অধ্যায়-১২: সমতলীয় ভেক্টর

পরীক্ষার্থী বন্ধুরা, এ অধ্যায়ে বোর্ড পরীক্ষা, ক্যাডেট কলেজ, শীর্ষস্থানীয় স্কুলসমূহের নির্বাচনি পরীক্ষা এবং বাছাইকৃত এক্সক্লুসিভ মডেল টেস্টের প্রশ্নগুলোর পূর্ণাঙ্গ সমাধান দেওয়া হয়েছে। এগুলো অনুশীলন করলে তোমরা এ অধ্যায় থেকে যেকোনো সৃজনশীল প্রশ্নের সমাধান সহজেই করতে পারবে।

প্রশ্ন ▶ ১ ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে $A(1, 3), B(-1, -1), C(3, -1)$ এবং ত্রিভুজটির AB ও AC বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও F. *[ঢা. বো. ১৭]*

ক. AB এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABC ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DF \parallel BC$ এবং $DF = \frac{1}{2}BC$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,
A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 3)$ ও $(-1, -1)$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ΔABC এর শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে
$A(1, 3), B(-1, -1)$ ও $C(3, -1)$

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-3)^2}$
$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+1)^2 + (-1+1)^2}$
$= \sqrt{16+0} = 4$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2}$
$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ ΔABC এর অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{AB+BC+AC}{2}$
$= \frac{2\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}}{2}$
$= 2 + 2\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-AC)}$ বর্গ একক
$= \sqrt{(2+2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5}-2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5}-4)(2+2\sqrt{5}-2\sqrt{5})}$
$= \sqrt{(2\sqrt{5}+2)(2\sqrt{5}-2)\times 2\times 2}$
$= \sqrt{\{(2\sqrt{5})^2 - 2^2\}\times 4}$
$= \sqrt{(20-4)\times 4}$
$= \sqrt{64} = 8$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩
[বি.দ্র. E এর পরিবর্তে F নিতে হবে]

প্রশ্ন ▶ ২ ABCD চতুর্ভুজের $A(6, -4), B(2, 2), C(-2, 2), D(-6, -4)$ শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। *[ঢা. বো. ১৬]*

ক. BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এবং P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $B(2, 2)$ ও $D(-6, -4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব অর্থাৎ BD এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-6-2)^2 + (-4-2)^2}$ একক
$= \sqrt{64+36}$ একক $= \sqrt{100}$ একক $= 10$ একক **(Ans)**

খ $A(6, -4), B(2, 2), C(-2, 2)$ ও $D(-6, -4)$ বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

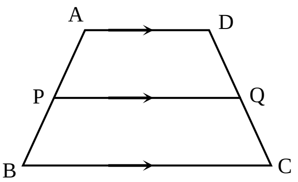
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক
$= \frac{1}{2}(12+4+8+24+8+4+12+24)$ বর্গ একক
$= \frac{1}{2}\times 96$ বর্গ একক
$= 48$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল
$= 48$ বর্গ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{48}$ একক $= \sqrt{16\times 3} = 4\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}\times$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}\times 4\sqrt{3}$ একক
$= 4\sqrt{6}$ একক **(Ans.)**

গ



এখানে, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

প্রমাণ: মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [$\because$ P, AB এর মধ্যবিন্দু]

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because$ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$
$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং PQ ভেক্টরও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

এখন $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}|$

অর্থাৎ $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

অর্থাৎ $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $A(p, 3p), B(p^2, 2p), C(p-2, p)$ এবং $D(1, 1)$ চারটি ভিন্ন বিন্দু। *[রা. বো. ১৭]*

ক. BC রেখার ঢাল $\frac{1}{2}$ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB ও CD রেখা সমান্তরাল হলে p এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত 'p' এর ঋণাত্মক মান ব্যবহার করে A, B, C, D বিন্দু দ্বারা গঠিত ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু R ও S হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $RS \parallel AB \parallel CD$ এবং $RS = \frac{1}{2}(AB + CD)$. ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(p^2, 2p)$ ও $(p-2, p)$

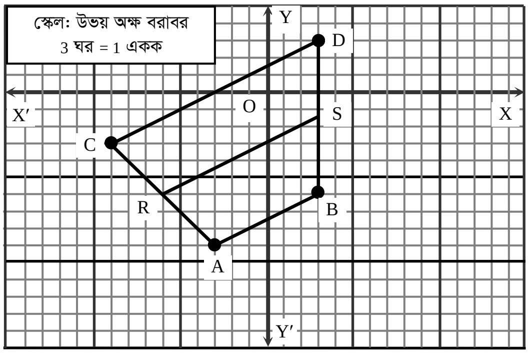
$\therefore$ BC রেখার ঢাল $= \frac{p-2p}{p-2-p^2} = \frac{-p}{p-2-p^2}$

প্রশ্নমতে, $\frac{-p}{p-2-p^2} = \frac{1}{2}$
বা, $-2p = p - 2 - p^2$
বা, $p^2 - 3p + 2 = 0$

বা, $p^2 - 2p - p + 2 = 0$
বা, $p(p - 2) - 1(p - 2) = 0$
বা, $(p - 2)(p - 1) = 0$
$\therefore$ $p = 1, 2$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১১.৩ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪৩
[**বি. দ্র.** t এর পরিবর্তে p নিতে হবে।]

গ 'খ' থেকে পাই, $p = -1$
$\therefore$ $A(p, 3p) \equiv (-1, -3)$
$B(p^2, 2p) \equiv (1, -2)$
$C(p - 2, p) \equiv (-3, -1)$
$D(1, 1)$



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AC ও BD বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং AB ও CD বাহুদ্বয় সমান্তরাল। R ও S যথাক্রমে AC ও BD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু। R, S যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, RS $\parallel$ AB $\parallel$ CD এবং RS $= \frac{1}{2}$(AB + CD).

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$।

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{d} - \underline{c}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$\therefore$ $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{c})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{d} - \underline{c})\}$

$\therefore$ $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

$\therefore$ $\left|\overrightarrow{RS}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)\right|$

সুতরাং RS $= \frac{1}{2}$(AB + CD)

কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{RS}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর সমান্তরাল হবে।

অতএব, RS $\parallel$ AB $\parallel$ CD এবং RS $= \frac{1}{2}$(AB + CD) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7,2), B(–4,2), C(–4,–3) এবং D(7,–3).

ক. AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২
খ. চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত তা নির্ণয় কর। ৪
গ. উদ্দীপকে উলিণ্ডখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(7, 2) ও C(–4,–3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x - 7}{7 - (-4)} = \frac{y - 2}{2 - (-3)}$

বা, $\frac{x - 7}{7 + 4} = \frac{y - 2}{2 + 3}$

বা, $5x - 35 = 11y - 22$

বা, $5x - 11y - 35 + 22 = 0$

$\therefore$ $5x - 11y - 13 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7, 2), B(–4, 2), C(–4, –3) এবং D(7,–3)

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7 + 4)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{(11)^2 + 0} = 11$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4 + 4)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{0 + 5^2} = 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (-3 + 3)^2} = \sqrt{121 + 0} = 11$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7 - 7)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{0 + 5^2} = 5$ একক

AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7 + 4)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{121 + 25} = \sqrt{146}$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4 - 7)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{121 + 25}$
$= \sqrt{146}$ একক

সুতরাং আমরা পাই,
AB = CD এবং BC = AD
আবার, কর্ণ AC = কর্ণ BD.
$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা– ২৬৫

প্রশ্ন ▶ ৫ ABCD চতুর্ভুজের A(6, –4), B(2, 2), C(–2, 2) এবং D(–6, –4) শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। *[রা. বো. ১৫]*

ক. AC কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২
খ. ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪
গ. P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ $\parallel$ AD $\parallel$ BC এবং PQ $= \frac{1}{2}$(AD + BC). ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, A(6, –4), C(–2, 2)

AC $= \sqrt{(-2 - 6)^2 + \{2 - (-4)\}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}$
$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(6, –4), B(2, 2), C(–2, 2) এবং D(–6, –4) যেখানে, শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।
বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{12 + 4 + 8 + 24 - (-8) - (-4) - (-12) - (-24)\}$

$= \frac{1}{2}\{48 + 8 + 4 + 12 + 24\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{48 + 48\}$ বর্গ একক

$= 48$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $a^2 = 48$ বর্গ একক
[রা. বো. ১৬]
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{48}$ একক $= 4\sqrt{3}$ একক
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= 4a = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ প্রদত্ত তথ্যানুসারে,

AD বাহুর ঢাল $= \frac{-4 + 4}{6 + 6} = 0$

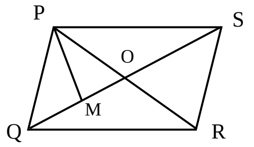
এবং BC বাহুর ঢাল $= \frac{2 - 2}{2 + 2} = 0$

$\therefore$ AD ও BC বাহু পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম

অতঃপর সৃজনশীল ২(গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৫

প্রশ্ন ▶ ৬



চিত্রে PQRS একটি সামান্তরিক। *[দি. বো. ১৬]*

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

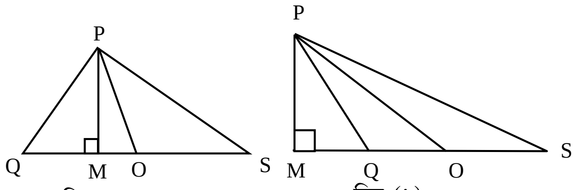
খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$. ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PO = RO এবং QO = SO. ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য:** ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

খ ΔPSQ এর PO মধ্যমা SQ বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$



চিত্র-(১) চিত্র-(২)

অঙ্কন: SQ বাহুর ওপর (চিত্র ১নং) এবং SQ বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর (চিত্র-২নং) PM লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: ΔPSO এর $\angle POS$ স্থূলকোণ এবং SO রেখার বর্ধিতাংশের উপর PO রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OM [উভয় চিত্রে]

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে, আমরা পাই, $PS^2 = PO^2 + SO^2 + 2SO.OM$ ...... (i)

আবার, ΔPQO এর $\angle POQ$ সূক্ষ্মকোণ এবং OQ রেখার (চিত্র-১নং) এবং OQ রেখার বর্ধিতাংশের (চিত্র-২নং) উপর PO রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OM.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PQ^2 = PO^2 + QO^2 - 2QO.OM$...........(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

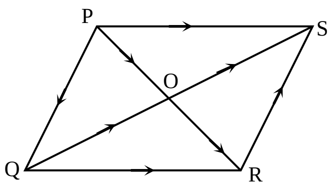
$PS^2 + PQ^2 = 2PO^2 + SO^2 + QO^2 + 2SO.OM - 2QO.OM$

$= 2PO^2 + QO^2 + QO^2 + 2QO.OM - 2QO.OM$ [SO=QO]

$= 2(PO^2 + QO^2)$

$\therefore PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, PQRS সামান্তরিকের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, $\overrightarrow{PO} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QO} = \underline{q}$, $\overrightarrow{OR} = \underline{r}$, $\overrightarrow{OS} = \underline{s}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

PO = OR এবং QO = OS

প্রমাণ:

$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{PS}$ এবং $\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR}$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

বা, $\underline{p} + \underline{s} = \underline{q} + \underline{r}$

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = \underline{q} - \underline{s}$

এখানে, $\underline{p}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক PR

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ এর ধারক PR

আবার, $\underline{q}$ ও $\underline{s}$ এর ধারক QS

$\therefore \underline{q} - \underline{s}$ এর ধারক QS

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ দুইটি সমান সমান অশুন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু PR ও QS দুইটি পরস্পরছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = 0$

বা, $\underline{p} = \underline{r}$ বা, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore |\overrightarrow{PO}| = |\overrightarrow{OR}|$

এবং $\underline{q} - \underline{s} = 0$ বা, $\underline{q} = \underline{s}$ বা, $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{OS}$

$\therefore |\overrightarrow{QO}| = |\overrightarrow{OS}|$

$\therefore$ PO = RO এবং QO = SO **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭ ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F এবং শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2, 3), B(5, 6), C(–1, 4). *[দি. বো. ১৫]*

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2}BC$. ৪

গ. ΔABC এর বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, ΔABC এ AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী, ΔABE থেকে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

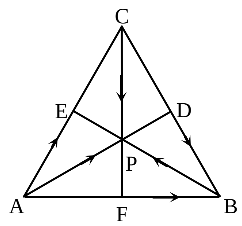
বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$ [$\because$ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}) - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$



বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}\right)$

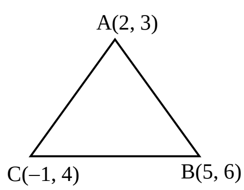
$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩

গ A, B ও C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2, 3), B(5, 6) এবং C(–1, 4)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-5)^2 + (3-6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$



$= \sqrt{9 + 9}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5 + 1)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 - 4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ একক

অর্ধপরিসীমা, $s = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + \sqrt{10}}{2} = 6{\cdot}8647$ একক

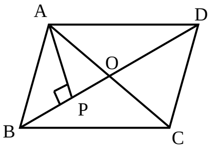
$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s - AB)(s - BC)(s - AC)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6{\cdot}8647)(6{\cdot}8647 - 3\sqrt{2})(6{\cdot}8647 - 2\sqrt{10})(6{\cdot}8647 - \sqrt{10})}$

$= \sqrt{35{\cdot}9964883}$

$= 5{\cdot}9997$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮



[কু. বো. ১৭]

চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক।

ক. AB এবং AD এর লম্ব-অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

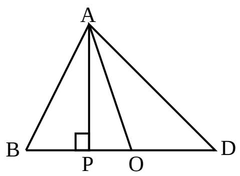
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO^2)$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, AO = OC এবং BO = OD ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক BD এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BP এবং AD এর লম্ব অভিক্ষেপ DP.

