 0$
বা, $2\cos^2 A - 3\cos A - 2 = 0$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]
বা, $2\cos^2 A - 4\cos A + \cos A - 2 = 0$
বা, $2\cos A(\cos A - 2) + 1(\cos A - 2) = 0$
বা, $(2\cos A + 1)(\cos A - 2) = 0$
কিন্তু $\cos A - 2 \ne 0$ কেননা $-1 \le \cos A \le 1$
অতএব $2\cos A + 1 = 0$
বা, $\cos A = -\frac{1}{2}$
বা, $\cos A = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$
বা, $\cos A = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
[শর্তানুসার $0 \le A \le 540^\circ$]
বা, $\cos A = \cos\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3}, \cos\frac{8\pi}{3}$
∴ $A = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$, যা $0 \le A \le 540^\circ$, $\frac{8\pi}{3}$ শর্ত পূরণ করে
∴ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে A এর সম্ভাব্য মানসমূহ $= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬৫



[গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]

ক. রেডিয়ান কাকে বলে? ২
খ. উদ্দীপকের চিত্রের আলোকে r ব্যাসার্ধের কোনো বৃত্তে S দৈর্ঘ্যের কোনো চাপ কেন্দ্রে θ পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করলে, দেখাও যে, $S = r\theta$ ৪
গ. উদ্দীপকের অঙ্কিত ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্ভূক্ত কোণকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। ৪

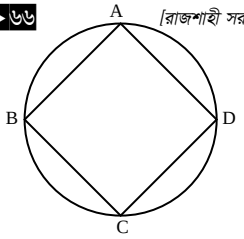
৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **রেডিয়ান :** কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান বলে।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর অনুচ্ছেদ-৮.৫ এর প্রতিজ্ঞা-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩৭

গ উদ্দীপকের অঙ্কিত ঘড়িতে 9 : 30 টা বাজে।
60 মিনিটে ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 60টি ঘর অতিক্রম করে এবং 60 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা 5টি ঘর অতিক্রম করে। সুতরাং ঘণ্টার কাঁটা প্রতি মিনিটে $\frac{5}{60}$ বা $\frac{1}{12}$ ঘর অতিক্রম করে।
আবার, ঘড়ির ডায়াল বা মুখপাত্রের 60টি ঘর কেন্দ্রে চার সমকোণ বা 360° কোণ ধারণ করে।
∴ একটি ঘর কেন্দ্রে $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ কোণ ধারণ করে। 9.30 মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 6 এর দাগে অবস্থান করে এবং ঘণ্টার কাঁটা 9 টার দাগ থেকে 30 মিনিটে $\frac{30}{12}$ বা $2\frac{1}{2}$ ঘর আগে সরে যায়।
সুতরাং, 9.30 মিনিটে দুইটি কাঁটার মধ্যে ব্যবধান (6 এর দাগ থেকে 9 এর দাগ পর্যন্ত) 15 ঘর $+ 2\frac{1}{2}$ ঘর $= 17\frac{1}{2}$ ঘর।
যেহেতু 1 ঘর কেন্দ্রে 6° কোণ ধারণ করে
∴ $17\frac{1}{2}$ ঘর কেন্দ্রে $17\frac{1}{2} \times 6^\circ = 105^\circ$ কোণ ধারণ করে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬৬



[রাজশাহী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ, রাজশাহী]

ক. $\sin 3A = \cos 3A$ হলে A এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan(-D)$ ৪
গ. $\tan^2\beta + \cot^2\beta = 2$ হলে β এর মান নির্ণয় কর যেখানে $0 < \beta < 2\pi$ ৪

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin 3A = \cos 3A$ বা, $\frac{\sin 3A}{\cos 3A} = 1$
বা, $\tan 3A = \tan 45^\circ$ বা, $3A = 45^\circ$ ∴ $A = 15^\circ$ **(Ans.)**

খ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত।
∴ $\angle A + \angle C = 180^\circ$
এবং $\angle B + \angle D = 180^\circ$

বামপক্ষ = tanA + tanB + tanC
= tanA + tan(180° – D) + tan(180° – A)
= tanA + tan(2 × 90° – D) + tan(2 × 90° – A)
= tanA – tanD – tanA = tan(– D) = ডানপক্ষ

∴ tanA + tanB + tanC = tan(– D) **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\tan^2\beta + \cot^2\beta = 2$

বা, $\tan^2\beta + \frac{1}{\tan^2\beta} = 2$

বা, $\tan^4\beta + 1 = 2\tan^2\beta$ [উভয় পক্ষকে $\tan^2\beta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4\beta - 2\tan^2\beta + 1 = 0$

বা, $(\tan^2\beta - 1)^2 = 0$

বা, $\tan^2\beta - 1 = 0$

বা, $\tan^2\beta = 1$

বা, $\tan\beta = \pm 1$

এখন, $\tan\beta = 1$ নিয়ে পাই,

$\tan\beta = \tan\frac{\pi}{4}, \tan(\pi + \frac{\pi}{4})$ (শর্তানুসারে)

বা, $\tan\beta = \tan\frac{\pi}{4}, \tan\frac{5\pi}{4}$

∴ $\beta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

আবার, $\tan\beta = -1$ নিয়ে পাই, $\tan\beta = -\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan\beta = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}), \tan(2\pi - \frac{\pi}{4})$ (শর্তানুসারে)

বা, $\tan\beta = \tan\frac{3\pi}{4}, \tan\frac{7\pi}{4}$

∴ $\beta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

∴ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে β এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬৭ (i) $\sec\theta + \tan\theta = \frac{x}{y}$, (ii) $m = p\cos\theta - q\sin\theta$ *[নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ]*

ক. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $x = \frac{y(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos\theta = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ৪

গ. (ii) নং হতে প্রমাণ কর যে, $p\sin\theta + q\cos\theta = \pm\sqrt{p^2+q^2-m^2}$ ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sec\theta + \tan\theta = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

∴ $x = \frac{y(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ **(প্রমাণিত)**

খ 'ক' হতে পাই, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

বা, $\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2-y^2)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{1}{1-\cos^2\theta} = \frac{x^4+y^4+2x^2y^2}{x^4+y^4-2x^2y^2}$

বা, $1-\cos^2\theta = \frac{x^4+y^4-2x^2y^2}{x^4+y^4+2x^2y^2}$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \frac{x^4+y^4-2x^2y^2}{x^4+y^4+2x^2y^2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{x^4+y^4+2x^2y^2-x^4-y^4+2x^2y^2}{x^4+y^4+2x^2y^2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{4x^2y^2}{x^4+y^4+2x^2y^2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{(2xy)^2}{(x^2+y^2)^2}$

∴ $\cos\theta = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $p\cos\theta - q\sin\theta = m$

বা, $(p\cos\theta - q\sin\theta)^2 = m^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $p^2\cos^2\theta - 2p\cos\theta.\, q\sin\theta + q^2\sin^2\theta = m^2$

বা, $p^2(1-\sin^2\theta) - 2p\cos\theta.q\sin\theta + q^2(1-\cos^2\theta) = m^2$

বা, $p^2 - p^2\sin^2\theta - 2p\cos\theta.q\sin\theta + q^2 - q^2\cos^2\theta = m^2$

বা, $-(p^2\sin^2\theta + 2p\cos\theta.q\sin\theta + q^2\cos^2\theta) = -(p^2+q^2-m^2)$

বা, $p^2\sin^2\theta + 2p\cos\theta.q\sin\theta + q^2\cos^2\theta = p^2+q^2-m^2$

বা, $(p\sin\theta)^2 + 2p\sin\theta.q\cos\theta + (q\cos\theta)^2 = p^2+q^2-m^2$

বা, $(p\sin\theta + q\cos\theta)^2 = p^2+q^2-m^2$

∴ $p\sin\theta + q\cos\theta = \pm\sqrt{p^2+q^2-m^2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৬৮ $P = 1 - \sin\theta$, $Q = \sec\theta - \tan\theta$, $R = 1 + \sin\theta$.
[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা]

