অধ্যায়-৯: সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

পরীক্ষার্থী বন্ধুরা, এ অধ্যায়ে বোর্ড পরীক্ষা, ক্যাডেট কলেজ, শীর্ষস্থানীয় স্কুলসমূহের নির্বাচনি পরীক্ষা এবং বাছাইকৃত এক্সক্লুসিভ মডেল টেস্টের প্রশ্নগুলোর পূর্ণাঙ্গ সমাধান দেওয়া হয়েছে। এগুলো অনুশীলন করলে তোমরা এ অধ্যায় থেকে যেকোনো সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান সহজেই করতে পারবে।

প্রশ্ন ▶১ $P = x^{a-b}, Q = x^{b-c}, R = x^{c-a}$ [ঢা. বো. ১৭]

ক. $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$ হলে, দেখাও যে, $b + c = 2a$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+Q+P^{-1}} + \frac{1}{1+R+Q^{-1}} + \frac{1}{1+P+R^{-1}} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(c+a)\log(PQ) + (a+b)\log(QR) + (b+c)\log(PR) = 0$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = x^{a-b},\ Q = x^{b-c}, R = x^{c-a}$

প্রশ্নমতে, $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$

বা, $\log\left(\frac{x^{a-b}}{x^{c-a}}\right) = 0$

বা, $\log x^{a-b-c+a} = \log 1$ [$\because \log 1 = 0$]

বা, $x^{2a-b-c} = 1$

বা, $x^{2a-b-c} = x^0$ [$\because x^0 = 1$]

বা, $2a - b - c = 0$

$\therefore$ $b + c = 2a$ **(দেখানো হলো)**

খ বামপক্ষ $= \frac{1}{1+Q+P^{-1}} + \frac{1}{1+R+Q^{-1}} + \frac{1}{1+P+R^{-1}}$

$= \frac{1}{1+x^{b-c}+(x^{a-b})^{-1}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+(x^{b-c})^{-1}} + \frac{1}{1+x^{a-b}+(x^{c-a})^{-1}}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{x^{-b}}{x^{-b}(1+x^{b-c}+x^{b-a})} + \frac{x^{-c}}{x^{-c}(1+x^{c-a}+x^{c-b})} + \frac{x^{-a}}{x^{-a}(1+x^{a-b}+x^{a-c})}$

$= \frac{x^{-b}}{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}} + \frac{x^{-c}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}} + \frac{x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$

$= \frac{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1+Q+P^{-1}} + \frac{1}{1+R+Q^{-1}} + \frac{1}{1+P+R^{-1}} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ বামপক্ষ $= (c+a)\log(PQ) + (a+b)\log(QR) + (b+c)\log(PR)$

$= (c+a)\log(x^{a-b}.x^{b-c}) + (a+b)\log(x^{b-c}.x^{c-a}) + (b+c)\log(x^{a-b}.x^{c-a})$

$= (c+a)\log(x^{a-b+b-c}) + (a+b)\log(x^{b-c+c-a}) + (b+c)\log(x^{a-b+c-a})$

$= \log x^{(a-c)(a+c)} + \log x^{(b-a)(b+a)} + \log x^{(c-b)(c+b)}$

$= \log(x^{a^2-c^2}.x^{b^2-a^2}.x^{c^2-b^2})$

$= \log(x^{a^2-c^2+b^2-a^2+c^2-b^2})$

$= \log x^0$

$= \log 1$ [$\because x^0 = 1$]

$= 0$ [$\because \log 1 = 0$]

= ডানপক্ষ

$\therefore$ $(c+a)\log(PQ) + (a+b)\log(QR) + (b+c)\log(PR) = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২ $a = \log_p(qr), b = \log_q(rp), c = \log_r(pq)$ এবং $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$ [চ. বো. ১৭]

ক. $c = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{pq}$. ২

খ. $F(x)$ কে $x - u$ এবং $x - v$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে, $u \neq v$, তবে দেখাও যে, $u^2 + v^2 + uv + 6u + 6v + 11 = 0$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1.$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $c = \log_r(pq)$

প্রশ্নমতে, $c = 2$

বা, $\log_r(pq) = 2$

বা, $r^2 = pq$ [$\because \log_a x = y$ হলে, $a^y = x$]

$\therefore r = \sqrt{pq}$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

এখন, $F(x)$ কে $(x - u)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$F(u) = u^3 + 6u^2 + 11u + 6$

এবং $(x - v)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$F(v) = v^3 + 6v^2 + 11v + 6$

প্রশ্নমতে, $F(u) = F(v)$

বা, $u^3 + 6u^2 + 11u + 6 = v^3 + 6v^2 + 11v + 6$

বা, $u^3 - v^3 + 6u^2 - 6v^2 + 11u - 11v = 0$

বা, $(u-v)(u^2+uv+v^2) + 6(u+v)(u-v) + 11(u-v) = 0$

বা, $(u-v)(u^2+uv+v^2+6u+6v+11) = 0$

$\therefore u^2 + v^2 + uv + 6u + 6v + 11 = 0$ [$\because u \neq v$ তাই $u - v \neq 0$]

(দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$a = \log_p(qr), b = \log_q(rp)$ এবং $c = \log_r(pq)$

এখন, $a + 1 = \log_p(qr) + 1 = \log_p(qr) + \log_p p = \log_p(pqr)$

একইভাবে,

$b + 1 = \log_q(pqr)$

$c + 1 = \log_r(pqr)$

বামপক্ষ $= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$

$= \frac{1}{\log_p(pqr)} + \frac{1}{\log_q(pqr)} + \frac{1}{\log_r(pqr)}$

$= \log_{(pqr)}p + \log_{(pqr)}q + \log_{(pqr)}r = \log_{(pqr)}(pqr) = 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩ $A = p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2$ এবং $f(x) = \ln(1+x); x \geq 0.$ [সি. বো. ১৭]

ক. $(25)^x = (125)^y$ হলে $x : y$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A = 0$ হলে দেখাও যে, $3p^3 + 9p = 8$ ৪

গ. $f(x)$ এর বর্ণনাসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(25)^x = (125)^y$

বা, $(5^2)^x = (5^3)^y$ বা, $5^{2x} = 5^{3y}$ বা, $2x = 3y$ বা, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $x : y = 3 : 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2$

প্রশ্নমতে, $A = 0$

বা, $p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2 = 0$ বা, $p^2 = 3^{\frac{2}{3}} - 2 + 3^{\frac{-2}{3}}$

বা, $p^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}} + \left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^2$

বা, $p^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)^2$

বা, $p = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}$

বা, $p^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)$

বা, $p^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}.p$ $\left[\because 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}} = p\right]$

বা, $p^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3.3^0.p$

বা, $p^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3p$ [∵ $3^0 = 1$]

বা, $p^3 = \frac{9 - 1 - 9p}{3}$

বা, $3p^3 = 8 - 9p$

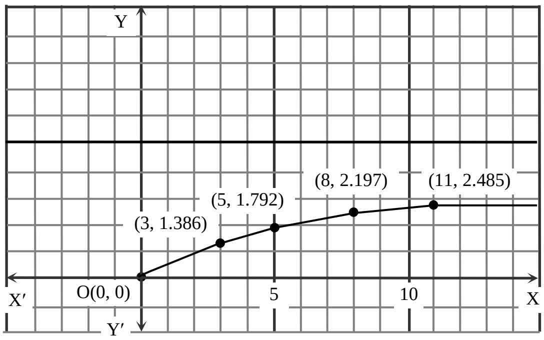
∴ $3p^3 + 9p = 8$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, $y = f(x) = ln(1 + x); x \ge 0$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নিম্নে ছকে দেখানো হলো:

x	0	3	5	8	11
y	0	1.386	1.792	2.197	2.485

এখন, ছক কাগজে x-অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরে ছকে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করি। তাহলে প্রাপ্ত বক্ররেখাই $y = f(x) = ln(1 + x)$ এর লেখ।



প্রশ্ন ▶ ৪ $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$ *[সি. বো. ১৬]*

ক. $(16)^{2x} = 4^{x+1}$ হলে, x = কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(q - r)\log_k a + (r - p)\log_k b + (p - q)\log_k c = 0.$ ৪

গ. $f(x) = \ln\frac{4 + x}{4 - x}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$(16)^{2x} = 4^{x+1}$ বা, $(4^2)^{2x} = 4^{x+1}$

বা, $4^{4x} = 4^{x+1}$

বা, $4x = x + 1$ বা, $3x = 1$

∴ $x = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $p + q + r = 0$

বামপক্ষ $= (q - r)\log_k a + (r - p)\log_k b + (p - q)\log_k c$

$= \log_k a^{q-r} + \log_k b^{r-p} + \log_k c^{p-q}$

$= \log_k(xy^{p-1})^{q-r} + \log_k(xy^{q-1})^{r-p} + \log_k(xy^{r-1})^{p-q}$

$= \log_k x^{q-r} + \log_k y^{(p-1)(q-r)} + \log_k x^{r-p} + \log_k y^{(q-1)(r-p)} + \log_k x^{p-q} + \log_k y^{(r-1)(p-q)}$

$= \log_k(x^{q-r}.x^{r-p}.x^{p-q}) + \log_k\{y^{(p-1)(q-r)}.y^{(q-1)(r-p)}.y^{(r-1)(p-q)}\}$

$= \log_k(x^{q-r+r-p+p-q}) + \log_k(y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+pr-qr-p+q})$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0 = \log_k 1 + \log_k 1 = 0$ = ডানপক্ষ

∴ $(q - r)\log_k a + (r - p)\log_k b + (p - q)\log_k c = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ell n\frac{4 + x}{4 - x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়, সেহেতু,

$\frac{4 + x}{4 - x} > 0$ যদি (i) $4 + x > 0$ এবং $4 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $4 + x < 0$ এবং $4 - x < 0$ হয়

শর্ত (i) হতে পাই, $x > -4$ এবং $-x > -4$

∴ $x < 4$

∴ ডোমেন $= \{x : -4 < x\} \cap \{x : x < 4\}$

$= (-4, \infty) \cap (-\infty, 4)$

$= (-4, 4)$

শর্ত (ii) হতে পাই, $x < -4$ এবং $-x < -4$

∴ $x > 4$

∴ ডোমেন $= \{x : x < -4\} \cap \{x : x > 4\} = \varnothing$

∴ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = শর্ত (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-4, 4) \cup \varnothing$

$= (-4, 4)$

রেঞ্জ : $y = f(x) = \ell n\frac{4 + x}{4 - x}$

বা, $e^y = \frac{4 + x}{4 - x}$

বা, $4 + x = 4e^y - xe^y$

বা, $x + xe^y = 4e^y - 4$

বা, $x(1 + e^y) = 4(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{4(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

∴ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_f = (-4, 4)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$

প্রশ্ন ▶ ৫ $a^x = b^y = c^z$, যেখানে $a \neq b \neq c$. *[য. বো. ১৫]*

ক. যদি $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$ হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $ab = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. ৪

গ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$. ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৪

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৪

গ ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$ [k ধ্রুবক]

∴ $a = k^{\frac{1}{x}}$

$b = k^{\frac{1}{y}}$

$c = k^{\frac{1}{z}}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}.k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^0$ [∵ $k^0 = 1$]

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

∴ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

ঘন করে পাই, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{-z}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{3}{xyz} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore \quad \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ *[ব. বো. ১৭]*

ক. $a = c$ হলে, দেখাও যে, $x = z$. ২

খ. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$. ৪

গ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{p^{-y} + p^z + 1} + \frac{1}{p^{-z} + p^x + 1} = 1$. ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

$\therefore \sqrt[x]{a} = \sqrt[z]{c}$ বা, $a^{\frac{1}{x}} = c^{\frac{1}{z}}$

বা, $c^{\frac{1}{x}} = c^{\frac{1}{z}}$ [$\because a = c$]

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{z}$

$\therefore x = z$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ বা, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b}$

$\therefore a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}}$

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ হলে আমরা পাই, $a^2 = b^3$

$\therefore a = b^{\frac{3}{2}}$

আবার, $a^2 = b^3$ বা, $b^3 = a^2$

$\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}} + \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}}$

$= \frac{a^{3/2}}{a} + \frac{b^{2/3}}{b} \quad \left[\because a = b^{3/2}, b = a^{2/3}\right]$

$= a^{\frac{3}{2}-1} + b^{\frac{2}{3}-1}$

$= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

$\therefore \sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b}$ এবং $\sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

বা, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}}$ বা, $b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$

বা, $a = b^{\frac{x}{y}}$ $\therefore b = c^{\frac{y}{z}}$

বা, $a = \left(c^{\frac{y}{z}}\right)^{\frac{x}{y}}$

$\therefore a = c^{\frac{x}{z}}$

প্রশ্নমতে, $abc = 1$

$c^{\frac{x}{z}}. c^{\frac{y}{z}}. c = 1$

বা, $c^{\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1} = c^0$ বা, $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 = 0$

বা, $\frac{x + y + z}{z} = 0$ বা, $x + y + z = 0$

$\therefore y + z = -x$ এবং $x + z = -y$

বামপক্ষ $= \frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{p^{-y} + p^z + 1} + \frac{1}{p^{-z} + p^x + 1}$

$= \frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{\frac{1}{p^y} + p^z + 1} + \frac{1}{\frac{1}{p^z} + p^x + 1}$

$= \frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{p^y}{1 + p^y.p^z + p^y} + \frac{p^z}{1 + p^x.p^z + p^z}$

$= \frac{1}{p^{y+z} + p^y + 1} + \frac{p^y}{1 + p^{y+z} + p^y} + \frac{p^z}{1 + p^{x+z} + p^z}$

$= \frac{1}{p^{y+z} + p^y + 1} + \frac{p^y}{1 + p^{y+z} + p^y} + \frac{p^z}{1 + p^{-y} + p^z}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^z}{1 + \frac{1}{p^y} + p^z}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y.p^z}{p^y + 1 + p^y.p^z}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^{y+z}}{1 + p^y + p^{y+z}}$

$= \frac{1 + p^y + p^{y+z}}{1 + p^y + p^{y+z}} = 1$ = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{p^{-x}+p^y+1} + \frac{1}{p^{-y}+p^z+1} + \frac{1}{p^{-z}+p^x+1} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $P = \frac{x^a}{x^b}, Q = \frac{x^b}{x^c}$ এবং $R = \frac{x^c}{x^a}$ *[ব. বো. ১৫]*

ক. $Q = 1$ হলে, দেখাও যে, $b = c$. ২

খ. দেখাও যে, $P^{a+b-c}. Q^{b+c-a}. R^{c+a-b} = 1$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, ৪

$(a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0$.