খ



বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ΔABD এর AO মধ্যমা যা BD বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে এবং $AP \perp BD$. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO^2)$

প্রমাণঃ ΔAOB এ $\angle AOB$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2BO \,.\, OP$ .... (i)

আবার, ΔAOD এর মধ্যে $\angle AOD$ স্থূলকোণ।

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই, $AD^2 = AO^2 + OD^2 + 2OD.OP$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AD^2 = AO^2 + BO^2 - 2BO \,.\, OP + AO^2 + OD^2 + 2OD.OP$

$= 2AO^2 + BO^2 - 2BO.OP + BO^2 + 2BO.OP$

[BO = OD]

$= 2AO^2 + 2BO^2$

$\therefore AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO)^2$ **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৪

প্রশ্ন ▶৯ P(7, 2), Q(–4,2), R(–4, –3) এবং S(7, –3) বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। *[কু. বো. ১৬]*

ক. PQ বাহুর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র নাকি সামান্তরিক— যাচাই কর। ৪

গ. যদি উদ্দীপকে উল্লেখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G হয়, তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, DEFG একটি সামান্তরিক। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

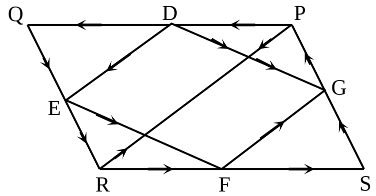
ক দেওয়া আছে,

P(7, 2) এবং Q(–4, 2)

PQ বাহুর ঢাল $= \dfrac{2 - 2}{7 - (-4)} = \dfrac{0}{7 + 4} = 0$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-

গ



PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F, G। D, E; E, F; F, G এবং D, G যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, DEFG চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণঃ মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{q}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{r}$, $\overrightarrow{SP} = \underline{s}$

P, R যোগ করা হলো।

তাহলে $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{QE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

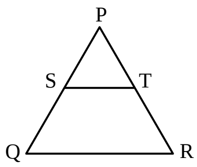
বা, $\frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{FG}$ বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF}$

$\therefore$ DE ও GF সমান ও সমান্তরাল

$\therefore$ DEFG চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১০



ΔPQR, এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T. *[কু. বো. ১৫]*

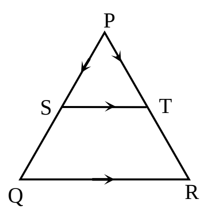
ক. $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST||QR এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. ▭ SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN||ST||QR এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$. ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔPST এ ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

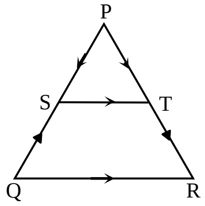
$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$ .... (i)

আবার, PR বাহুর মধ্যবিন্দু T

$\therefore \quad \overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ .... (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ



এখানে PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T. প্রমাণ করতে হবে যে,

$ST = \frac{1}{2}QR$ এবং $ST \parallel QR$.

প্রমাণ : $PS = SQ = \frac{1}{2}PQ$ এবং $PT = TR = \frac{1}{2}PR$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে ΔPQR হতে পাই,

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

আবার, ΔPST হতে পাই,

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PT} = -\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PT}$

$= \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$\therefore |\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

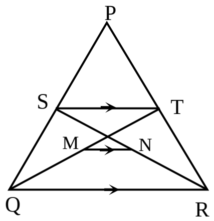
$\therefore ST = \frac{1}{2}QR$

সুতরাং, $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং, $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ ST ও QR সমান্তরাল।

$\therefore ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$ **(প্রমাণিত)**

গ



দেওয়া আছে, ΔPQR-এ S ও T যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$

$\therefore$ SQRT একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, QT ও RS কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। N, M যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে S ও T বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{s}$ ও $\underline{t}$

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

$\overrightarrow{ST} = \underline{t} - \underline{s}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t})$ [M, QT এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$ [N, RS এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s} - \underline{q} - \underline{t})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{t} - \underline{s})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST})$

$ST \parallel QR$ হওয়ায় $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore MN \parallel ST$

আবার, $ST \parallel QR$

$\therefore MN \parallel ST \parallel QR$

আবার, $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}|$

বা, $MN = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{ST}|) = \frac{1}{2}(QR - ST)$

$\therefore MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১১ P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। S ও T যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু। *[চ. বো. ১৭]*

ক. QR এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, PQR সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফল 25 বর্গ একক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 8) ও (– 2, 3)

$\therefore$ QR রেখার ঢাল $= \frac{3-8}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3)

PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{50}$ একক

QR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{50}$ একক

PR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-8)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{100}$ একক = 10 একক

যেহেতু ΔPQR এর $PQ = QR = \sqrt{50}$ একক

$\therefore \Delta PQR$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

ধরি, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{50}$ একক

এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য, b = 10 একক

আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ একক

$= \frac{10}{4}\sqrt{4(\sqrt{50})^2 - (10)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{4 \times 50 - 100} = \frac{5}{2}\sqrt{100} = \frac{5}{2} \times 10 = 25$

$\therefore \Delta PQR$ এর ক্ষেত্রফল = 25 বর্গ একক। **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৯

প্রশ্ন ▶ ১২ ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে A(2,–4), B(–4, 4) এবং C(3, a) যেখানে a > 0 *[চ. বো. ১৬]*

ক. AC = BC হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB রেখার সমীকরণ ও ঢাল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ΔABC এর যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় A(2, – 4), B(– 4, 4) এবং C(3, a)

প্রশ্নমতে, AC = BC

বা, $\sqrt{(3-2)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{(3+4)^2 + (a-4)^2}$

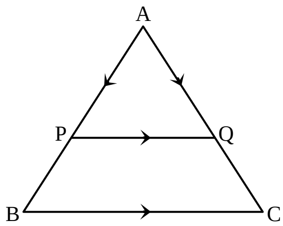
বা, $\sqrt{1 + a^2 + 8a + 16} = \sqrt{49 + a^2 - 8a + 16}$

বা, $a^2 + 8a + 17 = a^2 - 8a + 65$ [বর্গ করে]
বা, $16a = 65 - 17$
বা, $a = \frac{48}{16}$
$\therefore a = 3$ **(Ans.)**

খ $A(2, -4)$ ও $B(-4, 4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,
$\frac{x-2}{2-(-4)} = \frac{y-(-4)}{-4-4}$ বা, $\frac{x-2}{6} = \frac{y+4}{-8}$
বা, $-8x + 16 = 6y + 24$ বা, $-8x - 6y + 16 - 24 = 0$
বা, $-8x - 6y - 8 = 0$ বা, $-2(4x + 3y + 4) = 0$
$\therefore 4x + 3y + 4 = 0$ **(Ans.)**
আবার, AB রেখার ঢাল $= \frac{4-(-4)}{-4-2} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা—২৬৩

প্রশ্ন ▶ ১৩

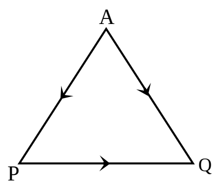


চিত্রে, ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল। *[চ. বো. ১৫]*

ক. APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা কর। ২
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Q, AC এর মধ্যবিন্দু। ৪
গ. PBCQ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC}\right)$। ৪

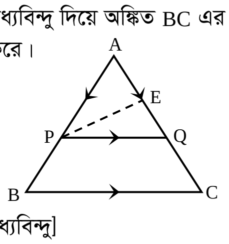
১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



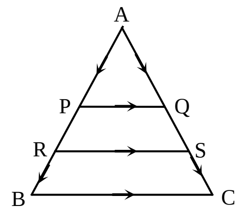
ΔAPQ-এ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ এর আদিবিন্দু একই
এবং $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ এর অন্তবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P ও Q যোগ করলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,
$\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QP}$

খ দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল PQ, AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে Q, AC এর মধ্যবিন্দু।



প্রমাণ: Q যদি $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু না হয়,
তবে ধরি, E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।
তাহলে $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [□ P, $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু]
$\therefore \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE}$
$= -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE}$ [□ $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}$]
$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [□ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু ধরে নেয়া হয়েছে]
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$]
$\therefore \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
অর্থাৎ, PE || BC কিন্তু PQ || BC (উদ্দীপকে দেয়া আছে)
তাহলে $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ রেখাদ্বয় উভয়ে P বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল।
অতএব, $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ অবশ্যই সমপাতিত হবে।
$\therefore$ E ও Q একই বিন্দু হবে।
অর্থাৎ Q, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

গ



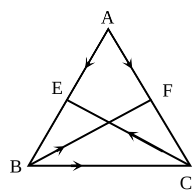
PBCQ ট্রাপিজিয়ামে R ও S যথাক্রমে PB ও QC এর মধ্যবিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$
প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P, B, C ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{q}$.
$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$
এবং $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$
$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{p} + \underline{b}}{2}$
S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{c} + \underline{q}}{2}$
$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{q}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{q}) = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b}) + \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{p})$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PQ})$
$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ ΔABC এর BC, AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. *[সি. বো. ১৭]*

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BF}$ ও $\overrightarrow{CE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২
খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2}BC$। ৪
গ. ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক A(10, 6), B(4, 0), C(14, 0) হলে, ΔABC ও ΔAEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে দেখাও যে, ΔABC : ΔAEF = 4 : 1. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔABF হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$ [ত্রিভুজবিধি]
বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF}$-
$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BF}$ .... (i)
আবার, ΔACE হতে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}) - \overrightarrow{BF}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CE}\right) - \overrightarrow{BF}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{BF}$

বা, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CE} - 4\overrightarrow{BF}$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CE} - 4\overrightarrow{BF}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CE} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BF}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু E ও F। E, F যোগ করি।

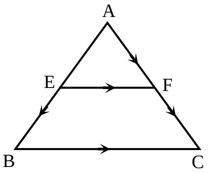
ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, BC || EF এবং $EF = \frac{1}{2}BC$।

প্রমাণ: E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

$\therefore \quad \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ΔABC হতে ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (i)

এবং ΔAEF হতে,

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$

বা, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ ‰es} \\ \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{array}\right]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

বা, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [সমীকরণ (i) হতে]

বা, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore EF = \frac{1}{2}BC$

$\therefore$ $\overrightarrow{EF}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারকরেখা একই বা সমান্ড়্রাল।

কিন্তু E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে EF ও BC এর ধারকরেখা একই হতে পারে না।

$\therefore \quad EF \parallel BC$।

সুতরাং EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2}BC$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো A(10, 6), B(4, 0) ও C(14, 0)

$\therefore \quad \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 4 & 14 & 10 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(0 + 0 + 84 - 24 - 0 - 0)$

$= \frac{1}{2} \times 60 = 30$ বর্গ একক

যেহেতু E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু

$\therefore \quad$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{10+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (7, 3)$

এবং F বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{10+14}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (12, 3)$

$\therefore \quad \Delta AEF$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 7 & 12 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(30 + 21 + 72 - 42 - 36 - 30)$

$= \frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{2}$ বর্গ একক

$\therefore \quad \frac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = \frac{60}{15} = \frac{4}{1}$

$\therefore \Delta ABC : \Delta AEF = 4 : 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং PR ও QS উহার দুটি কর্ণ। *[সি. বো. ১৬]*

ক. নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান কোথায় এবং এর ব্যাসার্ধ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS. ৪

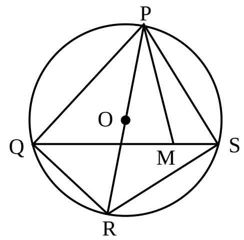
গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্ড়্রিক উৎপন্ন করে। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

আবার, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান হয়।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। PR এবং QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + QR . PS.