ক. দেখাও যে, $Q = P\sec\theta$ ২

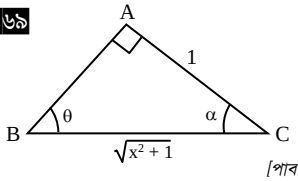
খ. θ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে $Q = (\sqrt{3})^{-1}$ হলে, θ এর মান কত? ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PR^{-1} = Q^2$ ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২৪ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

প্রশ্ন ▶ ৬৯



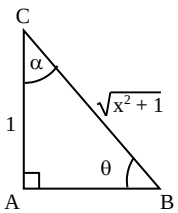
[পাবনা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পাবনা]

ক. $\cos(\alpha+\theta)$ এর মান কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ ৪

গ. $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান



ক দেওয়া আছে,
$\angle ABC = \theta$, $\angle ACB = \alpha$
এবং $\angle BAC = 90°$
∴ $\angle ABC + \angle ACB = 90°$
বা, $\theta + \alpha = 90°$
∴ $\cos(\theta+\alpha) = \cos 90° = 0$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপক হতে পাই, $\angle ACB = \alpha$
$AC = 1$
$BC = \sqrt{x^2+1}$
∴ $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = x$

∴ $\sin\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ এবং $\cos\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

বামপক্ষ $= (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$

$= \frac{(x+1)^2}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}$

$= 1 + 2\frac{x}{(x^2+1)} = 1 + 2.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$= 1 + 2.\sin\alpha.\cos\alpha$ = ডানপক্ষ

∴ $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha$ **(দেখানো হলো)**

গ উদ্দীপক হতে পাই, $\cot\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{1} = x$

$\text{cosec}\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1} = \sqrt{x^2+1}$

দেওয়া আছে, $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}$

বা, $\cot\theta + \text{cosec}\theta = \sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $(1+\cos\theta)^2 = (\sqrt{3}\sin\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 3\sin^2\theta$

বা, $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 3(1-\cos^2\theta)$

বা, $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 3 - 3\cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta+1) - 1(\cos\theta+1) = 0$

বা, $(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1) = 0$

$\therefore$ হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা $\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ বা, $\cos\theta = -1$

বা, $\cos\theta = \cos60°$ বা, $\cos\theta = \cos180°$

$\therefore \theta = 60°$ **(Ans.)** $\therefore \theta = 180°$ যা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ উদ্দীপকে $\theta < 90°$

প্রশ্ন ▶ ৭০ $A = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$, $B = \sec\theta + \tan\theta$

[বগুড়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বগুড়া]

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, A = B ৪

গ. $B = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২৩ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

প্রশ্ন ▶ ৭১ $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$, যেখানে সূক্ষ্মকোণ।

[আর্মড পুলিশ ব্যাটালিয়ন পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া]

ক. $\text{cosec}\theta + \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ৪

গ. $\frac{2x}{1+x^2} + \frac{x^2-1}{x+1} = \sqrt{2}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

আমরা জানি, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\text{cosec}\theta + \cot\theta)(\text{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $\frac{1}{x}.(\text{cosec}\theta + \cot\theta) = 1$

$\therefore \text{cosec}\theta + \cot\theta = x$ **(Ans.)**

খ ক হতে পাই, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = x$

বা, $(\text{cosec}\theta + \cot\theta)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

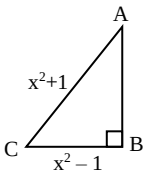
বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\therefore \sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **(দেখানো হলো)**

গ 'খ' হতে পাই, $\sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

ΔABC এ $AB = \sqrt{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2} = 2x$

$\therefore \sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}$ এবং $\cos\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$



দেওয়া আছে,

$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{x^2-1}{x^2+1} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta - 2 + 2\sqrt{2}\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2\sqrt{2}\cos\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos45°$

$\therefore \theta = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭২ $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, *[রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট]*

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ৪

গ. সমাধান কর: $\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$ যেখানে $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\tan\theta + \sec\theta}$

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{x}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২২

অতঃপর $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

$\therefore \text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

বা, $\cot\theta = \pm 1$

$\cot\theta = 1$ নিয়ে পাই,

$\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4}$, $\cot(\pi + \frac{\pi}{4})$ [শর্তানুসারে]

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4}$, $\cot\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে।

আবার, $\cot\theta = -1$ থেকে পাই,

$\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $\cot\theta = \cot(\pi - \frac{\pi}{4})$, $\cot(2\pi - \frac{\pi}{4})$ [শর্তানুসারে]

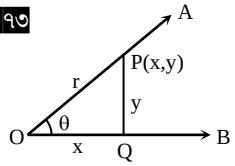
বা, $\cot\theta = \cot\frac{3\pi}{4}, \cot\frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ,

$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৩ *[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর]*



ক. $\tan6\theta = \cot3\theta$ হলে, θ এর মান কত? ২

খ. আবার $x = 4$; $y = 3$ এবং সকল অনুপাতের মানকে ঋণাত্মক বিবেচনায় নিয়ে উদ্দীপকের ভিত্তিতে $\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) - \tan\theta}$ এর মান কত? ৪

গ. $x + y = \sqrt{2}r$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর মান কত? ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan6\theta = \cot3\theta$

বা, $\tan6\theta = \tan(90° - 3\theta)$

বা, $6\theta = 90° - 3\theta$

বা, $6\theta + 3\theta = 90°$

বা, $9\theta = 90°$

$\therefore$ $\theta = 10°$ **(Ans.)**

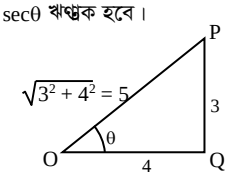
খ চিত্র হতে, $\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{3}{4}$

যেহেতু $\tan\theta$ ধনাত্মক, তাই $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\sec\theta$ ঋণাত্মক হবে।

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = -\frac{3}{5}$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{-4}{5}$

$\therefore$ $\sec\theta = -\frac{5}{4}$



এখন, $\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) - \tan\theta} = \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}$

$= \frac{\frac{3-4}{5}}{\frac{-5-3}{4}} = -\frac{1}{5} \times \frac{4}{-8} = \frac{1}{10}$ **(Ans.)**

গ ΔOPQ এ $\sin\theta = \frac{y}{r}$ এবং $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\therefore$ $y = r\sin\theta$ $\therefore$ $x = r\cos\theta$

এখন, $x + y = \sqrt{2}r$

বা, $r\cos\theta + r\sin\theta = \sqrt{2}r$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2.\sqrt{2}\cos\theta.1 + (1)^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ [□ $0 < \theta < 2\pi$]

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

কিন্তু শুদ্ধি পরীক্ষা করে পাই,

যখন $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

এবং যখন $\theta = \frac{7\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \neq \sqrt{2}$

সুতরাং $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে নির্ণেয় $\theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৪ $5\,\text{cosec}^2\theta - 7\,\cot\theta.\text{cosec}\theta - 2 = 0$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ যেখানে $0 < \theta < 2\pi$.

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বিইউএসএমএস, পার্বতীপুর, দিনাজপুর]

ক. একটি গাড়ীর চাকার ব্যাস 0.84 মিটার হলে, চাকাটি 10 বারে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে? ২

খ. রেডিয়ান কোণ কাকে বলে? প্রমাণ কর যে, রেডিয়ান কোণ একটি স্থির কোণ। ৪

গ. প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৭৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, চাকার ব্যাস, $d = 0.84$ মি.