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q = \frac{x^b}{x^c} = x^{b-c}$

যদি $Q = 1$ হয়, তবে

$x^{b-c} = 1$

বা, $x^{b-c} = x^0$

বা, $b - c = 0$

$\therefore b = c$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $P^{a+b-c}. Q^{b+c-a}. R^{c+a-b}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b}$

$= (x^{a-b})^{a+b-c}. (x^{b-c})^{b+c-a}. (x^{c-a})^{c+a-b}$

$= x^{a^2+ab-ac-ab-b^2+bc}. x^{b^2+bc-ab-bc-c^2+ac}. x^{c^2+ac-bc-ac-a^2+ab}$

$= x^{a^2-ac-b^2+bc}. x^{b^2-ab-c^2+ac}. x^{c^2-bc-a^2+ab}$

$= x^{a^2-ac-b^2+bc+b^2-ab-c^2+ac+c^2-bc-a^2+ab}$

$= x^0 = 1$

$\therefore P^{a+b-c}.Q^{b+c-a}.R^{c+a-b} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ $(a^2 + ab + b^2) \log_k p + (b^2 + bc + c^2)\log_k Q + (c^2 + ca + a^2)\log_k R$

$= (a^2 + ab + b^2) \log_k \frac{x^a}{x^b} + (b^2 + bc + c^2) \log_k \frac{x^b}{x^c} + (c^2 + ca + a^2) \log_k \frac{x^c}{x^a}$

$= (a^2 + ab + b^2) \log_k x^{a-b} + (b^2 + bc + c^2) \log_k x^{b-c} + (c^2 + ca + a^2) \log_k x^{c-a}$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \log_k x + (b^2 + bc + c^2)(b - c) \log_k x + (c^2 + ca + a^2)(c - a)\log_k x$

$= (a^3 - b^3) \log_k x + (b^3 - c^3) \log_k x + (c^3 - a^3) \log_k x$

$= (a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3) \log_k x$

$= 0.\log_k x$

$= 0$

$\therefore (a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q$
$+ (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৮ (i) $a^{3-x}.b^{7x} = a^{7+x}.b^{5x}$ (ii) $a^2 - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$.

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. $a^2 + b^2 = 11ab$ হলে দেখাও যে, $2 \log_k \frac{a-b}{3} = \log_k ab$. ২

খ. (i) হতে দেখাও যে, $x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \log_k a$ ৪

গ. (ii) হতে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$ ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 11ab$

বা, $a^2 + b^2 - 2ab = 11ab - 2ab$ [উভয়পক্ষে 2ab বিয়োগ করে]

বা, $(a - b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a-b)^2}{9} = ab$ [9 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log_k\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = \log_k ab$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

$\therefore$ $2 \log_k \frac{a-b}{3} = \log_k ab$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $a^{3-x}.b^{7x} = a^{7+x}.b^{5x}$

বা, $\frac{b^{7x}}{b^{5x}} = \frac{a^{7+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{7x-5x} = a^{7+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{4+2x}$

বা, $b^{2x} = a^4.a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^4$

বা, $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^4$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $2x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 4 \log_k a$

$\therefore$ $x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \log_k a$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $a^2 - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} + 2$

বা, $a^2 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + 2.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^2 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\because (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$]

বা, $a^3 = 2^1 + 2^{-1} + 3 . 2^0 . a$

$\left[\because 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^0 \text{ এবং } 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$

বা, $a^3 = \frac{4 + 1 + 6a}{2}$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

$\therefore$ $2a^3 - 6a = 5$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৯ $f(z) = 2 \log z - \log(3z - 2)$ এবং $g(z) = \frac{2z}{z-1}$

[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ, রাজশাহী]

ক. সরল কর : $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$ ২

খ. $f(x) = \log 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $x = 3 \pm \sqrt{5}$. ৪

গ. $\sqrt{g(x)} + \frac{2}{\sqrt{g(x)}} = 3$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \log_{\sqrt{c}} a$

$= \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{b})^2 \times \log_{\sqrt{b}} (\sqrt{c})^2 \times \log_{\sqrt{c}} (\sqrt{a})^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P^r = r \log_a P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P$]

$= 8\cdot 1$ [$\because \log_a a = 1$]

$= 8$

খ দেওয়া আছে, $f(z) = 2 \log z - \log(3z - 2)$

$\therefore$ $f(x) = 2 \log x - \log(3x - 2)$

বা, $\log 2 = 2 \log x - \log(3x - 2)$ [□ $f(x) = \log 2$]

বা, $\log 2 = \log x^2 - \log(3x - 2)$

বা, $\log 2 = \log \frac{x^2}{3x - 2}$

বা, $2 = \frac{x^2}{3x - 2}$

বা, $x^2 = 6x - 4$

বা, $x^2 - 6x + 4 = 0$

$\therefore$ $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.4}}{2.1}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{5})}{2}$

$\therefore$ $x = 3 \pm \sqrt{5}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(z) = \frac{2z}{z - 1}$

$\therefore$ $g(x) = \frac{2x}{x - 1}$

এখন, $\sqrt{g(x)} + \frac{2}{\sqrt{g(x)}} = 3$

বা, $\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{2x}{x-1}}} = 3$

বা, $\sqrt{a^2} + \frac{2}{\sqrt{a^2}} = 3$ $\left[\frac{2x}{x-1} = a^2 \text{ aGi}\right]$

বা, $a + \frac{2}{a} = 3$

বা, $a^2 + 2 = 3a$

বা, $a^2 - 3a + 2 = 0$

বা, $a^2 - 2a - a + 2 = 0$

বা, $a(a - 2) - 1(a - 2) = 0$

$\therefore$ $(a - 1)(a - 2) = 0$

$\therefore$ $a - 1 = 0$ অথবা, $a - 2 = 0$

বা, $a^2 = 1$ বা, $a^2 = 4$

বা, $\frac{2x}{x-1} = 1$ বা, $\frac{2x}{x-1} = 4$

বা, $2x = x - 1$ বা, $4x - 4 = 2x$

$\therefore$ $x = -1$ বা, $4x - 2x = 4$

বা, $2x = 4$

$\therefore$ $x = 2$

$\therefore$ x এর মান $-1, 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১০ একই সংখ্যার লগারিদম ভিন্ন ভিন্ন ভিত্তির প্রেক্ষিতে ভিন্ন হয়।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. $\log_x [x + \sqrt{ax^2 - bx + c}\,] = 1$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\log_a \frac{a^2}{bc} = \log_b \frac{b^2}{ca} = \log_c \frac{c^2}{ab}$ হলে প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ ৪

গ. $\log_x y = \log_y x$ হলে প্রমাণ কর যে, $x = y$ অথবা $xy = 1$ ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_x [x + \sqrt{ax^2 - bx + c}\,] = 1$

বা, $\log_x x = \log_x [x + \sqrt{ax^2 - bx + c}\,]$

বা, $x = x + \sqrt{ax^2 - bx + c}$

বা, $\sqrt{ax^2 - bx + c} = x - x$

বা, $ax^2 - bx + c = 0$

বা, $x = \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **(Ans.)**

খ ধরি, $\log_a \frac{a^2}{bc} = \log_b \frac{b^2}{ca} = \log_c \frac{c^2}{ab} = k$

$\therefore \log_a \frac{a^2}{bc} = k$	$\log_b \frac{b^2}{ca} = k$	$\log_c \frac{c^2}{ab} = k$
বা, $a^k = \frac{a^2}{bc}$	বা, $b^k = \frac{b^2}{ca}$	বা, $c^k = \frac{c^2}{ab}$
বা, $bc = \frac{a^2}{a^k}$	বা, $ca = \frac{b^2}{b^k}$	বা, $ab = \frac{c^2}{c^k}$
বা, $bc = a^{2-k}$	বা, $ca = b^{2-k}$	বা, $ab = c^{2-k}$
বা, $\frac{c^{2-k}}{a}.c = a^{2-k}$	বা, $c.\frac{c^{2-k}}{b} = b^{2-k}$	$\therefore a = \frac{c^{2-k}}{b}$
বা, $c^{3-k} = a^{3-k}$	বা, $c^{3-k} = b^{3-k}$	এবং $b = \frac{c^{2-k}}{a}$
$\therefore c = a$ ... ... (i)	$\therefore c = b$ ... ... (ii)	

(i) ও (ii) হতে পাই, $a = b = c$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\log_x y = \log_y x$

বা, $\log_x y = \frac{1}{\log_x y}$

বা, $(\log_x y)^2 = 1$

বা, $\log_x y = \pm 1$

$\therefore$ $\log_x y = 1$ অথবা, $\log_x y = -1$

বা, $\log_x y = \log_x x$ বা, $\log_x y + 1 = 0$

$\therefore$ $x = y$ বা, $\log_x y + \log_x x = 0$

বা, $\log_x (xy) = \log_x 1$

$\therefore$ $xy = 1$

$\therefore$ $\log_x y = \log_y x$ হলে $x = y$ অথবা $xy = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১১ $y = f(x) = x$ এর সাধারণ লগারিদম। *[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]*

ক. কোডোমেন ও সার্বিক ফাংশন সংজ্ঞায়িত কর। ২

খ. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. $\frac{1}{y(y^2 + 1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **কোডোমেন:** যদি একটি ফাংশন f কে $f : A \to B$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় তবে B সেটটিকে f ফাংশনের কোডোমেন বলা হয়।

সার্বিক ফাংশন: একটি ফাংশন $f : A \to B$ কে সার্বিক ফাংশন বলা হবে যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি $a \in A$ পাওয়া যায় যেন $f(a) = b$ হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ $f = B$ হয়।

খ দেওয়া আছে, $y = f(x) = x$ এর সাধারণ লগারিদম

$\therefore y = f(x) = \log_{10} x$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৯৯

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৮

প্রশ্ন ▶১২ $a = 3^{l+1}$, $b = 3^{m+2}$, $c = 3^{n+3}$ এবং $abc = 729$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. $l + m + n$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $x = 1 + \log_3 bc$, $y = 2 + \log_3 ca$ এবং $z = 3 + \log_3 ab$ হয় তবে দেখাও যে, $x + l = y + m = z + n$ ৪

গ. দেখাও যে, $\frac{1}{2^m + 2^{-n} + 1} + \frac{1}{2^n + 2^{-l} + 1} + \frac{1}{2^l + 2^{-m} + 1} = 1$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক শর্তমতে, $abc = 729$

বা, $3^{l+1} . 3^{m+2} . 3^{n+3} = 729$ [দেওয়া আছে]

বা, $3^{l+1+m+2+n+3} = 729$

বা, $3^{l+m+n+6} = 3^6$

বা, $l + m + n + 6 = 6$

$\therefore$ $l + m + n = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = 3^{l+1}$

বা, $\log_3 a = l + 1$

$\therefore$ $l = \log_3 a - 1$

আবার, $b = 3^{m+2}$

বা, $\log_3 b = m + 2$

$\therefore$ $m = \log_3 b - 2$

অনুরূপে, $n = \log_3 c - 3$

এখন, $x + l = 1 + \log_3 bc + \log_3 a - 1$

$= \log_3(abc)$ ... ... (i)

$y + m = 2 + \log_3 ca + \log_3 b - 2$

$= \log_3(abc)$ ... ... (ii)

$z + n = 3 + \log_3 ab + \log_3 c - 3$

$= \log_3(abc)$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (ii) হতে পাই, $x + l = y + m = z + n$ **(দেখানো হলো)**

গ 'ক' হতে পাই, $l + m + n = 0$

$\therefore$ $l + m = -n$ এবং $m + n = -l$

বামপক্ষ $= \frac{1}{2^m + 2^{-n} + 1} + \frac{1}{2^n + 2^{-l} + 1} + \frac{1}{2^l + 2^{-m} + 1}$

$= \frac{1}{2^m + 2^{m+l} + 1} + \frac{1}{2^n + \frac{1}{2^l} + 1} + \frac{1}{2^l + \frac{1}{2^m} + 1}$

$= \frac{1}{2^m + 2^{m+l} + 1} + \frac{2^l}{2^{n+l} + 2^l + 1} + \frac{2^m}{2^{l+m} + 2^m + 1}$

$= \frac{1}{2^m + 2^{m+l} + 1} + \frac{2^l}{2^{-m} + 2^l + 1} + \frac{2^m}{2^m + 2^{l+m} + 1}$

$= \frac{1}{2^m + 2^{m+l} + 1} + \frac{2^l}{\frac{1}{2^m} + 2^l + 1} + \frac{2^m}{2^{l+m} + 2^m + 1}$

$= \frac{1}{2^m + 2^{m+l} + 1} + \frac{2^l . 2^m}{1 + 2^{m+l} + 2^m} + \frac{2^m}{2^m + 2^{m+l} + 1}$

$= \frac{1 + 2^{m+l} + 2^m}{1 + 2^{m+l} + 2^m} = 1$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১৩ $P = a + b$, $Q = a - b$ এবং $R = 3x - 1$ *[কুমিল্লা ক্যাডেট কলেজ, কুমিল্লা]*

ক. $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ হলে, x এর মান বের কর। ২

খ. যদি $x = \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$ এবং $\sqrt[3]{PQ} = c$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$ ৪