অঙ্কন: $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ এর ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$-এর সমান করে $\angle SPM$ আঁকি যেন PM রেখা QS কর্ণকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $\angle QPR = \angle SPM$

উভয়পক্ষে $\angle RPM$ যোগ করে পাই,

$\angle QPR + \angle RPM = \angle SPM + \angle RPM$

অর্থাৎ, $\angle QPM = \angle RPS$

এখন ΔPQM ও ΔPRS এর মধ্যে

$\angle PQS = \angle PRS$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PMQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore$ ΔPQM ও $\angle PRS$ সদৃশকোণী।

$\frac{QM}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ, PR . QM = PQ . RS .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPMS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPM$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PSM = \angle PRQ$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PMS$

$\therefore$ ΔPQR ও ΔPMS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$

অর্থাৎ, PR . MS = QR . PS ....(ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

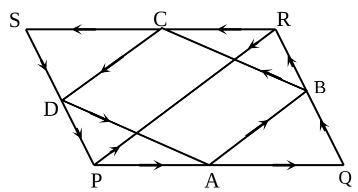
PR . QM + PR. MS = PQ . RS + QR . PS

বা, PR (QM + MS) = PQ . RS + QR . PS

বা, PR . QS = PQ . RS + QR . PS [যেহেতু QM + MS = QS]

$\therefore$ PR.QS = PQ.RS + QR.PS **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি PQRS সামান্তরিকের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে A, B, C ও D। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: ধরি, $\vec{PQ} = \underline{p}$, $\vec{QR} = \underline{q}$, $\vec{RS} = \underline{r}$, $\vec{SP} = \underline{s}$

তাহলে,

$\vec{AB} = \vec{AQ} + \vec{QB} = \frac{1}{2}(\vec{PQ} + \vec{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\vec{BC} = \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{r})$, $\vec{CD} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$,

$DA = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{p})$

আবার, $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \underline{p} + \underline{q}$

এবং $\vec{RP} = \vec{RS} + \vec{SP} = \underline{r} + \underline{s}$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \vec{PR} + \vec{RP} = \vec{PR} - \vec{PR} = 0$

অর্থাৎ $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore \vec{AB} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) = -\vec{CD} = \vec{DC}$

তাহলে, $\vec{AB}$ ও $\vec{DC}$ এর ধারকরেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়।

$\therefore$ ধারকরেখাদ্বয় সমান্তরাল। $\therefore \vec{AB} \parallel \vec{DC}$.

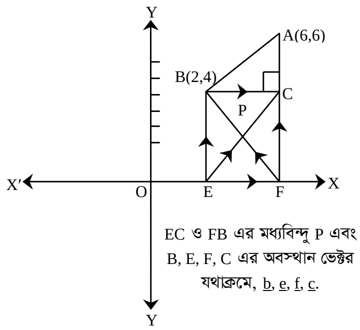
এখন, $|\vec{AB}| = |\vec{DC}|$ $\therefore AB = DC$

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৬



[সি. বো. '১৫]

ক. AB এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. AB রেখার সমীকরণ ও ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BEFC একটি সামান্তরিক। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক AB এর দূরত্ব = $\sqrt{(6-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক **(Ans.)**

খ AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-6}{6-4} = \frac{x-6}{6-2}$

বা, $\frac{y-6}{2} = \frac{x-6}{4}$

বা, $y - 6 = \frac{x-6}{2}$

বা, $2y - 12 = x - 6$

বা, $x - 6 - 2y + 12 = 0$

$\therefore$ $x - 2y + 6 = 0$ **(Ans.)**

C এর ভূজ এবং A এর ভূজ একই $\therefore$ C এর ভূজ = 6

C এর কোটি এবং B এর কোটি একই $\therefore$ C এর কোটি = 4

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক (6, 4)

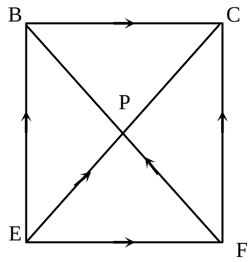
$\therefore$ AC এর দূরত্ব = $\sqrt{(6-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{0 + (2)^2} = 2$

BC এর দূরত্ব = $\sqrt{(2-6)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4$

= 4 বর্গ একক **(Ans.)**

গ



P বিন্দুটি EC এবং FB এর মধ্যবিন্দু। B, E, F এবং C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{e}$, $\underline{f}$ এবং $\underline{c}$। অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, BEFC একটি সামান্তরিক।

$\vec{EC}$ বরাবর P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{e+c}{2}$

এবং $\vec{FB}$ বরাবর P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{f+b}{2}$

যেহেতু, P বিন্দুটি $\vec{EC}$ এবং $\vec{FB}$ এর মধ্যবিন্দু

অতএব, $\frac{e+c}{2} = \frac{f+b}{2}$

বা, $\underline{c} + \underline{e} = \underline{b} + \underline{f}$

বা, $\underline{b} - \underline{e} = \underline{c} - \underline{f}$

বা, $\vec{EB} = \vec{FC}$ [∵ $\vec{EB} = \vec{PB} - \vec{PE} = \underline{b} - \underline{e}$ এবং $\vec{FC} = \vec{PC} - \vec{PF} = \underline{c} - \underline{b}$]

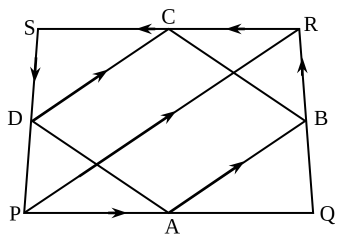
আবার, $|\vec{EB}| = |\vec{FC}|$

$\therefore$ EB = FC

আমরা জানি, দুইটি ভেক্টর সমান হবে যদি তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হয়। কিন্তু এক্ষেত্রে $\vec{EB}$ এবং $\vec{FC}$ এর ধারক রেখা একই নয়। অতএব, তারা সমান্তরাল, অর্থাৎ EB ∥ FC

$\therefore$ BEFC একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৭



চিত্রে PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C এবং D.

[য. বো. '১৭]

ক. $\vec{AB}$ ভেক্টরকে $\vec{PQ}$ ও $\vec{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AB ∥ PR এবং $AB = \frac{1}{2}PR$. ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABQ থেকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

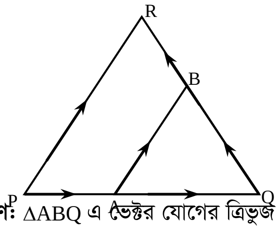
$\vec{AQ} + \vec{QB} = \vec{AB}$

বা, $\frac{1}{2}\vec{PQ} + \frac{1}{2}\vec{QR} = \vec{AB}$ [∵ A ও B যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{PQ} + \vec{QR})$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩১

গ



প্রমাণ: ΔABQ এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB}$ ... ... (i)

আবার, ΔPQR এ $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

বা, $2\overrightarrow{AQ} + 2\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PR}$ [∵ A ও B যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু]

বা, $2(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}) = \overrightarrow{PR}$ বা, $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ বা $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PR}|$

∴ $AB = \frac{1}{2}PR$.

আবার, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

∴ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখাদ্বয় সমান্তরাল।

∴ $AB \parallel PR$ এবং $AB = \frac{1}{2}PR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ ABC ত্রিভুজের উচ্চতা h = 3.5 cm, শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমি BC এর উপর মধ্যমা AD = 4 সে. মি. এবং $\angle B = 60°$। *[য. বো. ১৫]*

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$. ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ BC এর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৪ এর সম্পাদ্য-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮২
[**বি. দ্র.** উচ্চতা, h = 3.5 সে. মি., মধ্যমা, AD = d = 4 সে. মি. এবং $\angle B = \angle x = 60°$ নিতে হবে।]

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩

প্রশ্ন ▶ ১৯ ABCD চতুর্ভুজের A(–5, 0), B(5, 0), C(5, 5) এবং D(–5, 5) শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত হয়। *[ব. বো. '১৬]*

ক. ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। ৪

গ. AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $ST \parallel BC$ এবং $ST = \frac{1}{2}BC$. ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(–5, 0), B(5, 0), C(5, 5) এবং D(–5, 5) বিন্দুসমূহ নিয়ে গঠিত ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 5 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0 + 25 + 25 + 0 - 0 - 0 + 25 + 25)$

$= \frac{1}{2} \times 100 = 50$ বর্গ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(–5, 0), B(5, 0), C(5, 5) ও D(–5, 5)

তাহলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(10)^2 + (0)^2}$
$= \sqrt{100} = 10$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25}$
$= 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 0^2}$
$= \sqrt{100} = 10$ একক

এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5+5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2}$
$= \sqrt{25} = 5$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{10^2 + 5^2}$
$= \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ একক

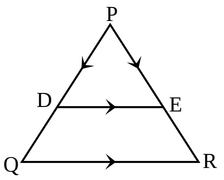
এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ একক

এখানে, AB = CD; BC = AD এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD

∴ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩
[**বি. দ্র.** D এর পরিবর্তে S এবং E এর পরিবর্তে T হবে।]

প্রশ্ন ▶ ২০



ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. *[ব. বো. ১৫]*

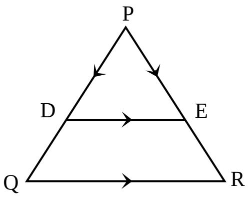
ক. $(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. DERQ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $FG \parallel DE \parallel QR$ এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

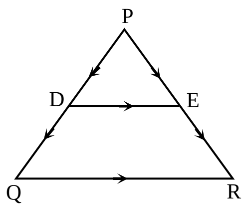


ΔPDE-এ $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$ [ত্রিভুজবিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ [যেহেতু, E, PR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$. **(Ans.)**

খ মনে করি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। D, E যোগ করা হলো দেখাতে হবে যে, $DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$



প্রমাণ: D ও E যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

ΔPQR -এ ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ .... (i)

এবং ΔPDE এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ $[\because \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ [(i) হতে]

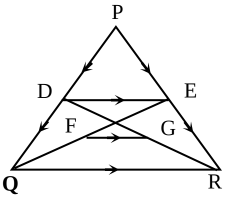
$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

$\therefore DE = \frac{1}{2}QR$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল।

কিন্তু DE এবং QR ভিন্ন ভিন্ন রেখা হওয়ায় DE || QR হবে।

$\therefore DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$. **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, DERQ ট্রাপিজিয়ামের DE || QR এবং QE ও DR কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G। F ও G যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মধ্যবিন্দুর সাপেক্ষে D, E, Q ও R এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{q}$ ও $\underline{r}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

$\therefore$ F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q})$ [$\because$ F, QE এর মধ্যবিন্দু]

এবং G বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d})$ [$\because$ G, DR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q})$

$= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d} - \underline{e} - \underline{q}) = \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$

$\therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

DE || QR হওয়ায় $(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{FG}$ ভেক্টরটি, $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

আবার, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{DE}|)$

$\therefore FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$

অর্থাৎ FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২১ একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ A(1, 1), B(4, 4), C(4, 8) এবং D(1, 5)

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. (5, 3) ও (2, – 2) বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু P, Q, R, S হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক (5, 3) ও (2, –2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$\frac{x - 5}{5 - 2} = \frac{y - 3}{3 + 2}$

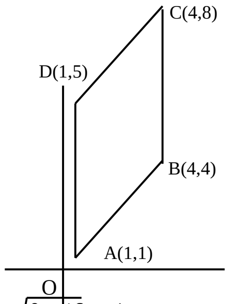
বা, $\frac{x - 5}{3} = \frac{y - 3}{5}$

বা, $5x - 25 = 3y - 9$

বা, $5x - 25 - 3y + 9 = 0$

$\therefore$ $5x - 3y - 16 = 0$ **(Ans.)**

খ চতুর্ভুজ ABCD এর



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 1)^2}$

$= \sqrt{9 + 9}$

$= \sqrt{18}$

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4 - 4)^2 + (8 - 4)^2}$

$= \sqrt{0 + 16} = 4$

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4 - 1)^2 + (8 - 5)^2}$

$= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$

চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু, AB = CD এবং BC = AD

$\therefore$ ABCD একটি আয়ত বা সামান্তরিক।

এখন, কর্ণ, $AC = \sqrt{(4 - 1)^2 + (8 - 1)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$

কর্ণ, $BD = \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

এখানে, কর্ণ AC $\neq$ কর্ণ BD

$\therefore$ চতুর্ভুজ ABCD একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ একক

$= \frac{1}{2}(4 + 32 + 20 + 1 - 4 - 16 - 8 - 5)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 24$ বর্গ একক

$= 12$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত পাঠ্যবই এর অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৫

প্রশ্ন ▶২২ ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]

ক. ভেক্টরের ত্রিভুজবিধি বর্ণনা কর। ২

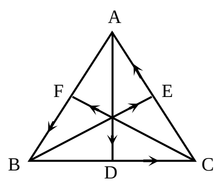
খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ সাম্যাবস্থায় আছে। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $FE = \frac{1}{2}BC$ এবং FE || BC ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বুঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।

খ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ সাম্যাবস্থায় থাকলে,



$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

ΔABD-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (i)

[D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

ΔACF-এ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$ $[\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}]$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

[F, AB এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং ΔABE-এ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (iii)

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $AE = \frac{1}{2} AC$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

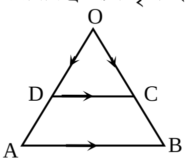
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ সাম্যাবস্থায় আছে। **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩০

প্রশ্ন ▶ ২৩



ΔOAB-এ মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এবং OA ও OB বাহুর মধ্যবিন্দু D ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$ ও $\underline{c}$।

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

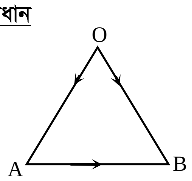
ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{b} - 2(\underline{d} + \underline{c}) = 0$ ৪

গ. যদি ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ AC ও BD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, PQ || AB || DC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$ ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔOAB এ মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.



অর্থাৎ $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

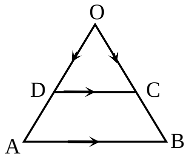
ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ **(Ans.)**

খ মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$



অর্থাৎ, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$

$\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$.

আবার, ΔOAB এ OA এবং OB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও C.