$\therefore$ চাকার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{0.84}{2} = 0.42$ মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 0.42 = 2.64$ মি. (প্রায়)

চাকাটি 1 বার ঘুরে তার পরিধির সমান পথ অতিক্রম করে।

$\therefore$ চাকাটি 10 বার ঘুরে অতিক্রম করে $= 10 \times 2.64 = 26.4$ মি. (প্রায়)

খ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে 1 রেডিয়ান কোণ বলে।

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩৬

গ দেওয়া আছে, $5\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\,\text{cosec}\theta - 2 = 0$

বা, $\frac{5}{\sin^2\theta} - \frac{7\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2 = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta = 0$ [$\sin^2\theta$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

বা, $5 - 7\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2 + 2\cos^2\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 6\cos\theta - \cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 3) - 1(\cos\theta - 3) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 3 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\cos\theta = 3$; যা গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ $-1 \le \cos\theta \le 1$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}, \cos(2\pi - \frac{\pi}{3})$ [শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, যা প্রদত্ত সীমা $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶ ৭৫ $P = -880°$, $Q = \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$

এবং $R = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ *[রংপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রংপুর]*

ক. P কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত, চিত্রে দেখাও। ২

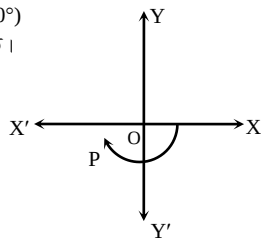
খ. Q এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $R = 2$ হলে প্রাপ্ত সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে $0° < \theta < 360°$ (অর্থাৎ $0 < \theta < 2\pi$) ৪

৭৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $P = -880° = (-9 \times 90° - 70°)$

$\therefore$ P, তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।



খ দেওয়া আছে,

$Q = \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$

$= \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}$

$= \left(\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}\right) + \left(\sin^2\frac{3\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 1 + 1 = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান = 2

গ দেওয়া আছে, $R = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

শর্তমতে, $R = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta = 2 - \cos\theta$

বা, $3\sin^2\theta = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $3(1 - \cos^2\theta) - 4 + 4\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

বা, $3 - 3\cos^2\theta - 4 + 4\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

বা, $-4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 1 = 0$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta)^2 - 2.2\cos\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60° = \cos(360° - 60°)$

বা, $\cos\theta = \cos 60° = \cos 300°$

$\therefore$ $\theta = 60°, 300°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৬ $\sin B + \cos B = m$ এবং $N = \sec A - \tan A$।

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর]

ক. রেডিয়ান কোণ কাকে বলে? 777° কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে? ২

খ. $m = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin B - \cos B = \pm 1$ ৪

গ. $N = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে A এর মান নির্ণয় কর যেখানে $0 \le A \le 2\pi$. ৪

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **রেডিয়ান কোণ :** কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।

$777° = 8 \times 90° + 57°$

$\therefore$ 777° কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

খ দেওয়া আছে, $\sin B + \cos B = m$

বা, $\sin B + \cos B = 1$ [□ $m = 1$]

বা, $(\sin B + \cos B)^2 = 1^2$

বা, $\sin^2 B + \cos^2 B + 2\sin B.\cos B = 1$

বা, $1 + 2\sin B.\cos B = 1$

বা, $2\sin B.\cos B = 0$

$\therefore$ $\sin B.\cos B = 0$

আমরা জানি, $(\sin B - \cos B)^2 = (\sin B + \cos B)^2 - 4\sin B.\cos B$

$= 1^2 - 4.0 = 1$

$\therefore$ $\sin B - \cos B = \pm 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $N = \sec A - \tan A$

বা, $\sec A - \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sec A = \frac{1}{\sqrt{3}} + \tan A$

বা, $\sec^2 A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan A\right)^2$

বা, $1 + \tan^2 A = \frac{1}{3} + 2.\frac{1}{\sqrt{3}}.\tan A + \tan^2 A$

বা, $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan A$

বা, $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan A = \frac{2}{3}$

বা, $\tan A = \frac{2 \times \sqrt{3}}{3 \times 2}$

বা, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $A = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

কিন্তু $A = \frac{7\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $A = \frac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ $A = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৭ $P = a\cos\theta - b\sin\theta$

$Q = 2\sin^2\theta + 3\cos\theta$ *[পুলিশ লাইন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]*

ক. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি.। বৃত্তে 11 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ সূক্ষ্মকোণের পরিমাণ কত? ২

খ. $P = c$ হলে দেখাও যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ৪

গ. $Q = 0$ হলে θ এর মান বের কর যখন $0 < \theta < 2\pi$। ৪

৭৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৪১

খ দেওয়া আছে, $P = a\cos\theta - b\sin\theta$

শর্তমতে, $P = c$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a^2\cos^2\theta - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\sin^2\theta = c^2$

বা, $a^2(1 - \sin^2\theta) - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2(1 - \cos^2\theta) = c^2$

বা, $a^2 - a^2\sin^2\theta - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta = c^2$

বা, $-(a^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\cos^2\theta) = -(a^2 + b^2 - c^2)$

বা, $a^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\cos^2\theta = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $(a\sin\theta)^2 + 2a\sin\theta.b\cos\theta + (b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

$\therefore$ $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q = 2\sin^2\theta + 3\cos\theta$

শর্তমতে, $Q = 0$

বা, $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta + \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) + 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 2) = 0$

কিন্তু $\cos\theta - 2 \neq 0$ কেননা $-1 \le \cos\theta \le 1$

অতএব $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}), \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$ [শর্তানুসার $0 < \theta < 2\pi$]

বা, $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ $= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶ ৭৮ $F(\theta) = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 4$.

$p = \sin^2\theta\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক রাশি।

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী]

ক. $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $p = 2$ ৪

গ. $F(\theta) = 0$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় কর যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৭৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(\theta) = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 4$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + 3\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 - 4$

$= 7.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4$

$= 7.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{2} - 4$

$= \frac{7+3-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$p = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}$

$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}\right) = 2$

$\therefore p = 2$ **(দেখানো হলো)**

গ শর্তমতে, $F(\theta) = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 4 = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

(+ ve) মান নিয়ে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(– ve) মান নিয়ে পাই, $\sin\theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{11\pi}{6}$

শুদ্ধি পরীক্ষা করে দেখা যায় $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে নির্ণেয় মান,

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৯ (i) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$, $0 < \theta \le 2\pi$.

(ii) $P = \frac{\sin x + 1 - \cos x}{\sin x - 1 + \cos x}$, $Q = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

[সৈয়দপুর সরকারি কারিগরি কলেজ, নীলফামারী]

ক. $\sin y = 1$ হলে $\cos y$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $P = Q$ ৪

গ. θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৭৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin y = 1$

বা, $\sin y = \sin 90°$

বা, $y = 90°$

বা, $\cos y = \cos 90°$

$\therefore \cos y = 0$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-২৩(খ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

$\left[\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = Q\right]$

গ দেওয়া আছে, $2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).\cos\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

বা, $2\cos\theta . \sin\theta = \cos\theta$

বা, $2\cos\theta\sin\theta - \cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

হয় $\cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

অথবা,

$2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সীমার মধ্যে, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

প্রশ্ন ▶ ৮০ দেওয়া আছে, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = a$ *[কুমিলণ্ডা জিলা স্কুল, কুমিলণ্ডা]*

ক. $\text{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান বের কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = a$ ৪

গ. $a = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৮০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৬

খ বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta + \cot\theta = a$ [দেওয়া আছে]

= ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = a$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৬

প্রশ্ন ▶ ৮১ $\tan\theta + \sec\theta = p$ *[গভর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, কুমিলণ্ডা]*

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$ ৪

গ. $\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$ সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৮১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = p$

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $P \times (\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{p}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = p$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = p$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = p$

বা, $\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = p^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = p^2$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = p^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = p^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$ [Dfq cGÞ ˆhvRb-weGqvRb KGi]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{p^2+1}{p^2-1}$

বা, $\sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore \sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

$\therefore \cot\theta = \pm 1$

হয়, $\cot\theta = 1$ অথবা, $\cot\theta = -1$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ বা, $\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ বা, $\cot\theta = \cot\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (প্রায়)

যেহেতু $0 < \theta < 2\pi$, সেহেতু সবগুলো মানই গ্রহণযোগ্য

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

প্রশ্ন ▶ ৮২ $\tan A + \sec A = \frac{p}{q}$ হলে–

[নবাব ফয়জুন্নেছা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিলণ্ডা]