গ. x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + ...$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-৫(i) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৯০।

খ দেওয়া আছে, $P = a + b$, $Q = a - b$ এবং $\sqrt[3]{PQ} = c$

এখন, $x = \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$

বা, $x = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$

বা, $x^3 = (\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b})^3$

$= (\sqrt[3]{a+b})^3 + (\sqrt[3]{a-b})^3 + 3\sqrt[3]{a+b}\ \sqrt[3]{a-b}\,(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b})$

$= a + b + a - b + 3\sqrt[3]{(a+b)(a-b)}\,.x$

$= 2a + 3\sqrt[3]{PQ}\ x$

$= 2a + 3cx$

$\therefore\ x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $R = 3x - 1$

প্রদত্ত ধারা : $\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots\ldots$

অতঃপর অধ্যায়-৭ এর সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১০৮

প্রশ্ন ▶১৪ $\frac{\log(1+y)}{\log y} = 2$ *[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. প্রদত্ত সমীকরণকে y চলকের একটি দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তর কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+y)}{\log y} = 2$

বা, $\log(1+y) = 2\log y$

বা, $\log(1+y) = \log y^2$ $[(\log P^r = r\log P)]$

$\therefore\ 1 + y = y^2$

যা y চলকের একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

খ 'ক' হতে পাই,

$1 + y = y^2$

বা, $y^2 - y - 1 = 0$

বা, $4y^2 - 4y - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2y)^2 - 2.2y.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2y - 1)^2 = 5$

বা, $2y - 1 = \sqrt{5}$ [ঋনাত্মক মান বর্জন করে]

বা, $2y = 1 + \sqrt{5}$

$\therefore\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৯১

প্রশ্ন ▶১৫ $x - 1 = \log_a bc$, $y - 1 = \log_b ca$, $z - 1 = \log_c ab$ এবং $F(x) = a^x - b.a^{x+2} + c^3$. *[সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট]*

ক. যদি $F(x) = 0$, $a = 2$, $b = 3$ এবং $c = 5$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $xy(z - 1) = z(x + y)$ ৪

গ. $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ হলে F(x) এর লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = a^x - b.a^{x+2} + c^3$

$F(x) = 0$, $a = 2$, $b = 3$ এবং $c = 5$ হলে পাই,

$2^x - 3.2^{x+2} + 5^3 = 0$

বা, $2^x - 3.2^x.2^2 = -5^3$

বা, $2^x - 12.2^x = -125$

বা, $-11.2^x = -125$

বা, $2^x = \frac{125}{11}$

$\therefore\ x = \log_2\left(\frac{125}{11}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x = \log_a a + \log_a bc$

বা, $x = \log_a abc$

বা, $a^x = abc$

বা, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$ .... (iii)

(i) × (ii) × (iii) থেকে পাই,

$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 1$

বা, $xyz = xy + yz + zx$

বা, $xyz - xy = zx + yz$

$\therefore\ xy(z - 1) = z(x + y)$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $F(x) = a^x - b.a^{x+2} + c^3$

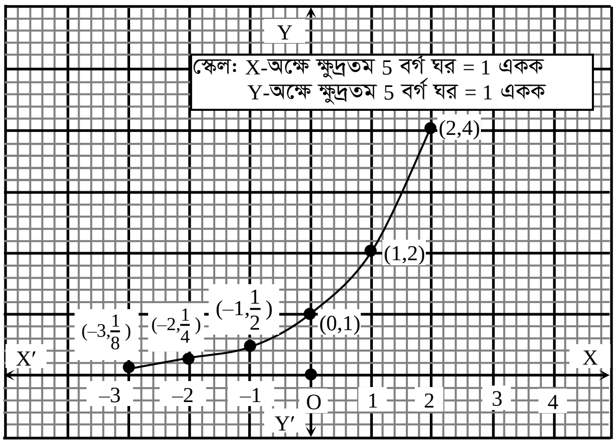
এখন, $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ হলে পাই,

$F(x) = 2^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নিম্নে ছকে দেখানো হলো।

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়–



x এর ঋণাত্মক যেকোনো মানের জন্য F(x) এর মান কোনো এক সময় 0 (শূন্যের) খুবই কাছাকাছি পৌঁছায়। কিন্তু শূন্য (0) হয় না অর্থাৎ,

$x \to -\infty, y \to 0$

একইভাবে, x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে ডানদিকে (উপরের) বৃদ্ধি পেতে থাকবে। অর্থাৎ ∞ এর দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $x \to \infty, y \to \infty$

সুতরাং ডোমেন = $(-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ = $(0, \infty)$

প্রশ্ন ▶ ১৬ $\frac{\log_k p}{y-z} = \frac{\log_k q}{z-x} = \frac{\log_k r}{x-y}$ *[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]*

ক. দেখাও যে, $pqr = 1$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $p^{y+z} . q^{z+x} . r^{x+y} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $p^{y^2+yz+z^2} . q^{z^2+zx+x^2} . r^{x^2+xy+y^2} = 1$ ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\frac{\log_k p}{y-z} = \frac{\log_k q}{z-x} = \frac{\log_k r}{x-y} = M$

$\therefore$ $\log_k p = M(y-z)$ .... (i)

$\log_k q = M(z-x)$ .... (ii)

$\log_k r = M(x-y)$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\log_k p + \log_k q + \log_k r = M(y-z+z-x+x-y)$

বা, $\log_k (pqr) = M \times 0$

বা, $\log_k (pqr) = 0$

বা, $\log_k (pqr) = \log_k 1$

$\therefore$ $pqr = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ 'ক' তে প্রাপ্ত (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণকে যথাক্রমে $(y+z)$, $(z+x)$ ও $(x+y)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$(y+z)\log_k p = M(y^2 - z^2)$ ... ... (iv)

$(z+x)\log_k q = M(z^2 - x^2)$ ... ... (v)

$(x+y)\log_k r = M(x^2 - y^2)$ ... ... (vi)

(iv), (v) ও (vi) যোগ করে পাই,

$(y+z)\log_k p + (z+x)\log_k q + (x+y)\log_k r = M(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2)$

বা, $\log_k p^{y+z} + \log_k q^{z+x} + \log_k r^{x+y} = M \times 0$

বা, $\log_k (p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y}) = \log_k 1$

$\therefore p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ 'ক' হতে পাই, $\log_k p = M(y-z)$

বা, $p = k^{M(y-z)}$ [লগের সংজ্ঞা হতে]

বা, $p^{y^2+yz+z^2} = k^{M(y-z)(y^2+yz+z^2)}$

$\therefore$ $p^{y^2+yz+z^2} = k^{M(y^3-z^3)}$ ... ... (vii)

অনুরূপভাবে, $q^{z^2+zx+x^2} = k^{M(z^3-x^3)}$ ... ... (viii)

এবং $r^{x^2+xy+y^2} = k^{M(x^3-y^3)}$ ... ... (ix)

(vii), (viii) ও (ix)নং গুণ করে পাই,

$p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{x^2+xy+y^2} = k^{M(y^3-z^3)} . k^{M(z^3-x^3)}.k^{M(x^3-y^3)}$

$= k^{M(y^3-z^3+z^3-x^3+x^3-y^3)}$

$= k^{M.0} = k^0 = 1$

$\therefore$ $p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{x^2+xy+y^2} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $M = n^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$, $N = \frac{\log_a (1+y) - 2\log_a (y)}{\log_a (y)}$ *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*

ক. যদি $(16)^p = (128)^q$ হয়, তাহলে p ঃ q নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $M = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $3n^3 + 9n - 8 = 0$ ৪

গ. যদি $N = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(16)^p = (128)^q$

বা, $(2^4)^p = (2^7)^q$

বা, $2^{4p} = 2^{7q}$

বা, $4p = 7q$

বা, $\frac{p}{q} = \frac{7}{4}$

$\therefore$ $p : q = 7 : 4$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৩(খ) নং সমাধান এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৫৭

গ দেওয়া আছে, $N = \frac{\log_a (1+y) - 2\log_a (y)}{\log_a (y)}$

শর্তমতে, $N = 0$

বা, $\frac{\log_a (1+y) - 2\log_a (y)}{\log_a (y)} = 0$

বা, $\log_a (1+y) - 2\log_a (y) = 0$

বা, $\log_a (1+y) = 2\log_a y$

বা, $\log_a (1+y) = \log_a y^2$ $[(\log_a P^r = r\log_a P)]$

বা, $1 + y = y^2$

বা, $y^2 - y - 1 = 0$

বা, $4y^2 - 4y - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ অরে]

বা, $(2y)^2 - 2.2y.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2y-1)^2 = 5$

বা, $2y - 1 = \sqrt{5}$ [ঋনাত্মক মান বর্জন অরে]

বা, $2y = 1 + \sqrt{5}$

বা, $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore$ $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ $\sqrt{a+15} - \sqrt{a+13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$ এবং $y = (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}$ *[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\log_{\sqrt{8}} b = 3\frac{1}{3}$ হলে b এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a = x^2 - 6x$ হলে সংশিণষ্ট সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

গ. $p^2 - q^2 = r^3$ হলে প্রমাণ কর যে, $y^3 = 3ry + 2p$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ ৫(i) এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৯০

খ দেওয়া আছে, $a = x^2 - 6x$

এখন, $\sqrt{a+15} - \sqrt{a+13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

বা, $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

অতপর : পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৯৩

গ দেওয়া আছে, $p^2 - q^2 = r^3$

এখন, $y = (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}$

বা, $y^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [ঘন করে]

$= \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3(p+q)^{\frac{1}{3}}.(p-q)^{\frac{1}{3}}\left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}$

$= p + q + p - q + 3(p^2 - q^2)^{\frac{1}{3}}.y$

$= 2p + 3(r^3)^{\frac{1}{3}} y$

$= 2p + 3ry$

$\therefore$ $y^3 = 3ry + 2p$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ $A = ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}} + cz^{\frac{1}{3}}$

$B = \log_e(3+y) - 2\log_e y$ *[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. প্রমাণ কর যে, $\log_e(PQ) = \log_e P + \log_e Q$. ২

খ. $A = 0$ এবং $x^2 = yz$ হলে প্রমাণ কর যে, $a^3x + b^3y + c^3z - 3abcx = 0$ ৪

গ. $B = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $2y - 1 = \sqrt{13}$. ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\log_e P = x$, $\log_e Q = y$

$\therefore P = e^x, Q = e^y$

এখন, $PQ = e^x.e^y = e^{x+y}$

$\therefore \log_e(PQ) = \log_e e^{x+y}$

বা, $\log_e(PQ) = x + y$

$\therefore \log_e(PQ) = \log_e P + \log_e Q$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $A = 0$ এবং $x^2 = yz$

$\therefore\ ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}} + cz^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $ax^{\frac{1}{3}} = -(by^{\frac{1}{3}} + cz^{\frac{1}{3}})$

বা, $\left(ax^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left\{-\left(by^{\frac{1}{3}} + cz^{\frac{1}{3}}\right)\right\}^3$ [ঘন করে]

বা, $a^3x = -b^3\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 - c^3\left(z^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3by^{\frac{1}{3}}cz^{\frac{1}{3}}.\left(by^{\frac{1}{3}} + cz^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $a^3x = -b^3y - c^3z - 3bc(yz)^{\frac{1}{3}}\left(-ax^{\frac{1}{3}}\right)$

$\left[\because ax^{\frac{1}{3}} = -\left(by^{\frac{1}{3}} + cz^{\frac{1}{3}}\right)\right]$

বা, $a^3x + b^3y + c^3z - 3abc\,(x^2)^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $a^3x + b^3y + c^3z - 3abc\,x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 0$

$\therefore\ a^3x + b^3y + c^3z - 3abcx = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $B = 0$

$\therefore\ \log_e(3 + y) - 2\log_e y = 0$

বা, $\log_e(3 + y) = \log_e y^2$

বা, $3 + y = y^2$

বা, $y^2 - y - 3 = 0$

বা, $4y^2 - 4y - 12 = 0$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2y)^2 - 2.2y.1 + 1^2 - 12 - 1 = 0$

বা, $(2y - 1)^2 = 13$

$\therefore\ 2y - 1 = \sqrt{13}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২০ $a + b + c = p$ এবং $X = ab\log_k(ab)$, $Y = bc\log_k(bc)$ এবং $Z = ca\log_k(ca)$ *[মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ হলে $x =$ কত? ২

খ. $p = 0$ হলে, দেখাও যে,
$(x^b + x^{-c} + 1)^{-1} + (x^c + x^{-a} + 1)^{-1} + (x^a + x^{-b} + 1)^{-1} = 1$ ৪

গ. যদি $\frac{X}{a+b} = \frac{Y}{b+c} = \frac{Z}{c+a}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $a^a = b^b = c^c$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ- ৫(i) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৯০

খ সৃজনশীল ১২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬১

গ দেওয়া আছে,

$X = ab\log_k(ab)$, $Y = bc\log_k(bc)$ ও $Z = ca\log_k(ca)$

এবং $\frac{X}{a+b} = \frac{Y}{b+c} = \frac{Z}{c+a}$

$\therefore\ \frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$

ধরি, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = m$

$\therefore\ \log_k(ab) = \frac{m(a+b)}{ab}$ ... ... (i)

আবার, $\log_k(bc) = \frac{m(b+c)}{bc}$ ... ... (ii)

এবং $\log_k(ca) = \frac{m(c+a)}{ca}$ ... ... (iii)

এখন, (i) নং, (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k(ab) + \log_k(bc) + \log_k(ca) = \frac{m(a+b)}{ab} + \frac{m(b+c)}{bc} + \frac{m(c+a)}{ca}$

বা, $\log_k(ab\cdot bc\cdot ca) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k(abc)^2 = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$

বা, $2\log_k(abc) = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$

$\therefore\ \log_k(abc) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$ ... ... (iv)

(iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ab) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - \frac{m(a+b)}{ab}$