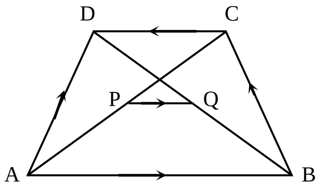
সুতরাং $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OD}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$

$\therefore \underline{a} = 2\underline{d}$ $\quad \therefore \underline{b} = 2\underline{c}$

$\therefore \underline{a} + \underline{b} = 2(\underline{d} + \underline{c})$

$\therefore \underline{a} + \underline{b} - 2(\underline{d} + \underline{c}) = \underline{0}$ **(দেখানো হলো)**

গ



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও DC সমান্তরাল বাহু এবং DB ও AC কর্ণের মধ্যবিন্দু P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, PQ || DC || AB এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$

ধরি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, A, C, D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

এখন P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{c})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) - (\underline{c} - \underline{d})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{DC}|)$

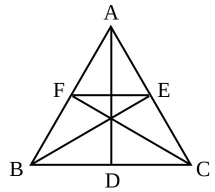
বা, $PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$

$\therefore$ PQ, DC ও AB সমান্তরাল।

অর্থাৎ, PQ || DC || AB

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(AB - DC)$ এবং PQ || DC || AB **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ২৪



[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যমা যথাক্রমে AD, BE ও CF।

ক. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, FE || BC এবং $FE = \frac{1}{2} BC$ ৪

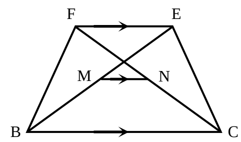
গ. যদি ট্রাপিজিয়াম BCEF এ BE ও CF এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হয় তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, MN || FE || BC. ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৪

খ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩০

M মনে করি, BCEF ট্রাপিজিয়ামের FE || BC এবং CF ও BE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, MN || FE || BC.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}, \underline{f}$.

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{FE} = \underline{e} - \underline{f}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because$ M, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f})$ [$\because$ N, CF এর মধ্যবিন্দু]

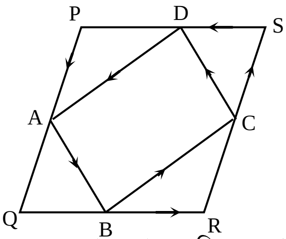
$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f} - \underline{b} - \underline{e})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{f})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$

FE || BC হওয়ায় $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{FE}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{FE}$ এর সমান্তরাল হবে।

অর্থাৎ MN || FE || BC **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৫



PQRS চতুর্ভুজে A, B, C ও D বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু। *[সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট]*

ক. $\overrightarrow{BA}$ কে $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{QP}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. যদি A(1, 1), B(4, 4), C(4, 8) ও D(1, 5) সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু হয় তবে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABQ থেকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে পাই,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{AQ}$$

বা, $-\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

বা, $-\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QP})$

$\therefore$ $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QR})$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা–২৩১

গ দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক

A(1, 1), B(4, 4), C(4, 8) ও D(1, 5)

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(4 + 32 + 20 + 1 - 4 - 16 - 8 - 5)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 24$ বর্গ একক $= 12$ বর্গ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৬ A(0, –1), B(–2, 3), C(6, 7) এবং D(8, 3) বিন্দু চারটি একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু। *[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]*

ক. AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজটি কোন ধরনের? ব্যাখ্যা দাও। ৪

গ. AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S হলে ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক AC সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x-6}{6-0} = \frac{y-7}{7+1}$

বা, $8x - 48 = 6y - 42$

বা, $8x - 6y = 48 - 42$

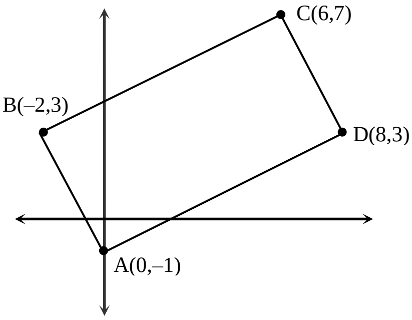
বা, $8x - 6y = 6$

$\therefore 4x - 3y = 3$ **(Ans.)**

খ ABCD চতুর্ভুজে A(0, –1), B(–2, 3), C(6, 7) ও D(8, 3)

এখানে, $AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক



$BC = \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

$CD = \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

এবং $AD = \sqrt{(8-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

আবার, কর্ণ $AC = \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2}$

$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক

এবং কর্ণ $BD = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2}$

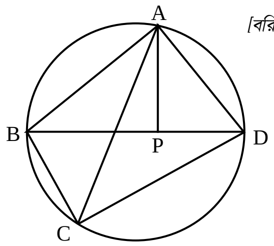
$= \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$ একক

$\therefore$ AB = CD, BC = AD এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD

$\therefore$ A, B, C, D বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ একটি আয়ত।

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৫

প্রশ্ন ▶২৭ *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*



ABCD চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত। AC ও BD ইহার কর্ণ এবং $\angle DAP = \angle BAC$।

ক. নববিন্দু বৃত্ত বলতে কি বুঝ? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD। ৪

গ. যদি ΔABD এর AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হয় তাহলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, RS || BD এবং $RS = \frac{1}{2}BD$. ৪

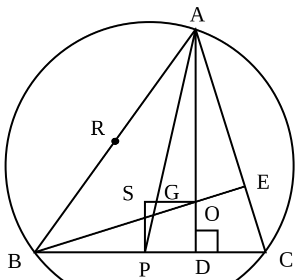
২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ এর "দ্রষ্টব্য : ১" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৩

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৪

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা- ২৬৩

প্রশ্ন ▶২৮



চিত্রে, S, O যথাক্রমে ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা এবং R, AB এর মধ্যবিন্দু। *[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]*

ক. নববিন্দু বৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র। ৪

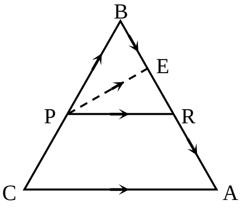
গ. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, P বিন্দু দিয়ে CA এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই R বিন্দুগামী হবে। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক নববিন্দু বৃত্তঃ কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদ বিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দু বৃত্ত বলে।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২

গ মনে করি, BCA ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু P দিয়ে অঙ্কিত CA এর সমান্তরাল PR, BA কে R বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে PR রেখা R বিন্দুগামী। আবার, AB এর মধ্যবিন্দু R হওয়ায় R, BA এর মধ্যবিন্দু, প্রমাণ করাই যথেষ্ট।



প্রমাণ: R যদি $\overrightarrow{BA}$ এর মধ্যবিন্দু না হয়, তবে ধরি, E, $\overrightarrow{BA}$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because$ P, $\overrightarrow{BC}$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BE}$

$= -\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BE}$ [$\because \overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{PB}$]

$= \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BP}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because$E, $\overrightarrow{BA}$ এর মধ্যবিন্দু ধরে নেয়া হয়েছে]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ [$\because \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

অর্থাৎ, PE || CA কিন্তু PR || CA (উদ্দীপকে দেয়া আছে)

তাহলে $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PR}$ রেখাদ্বয় উভয়ে P বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{CA}$ এর সমান্তরাল।

অতএব, $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PR}$ অবশ্যই সমাপাতিত হবে।
$\therefore$ E ও R একই বিন্দু হবে।
অর্থাৎ R, BA এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore$ P বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সমান্তরাল রেখা অবশ্যই R বিন্দুগামী।

(দেখানো হলো)

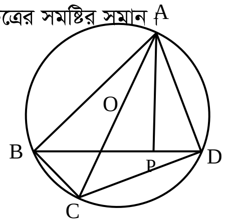
প্রশ্ন ▶২৯ ΔABC এ, AD একটি মধ্যমা এবং PQRS ট্রাপিজিয়ামে PS || QR.

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. টলেমির উপপাদ্য বিবৃত কর এবং চিত্র এঁকে বুঝিয়ে দাও। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪
গ. PQ ও SR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}(PS + QR)$ এবং MN || PS || QR ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

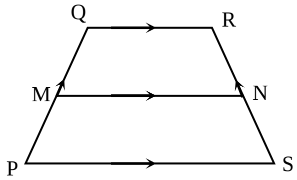
ক **টলেমির উপপাদ্য :** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD। AC এবং BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। সুতরাং AC.BD = AB.CD + BC.AD

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৬৭

গ



মনে করি, PQRS চতুর্ভুজে PS || QR। PQ ও SR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। প্রমাণ করতে হবে যে, $MN = \frac{1}{2}(PS + QR)$ এবং MN || QS || QR.

প্রমাণ : ধরি, P, Q, R ও S এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{r}$ ও $\underline{s}$.

$\therefore \overrightarrow{PS} = \underline{s} - \underline{p}$. $\overrightarrow{\text{হজ}} = \underline{r} - \underline{q}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{r})$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{r}) - \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

$= \frac{1}{2}[(\underline{s} - \underline{p}) + (\underline{r} - \underline{q})]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QR})$

বা, $|\overrightarrow{MN}| = \left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QR})\right|$

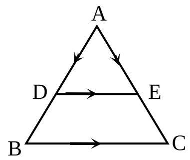
$\therefore MN = \frac{1}{2}(PS + QR)$

আবার, এখানে PS ও QR পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QR})$ ভেক্টরটিও তাদের সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{PS}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ MN || PS || QR

সুতরাং $MN = \frac{1}{2}(PS + QR)$ এবং MN || PS || QR **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩০



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

[মনিপুর উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪
গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

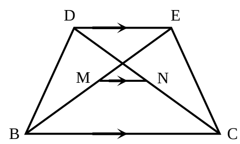
$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

ΔADE এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

গ মনে করি, BCED ট্রাপিজিয়ামের DE || BC এবং CD ও BE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$, $\underline{d}$.

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because$ M, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because$ N, CD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})|$

$\therefore$ $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩১ ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S. *[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQ || AC এবং $PQ = \frac{1}{2}AC$. ৪

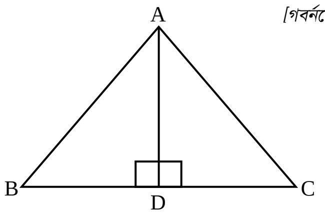
৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ ১২.৪ এর ১(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৫৫

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৫

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ।পৃষ্ঠা- ২৬৩

প্রশ্ন ▶৩২ *[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, ঢাকা]*



ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB = AC এবং AD ⊥ BC

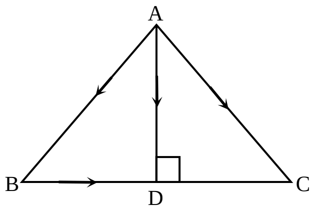
ক. ΔABC এর ক্ষেত্রে $\overrightarrow{DA}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{CA}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. চিত্রে A, B এবং C সমবৃত্ত হলে এবং AB = AC = 13 সে. মি. এবং BD = CD = 5 সে. মি. হলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ৪

গ. ABC ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R. AD$. ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



দেওয়া আছে, ΔABC-এ, AB = AC ও AD ⊥ BC

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ [□ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং AD ⊥ BC]

বা, $-\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA}$

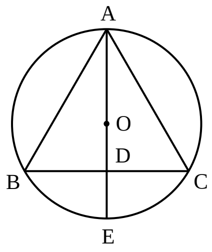
$\therefore \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে ΔABC-এর AB = AC = 13 সে.মি., BD = CD = 5 সে.মি., BC = BD + DC = 5 সে.মি. + 5 সে.মি. = 10 সে.মি.

ABC পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

AD কে বর্ধিত করি যেন বৃত্তের সাথে E বিন্দুতে মিলিত হয়।

যেহেতু O বৃত্তের পরিকেন্দ্র যা AE এর উপর অবস্থিত সেহেতু AD ⊥ BC।



$\therefore$ AE = বৃত্তের ব্যাস।

ABD সমকোণী ত্রিভুজে

$AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= 13^2 - 5^2$

$= 169 - 25$

$= 144$

$AD = \sqrt{144} = 12$

এখন, ব্রহ্মা গুপ্তের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

AB. AC = AE. AD

বা, 13 × 13 = AE × 12

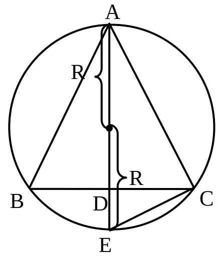
বা, $AE = \frac{13 \times 13}{12}$

= 14.083 (প্রায়)

এখন, ব্যাসার্ধ, $AO = \frac{AE}{2} = \frac{14.083}{2} = 7.042$ (প্রায়)

$\therefore$ ব্যাসার্ধ = 7.042 সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ



মনে করি, সমদ্বিবাহু ΔABC-এ AB = AC। A থেকে BC-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD, BC কে D বিন্দুতে এবং পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2R.AD$.