ক. $\frac{1-\sin A}{1+\sin A}$ এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $\cos A = \frac{2pq}{p^2+q^2}$ ৪

গ. $0 < x < 2\pi$ এর জন্য $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$ সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

৮২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan A + \sec A = \frac{p}{q}$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A} = \frac{p}{q}$ বা, $\frac{\sin A+1}{\cos A} = \frac{p}{q}$

বা, $\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A} = \frac{p^2}{q^2}$ বা, $\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A} = \frac{p^2}{q^2}$

বা, $\frac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)} = \frac{p^2}{q^2}$ বা, $\frac{1+\sin A}{1-\sin A} = \frac{p^2}{q^2}$

$\therefore \frac{1-\sin A}{1+\sin A} = \frac{q^2}{p^2}$ **(Ans.)**

খ 'ক' হতে, $\frac{1+\sin A}{1-\sin A} = \frac{p^2}{q^2}$

বা, $\frac{1+\sin A+1-\sin A}{1+\sin A-1+\sin A} = \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin A} = \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$

বা, $\frac{1}{\sin A} = \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$

বা, $\sin^2 A = \left(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right)^2$

বা, $1-\cos^2 A = \left(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right)^2$

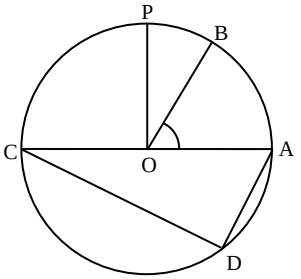
বা, $\cos^2 A = 1-\left(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\right)^2$

বা, $\cos A = \sqrt{\frac{(p^2+q^2)^2-(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2}} = \sqrt{\frac{4p^2q^2}{(p^2+q^2)^2}}$

$\therefore \cos A = \frac{2pq}{p^2+q^2}$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৫

প্রশ্ন ▶ ৮৩



চিত্রে O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে চাপ AB = ব্যাসার্ধ OA. OP, OA এর উপর লম্ব।

[কুমিলণ্ডা মডার্ন হাই স্কুল, কুমিলণ্ডা]

ক. দেখাও যে, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle AOB$ একটি ধ্রুব কোণ। ৪

গ. ΔADC এর কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের তিন গুণ। কোণগুলোকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ৪

৮৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৩৬

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-৩ অনুরূপ। পৃষ্ঠা- ১৩৬

গ মনে করি,

ΔADC এর ক্ষুদ্রতম কোণ = x রেডিয়ান

$\therefore$ ΔADC এর বৃহত্তম কোণ = 3x রেডিয়ান

যেহেতু কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত, তাই অপর কোণটি $= \frac{x+3x}{2} = 2x$ রেডিয়ান

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ

বা, $180°$ বা π রেডিয়ান

প্রশ্নমতে, $x + 2x + 3x = \pi$

বা, $6x = \pi$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণ, $x = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান

ত্রিভুজটির অপর কোণ, $2x = 2\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান

এবং ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ, $3x = 3\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৪ $\sin A + \cos A = P$, $Q = \sec\theta - \tan\theta$

[আল-আমিন একাডেমি স্কুল এন্ড কলেজ, চাঁদপুর]

ক. $32''4'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $P = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin A - \cos A = \pm 1$ ৪

গ. $Q = (\sqrt{3})^{-1}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0° \le \theta \le 360°$। ৪

৮৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২১

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২১

গ দেওয়া আছে, $Q = \sec\theta - \tan\theta$

বা, $(\sqrt{3})^{-1} = \sec\theta - \tan\theta$ [$\because Q = (\sqrt{3})^{-1}$]

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan\theta = \sec\theta$

বা, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan\theta\right)^2 = \sec^2\theta$

বা, $\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{\sqrt{3}}.\tan\theta + \tan^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

বা, $\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta = 1 + \tan^2\theta - \tan^2\theta$

বা, $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta = 1 - \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan 30° = \tan(180° + 30°)$

∴ $\theta = 30°, 210°$

কিন্তু $\theta = 210°$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = 210°$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

∴ $\theta = 30°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৫ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$ *[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]*

ক. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta -$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $m = 2$ হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ ৪

গ. $m = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৫ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৩নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৬

প্রশ্ন ▶ ৮৬ $f(x) = \sin x$ *[লক্ষ্মীপুর আদর্শ সামাদ সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর]*

ক. 6 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে যে চাপ 45° কোণ উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$ হলে প্রমাণ কর যে,

$af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ৪

গ. $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$ যখন $0 \le x \le 2\pi$ সমাধান কর। ৪

৮৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ, $r = 6$ সে. মি.

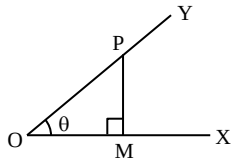
কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 45° = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

∴ চাপের দৈর্ঘ্য, $S = r\theta = 6 \times \frac{\pi}{4} = 4.71$ সে. মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৭

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৭

প্রশ্ন ▶ ৮৭ নিচের চিত্রটি লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



চিত্রে, OM = 4 একক এবং PM = 3 একক। *[নোয়াখালী জিলা স্কুল, নোয়াখালী]*

ক. যদি $\theta = \frac{\pi^c}{12}$ হয়, তবে $\tan\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan 11\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1 + \sin\theta)\sec\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

গ. চিত্রে PM ⊥ OM এবং $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$ কে θ কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করে গঠিত সমীকরণ সমাধান কর। যেখানে $0 \le \theta \le \pi$ ৪

৮৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi^c}{12}$

প্রদত্ত রাশি = $\tan\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan 11\theta$

$= \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan\frac{7\pi}{12} \tan\frac{11\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) \tan\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \cdot \left(-\tan\frac{5\pi}{12}\right)\left(-\tan\frac{\pi}{12}\right)$

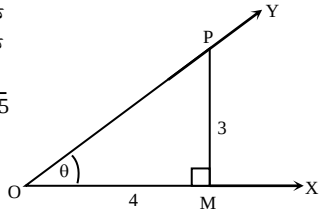
$= \tan^2\frac{\pi}{12} \tan^2\frac{5\pi}{12} = \tan^2\frac{\pi}{12}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right]^2$

$= \tan^2\frac{\pi}{12} \cdot \cot^2\frac{\pi}{12} = \tan^2\frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{\tan^2\frac{\pi}{12}}$

$= 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, OM = 4 একক

PM = 3 একক



∴ $OP = \sqrt{OM^2 + PM^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$

$= 5$ একক

$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{3}{4}$

যেহেতু $\sin\theta$ ঋণাত্মক

∴ $\sin\theta = -\frac{PM}{OP} = -\frac{3}{5}$

যেহেতু $\sin\theta$ ঋণাত্মক। সুতরাং $\cos\theta$ ও ঋণাত্মক হবে।

∴ $\cos\theta = \frac{-OM}{OP} = \frac{-4}{5}$ এবং $\sec\theta = -\frac{OP}{OM} = -\frac{5}{4}$

বামপক্ষ = $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1 + \sin\theta)\sec\theta} = \frac{-\frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)}{\left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{\frac{-3-4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}$

$= \frac{\frac{-7}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{-7}{5} \times \frac{4}{-2} = \frac{14}{5} =$ ডানপক্ষ

∴ $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1 + \sin\theta)\sec\theta} = \frac{14}{5}$ **(প্রমাণিত)**

গ $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5}{3} - 1$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

∴ $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

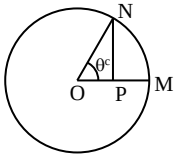
যখন, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ ∴ $\theta = \frac{\pi}{6}$

আবার, যখন, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6}$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{5\pi}{6}$ ∴ $\theta = \frac{5\pi}{6}$

সুতরাং $0 \le \theta \le \pi$ এর মধ্যে $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৮



চিত্রে O বৃত্তটির কেন্দ্র এবং OM = চাপ MN. *[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. θ^c কে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, ∠MON একটি ধ্রুবক কোণ। ৪