$= m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$

বা, $\log_k\frac{abc}{ab} = \frac{m}{c}$

বা, $\log_k c = \frac{m}{c}$

বা, $c\log_k c = m$

বা, $\log_k c^c = m$

$\therefore\ c^c = k^m$ ... ... (v)

আবার, (iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(bc) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - \frac{m(b+c)}{bc}$

বা, $\log_k\frac{abc}{bc} = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k a = \frac{m}{a}$

বা, $a\log_k a = m$

বা, $\log_k a^a = m$

$\therefore\ a^a = k^m$ ... ... (vi)

পুনরায়, (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ca) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - \frac{m(c+a)}{ca}$

বা, $\log_k\frac{abc}{ca} = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k b = \frac{m}{b}$

বা, $b\log_k b = m$

বা, $\log_k b^b = m$

$\therefore\ b^b = k^m$ ... ... (vii)

সুতরাং, (v), (vi) ও (vii) নং থেকে লেখা যায়,

$a^a = b^b = c^c = k^m$

$\therefore\ a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২১ $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $r = xy^{c-1}$

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, ঢাকা]

ক. $a^2 = b^3$ হলে, দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{-1}{3}}$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(b + a)\log\frac{p}{q} + (c + b)\log\frac{q}{r} + (a + c)\log\frac{r}{p} = 0$ ৪

গ. $(b - c)\log p + (c - a)\log q + (a - b)\log r$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^2 = b^3$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^3}{b^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \left(\frac{a^3}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{b^3}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + (b^{-1})^{\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$

বামপক্ষ $= (b + a)\log\frac{p}{q} + (c + b)\log\frac{q}{r} + (a + c)\log\frac{r}{p}$

$= (b + a)\log\frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}} + (c + b)\log\frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}} + (a + c)\log\frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}$

$= (b + a)\log y^{a-b} + (c + b)\log y^{b-c} + (a + c)\log y^{c-a}$

$= (a + b)(a - b)\log y + (b + c)(b - c)\log y + (a + c)(c - a)\log y$

$= (a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2)\log y$

$= 0 \times \log y$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore (b + a)\log\frac{p}{q} + (c + b)\log\frac{q}{r} + (a + c)\log\frac{r}{p} = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ $(b - c)\log p + (c - a)\log q + (a - b)\log r$

$= \log p^{b-c} + \log q^{c-a} + \log r^{a-b}$

$= \log(xy^{a-1})^{b-c} + \log(xy^{b-1})^{c-a} + \log(xy^{c-1})^{a-b}$

$= \log x^{b-c} + \log y^{ab-ac-b+c} + \log x^{c-a} + \log y^{bc-ab-c+a} + \log x^{a-b} + \log y^{ac-bc-a+b}$

$= \log x^{b-c} + \log x^{c-a} + \log x^{a-b} + \log y^{ab-ac-b+c} + \log y^{bc-ab-c+a} + \log y^{ac-bc-a+b}$

$= \log(x^{b-c}.x^{c-a}.x^{a-b}) + \log(y^{ab-ac-b+c}.y^{bc-ab-c+a}.y^{ac-bc-a+b})$

$= \log x^{b-c+c-a+a-b} + \log y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ac-bc-a+b}$

$= \log x^0 + \log y^0$

$= \log 1 + \log 1$

$= 0 + 0 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ $x = 1 + \log_a(bc), y = 1 + \log_b(ca), z = 1 + \log_c(ab)$

[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. যদি $p = 5^{\log_5 9}$ হয়, তাহলে $p =$ কত? ২

খ. যদি $b^2 = ac$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ ৪

গ. দেখাও যে, $xyz = xy + yz + zx$ ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p = 5^{\log_5 9}$ ... ... (i)

ধরি, $\log_5 9 = x$

$\therefore \quad 5^x = 9 \quad [\because \log_a b = x \Rightarrow a^x = b]$

(i) নং থেকে পাই, $p = 5^x$

$\therefore \quad p = 9$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$x = 1 + \log_a(bc), y = 1 + \log_b(ca), z = 1 + \log_c(ab)$

বা, $x = \log_a a + \log_a(bc)$

বা, $x = \log_a(abc)$

$\therefore \quad a^x = abc$ ... ... (ii)

অনুরূপে পাই, $a^y = abc$ ... ... (iii) এবং $a^z = abc$ ... ... (iv)

(ii), (iii) ও (iv) হতে পাই, $a^x = a^y = a^z$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৮৪

গ সৃজনশীল ১৫(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৬২

প্রশ্ন ▶ ২৩ $4^x = 2^y, (27)^{xy} = 9^{y+1}$ দুই চলক বিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোট এবং $P = \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$.

[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

ক. $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. সূচকীয় সমীকরণ জোটের সমাধান কর। ৪

গ. দেখাও যে, $P = 8$. ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b} \times \frac{a}{a+b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} \times \frac{a}{(a+b)}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{a}$

$= x^{\frac{a}{a}}$

$= x^1 = x$ **(Ans.)**

খ $4^x = 2^y$ .... (i)

$27^{xy} = 9^{y+1}$ .... (ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $(2^2)^x = 2^y$

বা, $2^{2x} = 2^y \quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$\therefore \quad 2x = y$ .... (iii) $[\because a^m = a^n$ হলে $m = n]$

আবার, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

বা, $(3^3)^{xy} = (3^2)^{y+1}$

বা, $3^{3xy} = 3^{2(y+1)} \quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $3xy = 2(y + 1) \quad [\because a^m = a^n$ হলে $m = n]$

বা, $3x.2x = 2(2x + 1) \quad [\because y = 2x]$

বা, $6x^2 = 2(2x + 1)$

বা, $3x^2 = 2x + 1$

বা, $3x^2 - 2x - 1 = 0$

বা, $3x^2 - 3x + x - 1 = 0$

বা, $3x(x - 1) + 1(x - 1) = 0$

বা, $(x - 1)(3x + 1) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$ অথবা, $3x + 1 = 0$

$\therefore x = 1 \qquad \therefore x = -\frac{1}{3}$

(iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x = 1$ তখন $y = 2.1 = 2$

যখন $x = -\frac{1}{3}$ তখন $y = 2.\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $(x, y) = (1, 2), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

গ সৃজনশীল ৯(ক) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৬০

প্রশ্ন ▶ ২৪ $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $m = (\sqrt{n})^3$

[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. $a = c$ হলে, দেখাও যে, $x = z$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{p^{-y} + p^z + 1} + \frac{1}{p^{-z} + p^x + 1} = 1$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৬(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৯

খ বামপক্ষ $= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}}$

$= \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^3 + \sqrt[3]{\frac{n^2}{m^2}}$

$= \sqrt{\frac{m^3}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{n^2}{m^2}}$

$= \sqrt{\frac{m^3}{m^2}} + \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^3}} \quad [\because m = (\sqrt{n})^3$ বা, $m^2 = n^3]$

$= \sqrt{m} + \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$

$= \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৯

প্রশ্ন ▶২৫ $a^x = b^y = c^z$ যেখানে $a \neq b \neq c$.

[বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]

ক. যদি $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$ হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $ab = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶২৬ $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$; $x \neq \frac{1}{2}$ এবং $g(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$ দুইটি ফাংশন।

[সাভার ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, ঢাকা]

ক. $f\left(\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $f(x)$ এক-এক ফাংশন। ৪

গ. $g(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{\frac{1}{3} - 3}{2.\frac{1}{3} - 1}$

$= \dfrac{\frac{1-9}{3}}{\frac{2-3}{3}}$

$= \frac{-8}{3} \times \frac{3}{-1} = 8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$

$f(x)$ এক-এক ফাংশন হবে যদি সকল $a, b \in$ ডোম f এর জন্য $f(a) = f(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $f(a) = f(b)$

বা, $\frac{a-3}{2a-1} = \frac{b-3}{2b-1}$

বা, $2ab - 6b - a + 3 = 2ab - b - 6a + 3$

বা, $6a - a = 6b - b$

বা, $5a = 5b$

$\therefore$ $a = b$

$\therefore$ $f(x)$ এক-এক ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{1-x}{1+x} > 0$ যদি (i) $1 - x > 0$ এবং $1 + x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $1 - x < 0$ এবং $1 + x < 0$ হয়।

(i) $-x > -1$ এবং $x > -1$

$\Rightarrow x < 1$ এবং $x > -1$

$\therefore$ ডোমেন $D_g = \{x : -1 < x\} \cap \{x : x < 1\}$

$= (-1, \infty) \cap (-\infty, 1)$

$= (-1, 1)$

(ii) $-x < -1$ এবং $x < -1$

$\Rightarrow x > 1$ এবং $x < -1$

$\therefore$ ডোমেন $D_g = \{x : x < -1\} \cap \{x : x > 1\} = \phi$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_g = (i) ও (ii) এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ সেট

$= (-1, 1) \cup \varnothing = (-1, 1)$ **(Ans.)**

ধরি, রেঞ্জ : $y = g(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$

$\Rightarrow e^y = \frac{1-x}{1+x}$

$\Rightarrow 1 - x = (1 + x)e^y$

$\Rightarrow 1 - x = e^y + xe^y$

$\Rightarrow 1 - e^y = x(1 + e^y)$

$\Rightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ, $R_g = \nabla$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৭ দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে অংকদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 3 হয়, সংখ্যাটির সাথে 18 যোগ করলে অংকদ্বয় স্থান বিনিময় করে।

[এম ই এইচ আরিফ কলেজ, গাজীপুর]

ক. x ও y চলকের সাহায্যে সমীকরণ জোট গঠন কর। ২

খ. সংখ্যাটি নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৫ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১০২

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৫ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১০২

গ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৬২

প্রশ্ন ▶২৮ প্রদত্ত তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

$A = x^b + x^{-c} + 1$

$B = x^c + x^{-a} + 1$, $C = x^a + x^{-b} + 1$

এবং $D = \frac{\log_x(3+a)}{\log_x a}$

[ব্রাহ্মন্দী মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, নরসিংদী]

ক. $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a + b + c = 0$ হলে দেখাও যে, $A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} = 1$ ৪

গ. $D = 2$ হলে দেখাও যে, $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৮৪

খ সৃজনশীল ১২(গ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৬১

গ দেওয়া আছে, $D = \frac{\log_x(3+a)}{\log_x a}$

শর্তমতে, $D = 2$

বা, $\log_x(3 + a) = 2\log_x a$

বা, $\log_x(3 + a) = \log_x a^2$

বা, $3 + a = a^2$

বা, $a^2 - a - 3 = 0$

বা, $a^2 - 2.a.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = 0$

বা, $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 3$

বা, $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+12}{4}$

বা, $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

বা, $a - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{13}{4}}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে।]

বা, $a - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

বা, $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\therefore a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৯ $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = \ln \frac{4 + x}{4 - x}$

[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল]

ক. $(16)^{2x} = 4^{x+1}$ হলে, x = কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(q - r) \log_k a + (r - p) \log_k b + (p - q) \log_k c = 0$ ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৪ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৩০ $P = \frac{x^a}{x^b}$, $Q = \frac{x^b}{x^c}$ এবং $R = \frac{x^c}{x^a}$

[শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]

ক. Q = 1 হলে, দেখাও যে, b = c ২

খ. দেখাও যে, $P^{a+b-c}.Q^{b+c-a}.R^{c+a-b} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে,

$(a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0$ ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৭ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৯

প্রশ্ন ▶৩১ (i) 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

(ii) $27^p = \frac{9^{p+4}}{3}$ একটি সমীকরণ। (iii) $2x - 3y + 6 \leq 0$ একটি অসমতার সমীকরণ। *[ফরিদপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফরিদপুর]*

ক. (i) নং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. $a^2 + b^2 = Pab$ হলে প্রমাণ কর যে, $\log\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ৪

গ. (iii) নং অসমতার সমাধান সেটের বর্ণনা দাও এবং গ্রাফ পেপারে চিত্রিত কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধারাটির ১ম পদ, a = 1

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{1} = 2$

এখানে, $|r| = |2| = 2 > 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নাই।

খ দেওয়া আছে, $27^p = \frac{9^{p+4}}{3}$

বা, $(3^3)^p = \frac{(3^2)^{p+4}}{3}$

বা, $3^{3p} = 3^{2p+8-1}$

বা, $3^{3p} = 3^{2p+7}$

বা, $3p = 2p + 7$

$\therefore p = 7$

দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = Pab$

বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab$ [উভয় পক্ষে 2ab যোগ করে]

বা, $(a + b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a + b)^2}{9} = ab$

বা, $\left(\frac{a + b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log\left(\frac{a + b}{3}\right)^2 = \log(ab)$

বা, $2\log\left(\frac{a + b}{3}\right) = \log(ab)$

বা, $\log\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

[∵ $\log(M \times N) = \log M + \log N$]

$\therefore \log\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রদত্ত অসমতা, $2x - 3y + 6 \leq 0$

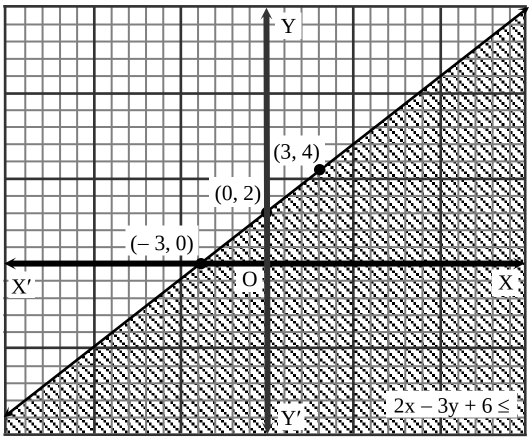
প্রথমে, $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায়: $2x - 3y + 6 = 0$

বা, $y = \frac{2x}{3} + 2$

এ লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

x	0	– 3	3
y	2	0	4

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (0, 2), (– 3, 0), (3, 4) বিন্দুগুলো স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