প্রমাণ: ΔADC ও ΔACE-এ,

∠ADC = ∠ ACE

[$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ ∠ACE = 90° এবং AD, BC এর ওপর লম্ব বলে ∠ADC = 90°]

∠EAC সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট ∠ACD = অবশিষ্ট ∠AEC

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore$ $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$ [$\because$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $AC^2 = AE . AD$

$\therefore$ $AB^2 = AE. AD$ [$\because$ AB = AC] ....(i)

সমকোণী ΔABD ও ΔACD এর মধ্যে

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [দেওয়া আছে]

এবং AD সাধারণ বাহু।

$\therefore$ ΔABD ≅ ΔACD

$\therefore$ BD = CD

অর্থাৎ AD ⊥ BC এবং AD, BC এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ AD, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

[কেন্দ্র থেকে জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AE, ΔABC -এর পরিব্যাস

AE = 2R [$\because$ R, ΔABC-এর পরিব্যাসার্ধ]

তাহলে (i) হতে পাই,

অর্থাৎ , $AB^2 = 2R.AD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৩ ABCD চতুর্ভুজের A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$. *[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, ঢাকা]*

ক. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি চিত্রসহ বর্ণনা কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজটির বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ এর ১(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫৫

খ দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. দেখাতে হবে যে, ABCD চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি

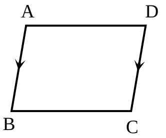
$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore$ $\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\vec{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।



$\therefore \vec{AB} = \vec{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \vec{AB} = \vec{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামন্তরিক।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৫

প্রশ্ন ▶৩৪ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7, 2), B(–4, 2), C(–4, –3) এবং D(7, –3) *[সামসুল হক খান স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. B ও D বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত তা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের উলিণ্ডখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু S, T, X, Y হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, STXY একটি সামান্তরিক। ৪

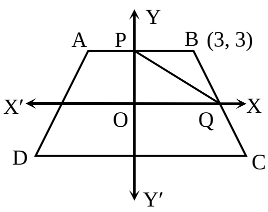
৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B(–4, 2) ও D(7, –3) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \frac{2+3}{-4-7} = \frac{-5}{11}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৬

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৫

প্রশ্ন ▶৩৫



PQ রেখার সমীকরণ 3x + 4y = 12. *[সামসুল হক খান স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. XY সমতলের প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি কর্ণ BD ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হয় তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর MN || AB || DC এবং $MN = \frac{1}{2}(DC - AB)$ ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক PQ রেখার সমীকরণ, 3x + 4y = 12

বা, $\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0) ও P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3)

$\therefore$ PQ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2}$

$= \sqrt{16+9}$

$= \sqrt{25} = 5$ **(Ans.)**

খ চিত্রানুসারে, XY সমতলের ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দু O, Q, B, P

'ক' হতে পাই, Q(4, 0) ও P(0, 3)

দেওয়া আছে, O(0, 0), B(3, 3)

$\therefore$ চতুর্ভুজ OQBP এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(0 + 12 + 9 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0)$

$= \frac{1}{2} \times 21$

$= 10.5$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৯

প্রশ্ন ▶৩৬ A(1, 4t) এবং B(5, $t^2 - 1$) বিন্দুগামী রেখার ঢাল = –1 *[মতিঝিল সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. 3y = 6x + 10 রেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ২

খ. t এর মানের উপর ভিত্তি করে প্রাপ্ত চারটি বিন্দু P, Q, R, S হলে PQRS চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 3y = 6x + 10

বা, – 6x + 3y = 10

বা, $-\frac{6x}{10} + \frac{3y}{10} = 1$

বা, $\frac{3x}{-5} + \frac{3y}{10} = 1$

$\therefore \frac{x}{-\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{10}{3}} = 1$

$\therefore$ সরলরেখাটি X-অক্ষকে $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ এবং

Y-অক্ষকে $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

খ অধ্যায়-১১ এর সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৯

গ দেওয়া আছে, PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: মনে করি, $\vec{PQ} = \underline{a}$, $\vec{QR} = \underline{b}$, $\vec{RS} = \underline{c}$ এবং $\vec{SP} = \underline{d}$

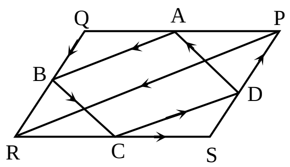
তাহলে, $\vec{AB} = \vec{AQ} + \vec{QB} = \frac{1}{2}\vec{PQ} + \frac{1}{2}\vec{QR}$

বা, $\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{PQ} + \vec{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে $\vec{BC} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\vec{CD} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\vec{DA} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$



আবার, $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\vec{RP} = \vec{RS} + \vec{SP} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

$\therefore (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \vec{PR} + \vec{RP}$

$= \vec{PR} - \vec{PR}$ [$\because \vec{RP} = -\vec{PR}$]

$= \underline{0}$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \vec{AB} = -\vec{CD}$

$\therefore \vec{AB} = \vec{DC}$

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল। অনুরূপভাবে, BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৭ ABCD শীর্ষবিন্দুসহ A(– 6, – 4), B(6, – 4), C(2, 2) এবং D(– 2, 2) ঘড়ির কাটার বিপরীতক্রমে আবর্তিত। *[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]*

ক. AC রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD এর ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোনো বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD ট্রাপিজিয়ামের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে প্রমাণ কর যে, PQ || AB || DC এবং PQ = $\frac{1}{2}$ (AB – DC) ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, A(–6, –4), C(2, 2)

$$AC = \sqrt{(2+6)^2 + (2+4)^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{64 + 36}$$
$$= \sqrt{(10)^2} = 10$$ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(–6, –4), B(6, –4), C(2, 2) এবং D(–2, 2) যেখানে, শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -6 & 6 & 2 & -2 & -6 \\ -4 & -4 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(24 + 12 + 4 + 8 + 24 + 8 + 4 + 12)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(96)$ বর্গ একক = 48 বর্গ একক

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $a^2 = 48$ বর্গ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{48}$ একক $= 4\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}\,a = \sqrt{2} \times 4\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$ একক **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ২০(গ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৩৪

প্রশ্ন ▶৩৮ ABCD চতুর্ভুজে AB || DC এবং P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, CB, DC ও AD এর মধ্যবিন্দু। *[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]*

ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি লিখ। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

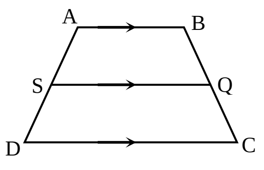
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, SQ || DC || AB এবং SQ = $\frac{1}{2}$(AB + DC) ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ এর ১(খ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫৬

খ মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৫

গ



এখানে, ADCB ট্রাপিজিয়ামের AD ও CB অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, SQ || AB || DC এবং SQ = $\frac{1}{2}$(AB + DC)

প্রমাণ: মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore$ $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\therefore$ S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$ [$\because$ S, AD এর মধ্যবিন্দু]

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{b})$ [$\because$ Q, CB এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{b}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{b} - \underline{a} - \underline{d})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{d}) + (\underline{b} - \underline{a})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB})$

কিন্তু DC ও AB পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় ($\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}$) ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ DC ও AB এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং SQ ভেক্টর ও DC ও AB এর সমান্তরাল হবে।

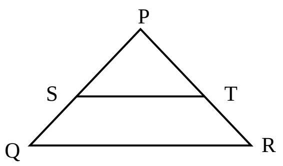
কারণ $\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

বা, $|\overrightarrow{SQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}|$

অর্থাৎ SQ $= \frac{1}{2}$(AB + DC)

অর্থাৎ SQ || AB || DC এবং SQ $= \frac{1}{2}$(AB + DC) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৯



ΔPQR এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T.

[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

ক. $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

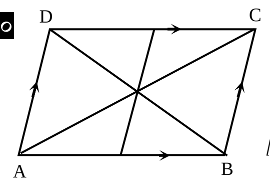
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || QR এবং ST = $\frac{1}{2}$ QR. ৪

গ. SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || ST || QR এবং MN = $\frac{1}{2}$ (QR – ST). ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১০ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৮

প্রশ্ন ▶৪০



[এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা]

ক. ভেক্টরের সামান্তরিক বিধি চিত্র সহ ব্যাখ্যা কর। ২

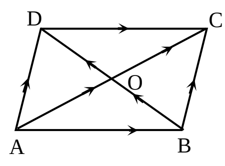
খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। ৪

গ. AB এর মধ্যবিন্দু P, DC এর মধ্যবিন্দু M হলে দেখাও যে, APCM একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ ১২.৪ এর ১(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫৬

খ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণঃ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$]

$= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$ [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

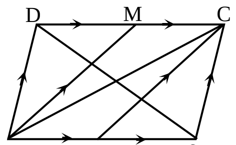
$= \overrightarrow{BC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore$ AD = BC এবং $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AD || BC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

[$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল] **(প্রমাণিত)**

গ 

দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও M।

M, A, P, C যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, APCM একটি সামান্তরিক।

প্রমাণঃ মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{d}$

ΔPBC-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ [$\because$ P, AB এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$ .... (i)

ΔADM- এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$ [$\because$ M, CD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\underline{c} + \underline{d}$

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$ .... (ii) $\left[\begin{array}{l}\because \text{ABCD mvgv¯¦wiK} \\ \therefore \underline{a} = \underline{c} \text{ ‰es } \underline{b} = \underline{d}\end{array}\right]$

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AM}$

ভেক্টরদ্বয় সমান। অর্থাৎ তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা PC || AM.

আবার, P, AB এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\underline{a}$ .... (iii)

এবং M, DC এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

বা, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\underline{c}$

$\therefore \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\underline{a}$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) থেকে পাই, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MC}$

সুতরাং $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{MC}$ ভেক্টরদ্বয় সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ APCM একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪১ ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। *[এম ই এইচ আরিফ কলেজ, গাজীপুর]*

ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। ২

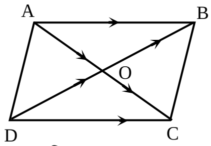
খ. যদি $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$ এবং $|\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{OD}|$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G এবং H হলে, প্রমাণ কর যে, EFGH একটি সামান্তরিক। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪(খ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৫৬

খ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণঃ $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore$ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

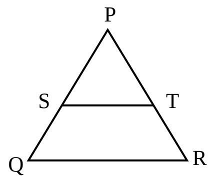
[$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

(প্রমাণিত)

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহর.ণ-৫ অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৬৫

[বি.দ্র. P, Q, R ও S এর পরিবর্তে যথাক্রমে E, F,G ও H নিতে হবে।]

প্রশ্ন ▶ ৪২



ΔPQR এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T.

[এ.ভি.জে.এম. সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, মুন্সিগঞ্জ]

ক. $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

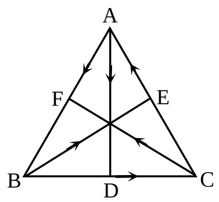
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || QR এবং ST = $\frac{1}{2}$QR. ৪

গ. SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || ST || QR এবং MN = $\frac{1}{2}$(QR – ST) ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১০ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৮

প্রশ্ন ▶ ৪৩ প্রদত্ত চিত্রের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F।

[ব্রাহ্মন্দী মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, নরসিংদী]

ক. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FB}=0$ ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অংকিত BC এর সমান্তরাল রেখাংশ অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BCEF চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা একটি সামান্তরিক। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC এ,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$

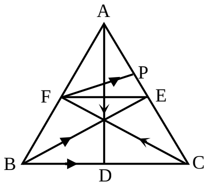
বা, $(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB})+\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA})=0$

বা, $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA})-\overrightarrow{FE}=0$

বা, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=0$ [∵ $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}=0$]

$\therefore$ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FB}=0$ **(প্রমাণিত)**

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু F। BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত FE রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।



ধরি, E নয় বরং P, AC এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [∵F, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [∵ P, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।]

$\therefore\ \overrightarrow{FP}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AP}$ [$\therefore \overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}$]

$=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore\ \overrightarrow{FP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

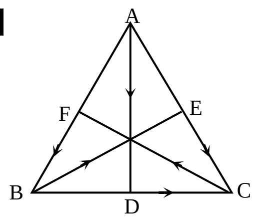
অর্থাৎ, FP || BC কিন্তু FE || BC (দেওয়া আছে)

তাহলে $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{FP}$ রেখাদ্বয় উভয়েই F বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল। অতএব তারা (অর্থাৎ $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{FP}$) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore$ E ও P একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৫

প্রশ্ন ▶ ৪৪



ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BE ও CF এর তিনটি মধ্যমা।

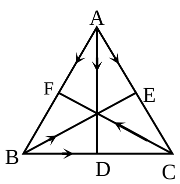
[বিন্দুবাসিনী সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, টাঙ্গাইল]

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. দেখাও যে, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\underline{0}$ ৪

গ. ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2=2R.AD$ ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান



ক ΔABE-এ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BE}$

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BE}$]

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{CF})-\overrightarrow{BE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CF}\right)-\overrightarrow{BE}$

[F, AB এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

বা, $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BE}$

বা, $4\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CF}-4\overrightarrow{BE}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CF}-4\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AB}$

[উভয়পক্ষে $(-\overrightarrow{AB})$ যোগ করে]

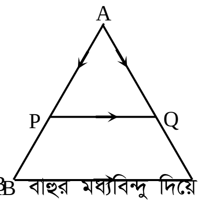
বা, $3\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CF}-4\overrightarrow{BE}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৪

গ সৃজনশীল ৩২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৮

প্রশ্ন ▶ ৪৫ নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



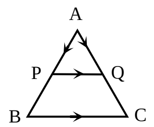
চিত্রে ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল। *[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল]*

ক. $\overrightarrow{PQ}$ এর মান $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. BC এর মধ্যবিন্দু R হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CP}=\underline{0}$ ৪

গ. PBCQ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{BC})$. ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান



ক ΔAPQ–এ

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}$ [ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[P, AB এর মধ্যবিন্দু এবং Q, AC এর মধ্যবিন্দু]