গ. θ এর কোন মানের জন্য $\frac{PN}{ON} + \frac{OP}{ON} = \sqrt{2}$ হবে যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৮৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন-৮ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৪

প্রশ্ন ▶ ৮৯ $P = \cos\theta + \sin\theta$. *[ডাঃ খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*

ক. দেখাও যে, $\sin\theta\cos\theta = \frac{(P+1)(P-1)}{2}$. ২

খ. $P = \sqrt{2}\cos\theta$ হলে, দেখাও যে, $\sqrt{2}\sin\theta = \cos\theta - \sin\theta$ ৪

গ. $P(\sin\theta - \cos\theta) = \cos\theta$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৮৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = \cos\theta + \sin\theta$

$$\frac{(P+1)(P-1)}{2} = \frac{P^2-1}{2}$$
$$= \frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2 - 1}{2}$$
$$= \frac{\cos^2\theta + 2\cos\theta.\sin\theta + \sin^2\theta - 1}{2}$$
$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta + 1 - 1}{2}$$
$$= \frac{2\sin\theta.\cos\theta}{2} = \sin\theta.\cos\theta$$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{(P+1)(P-1)}{2}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $P = \cos\theta + \sin\theta$

আবার, $P = \sqrt{2}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta$

বা, $\sin\theta = \cos\theta(\sqrt{2}-1)$

বা, $\sin\theta = \cos\theta(\sqrt{2}-1) \times \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}$

বা, $\sin\theta = \frac{\cos\theta(2-1)}{\sqrt{2}+1}$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta = \cos\theta$

$\therefore \sqrt{2}\sin\theta = \cos\theta - \sin\theta$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $P(\sin\theta - \cos\theta) = \cos\theta$

বা, $(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta) = \cos\theta$

$\therefore \sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-১৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭১

প্রশ্ন ▶ ৯০ $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ হলে– *[ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. $\theta = \frac{5\pi}{6}$ হলে $\cos\theta - \sin\theta$ এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $\text{cosec}\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$. ৪

গ. যদি $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ হয় তাহলে সমীকরণটিকে সমাধান কর। যেখানে $0° < \theta < 180°$। ৪

৯০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$$\cos\theta - \sin\theta = \cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{6} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= -\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}$$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $\cot\theta - 1 = \sqrt{2}$ [উভয়পক্ষকে $\sin\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cot\theta = 1 + \sqrt{2}$ ... ... (i)

বা, $\cot^2\theta = (1+\sqrt{2})^2$

বা, $\text{cosec}^2\theta - 1 = 1 + 2 + 2\sqrt{2}$

$\therefore \text{cosec}^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ ... ... (ii)

আবার, (i) নং হতে,

$\cot\theta = 1 + \sqrt{2}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

বা, $\tan\theta = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$

বা, $\tan\theta = \frac{1-\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2}$

বা, $\tan\theta = \sqrt{2} - 1$

বা, $\tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{2}$ [বর্গ করে]

বা, $\sec^2\theta - 1 = 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore \sec^2\theta = 4 - 2\sqrt{2}$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) নং গুণ করি,

$\text{cosec}^2\theta.\sec^2\theta = (4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})$

বা, $\text{cosec}^2\theta.\text{sce}^2\theta = 16 - (2\sqrt{2})^2$

বা, $\text{cosec}^2\theta.\sec^2\theta = 8$

বা, $\text{cosec}^2\theta = 4 \times 2 \times \cos^2\theta$

$\therefore \text{cosec}\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ৭৩(গ) নং সমাধানের অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৪৫

প্রশ্ন ▶ ৯১ মনে কর, $\tan\theta + \sec\theta = \frac{x}{y}$ এবং $A = 3\theta$, $B = 5\theta$ ও $C = 7\theta$

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম]

ক. $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $(x^2+y^2)\sin\theta = x^2 - y^2$ ৪

গ. $\theta = \frac{\pi}{8}$ হলে দেখাও যে, $\cos^2\theta + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2$ ৪

৯১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

$\therefore \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$ **(প্রমাণিত)**

খ 'ক' থেকে পাই, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{x^2}{y^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\therefore (x^2+y^2)\sin\theta = x^2 - y^2$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $A = 3\theta$, $B = 5\theta$, $C = 7\theta$ এবং $\theta = \frac{\pi}{8}$

এখন, $\cos^2\theta + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \cos^2\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 5\theta + \cos^2 7\theta$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$ $[\because \theta = \frac{\pi}{8}]$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}$

$= \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 1 + 1 = 2$

$\therefore \cos^2\theta + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৯২ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

[চট্টগ্রাম সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. $30°32'33''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}{\tan(-\theta)+\sec(-\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\tan\theta + \sec\theta = P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৯২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $30°32'33'' = 30°\left(32\frac{33}{60}\right)' = 30°\left(\frac{651}{20}\right)' = \left(30\times\frac{651}{20\times60}\right)^\circ$

$= \frac{12217}{400} = \frac{12217}{400}\times\frac{\pi^c}{180}\left(\because 1° = \frac{\pi^c}{180}\right)$

$= 0.5331^c$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore AB = 1, BC = \sqrt{3}$

$\therefore AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{2}$ [যেহেতু $\sin\theta$ ঋণাত্মক সেহেতু $\cos\theta$ ও $\sec\theta$ উভয়েই ঋণাত্মক]

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}{\tan(-\theta)+\sec(-\theta)} = \frac{-\sin\theta+\cos\theta}{-\tan\theta+\sec\theta} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1-2}{\sqrt{3}}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ **(Ans.)**

গ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\sec\theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$

$\therefore P = \tan\theta + \sec\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1-2}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

সুতরাং $\tan\theta + \sec\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ বা, $\sec\theta = -\left(\tan\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

বা, $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 2.\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta + \frac{1}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta = \tan^2\theta + \frac{2\tan\theta}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$

বা, $1 - \frac{1}{3} = \frac{2\tan\theta}{\sqrt{3}}$ বা, $\frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

কিন্তু $\theta = \frac{\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ θ $\frac{\pi}{6}$ এর জন্য (i) সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\theta = \frac{7\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯৩ নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর:

(i) $A = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

(ii) $B = \sec\theta + \tan\theta$ *[চট্টগ্রাম সিটি কর্পোরেশন আন্তঃ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*

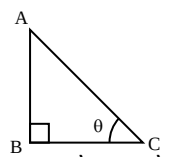
ক. θ সূক্ষ্মকোণ হলে $\sin\theta + \cos\theta > 1$ সম্পর্কটি স্থাপন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $A = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ ৪

গ. $B = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৯৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC-এ, θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle ABC = 90°$



আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore AB + BC > AC$

বা, $\frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} > 1$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta > 1$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে,

$A = \frac{\sin\theta + 1 - \cos\theta}{\sin\theta - 1 + \cos\theta}$

$= \frac{(\sin\theta+1)^2 - \cos^2\theta}{(\sin\theta - 1 + \cos\theta)(\sin\theta + 1 + \cos\theta)}$

[লব ও হরকে $(\sin\theta + 1 + \cos\theta)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sin\theta+1)^2 - (1-\sin^2\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2 - 1^2} = \frac{(1+\sin\theta)\{1+\sin\theta-1+\sin\theta\}}{(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta.\cos\theta-1)}$

$= \frac{(1+\sin\theta).(2\sin\theta)}{2\sin\theta.\cos\theta}$

$= \frac{(1+\sin\theta)\times(1-\sin\theta)}{\cos\theta\times(1-\sin\theta)}$ [লব ও হরকে $(1-\sin\theta)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta.(1-\sin\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$

$\therefore A = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৫

প্রশ্ন ▶ ৯৪ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক।

[আগ্রাবাদ সরকারী কলোনী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. $\cot(-\theta)$ এর মান নির্ণয় কর এবং θ কোণটি কোন চতুর্ভাগে আছে তা উল্লেখ কর। ২