এখন মূলবিন্দু (0, 0) তে $2x - 3y + 6$ রাশির মান 6, যা ধনাত্মক। সুতরাং লেখচিত্রে রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্যই $2x - 3y + 6 < 0$ সত্য।

অতএব, $2x - 3y + 6 \leq 0$ অসমতার সমাধান সেট $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দুর এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমন্বয়ে গঠিত।

এই সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটিও অন্তর্ভুক্ত।

প্রশ্ন ▶৩২

$a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$	(i)
$a + b + c = 0$	(ii)
$\frac{x(y + z - x)}{\log_k x} = \frac{y(z + x - y)}{\log_k y} = \frac{z(x + y - z)}{\log_k z}$	(iii)

[গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]

ক. (i) হলে প্রমাণ কর যে, $x^{-1} + z^{-1} = 2y^{-1}$ ২

খ. (ii) হলে, $\left(\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. (iii) হলে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৮৪

খ সৃজনশীল ১২(গ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৬১

গ ধরি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = m$

$\therefore \log_k x = \frac{x(y+z-x)}{m}$

আবার, $\log_k y = \frac{y(z+x-y)}{m}$

এবং $\log_k z = \frac{z(x+y-z)}{m}$

এখন, $y \log_k x + x \log_k y = \frac{xy(y+z-x)}{m} + \frac{xy(z+x-y)}{m}$

$= \frac{xy}{m}(y+z-x+z+x-y)$

$= \frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y + \log_k y^x = \frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y y^x = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore x^y y^x = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (i)

আবার, $z \log_k y + y \log_k z = \frac{yz(z+x-y)}{m} + \frac{yz(x+y-z)}{m}$

বা, $\log_k y^z + \log_k z^y = \frac{yz}{m}(z+x-y+x+y-z)$

বা, $\log_k y^z z^y = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore y^z z^y = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (ii)

পুনরায়, $x \log_k z + z \log_k x = \frac{zx(x+y-z)}{m} + \frac{zx(y+z-x)}{m}$

বা, $\log_k z^x + \log_k x^z = \frac{zx}{m}(x+y-z+y+z-x)$

বা, $\log_k z^x x^z = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore z^x x^z = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (iii)

সুতরাং (i), (ii) ও (iii) নং থেকে পাই,

$x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৩৩ (i) $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

(ii) $p = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$, $r = \log_c(ab)$

[রাজশাহী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ, রাজশাহী]

ক. $p^{3-y}.q^{5y} = p^{5+y}.q^{3y}$ হলে প্রমাণ কর, $y\log_k\left(\frac{q}{p}\right) = \log_k p$ ২

খ. $a \neq 0$ এবং $x + y + z = 0$ হলে (i) নং হতে দেখাও $\frac{y}{z} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}$ ৪

গ. (ii) হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1$ ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p^{3-y} q^{5y} = p^{5+y} q^{3y}$

বা, $\frac{q^{5y}}{q^{3y}} = \frac{p^{5+y}}{p^{3-y}}$ [উভয়পক্ষকে $p^{3-y}.q^{3y}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $q^{5y-3y} = p^{5+y-3+y}$

বা, $q^{2y} = p^{2+2y}$

বা, $q^{2y} = p^2 \cdot p^{2y}$

বা, $\frac{q^{2y}}{p^{2y}} = p^2$ [উভয় পক্ষকে p^{2y} দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\log_k \frac{q^{2y}}{p^{2y}} = \log_k p^2$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $\log_k \left(\frac{q}{p}\right)^{2y} = \log_k p^2$

বা, $2y \log_k \left(\frac{q}{p}\right) = 2 \log_k p$

$\therefore y\log_k \left(\frac{q}{p}\right) = \log_k p$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে,

$x + y + z = 0$

$\therefore y + z = -x$ ... ...(i)

আবার, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = -x\sqrt[3]{a}$

বা, $y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = (y+z)\sqrt[3]{a}$ [(i) হতে মান বসিয়ে]

বা, $y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = y\sqrt[3]{a} + z\sqrt[3]{a}$

বা, $y\sqrt[3]{b} - y\sqrt[3]{a} = z\sqrt[3]{a} - z\sqrt[3]{c}$

বা, $y\left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}\right) = z\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}\right)$

$\therefore \frac{y}{z} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}$ **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৯২

প্রশ্ন ▶৩৪ $a^x = b^y = c^z$ যেখানে $a \neq b \neq c$ *[নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ]*

ক. যদি $p^{p\sqrt{p}} = = (P\sqrt{p})^p$ হয়, তবে P এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $ab = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^{-1} + y^{-1} = 2z^{-1}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৩৫ $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = ln\frac{4+x}{4-x}$

[পাবনা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পাবনা]

ক. $4^{x+1} = 256$ হলে x এর মান কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c = 0$ ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $4^{x+1} = 256$

বা, $(2^2)^{x+1} = 2^8$

বা, $2^{2x+2} = 2^8$

বা, $2x + 2 = 8$

বা, $2x = 6$

$\therefore x = 3$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

গ সৃজনশীল ৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৩৬ $(2x+1)^{-1} + (2x+1)^{-2} + (2x+1)^{-3} + ...$ একটি অসীম ধারা

এবং $\frac{\log_k(3 + a)}{\log_k a} = 2$ একটি সমীকরণ।

[রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট]

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটিতে অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. সমীকরণ হতে প্রমাণ কর: $a = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা $= (2x + 1)^{-1} + (2x + 1)^{-2} + (2x + 1)^{-3} + \ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{1}{2x + 1} + \frac{1}{(2x + 1)^2} + \frac{1}{(2x + 1)^3} + \ldots\ldots\ldots$$

প্রদত্ত ধারার ১ম পদ, $a = \frac{1}{2x + 1}$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x + 1)^2} \div \frac{1}{(2x + 1)}$

$= \frac{1}{(2x + 1)}$ **(Ans.)**

খ অধ্যায়-৭ এর সৃজনশীল ৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১০৭

গ সৃজনশীল ২৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬৬

প্রশ্ন ▶৩৭ যদি $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $g(x) = \frac{\log_k x}{\log_k(1 + x)}$ হয় তবে

[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর]

ক. $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$ হলে, x এর মান কত? ২

খ. $abc = 1$ হলে, দেখাও যে, $x + y + z = 0$ ৪

গ. $g(x) = 2^{-1}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^{-1} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1}$ ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2^{2x} - 3{\cdot}2^{x+2} = -32$

বা, $(2^x)^2 - 3.2^2.2^x = -32$ $[\because a^{mn} = (a^m)^n$ এবং $a^{m+n} = a^m.a^n]$

বা, $(2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

বা, $a^2 - 12a + 32 = 0$ $[2^x = a$ ধরে $]$

বা, $a^2 - 8a - 4a + 32 = 0$

বা, $a(a - 8) - 4(a - 8) = 0$

বা, $(a - 4)(a - 8) = 0$

হয় $a - 4 = 0$ অথবা, $a - 8 = 0$

$\therefore a = 4$ $\therefore a = 8$

এখন,

$a = 4$ হলে, আবার, $a = 8$ হলে,

$2^x = 4$ $2^x = 8$

বা, $2^x = 2^2$ বা, $2^x = 2^3$

$\therefore x = 2$ $\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2, 3$

খ ধরি, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c} = k$

বা, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

বা, $a^{\frac{1}{x}} = k;\ b^{\frac{1}{y}} = k;\ c^{\frac{1}{z}} = k$

$\therefore a = k^x, b = k^y, c = k^z$

দেওয়া আছে,

$abc = 1$

বা, $k^x k^y k^z = 1$

বা, $k^{x+y+z} = k^0$

$\therefore x + y + z = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬২

প্রশ্ন ▶৩৮ (i) $f(x) = \frac{1}{2x - 3}$ (ii) $g(x) = ln\frac{4 + x}{4 - x}$ এবং (iii) $y = 2^x$.

[রংপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রংপুর]

ক. ডোম f নির্ণয় কর। ২

খ. $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. (iii) এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{2x - 3}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $2x - 3 \neq 0$ অর্থাৎ $x \neq \frac{3}{2}$ হয়।

$\therefore$ $f(x)$ এর ডোমেন $= \left\{x \in ∇ : x \neq \frac{3}{2}\right\}$ **(Ans.)**

খ ধরি, $y = g(x) = ln\frac{4 + x}{4 - x}$ $\therefore g^{-1}(y) = x \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

বা, $y = ln\frac{4 + x}{4 - x}$

বা, $e^y = \frac{4 + x}{4 - x}$

বা, $4 + x = 4e^y - xe^y$

বা, $x + xe^y = 4e^y - 4$

বা, $x(e^y + 1) = 4(e^y - 1)$

বা, $x = 4\frac{e^y - 1}{e^y + 1}$

বা, $g^{-1}(y) = 4\frac{e^y - 1}{e^y + 1}$ [(i) নং দ্বারা]

$\therefore$ $g^{-1}(x) = 4\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর অনুচ্ছেদ-৯.৭ এর $f(x) = 2^x$ এর লেখচিত্র দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৯৪

প্রশ্ন ▶৩৯ $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ যেখানে $a \geq 0$ এবং $\log_k x = \frac{\log_k(1 + x)}{2}$ হলে—

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর]

ক. $\log_m p = 3$ এবং $\log_{12m} 8p = 2$ হলে m এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3a^3 + 9a - 8 = 0$ ৪

গ. $(2x - 1)^2 = 5$ উদ্দীপকের আলোকে সমীকরণটির সত্যতা যাচাই কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_m p = 3$

বা, $m^3 = p$

এবং $\log_{12m} 8p = 2$

বা, $(12m)^2 = 8p$

বা, $p = \frac{144m^2}{8}$

$\therefore$ $m^3 = \frac{144m^2}{8}$

বা, $m^3 = 18m^2$

$\therefore$ $m = 18$ $[\square\ m \neq 0]$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৩(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৫৭

গ দেওয়া আছে, $\log_k x = \frac{\log_k(1 + x)}{2}$

বা, $2\log_k x = \log_k(1 + x)$

বা, $\log_k x^2 = \log_k(1 + x)$

বা, $x^2 = 1 + x$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $4x^2 - 4x - 4 = 0$ [4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2x - 1)^2 - 5 = 0$

$\therefore$ $(2x - 1)^2 = 5$ (সত্যতা যাচাই করা হলো)

প্রশ্ন ▶ ৪০ $A = x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}$, $B = a^{5+x}.b^{3x}$

[পুলিশ লাইন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]

ক. $9^x = (27)^y$ হলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত? ২

খ. $A = 0$ হলে এবং $a^2 = bc$ হয় তবে দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$। ৪

গ. $B = a^{3-x}.b^{5x}$ হয় তবে দেখাও যে, $x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore$ $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$A = x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$

এখানে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $x\sqrt[3]{a} = -\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)$

বা, $\left(x\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left\{-\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = -y^3\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 - z^3\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3y\sqrt[3]{b}\,z\sqrt[3]{c}\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y)]$

বা, $ax^3 = -by^3 - cz^3 - 3yz\sqrt[3]{bc}\left(-x\sqrt[3]{a}\right)$

$\left[\because x\sqrt[3]{a} = -\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)\right]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}(a)^{\frac{1}{3}}$ $[\because a^2 = bc]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz\,a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$

$\therefore$ $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ৩৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬৮

প্রশ্ন ▶ ৪১ $p^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a^{3-x}.b^{5x} = a^{5+x}.b^{3x}$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী]

ক. p এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $3p^3 + 9p - 8 = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $p^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $p^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ $\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^0 = 1\right]$

বা, $p^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $p = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয় পক্ষে বর্গমূল করে এবং যেহেতু $p \geq 0$ যেহেতু ধনাত্মক মান নিয়ে]

$\therefore p = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই,

$p = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$

বা, $p^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $p^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (p - b)^3 = p^3 - b^3 - 3pb\,(p - b)]$

বা, $p^3 = 3 - 3^{-1} - 3\,.\,3^0.p$

$\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0 \text{ এবং } 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = p\right]$

বা, $p^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3p$

বা, $p^3 + 3p = \frac{8}{3}$

বা, $3p^3 + 9p = 8$

$\therefore$ $3p^3 + 9p - 8 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ৩৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬৮

প্রশ্ন ▶ ৪২ (i) যদি $\log_8 B^2 + 4 = \log_2 4B^2$ হয় এবং (ii) $y = -3^x$ একটি ফাংশন।

[সৈয়দপুর সরকারি কারিগরি কলেজ, নীলফামারী]

ক. সূচক ফাংশন ব্যাখ্যা কর। ২

খ. B এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ফাংশনটি সূচক ফাংশন কি-না, তা লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **সূচক ফাংশন :** $f(x) = a^x$ আকৃতির যে কোন ফাংশনকে (যেখানে, $a > 0$ এবং $a \neq 1$) সূচক ফাংশন বলে। যেমন, $y = 2^x, 10^x, x^x, e^x$ ইত্যাদি সূচক ফাংশন।

সূচক ফাংশন $f(x) = a^x$ এর ডোমেন $(-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$

খ মনে করি, $\log_8 B^2 = p$

বা, $B^2 = 8^p$

$\therefore$ $B^2 = 2^{3p}$ ... ... (i)

আবার, $\log_2 4B^2 = q$

বা, $\log_2 (2B)^2 = q$

বা, $(2B)^2 = 2^q$

বা, $B^2 = \frac{2^q}{2^2}$

$\therefore$ $B^2 = 2^{q-2}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $2^{3p} = 2^{q-2}$

বা, $3p = q - 2$

$\therefore$ $3p - q + 2 = 0$ ... ... (iii)

এখন, $\log_8 B^2 + 4 = \log_2 4B^2$

বা, $p + 4 = q$

$\therefore$ $p - q + 4 = 0$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) নং সমাধান করে পাই,

$p = 1, q = 5$

এখন, $p = 1$, (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$B^2 = 2^{3\times1}$