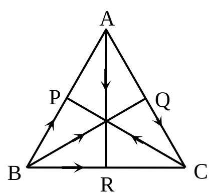
বা, $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

সুতরাং, $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

খ ΔABR-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}$

$\therefore\ \overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ... ... (i)

[R, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]



ΔACP-এ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ ... ... (ii)

[P, AB এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং ΔABQ-এ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ... ... (iii)

[Q, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $AQ = \frac{1}{2}AC$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \underline{0}$

$\therefore\ \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CP} = \underline{0}$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩০

প্রশ্ন ▶ ৪৬ ABCD চতুর্ভুজের A(–7, 0), B(7, 0), C(7, 7) এবং D(–7, 7) শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত হয়।

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, মোমেনশাহী]

ক. ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। ৪

গ. AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || BC এবং $ST = \frac{1}{2}BC$. ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(– 7, 0), B(7, 0), C(7, 7) ও D(–7, 7) বিন্দুসমূহ নিয়ে গঠিত ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -7 & 7 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{(0 + 49 + 49 + 0) - (0 + 0 - 49 - 49)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(98 + 98)$ বর্গ একক

= 98 বর্গ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(– 7, 0), B(7, 0), C(7, 7) ও D(–7, 7)

তাহলে, $AB = \sqrt{(7+7)^2 + 0^2} = 14$ একক

$BC = \sqrt{(7-7)^2 + (7-0)^2} = 7$ একক

$CD = \sqrt{(7+7)^2 + (7-7)^2} = 14$ একক

$DA = \sqrt{(-7+7)^2 + (7-0)^2} = 7$ একক

কর্ণ, $AC = \sqrt{(7+7)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{196 + 49}$

$= \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ একক

কর্ণ, $BD = \sqrt{(7+7)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{196 + 49}$

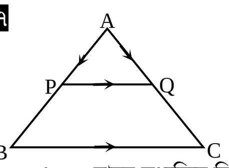
$= \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ একক

এখানে, AB = CD, BC = DA এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD

∴ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

প্রশ্ন ▶ ৪৭



চিত্রে ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল।

ক. APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা কর। ২

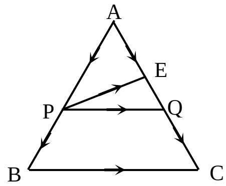
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Q, AC এর মধ্যবিন্দু। ৪

গ. BPQC ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক APQ ত্রিভুজে $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল বলতে $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{QA}$ ($\overrightarrow{AQ}$ ভেক্টরের বিপরীত ভেক্টর) ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল বুঝায়। অর্থাৎ $\overrightarrow{AQ}$ এর অন্তর্বিন্দু থেকে $\overrightarrow{AP}$ এর অন্তর্বিন্দু পর্যন্ত রেখাংশ অর্থাৎ $\overrightarrow{QP}$ $= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}$ কে বুঝায়।

খ



দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল PQ, AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে Q, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ: Q যদি $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু না হয়, তবে ধরি, E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [∵ P, $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore\ \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE}$ [∵ $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}$]

$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [∵ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$]

$\therefore\ \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, PE||BC কিন্তু PQ||BC (প্রশ্নমতে)

তাহলে $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ রেখাদ্বয় উভয়ে P বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল।

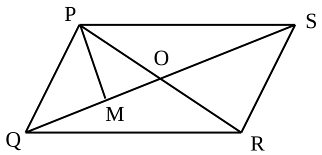
অতএব, $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ অবশ্যই সমাপাতিত হবে।

∴ E ও Q একই বিন্দু হবে।

অর্থাৎ Q, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩০

প্রশ্ন ▶ ৪৮



চিত্রে PQRS একটি সামান্তরিক। *[শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]*

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$ ৪

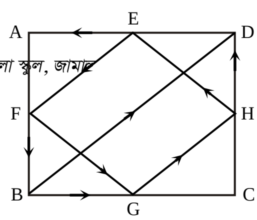
গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PO = RO এবং QO = SO. ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৭

প্রশ্ন ▶ ৪৯

[জামালপুর জিলা স্কুল, জামা



চিত্রে ABCD চতুর্ভুজটির AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F, G, H ও E. *[নেত্রকোণা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নেত্রকোণা]*

ক. ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র কাকে বলে? ২

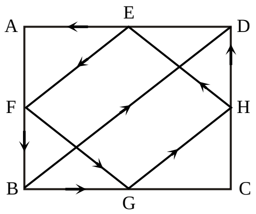
খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EFGH একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EG এবং FH পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়।
ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র: ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

খ



DABC চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G, H। E, F; F, G; G, H এবং E, H যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, EFGH চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{DA} = \underline{p}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{q}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{r}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{s}$

D, B যোগ করা হলো।

তাহলে $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore$ $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{GH}$ বা, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$

$\therefore$ EF ও HG সমান ও সমান্তরাল

$\therefore$ EFGH চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৪
[বি.দ্র.: A, B, C ও D বিন্দুর পরিবর্তে যথাক্রমে E, F, G ও H নিতে হবে]

প্রশ্ন ▶৫০ ABCD চতুর্ভুজের A(6, –4), B(2, 2), C(– 2, 2) এবং D(– 6, – 4) শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। *[রাজবাড়ী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, রাজবাড়ী]*

ক. AC কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

গ. P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || AD || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(6, –4) ও C(–2, 2)

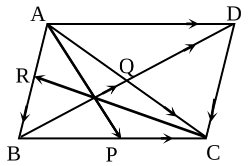
$\therefore$ কর্ণ AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (-4-2)^2}$
$= \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ একক **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-

অতঃপর বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= 4 \times 4\sqrt{3}$ একক
$= 16\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৫

প্রশ্ন ▶৫১



ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এবং ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q এবং R। *[গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]*

ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধিটি লিখ। ২

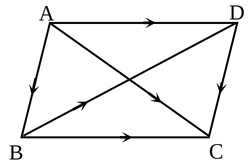
খ. $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \underline{0}$ প্রমাণ কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ এর ১(খ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৫৬

খ ΔBDC-এ



$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$

বা, $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$

[ABCD সামান্তরিকে $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$]

$\therefore$ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ ... ... (i)

আবার, ΔADC-এ,

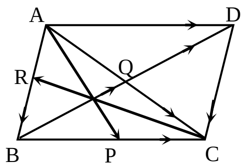
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

গ ΔABP-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$



$\therefore$ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (i)

[P, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

ΔACR-এ $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR}$

$\therefore$ $\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AC}$

$\therefore$ $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

[R, AB এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং ΔABQ-এ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (iii)

[Q, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

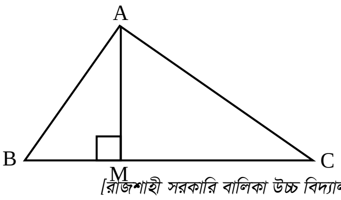
$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \underline{0}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫২



[রাজশাহী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ, রাজশাহী]

ΔABC-এ, $\angle BAC = 90°$

ক. ΔABC-এর লম্ব বিন্দু নির্ণয় কর। [অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক] ২

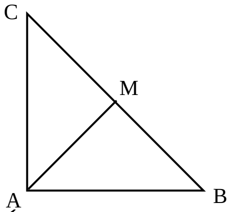
খ. প্রমাণ কর যে, $AM^2 = BM.MC$ ৪

গ. BC, CA ও AB বাহুর মধ্য বিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \underline{0}$ ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক অধ্যায়-৩ এর সৃজনশীল-৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৭

খ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle A = 90°$। AM, CB এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $AM^2 = BM.\ MC$

প্রমাণ: ΔABC-এ $\angle A = 90°$

$\therefore \angle CAM + \angle BAM = 90°$ .... (i)

আবার, ΔCMA-এ $\angle CMA = 90°$ [$\because AM \perp CB$]

$\therefore \angle ACM + \angle CAM = 90°$.............. (ii)

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle CAM + \angle BAM = \angle ACM + \angle CAM$

$\therefore \angle BAM = \angle ACM$

এখন, ΔCMA ও ΔBMA-এ

$\angle CMA = \angle BMA = 90°$

এবং $\angle ACM = \angle BAM$

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM}$

অর্থাৎ, $AM^2 = BM.MC$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ২২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৪

প্রশ্ন ▶৫৩ ΔABC এর শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(2, –4), B(– 4, 4) এবং C(3, a) [যেখানে $a > 0$] *[নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ]*

ক. AC = BC হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

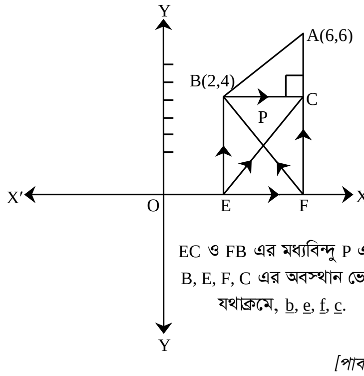
খ. AB রেখার সমীকরণ ও ঢাল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ΔABC এর যে কোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক। ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১২ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩২

প্রশ্ন ▶৫৪ পাশের চিত্রে, EC ও FB এর মধ্যবিন্দু P এবং B, E, F, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{e}, \underline{f}, \underline{c}$.



[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা]

ক. AB এর দূরত্ব কত? ২

খ. AB রেখার সমীকরণ ও ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BEFC একটি সামান্তরিক। ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩২

প্রশ্ন ▶৫৫ ABCD একটি সামান্তরিক। *[বগুড়া সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বগুড়া]*

ক. $\vec{AB}$ ভেক্টরকে $\vec{AC}$ ও $\vec{BD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$ হলে, ABCD চতুর্ভুজটি উদ্দীপকের চতুর্ভুজই হবে যদিও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

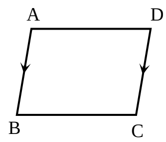
ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-২(খ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

খ দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$. দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \quad \vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\vec{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।



তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{DC}$

$\therefore \quad \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামন্তরিক।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৪

প্রশ্ন ▶৫৬ একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে A(1, 4), B(– 2, 0) এবং C(5, 0)। *[রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট]*

ক. AC রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2} BC$. ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 4) ও (5, 0)

$\therefore$ AC রেখার ঢাল $= \frac{0-4}{5-1} = \frac{-4}{4} = -1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ΔABC এর শীর্ষত্রয় যথাক্রমে A(1, 4), B(–2, 0) এবং C(5, 0)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-1)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{7^2} = 7$ একক

এবং CA বাহর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-5)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

$= 4\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ΔABC এর অর্ধপরিসীমা, $S = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$

$= \dfrac{5 + 7 + 4\sqrt{2}}{2} = \dfrac{12 + 4\sqrt{2}}{2}$

$= (6 + 2\sqrt{2}) = 8.83$ একক

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{S(S-AB)(S-BC)(S-CA)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{8.83\,(8.83-5)\,(8.83-7)\,(8.83-4\sqrt{2})}$

$= \sqrt{8.83 \times 3.83 \times 1.83 \times 3.17}$

≈ 14 বর্গ একক

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

প্রশ্ন ▶ ৫৭ ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। *[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বিইউএসএমএস, পার্বতীপুর, দিনাজপুর]*

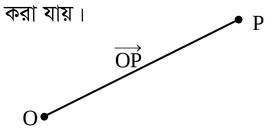
ক. অবস্থান ভেক্টর বলতে কী বুঝ? ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, AO = OC এবং BO = OD. ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্য তাদের যোগফলের অর্ধেক। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O এর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু বলা হয়।



খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৪

গ সৃজনশীল ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৫

প্রশ্ন ▶ ৫৮ ABC একটি ত্রিভুজ এবং PQRS একটি ট্রাপিজিয়াম যেখানে PS || QR এবং PQ ও SR বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। *[রংপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]*

ক. শূন্য ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ২

খ. ΔABC এর তিনটি মধ্যমা AD, BE ও CF হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, MN || PS || QR এবং $MN = \dfrac{1}{2}(PS + QR)$ ৪

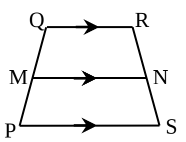
৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **শূন্য ভেক্টর :** যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলে।

অবস্থান ভেক্টর: সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট O বিন্দু সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ সৃজনশীল ২২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৪

গ মনে করি, QPSR ট্রাপিজিয়ামের QP ও SR বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং PS ও QR বাহুদ্বয় সমান্তরাল। M ও N যথাক্রমে QP ও SR এর মধ্যবিন্দু। M, N যোগ করা হলো।



প্রমাণ করতে হবে যে, MN || QR || PS এবং

$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PS})$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে Q, P, S, R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ ।

$\therefore \overrightarrow{PS} = \underline{c} - \underline{b}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [$\because$ M, QP এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because$ N, SR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \dfrac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$

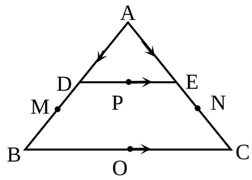
$= \dfrac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QR})$

কিন্তু PS ও QR পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QR})$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ PS ও QR এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরও PS ও QR এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ MN || PS || QR এবং $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}((\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QR})$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৫৯



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. BD ও CE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N, BC ও DE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে O, P। *[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর]*

ক. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি বিবৃত কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \dfrac{1}{2}BC$ ৪

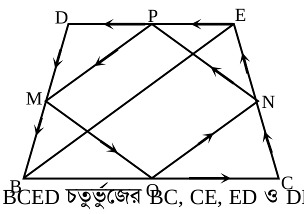
গ. ভেক্টর বিশেণ্ডষণের মাধ্যমে দেখাও যে, BCED চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যোগে যে ক্ষেত্রটি উৎপন্ন হবে তা একটি সামান্তরিক। ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ এর ১(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৫৫

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

গ



মনে করি, BCED চতুর্ভুজের BC, CE, ED ও DB বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে O, N, P ও M।

O, N; N, P; P, M ও M, O যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, ONPM সামান্তরিক।

প্রমাণ: ধরি, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CE} = \underline{b}$, $\overrightarrow{ED} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DB} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}$

বা, $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{NP} = \dfrac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{MO} = \dfrac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু, $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BE} = \underline{0}$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore$ $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\dfrac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP}$

$\therefore$ ON ও MP সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে PN ও OM সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ONPM একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৬০ ΔABC এর AB, BC, CA এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, F, E.