খ. $\frac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\tan\theta + \sec\theta = P$ হলে P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর; যখন $0 \le \theta \le 2\pi$ ৪

৯৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক।

$\therefore \cot(-\theta) = -\cot\theta = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$ **(Ans.)**

যেহেতু $\tan\theta$ ধনাত্মক এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক সুতরাং θ কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে আছে।

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

যেহেতু θ কোণের অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে

$\therefore \tan\theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{y}{x}$

$\therefore x = -\sqrt{3}, y = -1$

$\therefore r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$

$= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$ [$\because \sec(-\theta) = \sec\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta$]

$= \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-2+1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ৪৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩৮

প্রশ্ন ▶ ৯৫ $a = \sin\theta + \cos\theta$, $b = \sin x - 2\sin x\cos x$

[চট্টগ্রাম সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. $b = 0$ হলে $x = 0^c$ দ্বারা সমীকরণটি সত্যতা যাচাই কর। ২
খ. $a = 1$ হলে $(\sin\theta - \cos\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
গ. $b = 0$; $\pi \le x \le 2\pi$ সমীকরণের সমাধান কর। ৪

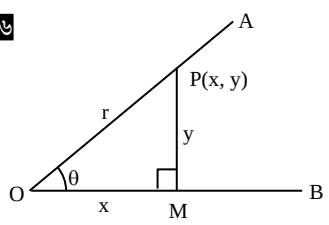
৯৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,
$b = \sin x - 2\sin x\cos x$
$\therefore \sin x - 2\sin x\cos x = 0$ [□ $b = 0$]
$x = 0^c$ হলে,
বামপক্ষ $= \sin x - 2\sin x\cos x$
$= \sin 0^c - 2\sin 0^c\cos 0^c$
$= 0 - 2.0.1 = 0 =$ ডানপক্ষ
$\therefore x = 0^c$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

খ দেওয়া আছে, $a = \sin\theta + \cos\theta$
শর্তমতে, $a = 1$
বা, $\sin\theta + \cos\theta = 1$
বা, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1^2$
বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1$
বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$
বা, $2\sin\theta\cos\theta = 0$
বা, $4\sin\theta\cos\theta = 0$
বা, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 0$
বা, $1^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2$
বা, $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1$
$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $b = \sin x - 2\sin x\cos x$
শর্তমতে, $b = 0$
বা, $\sin x - 2\sin x\cos x = 0$
বা, $2\sin x\cos x = \sin x$
বা, $(2\sin x\cos x)^2 = (\sin x)^2$ [বর্গ করে]
বা, $4\sin^2 x\cos^2 x = \sin^2 x$
বা, $4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$
বা, $4\sin^2 x - 4\sin^4 x - \sin^2 x = 0$
বা, $-4\sin^4 x + 3\sin^2 x = 0$
বা, $-\sin^2 x(4\sin^2 x - 3) = 0$
বা, $\sin^2 x(4\sin^2 x - 3) = 0$
হয়, $\sin^2 x = 0$
বা, $\sin x = 0$
বা, $\sin x = \sin 0, \sin\pi, \sin 2\pi$
$\therefore x = 0, \pi, 2\pi$
অথবা, $4\sin^2 x - 3 = 0$ বা, $4\sin^2 x = 3$
বা, $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ বা, $\sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ বা, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
বা, $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}, \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
$\therefore \sin x = \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{5\pi}{3}, \sin\frac{4\pi}{3}$
$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
কিন্তু, $\frac{4\pi}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণ সিদ্ধ হয় না।
$\therefore \pi \le x \le 2\pi$ সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মান সমূহ: $\pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯৬



[ব-ু-বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. চিত্রে $x = y$ হলে, প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{2}x$। ২
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ৪
গ. $\frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। $\left[\text{hLb } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$ ৪

৯৬ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন-১২ এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৫

প্রশ্ন ▶ ৯৭ নিচে দুইটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ দেয়া আছে।
(i) $5\,\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\,\text{cosec}\theta = 2$
(ii) $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$ *[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]*

ক. $\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. ii নং সমীকরণ হতে θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ৪
গ. i নং সমীকরণ হতে θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 < \theta < \pi$ ৪

৯৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = -\sin\frac{25\pi}{6}$ [$\because \sin(-\theta) = -\sin\theta$]
$= -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(8.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
[n = 8 জোড় সংখ্যা, তাই sin অপরিবর্তিত থাকবে এবং $\left(8.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ প্রথম চতুর্ভাগে থাকে বলে sin এর চিহ্ন হবে ধনাত্মক।
$\therefore \sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৫

গ দেওয়া আছে, $5\,\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\,\text{cosec}\theta - 2 = 0$
বা, $\frac{5}{\sin^2\theta} - \frac{7\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2 = 0$
বা, $5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta = 0$
বা, $5 - 7\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = 0$
বা, $5 - 7\cos\theta - 2 + 2\cos^2\theta = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 6\cos\theta - \cos\theta + 3 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 3) - 1(\cos\theta - 3) = 0$
বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$
হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 3 = 0$
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \cos\theta = 3$; যা গ্রহণযোগ্য নয়।
কারণ $-1 \le \cos\theta \le 1$
বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$
$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$, যা প্রদত্ত সীমা $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যে অবস্থিত
$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মান $\frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯৮ একটি বাস সিলেট থেকে ঢাকা যাওয়ার সময় বাসটির চাকা প্রতি মিনিটে 720 বার ঘুরে। চাকার ব্যাসার্ধ 0.25 মিটার।
[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

ক. চাকার পরিধি নির্ণয় কর। ২
খ. গাড়িটির ঘণ্টায় গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪
গ. সিলেট থেকে ঢাকার দূরত্ব পৃথিবীর কেন্দ্রে 2° কোণ উৎপন্ন করলে সিলেট থেকে ঢাকায় পৌঁছাতে উক্ত বাসের কতক্ষণ সময় লাগবে? উলেণ্টখ্য যে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 km. ৪

৯৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৭ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৩

প্রশ্ন ▶ ৯৯ নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং প্রশ্নসমূহের উত্তর দাও :
(i) $\tan\theta = \frac{a}{b}$ (ii) $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta} = Q$ এবং
(ii) $\sin A - \cos A = P$
[সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট]

ক. (i) নং হতে $\sec^2\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. (ii) নং ব্যবহার করে Q এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. P = 1 তাহলে প্রমাণ কর যে, sinA – cosA = ± 1. ৪

৯৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{a}{b}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\sec^2\theta - 1 = \frac{a^2}{b^2}$ [□ $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$]

বা, $\sec^2\theta = \frac{a^2}{b^2} + 1$

$\therefore \sec^2\theta = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$

বা, $\frac{Q+1}{Q-1} = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta + a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta - a\sin\theta + b\cos\theta}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$= \frac{2a\sin\theta}{2b\cos\theta} = \frac{a}{b}\tan\theta$

$= \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$ [(i) নং থেকে]

$= \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{Q+1+Q-1}{Q+1-Q+1} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2Q}{2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

$\therefore Q = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২১

প্রশ্ন ▶ ১০০ $f(\theta) = \sec\theta + \tan\theta$

$g(\theta) = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$ *[সরকারি জুবিলী উচ্চ বিদ্যালয়, সুনামগঞ্জ]*

ক. $f(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, $f(-\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $g(\theta) = f(\theta)$ ৪

গ. যদি $f(\theta) = \sqrt{3}$ হয় এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয় তবে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১০০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$f(\theta) = \sec\theta + \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore f(-\theta) = \sec(-\theta) + \tan(-\theta) = \sec\theta - \tan\theta$

আমরা জানি,

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta}$

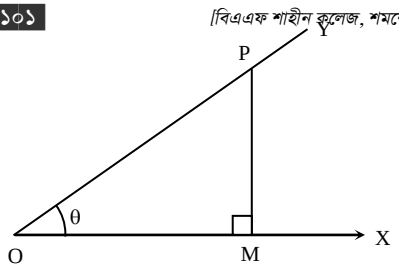
বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore f(-\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