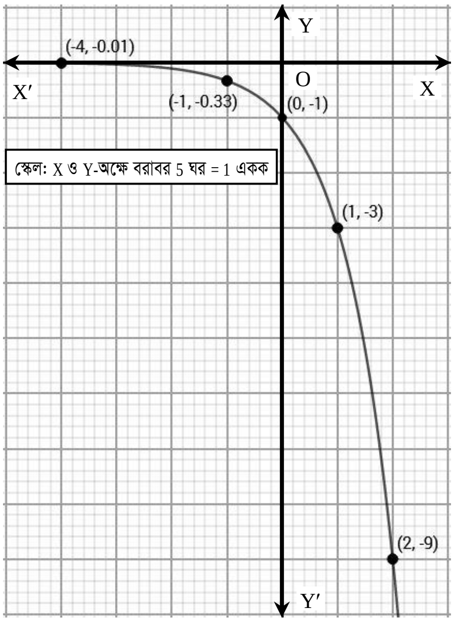
বা, $B^2 = 8$

$\therefore$ $B = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

গ $y = -3^x$ সমীকরণটির ক্ষেত্রে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর বিভিন্ন মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	1	0	2	-1	-4
$y = -3^x$	-3	-1	-9	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{81}$

ছক কাগজে (x, y) এর মানগুলো স্থাপন করে নিচের লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।



চিত্রে লক্ষ করি : (i) x ঋণাত্মক এবং $|x|$ যথেষ্ট বড় হলে y এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় যদিও শূন্য হয় না অর্থাৎ $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$। y এর মান সর্বদাই x অক্ষের নিচে অবস্থান করে।

(ii) x ধনাত্মক হলে y এর মান সর্বদা ঋণাত্মক হয়। এক্ষেত্রে y এর মান x অক্ষের নিচে যায়। কারণ $y = -3^x$। কিন্তু $y = 3^x$ ফাংশন, $y = -3^x$ ফাংশনের x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ফাংশন। যেহেতু $y = 3^x$ ফাংশন সূচকীয় ফাংশন। তাই $y = -3^x$ ফাংশনও সূচকীয় ফাংশন।

প্রশ্ন ▶ ৪৩ $p = a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $f(x) = \log_e \frac{4+x}{4-x}$ । *[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা]*

ক. $(16)^x = (64)^y$ হলে $\frac{x}{y}$ এর মান বের কর। ২

খ. $p = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(16)^x = (64)^y$

বা, $(4^2)^x = (4^3)^y$

বা, $4^{2x} = 4^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore$ $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৭

গ সৃজনশীল ৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶ ৪৪ $p^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a^{3-x}.\ b^{5x} = a^{5+x}.\ b^{3x}$ *[গভর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, কুমিল্লা]*

ক. p এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $3p^3 + 9p - 8 = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৪১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭০

প্রশ্ন ▶ ৪৫ $P = x^{a-b}, Q = x^{b-c}, R = x^{c-a}$ *[আল-আমিন একাডেমি স্কুল এন্ড কলেজ, চাঁদপুর]*

ক. $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$ হলে, দেখাও যে, $b + c = 2a$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+Q+P^{-1}} + \frac{1}{1+R+Q^{-1}} + \frac{1}{1+P+R^{-1}} = 1$ ৪

গ. দেখাও যে, $(c+a)\log(PQ) + (a+b)\log(QR) + (b+c)\log(PR) = 0$ ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৭

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $A = P^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $f(x) = \ln(1+x); x \geq 0$ *[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী]*

ক. $(25)^x = (125)^y$ হলে $x : y$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A = 0$ হলে দেখাও যে, $3p^3 + 9p = 8$ ৪

গ. $f(x)$ এর বর্ণনাসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৩নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৭

প্রশ্ন ▶ ৪৭ (i) $x^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ *[লক্ষ্মীপুর আদর্শ সামাদ সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর]*

(ii) $\frac{\log p}{y-z} = \frac{\log q}{z-x} = \frac{\log r}{x-y}$

ক. $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ এর মান কত? ২

খ. (i) নং হতে দেখাও যে, $3x^3 + 9x = 8$ ৪

গ. (ii) নং হতে দেখাও যে, $p^xq^yr^z = 1$ ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}\times\frac{a}{a+b}}$ [∵ $(a^p)^q = a^{pq}$]

$= x^{\frac{1}{a}\times\frac{a^2-b^2}{a-b}\times\frac{a}{a+b}} = x^{\frac{1}{a}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}\times\frac{a}{(a+b)}}$

$= x^1 = x$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৪১(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৭০

গ ধরি, $\frac{\log p}{y-z} = \frac{\log q}{z-x} = \frac{\log r}{x-y} = m$

$\therefore \log p = m(y - z)$

বা, $x\log p = mx(y-z)$ [উভয়পক্ষকে x দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log p^x = m(xy - xz)$............(i)

আবার, $\log q = m(z-x)$

বা, $y\log q = my(z-x)$ [উভয়পক্ষকে y দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log q^y = m(zy - xy)$ ....(ii)

এবং $\log r = m(x-y)$

বা, $z\log r = mz(x-y)$ [উভয়পক্ষকে z দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log r^z = m(zx - yz)$ ....(iii)

(i) নং + (ii) নং + (iii) নং করে পাই,

$\log p^x + \log q^y + \log r^z = m(xy - zx + zy - xy + zx - yz)$

বা, $\log p^x.q^y.r^z = m \times 0$

বা, $\log p^xq^yr^z = 0$

বা, $\log p^xq^yr^z = \log 1$

$\therefore p^xq^yr^z = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮ $a^x = b^y = c^z$ যেখানে, $a \neq b \neq c$. *[নোয়াখালী জিলা স্কুল, নোয়াখালী]*

ক. $b = z$ এবং $c = y$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = y^{\frac{y}{z}-1}$ ২

খ. $abc = 1$ হলে উদ্দিপকের আলোকে দেখাও যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ৪

গ. a, b এবং c ক্রমিক সমানুপাতী হলে উদ্দিপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$ এবং b = z ও c = y

সুতরাং, $z^y = y^Z \therefore z = y^{\frac{z}{y}}$

বামপক্ষ = $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}}$

$= \left(\frac{y}{y^{\frac{z}{y}}}\right)^{\frac{y}{z}} = \frac{y^{\frac{y}{z}}}{y^{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}} = \frac{y^{\frac{y}{z}}}{y^1} = y^{\frac{y}{z}-1}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = y^{\frac{y}{z}-1}$ **(দেখানো হলো)**

খ ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$

$\therefore a^x = k$

বা, $a = k^{\frac{1}{x}}$

অনুরূপভাবে, $b = k^{\frac{1}{y}}$ এবং $c = k^{\frac{1}{z}}$

এখন, abc = 1

বা, $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}.k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^0$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৪

প্রশ্ন ▶৪৯ $a^x = b^y = c^z$ যেখানে $a \neq b \neq c$ এবং $9^{2p} = 3^{p+1}$.

[ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি x = 2 এবং y = 3 হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}$. ৪

গ. abc = 1 হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0$ এবং $x^{-3}+y^{-3}+z^{-3} = 3(xyz)^{-1}$. ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $9^{2p} = 3^{p+1}$

বা, $(3^2)^{2p} = 3^{p+1}$

বা, $3^{4p} = 3^{p+1}$

বা, 4p = p + 1

বা, 3p = 1

$\therefore p = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a^x = b^y$

x = 2 এবং y = 3 হলে, $a^2 = b^3$

অত:পর সৃজনশীল ৬(খ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৯

গ সৃজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৫০ a, b, c ∈ R, x, y, z ∈ Q এবং

i. $a^x = b^y = c^z$ ii. $a^x = b, b^y = c, c^z = a$

[চট্টগ্রাম সিটি কর্পোরেশন আন্দ্রু বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. ii. নং হতে দেখাও যে, xyz = 1 ২

খ. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $x^{-1}+z^{-1} = 2y^{-1}$ ৪

গ. (i) নং হতে দেখাও যে, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$, যখন abc = 1 ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক (ii) নং এ দেওয়া আছে,

$a^x = b, b^y = c, c^z = a$

এখানে, $c^z = a$

বা, $(b^y)^z = a$

বা, $b^{yz} = a$

বা, $(a^x)^{yz} = a$

বা, $a^{xyz} = a^1$

$\therefore$ xyz = 1 **(দেখানো হলো)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৪

গ সৃজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৫১ $P = \frac{x^a}{x^b}, Q = \frac{x^b}{x^c}$ এবং $R = \frac{x^c}{x^a}$ *[আগ্রাবাদ সরকারী কলোনী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*

ক. P = 1 হলে প্রমাণ কর যে, a = b ২

খ. দেখাও যে, $P^{a+b-c}. Q^{b+c-a}. R^{c+a-b} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে,

$(a^2+ab+b^2)\log_K P + (b^2+bc+c^2)\log_K Q + (c^2+ca+a^2)\log_K R = 0$ ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = \frac{x^a}{x^b}$

বা, $P = x^{a-b}$

বা, $1 = x^{a-b}$ [P = 1]

বা, $x^0 = x^{a-b}$

বা, a – b = 0

$\therefore$ a = b **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল ৭(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৯

গ সৃজনশীল ৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৯

প্রশ্ন ▶৫২ $A = a^{x-y}, B = a^{y-z}, C = a^{z-x}$ *[চট্টগ্রাম সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*

ক. প্রমাণ কর যে, ABC = 1 ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+B+A^{-1}}+\frac{1}{1+C+B^{-1}}+\frac{1}{1+A+C^{-1}} = 1$। ৪

গ. দেখাও যে, $(x-y)\log_k\left(\frac{A}{B}\right)+(y-z)\log_k\left(\frac{B}{C}\right)+(z-x)\log_k\left(\frac{C}{A}\right)$

$= \frac{3}{2}[(x-y)^2\log_k a + (y-z)^2\log_k a + (z-x)^2\log_k a]$ ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ = ABC

$= a^{x-y}. a^{y-z}. a^{z-x}$

$= a^{x-y+y-z+z-x}$

$= a^0$

= 1

= ডানপক্ষ

$\therefore$ ABC = 1 **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৫৭

গ বামপক্ষ = $(x-y)\log_k\left(\frac{A}{B}\right)+(y-z)\log_k\left(\frac{B}{C}\right)+(z-x)\log_k\left(\frac{C}{A}\right)$

$= (x-y)\log_k\frac{a^{x-y}}{a^{y-z}}+(y-z)\log_k\frac{a^{y-z}}{a^{z-x}}+(z-x)\log_k\frac{a^{z-x}}{a^{x-y}}$

$= (x-y)\log_k a^{x-2y+z}+(y-z)\log_k a^{y-2z+x}+(z-x)\log_k a^{z-2x+y}$

$= \log_k a^{(x-y)(x-2y+z)}+\log_k a^{(y-z)(y-2z+x)}+\log_k a^{(z-x)(z-2x+y)}$

$= \log_k a^{x^2-2xy+xz-xy+2y^2-yz}. a^{y^2-2yz+xy-yz+2z^2-xz}. a^{z^2-2zx+yz-xz+2x^2-xy}$

$= \log_k a^{x^2+2y^2-3xy+xz-yz+y^2+2z^2-3yz+xy-xz+z^2-3zx+2x^2+yz-xy}$

$= \log_k a^{3x^2+3y^2+3z^2-3xy-3yz-3zx}$

$= \frac{3}{2}\log_k a^{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx}$

$= \frac{3}{2}\log_k a^{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$

$= \frac{3}{2}\left[\log_k a^{(x-y)^2}+\log_k a^{(y-z)^2}+\log_k a^{(z-x)^2}\right]$

$= \frac{3}{2}[(x-y)^2\log_k a+(y-z)^2\log_k a+(z-x)^2\log_k a]$

= ডানপক্ষ

$\therefore (x-y)\log_k\left(\frac{A}{B}\right) + (y-z)\log_k\left(\frac{B}{C}\right) + (z-x)\log_k\left(\frac{C}{A}\right)$

$= \frac{3}{2}[(x-y)^2\log_k a + (y-z)^2\log_k a + (z-x)^2\log_k a]$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৫৩ $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ এবং $f(x) = y = \ln\frac{2+x}{2-x}$

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. $f(x)$-এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৪১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭০

খ সৃজনশীল ৪১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭০

গ ধরি, $y = f(x) = \{n\frac{2+x}{2-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

$\therefore \frac{2+x}{2-x} > 0$ যদি (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়

(i) নং হতে পাই, $x > -2$ এবং $-x > -2$

বা, $x > -2$ এবং $x < 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -2 < x\} \cap \{x : x < 2\}$

$= (-2, \infty) \cap (-\infty, 2)$

$= (-2, 2)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -2$ এবং $-x < -2$

বা, $x < -2$ এবং $x > 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -2\} \cap \{x : x > 2\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-2, 2) \cup \varnothing = (-2, 2)$

রেঞ্জ: $y = f(x) = \{n\frac{2+x}{2-x}$

বা, $e^y = \frac{2+x}{2-x}$

বা, $2 + x = 2e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 2(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{2(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_f = (-2, 2)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$

প্রশ্ন ▶৫৪ $A = p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $f(x) = ln(1 + x); x \geq 0.$

[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

ক. $(25)^x = (125)^y$ হলে $x : y$ = কত নির্ণয় কর। ২

খ. $A = 0$ হলে দেখাও যে, $3p^3 + 9p = 8$। ৪

গ. $f(x)$ এর বর্ণনাসহ লেখচিত্র আঁক। ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৩ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৭

প্রশ্ন ▶৫৫ $f(x) = 2^x$ *[সরকারি জুবিলী উচ্চ বিদ্যালয়, সুনামগঞ্জ]*

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ। ৪

গ. প্রদত্ত ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক। ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে $y = 2^x$