[পুলিশ লাইন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]

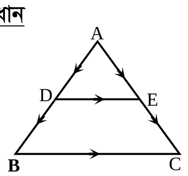
ক. $\overrightarrow{DE}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, DE || BC এবং DE $= \frac{1}{2}$ BC. ৪

গ. ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(10, 6), B(4, 0), C(14, 0) হলে দেখাও যে, Δ ক্ষেত্র ABC ঃ Δ ক্ষেত্র ADE = 4 ঃ 1। ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔADE এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,



$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$

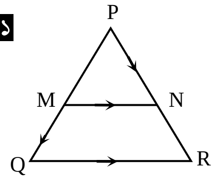
বা, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [D ও E, AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore$ $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

গ সৃজনশীল ১৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩১
বিঃদ্রঃ E ও F এর পরিবর্তে যথাক্রমে D ও E নিতে হবে।

প্রশ্ন ▶৬১



ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N.

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী]

ক. $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || QR এবং MN $= \frac{1}{2}$ QR. ৪

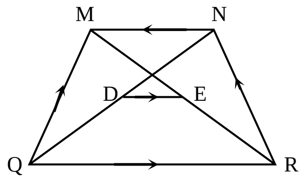
গ. QRNM ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || MN || QR এবং DE $= \frac{1}{2}$ (QR – MN) ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১০(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৮
বি. দ্র. S ও T এর পরিবর্তে যথাক্রমে M ও N হবে।

খ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৯
বি. দ্র. S ও T এর পরিবর্তে যথাক্রমে M ও N হবে।

গ



মনে করি, QRNM ট্রাপিজিয়ামের QR ও MN সমান্তরাল বাহু এবং MR ও QN কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও D। প্রমাণ করতে হবে যে, DE || MN || QR এবং

DE $= \frac{1}{2}$(QR – MN)

ধরি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে R, Q, N, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{d}$

$\therefore$ $\overrightarrow{QR} = \underline{b} - \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{MN} = \underline{e} - \underline{d}$

এখন D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$

এবং E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$\therefore$ $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{c} - \underline{e})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c} + \underline{d} - \underline{e})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{NM})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$

$\therefore$ $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{NM}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী

$\therefore$ $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{MN}|)$

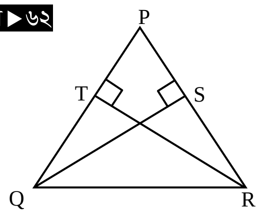
বা, DE $= \frac{1}{2}$(QR – MN)

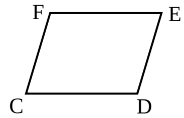
$\therefore$ DE, MN ও QR সমান্তরাল।

অর্থাৎ, DE || MN || QR

$\therefore$ DE $= \frac{1}{2}$ (QR – MN) এবং DE || MN || QR **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬২





CDEF সামান্তরিক

[সৈয়দপুর সরকারি কারিগরি কলেজ, নীলফামারী]

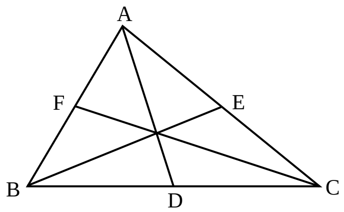
ক. Δ এর ভরকেন্দ্র ব্যাখ্যা কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, CDEF এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. দেখাও যে, Δ ক্ষেত্র PQR.PS^2 = Δ ক্ষেত্র PTS.PQ^2 ৪

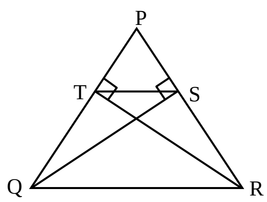
৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র :** ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়। ΔABC এর AD ও CE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুটিই হল ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র। ভরকেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৪

গ



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔPQR-এ $RT \perp PQ$ এবং $QS \perp PR$। T ও S যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র $PQR.PS^2 = \Delta$ ক্ষেত্র $PTS.PQ^2$।

প্রমাণ : $\angle QSR = \angle QTR = 1$ সমকোণ। [□ $QS \perp PR$ এবং $RT \perp PQ$]
যেহেতু কোণ দুইটি QR এর একই পাশে অবস্থিত। $\therefore$ Q, R, S, T বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

$\therefore$ QRST চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore$ $\angle PTS = \angle QRS$ [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান]

অর্থাৎ $\angle PTS = \angle PRQ$

অনুরূপভাবে, $\angle PST = \angle PQR$

এখন, ΔPQR ও ΔPST এ,

$\angle PTS = \angle PRQ$, $\angle PST = \angle PQR$ এবং $\angle P$ সাধারণ।

$\therefore$ ΔPTS ও ΔPQR সদৃশ

$\therefore \dfrac{\Delta PQR}{\Delta PTS} = \dfrac{PQ^2}{PS^2}$

বা, $\Delta PQR.PS^2 = \Delta PTS.PQ^2$

অর্থাৎ, Δ ক্ষেত্র $PQR.PS^2 = \Delta$ ক্ষেত্র $PTS.PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬৩ ΔPQR এর শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে P(1, 6), Q(– 1, 1) ও R(3, 3) এবং PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে T ও S। *[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা]*

ক. PQ ও PR এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. PQ, PR ও QR এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং ΔPQR এর ক্ষেত্রফল বের কর। ৪

গ. TQ ও SR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}(TS + QR)$ এবং $MN \parallel TS \parallel QR$। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, P(1, 6), Q(– 1, 1) ও R(3, 3)

PQ এর সমীকরণ, $\dfrac{x-1}{1+1} = \dfrac{y-6}{6-1}$

বা, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-6}{5}$

বা, $5x - 5 = 2y - 12$

$\therefore$ $5x - 2y + 7 = 0$ **(Ans.)**

PR এর সমীকরণ, $\dfrac{x-1}{1-3} = \dfrac{y-6}{6-3}$

বা, $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-6}{3}$

বা, $3x - 3 = -2y + 12$

$\therefore$ $3x + 2y - 15 =$ **(Ans.)**

খ PQ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1+1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

PR এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-3)^2 + (6-3)^2}$
$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

QR এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+1)^2 + (3-1)^2}$
$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$\therefore$ ΔPQR এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}(1 - 3 + 18 + 6 - 3 - 3)$

$= \dfrac{1}{2} \times 16$

$= 8$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৫

প্রশ্ন ▶৬৪ ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD. *[গভর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, কুমিল্লা]*

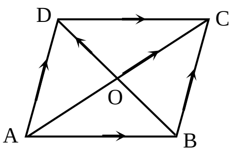
ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর যে, APQD একটি সামান্তরিক। ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔABC এ ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

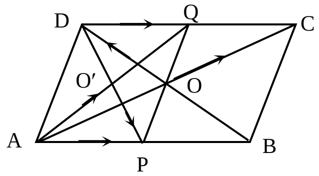
$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ [□ সামান্তরিকের ক্ষেত্রে $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

আবার, ΔABD এ ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৪

গ



AB ও CD এর মধ্যবিন্দু P ও Q যোগ করি। ধরি, APQD চতুর্ভুজের কর্ণ $\overrightarrow{AQ}$ এবং $\overrightarrow{DP}$

$\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{O'Q}$ [□ O′, AQ এর মধ্যবিন্দু]

$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{DO'}$ [□ O′, DP এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DO'} + \overrightarrow{O'Q}$ [ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{AO'}$

বা, $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'P}$ [□ $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$\therefore \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{AP}$ [ত্রিভুজ বিধি, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{OP'}$]

$\therefore$ DQ = AP এবং $\overrightarrow{DQ}$ ও $\overrightarrow{AP}$ এর ধারক একই বা সমান্তরাল হবে।

স্পষ্টত এখানে $\overrightarrow{DQ}$ ও $\overrightarrow{AP}$ এর ধারক ভিন্ন। অর্থাৎ $AP \parallel DQ$

$\therefore$ APQD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬৫ ΔABC এর পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং ভরকেন্দ্র G। *[নবাব ফয়জুন্নেছা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিল্লা]*

ক. পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু কাকে বলে লিখ। ২

খ. প্রমাণ কর যে, পরিকেন্দ্র, লম্ববিন্দু ও ভরকেন্দ্র একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. যদি ΔABC এর AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E হয় তবে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $DE \parallel BC$. ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পরিকেন্দ্র:** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

লম্ববিন্দু : ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে লম্ববিন্দু বলে।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭২

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

প্রশ্ন ▶৬৬ ABC ত্রিভুজে AB = AC = 6 সে.মি. এবং ভূমি BC = 5 সে.মি.। *[কুমিল্লা মডার্ণ হাই স্কুল, কুমিল্লা]*

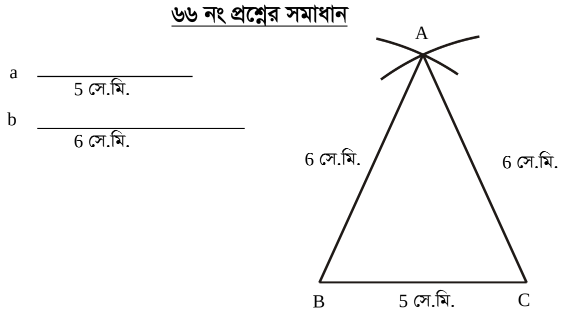
ক. ত্রিভুজটি আঁক। ২

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁক। ৪

গ. AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}BC$। ৪

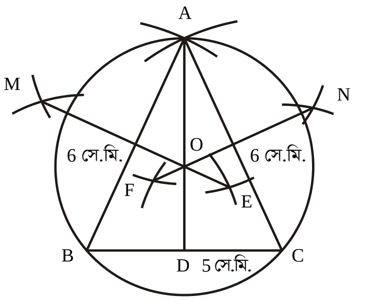
৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমি BC = 5 সে.মি. এবং সমান সমান বাহুদ্বয় AB = AC = 6 সে.মি.।

খ



বিশেষ নির্বচন: ABC ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ A, B ও C দিয়ে যায়।

অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ ১: AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ২: A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৬৩

প্রশ্ন ▶৬৭ P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ST রেখা PQ এবং PR কে মধ্যবিন্দুতে ছেদ করে।

[আল-আমিন একাডেমি স্কুল এন্ড কলেজ, চাঁদপুর]

ক. PR এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, PQR সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফল 25 বর্গ একক। ৪

গ. ভেক্টর এর সাহায্যে দেখাও যে, ST || QR এবং $ST = \frac{1}{2} QR$। ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

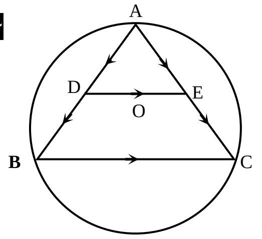
ক দেওয়া আছে, P ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (8, 3) ও (–2, 3)

$\therefore$ PR রেখার ঢাল $= \frac{3-3}{-2-8} = \frac{0}{-10} = 0$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৯

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৯

প্রশ্ন ▶৬৮



[ফেনী সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়]

চিত্রে D এবং E যথাক্রমে AB এবং AC-এর মধ্যবিন্দু।

ক. $\vec{AD} + \vec{DE}$ কে $\vec{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2} BC$ ৪

গ. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা ABC বৃত্তের নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়ে যায়। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক] ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

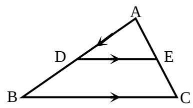
ক যেহেতু D, AB এর মধ্যবিন্দু। সুতরাং $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ এবং E, AC এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

ΔADE-এ, $\vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৪ এর সম্পাদ্য-৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮৬

প্রশ্ন ▶৬৯ ΔABC এর AB এবং AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E



[লক্ষ্মীপুর আদর্শ সামাদ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর]

ক. $\vec{AD} + \vec{DE}$ কে $\vec{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2} BC$. ৪

গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৬৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪৯

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩

গ সৃজনশীল ২০(গ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৩৪
[**বি. দ্র.** P, Q, R, F ও G এর পরিবর্তে যথাক্রমে A, B, C, M ও N হবে।]

প্রশ্ন ▶৭০ একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2, –4), B(– 4, 4), C(3, 3)

[নোয়াখালী জিলা স্কুল, নোয়াখালী]