গ সৃজনশীল ২৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৩০

প্রশ্ন ▶ ১০১ *[বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার]*



চিত্রে OM = 4 একক এবং PM = 3 একক।

ক. যদি $\theta = \frac{\pi^c}{12}$ হয়, তবে $\tan\theta\tan5\theta\tan7\theta\tan11\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1+\sin\theta)\sec\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

গ. চিত্রে PM ⊥ OM এবং $\frac{OP^2}{OM^2} + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$ কে θ কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করে গঠিত সমীকরণ সমাধান কর। যেখানে $\frac{3\pi^c}{2} \le \theta \le \frac{5\pi^c}{2}$ ৪

১০১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi^c}{12}$

$\therefore \tan\theta\tan5\theta\tan7\theta\tan11\theta$

$= \tan\frac{\pi^c}{12}\tan\frac{5\pi^c}{12}\tan\frac{7\pi^c}{12}\tan\frac{11\pi^c}{12}$

$= \tan\frac{\pi^c}{12}\tan\frac{5\pi^c}{12}\tan\left(\pi^c - \frac{5\pi^c}{12}\right)\tan\left(\pi^c - \frac{\pi^c}{12}\right)$

$= \tan\frac{\pi^c}{12}\tan\frac{5\pi^c}{12}\left(-\tan\frac{5\pi^c}{12}\right)\left(-\tan\frac{\pi^c}{12}\right)$

$= \tan^2\frac{\pi^c}{12}\cdot\tan^2\frac{5\pi^c}{12}$

$= \tan^2\frac{\pi^c}{12}\cdot\left\{\tan\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{\pi^c}{12}\right)\right\}^2$

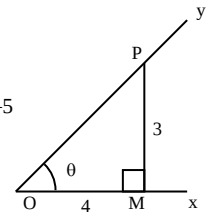
$= \tan^2\frac{\pi^c}{12}\cdot\cot^2\frac{\pi^c}{12}$

$= 1 \quad \left[\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}\right]$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 1

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$ [চিত্র থেকে]



ΔPOM সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$OP^2 = OM^2 + PM^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\therefore OP = \pm 5$

যেহেতু, $\sin\theta$ ঋণাত্মক হবে সেহেতু, OP = –5

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore \sec\theta = -\frac{5}{4}$

এখন, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1+\sin\theta)\sec\theta} = \frac{-\frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)}$

$= \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{2}{5}\left(-\frac{5}{4}\right)}$

$= \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{1}{2}} = \frac{14}{5}$

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1+\sin\theta)\sec\theta} = \frac{14}{5}$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্রে PM ⊥ OM

$\therefore$ POM একটি সমকোণী ত্রিভুজ। OP উহার অতিভুজ।

দেওয়া আছে, $\frac{OP^2}{OM^2} + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$ [চিত্র থেকে]

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$ [$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$]

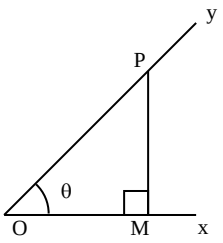
বা, $2\tan^2\theta = \frac{5}{3} - 1$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5-3}{3}$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$



$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \tan\frac{\pi^c}{6} = \tan\left(2\pi^c + \frac{\pi^c}{6}\right)$

$= \tan\frac{13\pi^c}{6}$

$\therefore \theta = \frac{13\pi^c}{6}$

আবার, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi^c}{6}$

$= \tan\left(2\pi^c - \frac{\pi^c}{6}\right)$

$= \tan\frac{11\pi^c}{6}$

$\therefore \theta = \frac{11\pi^c}{6}$

দেখা যাচ্ছে যে, θ এর উভয় মানই $\frac{3\pi^c}{2} \le \theta \le \frac{5\pi^c}{2}$ শর্ত সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় θ এর মান $\frac{11\pi^c}{6}$ ও $\frac{13\pi^c}{6}$

প্রশ্ন ▶ ১০২ $\tan\theta + \sec\theta = \frac{a}{b}$ এবং $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = p$.

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর]

ক. $\left(\frac{\pi}{13}\right)^c$ কোণকে ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \pm\frac{2ab}{a^2 - b^2}$. ৪

গ. $p = \cos\alpha$ হলে α এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0 < \alpha < 2\pi$. ৪

১০২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(\frac{\pi}{13}\right)^c = \frac{\pi}{13} \times \frac{180°}{\pi}$ [□ $1^c = \frac{180°}{\pi}$]

$= 13.84615°$

$= 13° (0.84615 \times 60)'$ [□ $1° = 60'$]

$= 13°50.769'$

$= 13°50'(0.769 \times 60)''$ [□ $1' = 60''$]

$= 13°50'46.14''$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে।]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \cot^2\theta = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}$

বা, $\cot^2\theta = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} - 1$

বা, $\cot^2\theta = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}$

বা, $\cot^2\theta = \frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2}$

বা, $\cot\theta = \pm\sqrt{\frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2}}$

$\therefore \cot\theta = \pm\frac{2ab}{a^2 - b^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = p$

বা, $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos\alpha$

বা, $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos\alpha$

বা, $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$

বা, $2\cos\alpha(\cos\alpha + 1) - 1(\cos\alpha + 1) = 0$

$\therefore (\cos\alpha + 1)(2\cos\alpha - 1) = 0$

হয়, $\cos\alpha + 1 = 0$ অথবা, $2\cos\alpha - 1 = 0$

বা, $\cos\alpha = -1 = \cos\pi$ বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

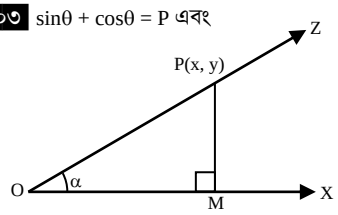
$\therefore \alpha = \pi$ বা, $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\alpha = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶ ১০৩ $\sin\theta + \cos\theta = P$ এবং *[বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল]*



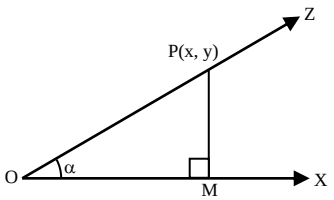
ক. $\cot\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\sqrt{x^2 + y^2} + x = \sqrt{3}y$ হলে, α এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১০৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রানুসারে, OM = x এবং PM = y.

ΔOPM সমকোণী এ,

$\cot\alpha = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৩

গ দেওয়া আছে, $\sin\theta + \cos\theta = P$

বা, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = P^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = P^2$

বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta = P^2$

বা, $2\sin\theta\cos\theta = P^2 - 1$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{P^2-1}{2}$

এখন, $\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1^2 - 2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$= 1 - 2\left(\frac{P^2-1}{2}\right)^2$

$= 1 - 2.\frac{P^4 - 2P^2 + 1}{4}$

$= 1 - \frac{P^4 - 2P^2 + 1}{2}$

$= \frac{2 - P^4 + 2P^2 - 1}{2}$

$= \frac{1 + 2P^2 - P^4}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৪ $\sec A = \frac{5}{4}$, $\text{cosec}\, B = \frac{13}{12}$ এবং $\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

[বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল]

ক. একটি কোণের মান ষাটমূলক পদ্ধতিতে D° এবং বৃত্তীয় পদ্ধতিতে R^c হলে দেখাও যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ ২

খ. $\frac{\cot A - \cot B}{1 - \cot A\cot B}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. α এর মান নির্ণয় কর যেখানে $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ৪

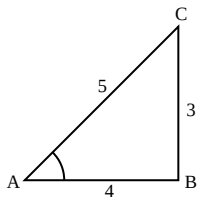
১০৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে D° ও R^c হলে, $D^\circ = \left(D \times \frac{\pi}{180}\right)^c = R^c$

বা, $D \times \frac{\pi}{180} = R$

$\therefore \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ **(দেখানো হলো)**