ধরি, $y = f(x) = 2^x$

x এর ঋণাত্মক যেকোনো মানের জন্য $f(x)$ এর মান কোনো সময় 0 (শূন্যের) খুবই কাছাকাছি পৌছায়। কিন্তু শূন্য (0) হয় না অর্থাৎ,

$x \to -\infty, y \to 0$

একইভাবে, x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে ডানদিকে (উপরের) বৃদ্ধি পেতে থাকবে। অর্থাৎ

∞ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $x \to \infty, y \to \infty$

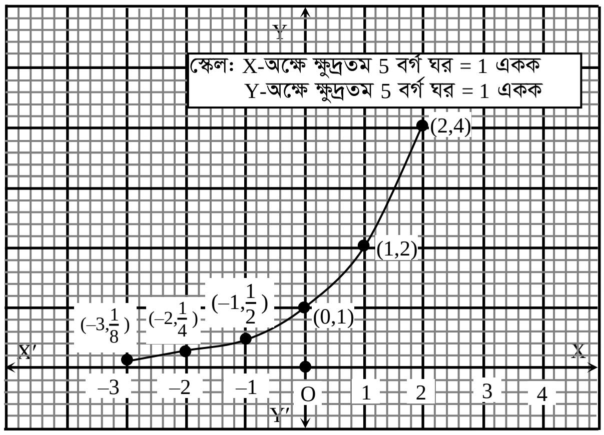
সুতরাং ডোমেন $(D) = (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $(R) = (0, \infty)$ **(Ans.)**

খ ধরি, $f(x) = 2^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো।

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়–



লেখচিত্রটির বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি (0, 1) বিন্দুগামী।

(ii) x এর যেকোনো মানের জন্য y ধনাত্মক।

(iii) লেখচিত্রটি ক্রমবর্ধমান।

(iv) x এর মান হ্রাস পাওয়ার সাথে সাথে লেখটি x-অক্ষের নিকবর্তী হয়।

(v) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন।

গ দেওয়া আছে,

$y = 2^x$

মনে করি, $f^{-1}(x) = a$

বা, $x = f(a)$ বা, $x = 2^a$ বা, $\log_2 x = a$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 x$

মনে করি, $x_1 \in \nabla, x_2 \in \nabla$

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_2 x_1 = \log_2 x_2$

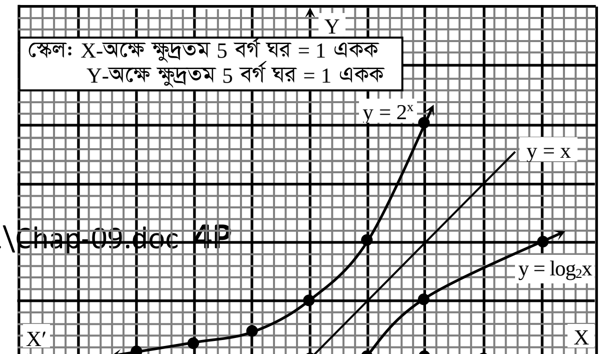
$\therefore x_1 = x_2$

সুতরাং বিপরীত ফাংশনটি এক-এক। **(Ans.)**

$y = \log_2 x$ লেখচিত্র অঙ্কন:

যেহেতু $\log_2 x$ হলো $y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন। $y = x$ রেখা সাপেক্ষ সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে যা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সদৃশ।

এখানে ডোমেন $(D) = (0, \infty)$ এবং রেঞ্জ $(R) = (-\infty, \infty)$



প্রশ্ন ▶৫৬ $a^x = b^y = c^z$, যেখানে $a \neq b \neq c$.

[বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার]

ক. যদি $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$ হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $ab = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. ৪

গ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$. ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৫৭ $A = ab^{z-1}, B = ab^{x-1}, C = ab^{y-1}$, যেখানে $a > 0, b > 0$ এবং $x \neq y \neq z$.

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর]

ক. $\log_{\sqrt{3}}(2x + 3) = 2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\log_k A^{x-y} + \log_k B^{y-z} + \log_k C^{z-x}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $ABC = \frac{a^3}{b^3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_{\sqrt{3}}(2x + 3) = 2$

বা, $2x + 3 = (\sqrt{3})^2$

বা, $2x + 3 = 3$

$\therefore x = 0$ **(Ans.)**

খ $\log_k A^{x-y} + \log_k B^{y-z} + \log_k C^{z-x}$

$= \log_k (ab^{z-1})^{x-y} + \log_k (ab^{x-1})^{y-z} + \log_k (ab^{y-1})^{z-x}$

$= \log_k a^{x-y} + \log_k b^{zx-zy-x+y} + \log_k a^{y-z} + \log_k b^{xy-zx-y+z} + \log_k a^{z-x} + \log_k b^{zy-xy-z+x}$

$= \log_k a^{x-y} + \log_k a^{y-z} + \log_k a^{z-x} + \log_k b^{zx-zy-x+y} + \log_k b^{xy-zx-y+z} + \log_k b^{zy-xy-z+x}$

$= \log_k (a^{x-y}.a^{y-z}.a^{z-x}) + \log_k (b^{zx-zy-x+y}.b^{xy-zx-y+z}.b^{zy-xy-z+x})$

$= \log_k a^{x-y+y-z+z-x} + \log_k b^{zx-zy-x+y+xy-zx-y+z+zy-xy-z+x}$

$= \log_k a^0 + \log_k b^0$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0 + 0 = 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $ABC = \frac{a^3}{b^3}$

বা, $ab^{z-1}.\ ab^{x-1}.\ ab^{y-1} = \frac{a^3}{b^3}$

বা, $a^3b^{z-1+x-1+y-1} = a^3b^{-3}$

বা, $b^{x+y+z-3} = b^{-3}$

বা, $x + y + z - 3 = -3$

বা, $x + y = -z$

বা, $(x + y)^3 = (-z)^3$

বা, $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(-z) = 0$ [□ $x + y = -z$]

$\therefore x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫৮ একটি গুণোত্তর ধারার $a = \frac{1}{5y + 2} = r$ এবং $F(x) = \ln\frac{3 + x}{3 - x}$

[বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল]

ক. $y = 1$ হলে ধারাটির ৫ম পদ কত? ২

খ. অসীম গুণোত্তর ধারাটি গঠন কর। y এর উপর প্রযোজ্য শর্তসহ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. F(x) এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a = \frac{1}{5y + 2} = r$

$y = 1$ হলে পাই, $a = \frac{1}{5.1 + 2} = r$

$\therefore a = \frac{1}{7} = r$

$\therefore$ ধারাটির ৫ম পদ $= ar^{5-1} = ar^4$

$= \frac{1}{7}.\left(\frac{1}{7}\right)^4$

$= \frac{1}{7^5}$ **(Ans.)**

খ অসীম গুণোত্তর ধারাটি,

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ ....$

$= \frac{1}{5y + 2} + \frac{1}{5y + 2}.\frac{1}{5y + 2} + \frac{1}{5y + 2}.\frac{1}{(5y + 2)^2} + ...$

$\therefore \frac{1}{5y + 2} + \frac{1}{(5y + 2)^2} + \frac{1}{(5y + 2)^3} + ...$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{5y + 2}\right| < 1$

বা, $|5y + 2| > 1$

বা, $-1 > 5y + 2 > 1$

বা, $-1 - 2 > 5y > 1 - 2$

বা, $-3 > 5y > -1$

$\therefore \frac{-3}{5} > y > \frac{-1}{5}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $y < \frac{-3}{5}$ অথবা

$y > -\frac{1}{5}$ হয়। **(Ans.)**

অসীমতক সমষ্টি $= \frac{a}{1 - r}$

$= \dfrac{\frac{1}{5y + 2}}{1 - \frac{1}{5y + 2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{5y + 2}}{\frac{5y + 2 - 1}{5y + 2}}$

$= \frac{1}{5y + 2} \times \frac{5y + 2}{5y + 1}$

$= \frac{1}{5y + 1}$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = F(x) = \ell n\frac{3 + x}{3 - x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{3 + x}{3 - x} > 0$ যদি (i) $3 + x > 0$ এবং $3 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $3 + x < 0$ এবং $3 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই, $x > -3$ এবং $-x > -3$

বা, $x > -3$ এবং $x < 3$

$\therefore$ ডোমেন $= (x : -3 < x\} \cap \{x : x < 3\}$
$= (-3, \infty) \cap (-\infty, 3)$
$= (-3, 3)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -3$ এবং $-x < -3$

বা, $x < -3$ এবং $x > 3$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -3\} \cap \{x : x > 3\}$
$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ
$= (-3, 3) \cup \varnothing = (-3, 3)$

রেঞ্জ : $y = F(x) = \ell n \frac{3 + x}{3 - x}$

বা, $e^y = \frac{3 + x}{3 - x}$

বা, $3 + x = 3e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 3(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{3(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_F = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_F = (-3, 3)$

এবং রেঞ্জ $R_F = \nabla$

প্রশ্ন ▶ ৫৯ $\sqrt[\frac{1}{3}]{x} = \sqrt[\frac{1}{5}]{y}$ এবং $f(x) = \ln \frac{6 + x}{6 - x}$

[বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল]

ক. $\frac{a + \sqrt{a}\, b}{a - b^2} - \frac{b}{\sqrt{a} - b}$ কে সরলীকরণ কর। ২

খ. দেখাও যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{-2}{5}}$ ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{a + \sqrt{ab}}{a - b^2} - \frac{b}{\sqrt{a} - b}$

$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b) - b(a - b^2)}{(a - b^2)(\sqrt{a} - b)}$

$= \frac{\sqrt{a}(a - b^2) - b(a - b^2)}{(a - b^2)(\sqrt{a} - b)}$

$= \frac{(a - b^2)(\sqrt{a} - b)}{(a - b^2)(\sqrt{a} - b)}$

$= 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt[\frac{1}{3}]{x} = \sqrt[\frac{1}{5}]{y}$

$\therefore x^3 = y^5$

বামপক্ষ $= \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{5}}$

$= \left(\frac{x^5}{y^5}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{5}}$

$= \left(\frac{x^5}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y^3}{y^5}\right)^{\frac{1}{5}}$

$= (x^2)^{\frac{1}{3}} + (y^{-2})^{\frac{1}{5}}$

$= x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{-2}{5}}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{-2}{5}}$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ell n \frac{6 + x}{6 - x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{6 + x}{6 - x} > 0$ যদি (i) $6 + x > 0$ এবং $6 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $6 + x < 0$ এবং $6 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -6$ এবং $-x > -6$

বা, $x > -6$ এবং $x < 6$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -6 < x\}$ এবং $(x : x < 6\}$
$= (-6, \infty) \cap (-\infty, 6) = (-6, 6)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -6$ এবং $-x < -6$

বা, $x < -6$ এবং $x > 6$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -6\} \cap (x : x > 6\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-6, 6) \cup \varnothing = (-6, 6)$

ধরি, $y = f(x) = \ell n \frac{6 + x}{6 - x}$

বা, $e^y = \frac{6 + x}{6 - x}$

বা, $6 + x = 6e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 6(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{6(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_f = (-6, 6)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$

প্রশ্ন ▶ ৬০ $g(x) = 5^x$ এবং $f(x) = \frac{b + x}{b - x}$, $b > 0$ এবং পূর্ণসংখ্যা।

[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]

ক. $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হলে x = কত? ২

খ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর ও এটি এক–এক কিনা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৮৪

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{b + x}{b - x}$, $b > 0$

এখানে, $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $b - x \neq 0$

অর্থাৎ $x \neq b$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f(x) = \nabla - \{b\}$ **(Ans.)**

ধরি, $y = f(x) = \frac{b + x}{b - x}$

$\therefore x = f^{-1}(y)$

এখন, $y = \frac{b + x}{b - x}$

বা, $by - xy = b + x$

বা, $x + xy = by - b$

বা, $x(1 + y) = b(y - 1)$

$\therefore x = \frac{b(y - 1)}{y + 1} = f^{-1}(y)$

এখানে, $y = -1$ বসালে $f^{-1}(y)$ অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f(x) = \nabla - \{-1\}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 5^x$

ধরি, $g^{-1}(x) = a$

$\therefore x = g(a)$

বা, $x = 5^a$

বা, $\log_5 x = \log_5 5^a$

বা, $\log_5 x = a \log_5 5$

$\therefore$ $a = \log_5 x$

$\therefore$ $g^{-1}(x) = \log_5 x$ **(Ans.)**

মনে করি, $x_1, x_2 \in \nabla$, এখন, $g^{-1}(x)$ এক-এক হবে যদিও কেবল যদি $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

$\therefore$ $g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2)$

বা, $\log_5 x_1 = \log_5 x_2$

বা, $x_1 = x_2$

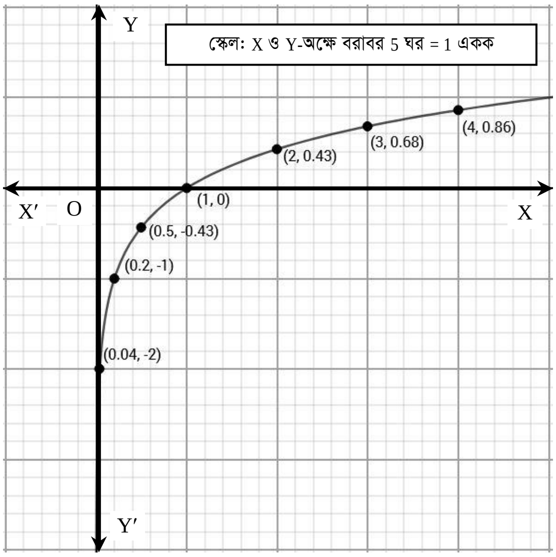
$\therefore$ $g^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক **(Ans.)**

ধরি, $g^{-1}(x) = \log_5 x$

x এর কয়েকটি মানের জন্য $g^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0.04	0.2	0.5	1	2	3	4
$g^{-1}(x)$	–2	–1	–0.43	0	0.43	0.68	0.86