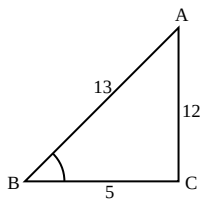
খ দেওয়া আছে, $\sec A = \frac{5}{4}$



$\therefore \cot A = \frac{4}{3}$ এবং $\text{cosec}\, B = \frac{13}{12}$

$\therefore \cot B = \frac{5}{12}$

$\therefore \frac{\cot A - \cot B}{1 - \cot A\cot B} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}} = \frac{\frac{16-5}{12}}{1 - \frac{5}{9}}$



$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{9-5}{9}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{4}{9}} = \frac{11}{12} \times \frac{9}{4} = \frac{33}{16}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

বা, $\tan\alpha = -\tan\frac{\pi}{6}$

বা, $\tan\alpha = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right), \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\alpha = \tan\frac{5\pi}{6}, \tan\frac{11\pi}{6}$

$\therefore \alpha = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ $\left[\because \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi\right]$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৫ $f(x) = \sin x$ *[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]*

ক. 15° এর সম্পূরক কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. যদি $af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = c$ হয় তবে দেখাও যে, $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ৪

গ. θ এর মান নির্ণয় কর যখন $1 + f(\theta) = \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ৪

১০৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 15° কোণের সম্পূরক কোণ = 180° − 15° = 165°

আমরা জানি, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore$ $165^\circ = \frac{\pi}{180} \times 165$ রেডিয়ান

$= 2.8798$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = \sin x$ ... ... (i)

এবং $af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = c$ ... ... (ii)

এখন, $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

এবং $f(\theta) = \sin\theta$

(ii) নং থেকে পাই, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$

বা, $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta.\sin\theta = c^2$

বা, $a^2(1 - \sin^2\theta) + b^2(1 - \cos^2\theta) - 2ab\sin\theta.\cos\theta = c^2$

বা, $a^2 - a^2\sin^2\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta - 2ab\sin\theta.\cos\theta = c^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta.\cos\theta$

$= (a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2 + 2a\sin\theta.b\cos\theta$

$= (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

বা, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

$\therefore$ $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(দেখানো হলো)**

গ 'খ' থেকে পাই,

$f(\theta) = \sin\theta$ এবং $f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

এখন, $1 + f(\theta) = \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

বা, $1 + \sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

বা, $(1 + \sin\theta)^2 = (\sqrt{3}\cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta = 3\cos^2\theta$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta = 3(1 - \sin^2\theta)$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - 3 + 3\sin^2\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta + 2\sin\theta - \sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta + 1) - 1(\sin\theta + 1) = 0$

বা, $(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore$ $\sin\theta + 1 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

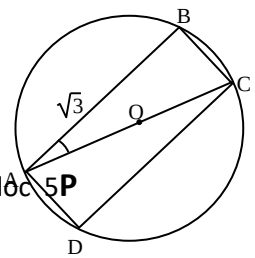
বা, $\sin\theta = -1$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{3\pi}{2}$ বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ $\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৬ চিত্রটি লক্ষ্য কর:



$\angle BAC = \theta$, BC = 1 *[পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী]*

ক. চিত্রে ABCD একটি বৃত্ত এবং O বৃত্তের কেন্দ্র হলে ABCD বৃত্তের পরিধি নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0$ ৪

গ. $\operatorname{cosec} 2\theta + \cot 2\theta = P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

১০৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC এর $AB = \sqrt{3}$, BC = 1

$\therefore \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$

$\therefore \quad AC = 2$

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{AC}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ ABCD বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

$= 2 \times 3.1416 \times 1$

$= 6.2832$ (প্রায়) **(Ans.)**

খ ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

$\therefore \quad \angle A + \angle C = 180°$ এবং $\angle B + \angle D = 180°$

বামপক্ষ $= \cot A + \cot B + \cot C + \cot D$

$= \cot A + \cot B + \cot(180° - A) + \cot(180° - B)$

$= \cot A + \cot B - \cot A - \cot B$

$= 0$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad \cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ ΔABC এ $\tan\angle BAC = \frac{BC}{AB}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\therefore \quad \theta = 30°$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} 2\theta + \cot 2\theta = P$

বা, $\operatorname{cosec}(2 \times 30°) + \cot(2 \times 30°) = P$

বা, $\operatorname{cosec} 60° + \cot 60° = P$

বা, $\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = P$

বা, $\frac{2+1}{\sqrt{3}} = P$

বা, $P = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad P = \sqrt{3}$ **(Ans.)**

এখন, $\operatorname{cosec} 2\theta + \cot 2\theta = \sqrt{3}$

বা, $\cot 2\theta = \sqrt{3} - \operatorname{cosec} 2\theta$

বা, $\cot^2 2\theta = (\sqrt{3} - \operatorname{cosec} 2\theta)^2$

বা, $\operatorname{cosec}^2 2\theta - 1 = 3 + \operatorname{cosec}^2 2\theta - 2\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\theta$

বা, $\operatorname{cosec}^2 2\theta - \operatorname{cosec}^2 2\theta + 2\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\theta = 3 + 1$

বা, $2\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\theta = 4$

বা, $\operatorname{cosec} 2\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\operatorname{cosec} 2\theta = \operatorname{cosec} 60°$

বা, $2\theta = 60°$

$\therefore \quad \theta = 30°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৭ $A = \sec\alpha + \tan\alpha$

$B = \tan\theta + \cot\theta$ *[বনফুল আদিবাসী গ্রীনহার্ট কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\sin\beta = \frac{5}{13}$ এবং β ঋণাত্মক হলে $\cos\beta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{A^2+1}{A^2-1}$ ৪

গ. $\sqrt{3}B - 4 = 0$ হলে $0 < \theta < 2\pi$ শর্তে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

১০৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin\beta = \frac{5}{13}$

আমরা জানি, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

বা, $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \quad \cos\beta = \frac{12}{13}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \sec\alpha + \tan\alpha$

বা, $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = A$

বা, $\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} = A$

বা, $\left(\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = A^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = A^2$

বা, $\frac{(1 + \sin\alpha)^2}{1 - \sin^2\alpha} = A^2$

বা, $\frac{(1 + \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)}{(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)} = A^2$

বা, $\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = A^2$

বা, $\frac{1 + \sin\alpha + 1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha - 1 + \sin\alpha} = \frac{A^2+1}{A^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\alpha} = \frac{A^2+1}{A^2-1}$

বা, $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{A^2+1}{A^2-1}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{A^2+1}{A^2-1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $B = \tan\theta + \cot\theta$

এবং $\sqrt{3}B - 4 = 0$

$\therefore \quad \sqrt{3}(\tan\theta + \cot\theta) - 4 = 0$

বা, $\sqrt{3}\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right) = 4$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

$\therefore \quad \tan\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

আবার, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

সুতরাং, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৮ (i) $\tan\theta$ একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।

(ii) $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

[হাসান আলী সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর]

ক. $\cot 10x = \tan 5x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতটির মান $\frac{5}{12}$ হলে $\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং হতে θ এর মান নির্ণয় কর যখন $0 < \theta < 2\pi$ ৪

১০৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\cot 10x = \tan 5x$

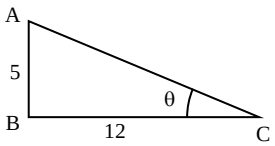
বা, $\tan(90° - 10x) = \tan 5x$

বা, $90° - 10x = 5x$

বা, $15x = 90°$

$\therefore x = 6°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,



$\tan\theta = \frac{5}{12}$

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$

$\therefore AB = 5, BC = 12$

$\therefore AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore \sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{12}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)} = \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{5}{13} + \frac{12}{13}}{\frac{13}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{-5+12}{13}}{\frac{13-5}{12}}$

$= \frac{7}{13} \times \frac{12}{8} = \frac{21}{26}$ **(Ans.)**

গ $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = \theta$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore (\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -1 = \cos\pi$

$\therefore \theta = \pi$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$