সারণি হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো X অক্ষ এবং Y অক্ষ বরাবর প্রতি পাঁচ ঘর সমান এক একক ধরে ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



প্রশ্ন ▶৬১ (i) $4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$

(ii) $p - 1 = \log_a bc$, $q - 1 = \log_b ca$ এবং $r - 1 = \log_c ab$

[নরসিংদী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নরসিংদী]

ক. $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের (i) এর সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $pq + qr + rp - pqr = 0$ ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.২ এর উদাহরণ ৫(ii) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৯০

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১৬ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৮৬

গ সৃজনশীল ১৫(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৬২

প্রশ্ন ▶৬২ দেখাও যে, $f(x) = \log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ একটি ফাংশন।

[ফুলবাড়ী জি.এম. পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, দিনাজপুর]

ক. $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ ৪

গ. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.২ এর উদাহরণ ৫(ii) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৯০

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \log_e \frac{1+x}{1-x} = ln\frac{1+x}{1-x}$

$$\text{বামপক্ষ} = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$= ln\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}$$

$$= ln\frac{\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}}$$

$$= ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$$

$$= ln\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$$

$$= 2\,ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$= 2f(x)$$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \log_e\frac{1+x}{1-x} = ln\frac{1+x}{1-x}$

লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ $\frac{1+x}{1-x} > 0$ হবে যদি

(i) $1 + x > 0$ এবং $1 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $1 + x < 0$ এবং $1 - x < 0$ হয়

(i) হতে পাই, $x > -1$ এবং $-x > -1$

বা, $x > -1$ এবং $x < 1$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -1 < x\} \cap \{x : x < 1\}$

$= (-1, \infty) \cap (\infty, 1)$

$= (-1, 1)$

(ii) হতে পাই, $x < -1$ এবং $-x < -1$

বা, $x < -1$ এবং $x > 1$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -1\} \cap \{x : x > 1\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন, D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-1, 1) \cup \varnothing$

$= (-1, 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৬৩ (i) $b - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$; $b \in \nabla$. (ii) $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

[আরসিসিআই পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]

ক. লগারিদম কী? ২

খ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ ৪

গ. (ii) নং হতে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যদি $a^x = b$ হয় যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তবে x কে b এর a ভিত্তিক লগারিদম বলা হয় এবং একে লিখা হয় $x = \log_a b$.

খ দেওয়া আছে, $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $b - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(b-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 3^2 + 3 + 3.3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}.(b-1)$ $\left[\because 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} = b - 1\right]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 9 + 3 + 3\cdot3^1(b - 1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 - 12 - 9b + 9 = 0$

$\therefore$ $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৬২

প্রশ্ন ▶৬৪ $a = \log_p(qr)$, $b = \log_q(rp)$ এবং $c = \log_r pq$ এবং $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ *[নীলফামারী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নীলফামারী]*

ক. $c = 2$ হলে দেখাও যে, $r = \sqrt{pq}$ ২

খ. $F(x)$ কে $x - u$ এবং $x - v$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $u \neq v$ তবে দেখাও যে, $u^2 + v^2 + uv + 6u + 6v + 11 = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 0$ ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২ নং সমাধান দষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৭

প্রশ্ন ▶৬৫ $a^x = b^y = c^z$ যেখানে $a \neq b \neq c$।
[লাকসাম পাইলট বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিল্লা]

ক. $\log_{3\sqrt{2}} 324$ এর মান কত? ২

খ. যদি $ab = c^2$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_{3\sqrt{2}} 324 = \log_{3\sqrt{2}} \{3^4.(\sqrt{2})^4\}$

$= \log_{3\sqrt{2}} (3\sqrt{2})^4$

$= 4 \log_{3\sqrt{2}} 3\sqrt{2}$

$= 4$ **(Ans.)** $[\because \log_a a = 1]$

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.১ এর উদাহরণ ১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৪

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৬৬ $A = xy^{p-1}$, $B = xy^{q-1}$, $C = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = ln\frac{2-x}{2+x}$
[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. যদি $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $A^{q-r}.B^{r-p}.C^{p-q} = 1$ ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৪

খ দেওয়া আছে, $A = xy^{p-1}$, $B = xy^{q-1}$ এবং $C = xy^{r-1}$

বামপক্ষ $= A^{q-r}.B^{r-p}.C^{p-q} = (xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r}y^{(p-1)(q-r)}.x^{r-p}y^{(q-1)(r-p)}.x^{p-q}y^{(r-1)(p-q)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}.y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q}$

$= x^0.y^0$

$= 1 \times 1$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore A^{q-r}.B^{r-p}.C^{p-q} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ৫৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭২

প্রশ্ন ▶৬৭ $P = \frac{x^a}{x^b}$, $Q = \frac{x^b}{x^c}$ এবং $R = \frac{x^c}{x^a}$ *[সেন্ট স্কলাসটিকাস গার্লস হাই স্কুল, চট্টগ্রাম]*

ক. $Q = 1$ হলে, দেখাও যে, $b = c$ ২

খ. দেখাও যে, $P^{a+b-c}.Q^{b+c-a}.R^{c+a-b} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে,
$(a^2 + ab + b^2)\log_k P + (b^2 + bc + c^2)\log_k Q + (c^2 + ca + a^2)\log_k R = 0$ ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন ৭ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৯

প্রশ্ন ▶৬৮ $A = a^{x-y}$, $B = a^{y-z}$, $C = a^{z-x}$ হলে
[সীতাকুন্ড বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. $ABC = 1$ প্রমাণ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+B+A^{-1}} + \frac{1}{1+C+B^{-1}} + \frac{1}{1+A+C^{-1}}$ ৪

গ. দেখাও যে, $(x - y)\log_k\left(\frac{A}{B}\right) + (y - z)\log_k\left(\frac{B}{C}\right) + (z - x)\log_k\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{3}{2}[(x-y)^2]\log_k a + (y-z)^2\log_k a + (z-x)^2\log_k a]$ ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫২ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৭২

প্রশ্ন ▶৬৯ $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = ln\frac{4+x}{4-x}$
[কানাইঘাট সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

ক. $a^x = b^y = c^z = 1$ হলে দেখাও যে, $x + y + z = 0$ ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$(q - r)\log_k a + (r - p)\log_k b + (p - q)\log_k c = 0$ ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z = 1$

অর্থাৎ, $a^x = 1 = a^0$, $\therefore x = 0$ | $b^y = 1 = b^0$, $\therefore y = 0$ | $c^z = 1 = c^0$, $\therefore z = 0$

বামপক্ষ $= x + y + z$

$= 0 + 0 + 0$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $x + y + z = 0$ **(দেখানো হলো)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

গ সৃজনশীল ৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

প্রশ্ন ▶৭০ (i) $25^y = 6.5^{y+1} - 5^3$ (ii) $\log\left(\frac{m-n}{8}\right) = \frac{1}{2}\log mn$
[বি.কে.জি.সি. সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]

ক. যদি $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}}$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $a + b + c = 0$ ২

খ. (i) নং কে সমাধান কর। ৪

গ. (ii) নং এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 66$ ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}} = k$

$\therefore$ $x = k^a$, $y = k^b$ এবং $z = k^c$

প্রশ্নমতে, $xyz = 1$

বা, $k^a.k^b.k^c = 1$

বা, $k^{a+b+c} = k^0$

$\therefore$ $a + b + c = 0$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $25^y = 6.5^{y+1} - 5^3$

বা, $(5^2)^y = 6.5^y.5^1 - 125$

বা, $(5^y)^2 = 30.5^y - 125$

বা, $p^2 = 30p - 125$ [ধরি, $5^y = p$]

বা, $p^2 - 30p + 125 = 0$

বা, $p^2 - 25p - 5p + 125 = 0$

বা, $p(p - 25) - 5(p - 25) = 0$

$\therefore$ $(p - 25)(p - 5) = 0$

হয়, $p - 25 = 0$ অথবা $p - 5 = 0$

বা, $5^y = 25 = 5^2$ বা, $5^y = 5 = 5^1$ [$\because p = 5^y$]

$\therefore$ $y = 2$ $\therefore y = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $y = 1$ অথবা 2

গ $\log\left(\frac{m-n}{8}\right) = \frac{1}{2}\log mn$

বা, $2\log\left(\frac{m-n}{8}\right) = \log mn$

বা, $\log\left(\frac{m-n}{8}\right)^2 = \log mn$

বা, $\frac{m^2 - 2mn + n^2}{64} = mn$

বা, $m^2 + n^2 - 2mn = 64mn$

বা, $m^2 + n^2 = 66mn$

বা, $\frac{m^2}{mn} + \frac{n^2}{mn} = 66$

$\therefore$ $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = 66$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭১ $f : \nabla - \{-1\} \to \nabla - \{2\}$ এবং $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$; $g(x) = 4^x$

[জুড়ি মডেল উচ্চ বিদ্যালয়, মৌলভীবাজার]

ক. $f(x) = 5$ হলে x এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $f(x)$ এক-এক এবং অনটু ফাংশন। ৪

গ. $g(x)$ এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে উহার লেখচিত্র আঁক। ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক শর্তমতে, $f(x) = 5$

বা, $\frac{2x+5}{x+1} = 5$ [দেওয়া আছে]

বা, $5x + 5 = 2x + 5$

বা, $5x - 2x = 5 - 5$

বা, $3x = 0$

$\therefore$ $x = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$

$f(x)$ এক-এক ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি $a, b \in$ ডোম f এর জন্য $f(a) = f(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $f(a) = f(b)$

বা, $\frac{2a+5}{a+1} = \frac{2b+5}{b+1}$

বা, $2ab + 5b + 2a + 5 = 2ab + 2b + 5a + 5$

বা, $5b - 2b = 5a - 2a$

বা, $3b = 3a$

$\therefore$ $a = b$

$\therefore$ $f(x)$ এক-এক ফাংশন। **(প্রমাণিত)**

ধরি, $y = f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$

বা, $xy + y = 2x + 5$

বা, $xy - 2x = 5 - y$

বা, $x(y - 2) = 5 - y$

$\therefore$ $x = \frac{5-y}{y-2}$ = কোডোমেন

$\therefore$ ফাংশনটি অনটু **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 4^x$

ধরি, $g^{-1}(x) = a$ ... ... (i)

বা, $x = g(a)$

বা, $x = 4^a$

বা, $\log_4 x = \log_4 4^a$

বা, $\log_4 x = a$

বা, $a = \log_4 x$

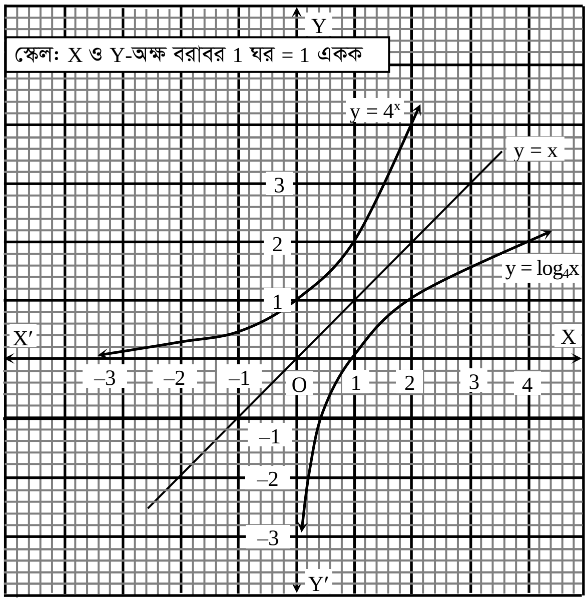
$\therefore$ $g^{-1}(x) = \log_4 x$ [(i) নং দ্বারা]

$y = \log_4 x$ এর লেখচিত্র অংকন :

যেহেতু $\log_4 x$ হলো $y = 4^x$ এর বিপরীত।

সুতরাং $y = x$ রেখা সাপেক্ষে সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে যা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সদৃশ।

এখানে, ডোমেন (R) = $(0, \infty)$ এবং রেঞ্জ (D) = $(-\infty, \infty)$



প্রশ্ন ▶ ৭২ (i) $p^2 + q^2 - 7pq = 0$

(ii) $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ *[উদয়ন মাধ্যমিক বিদ্যালয়, বরিশাল]*

ক. $9^{2m} = 3^{m+1}$ হলে m এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. (i) নং অনুসারে দেখাও যে, $\log\frac{p+q}{3} = \frac{1}{2}(\log p + \log q)$. ৪

গ. (ii) নং অনুসারে প্রমাণ কর যে, $y(z + x) = 2zx$. ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $9^{2m} = 3^{m+1}$

বা, $(3^2)^{2m} = 3^{m+1}$

বা, $4m = m + 1$

বা, $3m = 1$

$\therefore$ $m = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 - 7pq = 0$

বা, $p^2 + 2pq + q^2 = 7pq + 2pq$

বা, $(p + q)^2 = 9pq$

বা, $p + q = \sqrt{9pq}$

বা, $p + q = 3\sqrt{pq}$

বা, $\frac{p+q}{3} = (pq)^{\frac{1}{2}}$

বা, $\log\left(\frac{p+q}{3}\right) = \log(pq)^{\frac{1}{2}}$ [উভয় পক্ষে লগারিদম নিয়ে]

বা, $\log\left(\frac{p+q}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(pq)$

$\therefore \log\left(\frac{p+q}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log p + \log q)$ **(দেখানো হলো)**

গ যেহেতু $a^x = b^y \quad \therefore a = b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y \quad \therefore c = b^{\frac{y}{z}}$

প্রশ্নমতে, $b^2 = ac$

বা, $b^2 = b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{y}{z}}$

বা, $2 = \frac{y}{x} + \frac{y}{z}$

বা, $2 = \frac{yz + xy}{xz}$

বা, $2xz = y(x + z)$

$\therefore y(x + z) = 2xz$ **(প্রমাণিত)**