ক. BC এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ৪

গ. ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু D ও E হলে ভেক্টরের মাধ্যমে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2} BC$. ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,
B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 4, 4) ও (3, 3)

$\therefore$ BC রেখার ঢাল $= \frac{3-4}{3-(-4)} = \frac{-1}{7}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2, –4), B(– 4, 4) এবং C(3, 3)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+4)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

BC ,, ,, $= \sqrt{(-4-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

AC ,, ,, $= \sqrt{(2-3)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

যেহেতু BC বাহুর দৈর্ঘ্য = AC বাহুর দৈর্ঘ্য

$\therefore$ ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। **(দেখানো হলো)**

গ উচ্চতর গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৩

প্রশ্ন ▶৭১ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(7, 2), B(–4, 2), C(–4, –3) এবং D(7, –3), P, Q, R, S যথাক্রমে AB, BC, CD এবং DA বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু।

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ]

ক. AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত না নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন-৪ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৬

প্রশ্ন ▶ ৭২ ABCD চতুর্ভুজের A, B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 1), (5, 2), (6, 5) ও (2, 6)। *[ডাঃ খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*

ক. B ও C বিন্দুগামী রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. AC ও BD কর্ণের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. AB, BC, CD ও AD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G, H হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রকাশ কর যে, EFGH চতুর্ভুজটি সামান্তরিক। ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B(5, 2) ও C(6, 5) বিন্দুদ্বয়গামী রেখার ঢাল $= \frac{5-2}{6-5} = \frac{3}{1} = 3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(1, 1), B(5, 2), C(6, 5) ও D(2, 6)

AC সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x-6}{6-1} = \frac{y-5}{5-1}$

বা, $\frac{x-6}{5} = \frac{y-5}{4}$

বা, $4x - 24 = 5y - 25$

$\therefore 4x - 5y + 1 = 0$ ... ... (i)

BD সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x-5}{5-2} = \frac{y-2}{2-6}$

বা, $\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{-4}$

বা, $3y - 6 = -4x + 20$

$\therefore 4x + 3y - 26 = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং এ আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$\frac{x}{130-3} = \frac{y}{4+104} = \frac{1}{12+20}$

বা, $\frac{x}{127} = \frac{y}{108} = \frac{1}{32}$

$\therefore \frac{x}{127} = \frac{1}{32}$ এবং $\frac{y}{108} = \frac{1}{32}$

$\therefore x = \frac{127}{32}$ বা, $y = \frac{108}{32}$ $\therefore y = \frac{27}{8}$

$\therefore$ AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{127}{32}, \frac{27}{8}\right)$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৬৫

প্রশ্ন ▶ ৭৩ A(6, 0), B(0, 6), C(– 6, 0) এবং D(0, – 6) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। *[ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. AB এবং BC রেখার ঢাল কত? ২

খ. দেখাও যে, প্রদত্ত বিন্দুগুলো একটি বর্গক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু। ৪

গ. প্রাপ্ত চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(6, 0), B(0, 6) ও C(– 6, 0)

AB রেখার ঢাল $= \frac{6-0}{0-6} = \frac{6}{-6} = -1$

BC রেখার ঢাল $= \frac{0-6}{-6-0} = \frac{-6}{-6} = 1$ **(Ans.)**

খ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0+6)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-6-0)^2 + (0+6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-0)^2 + (0+6)^2} = \sqrt{3 6+36} = \sqrt{72}$

$\therefore$ চতুর্ভুজটির চার বাহু সমান। অতএব, ইহা একটি রম্বস বা বর্গক্ষেত্র।

এখন, কর্ণ AC $= \sqrt{(6+6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

কর্ণ BD $= \sqrt{(0-0)^2 + (6+6)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

যেহেতু কর্ণদ্বয় সমান অতএব ইহা একটি বর্গ।

$\therefore$ বিন্দু চারটি একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৪

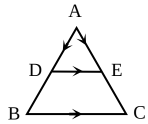
প্রশ্ন ▶ ৭৪ ΔABC এ AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. *[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম]*

ক. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ কে $\overrightarrow{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BC ∥ DE ও DE $= \frac{1}{2}$BC। ৪

গ. BCED চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN $= \frac{1}{2}$(BC – DE) ৪

৭৪ নং প্রশ্নের সমাধান



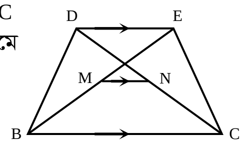
ক ΔADE–এ

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]

সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩



গ মনে করি, BCEDট্রাপিজিয়ামের DE ∥ BC এবং CD ও BE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে,

MN $= \frac{1}{2}$ (BC – DE)

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$, $\underline{d}$.

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because$ M, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because$ N, CD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})|$

$\therefore$ MN $= \frac{1}{2}$(BC – DE) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭৫ ABC ত্রিভুজের উচ্চতা h = 3.5 cm শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমি BC এর উপর মধ্যমা AD = 4 cm এবং ∠B = 60° *[চট্টগ্রাম সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$ ৪

গ. AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ $= \frac{1}{2}$BC এবং PQ ∥ BC। ৪

৭৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৪ এর সম্পাদ্য-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮২।
[**বি. দ্র.** h = 3.5 cm, d = 4cm এবং ∠x = 60° নিতে হবে।]

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৭

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩।
[**বি. দ্র.** D ও E এর স্থলে যথাক্রমে P ও Q নিতে হবে।]

প্রশ্ন ▶ ৭৬ PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং PR ও QS উহার দুইটি কর্ণ। *[চট্টগ্রাম সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]*

ক. নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান কোথায় এবং ব্যাসার্ধ কত? ২

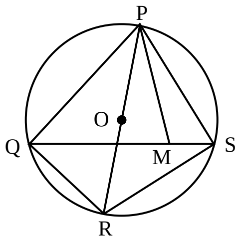
খ. প্রমাণ কর যে, PR . QS = PQ . RS + QR .PS ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র। নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেক।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। PR এবং QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + QR . PS.

অঙ্কন: $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ এর ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$-এর সমান করে $\angle SPM$ আঁকি যেন PM রেখা QS কর্ণকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $\angle QPR = \angle SPM$

উভয়পক্ষে $\angle RPM$ যোগ করে পাই,

$\angle QPR + \angle RPM = \angle SPM + \angle RPM$

অর্থাৎ, $\angle QPM = \angle RPS$

এখন ΔPQM ও ΔPRS এর মধ্যে $\angle QPM = \angle RPS$

$\angle PQS = \angle PRS$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PMQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore$ ΔPQM ও $\angle PRS$ সদৃশকোণী।

$\frac{QM}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ, PR . QM = PQ . RS .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPMS এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPM$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PSM = \angle PRQ$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PMS$

$\therefore$ ΔPQR ও ΔPMS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$

অর্থাৎ, PR . MS = QR . PS ....(ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

PR . QM + PR. MS = PQ . RS + QR . PS

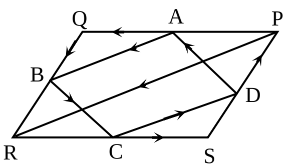
বা, PR (QM + MS) = PQ . RS + QR . PS

অর্থাৎ, PR . QS = PQ . RS + QR . PS [যেহেতু QM + MS = QS] **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{a}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{b}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{SP} = \underline{d}$

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$



অনুরূপভাবে $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

$\therefore (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP}$

$= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR}$ [$\because \overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$]

$= \underline{0}$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

স্পষ্টতই AB এবং DC এর ধারক রেখা একই নয়।

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল। অনুরূপভাবে, BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭৭ ΔPQR এ PQ, QR, PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M, N, O.

[চট্টগ্রাম সিটি কর্পোরেশন আম্ভ্রু বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র লিখ। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{RM} = \underline{0}$ ৪

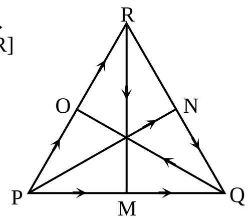
গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, MO || QR এবং $MO = \frac{1}{2}QR$ ৪

৭৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ এর ১(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫৫

খ ΔPQN-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN}$

$\therefore \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ ... ... (i)



[N, QR এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$]

ΔPRM-এ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RM}$

$\therefore \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{RM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$ ... ... (ii)

[M, PQ এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$]

এবং ΔPQO-এ $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QO}$

বা, $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PQ}$

$\therefore \overrightarrow{QO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ ... ... (iii)

[O, $\overrightarrow{PR}$ এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{QO} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

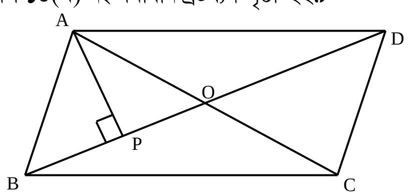
বা, $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{RM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{RM} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৯

প্রশ্ন ▶ ৭৮



চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক

[আগ্রাবাদ সরকারী কলোনী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. AB ও AD এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO^2)$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, AO = OC এবং BO = OD ৪

৭৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল **৮ নং প্রশ্নের সমাধান** দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৮

প্রশ্ন ▶ ৭৯ বাপ্পী মিতার বয়সের 3 গুণ হতে 3 বছরের ছোট, মিতার বয়স x ও বাপ্পীর বয়স y হলে এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ হয়। রেখাটি P(k, 4) বিন্দুগামী এবং x ও y অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

[চট্টগ্রাম সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ২

খ. AP = BP হলে ΔABP-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. AC ও BC এর মধ্যবিন্দু F ও E হলে এবং BF ও AE এর মধ্যবিন্দু P ও Q হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel EF \parallel BA$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(BA - EF)$ ৪

৭৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রশ্নানুসারে, সরলরেখার সমীকরণটি, $y = 3x - 3$ ... (i)

(i) নং সরলরেখাটি P(k, 4) বিন্দুগামী।

সুতরাং, $4 = 3k - 3$

বা, $3k = 4 + 3$

$\therefore k = \frac{7}{3}$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{7}{3}, 4\right)$ **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই, $y = 3x - 3$

বা, $3x - y = 3$

$\therefore \frac{x}{1} + \frac{y}{-3} = 1$

$\therefore$ রেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A(1, 0) ও B(0, – 3) বিন্দুতে ছেদ করে।

দেওয়া আছে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (k, 4)

শর্তমতে, AP = BP

বা, $\sqrt{(k-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(k-0)^2 + (4+3)^2}$

বা, $k^2 - 2k + 1 + 16 = k^2 + 49$

বা, $-2k = 49 - 17$

বা, $-2k = 32$

$\therefore k = -16$

$\therefore$ P বিন্দু স্থানাঙ্ক (– 16, 4)

$\therefore \Delta ABP$ এর ক্ষেত্রফল

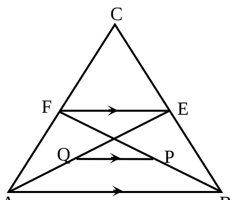
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -16 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(4 + 48 + 0 + 0 + 0 + 3)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 55$ বর্গ একক

= 27.5 বর্গ একক **(Ans.)**

গ



দেওয়া আছে, ABC এর BC ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। সুতরাং FE || AB। অর্থাৎ ABEF একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, BF ও AE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। Q, P যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ = \frac{1}{2}(BA - EF)$ এবং PQ || EF || BA.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}, \underline{f}$.

$\overrightarrow{BA} = \underline{a} - \underline{b}$

$\overrightarrow{EF} = \underline{f} - \underline{e}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{f})$ [$\because$ P, BF এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{e})$ [$\because$ Q, AE এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{f}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{e} - \underline{b} - \underline{f})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{a} - \underline{b}) - (\underline{f} - \underline{e})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EF})$

EF || BA হওয়ায় $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EF}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{BA}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BA}$ ও $\overrightarrow{EF}$ এর সমান্তরাল হবে।

যেহেতু $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EF})$

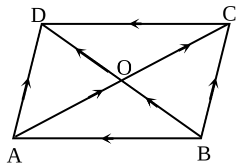
$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EF})|$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(BA - EF)$

অর্থাৎ PQ || EF || BA

এবং $PQ = \frac{1}{2}(BA - EF)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৮০



ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

[ব-ু-বার্ড স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করে। ৪

গ. ΔABD এ E, AD এর মধ্যবিন্দু এবং O, BD মধ্যবিন্দু হলে, দেখাও যে, $EO \parallel AD$ এবং $EO = \frac{1}{2}AD$. ৪

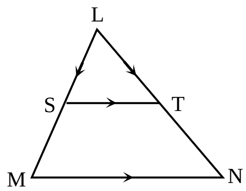
৮০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ এর ২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৫৬

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৪

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা- ২৬৩

প্রশ্ন ▶ ৮১



চিত্রে ΔLMN এর LM ও LN বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি বর্ণনা কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, $ST \parallel MN$ এবং $ST = \frac{1}{2}MN$. ৪

গ. যদি SMNT ট্রাপিজিয়ামের SM ও TN এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হয়, তবে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel ST \parallel MN$ এবং $DE = \frac{1}{2}(ST + MN)$. ৪

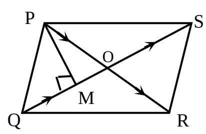
৮১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উচ্চতর গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫৫

খ সৃজনশীল ১০(খ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২২৯

গ সৃজনশীল ২(গ) নং সমাধান অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২২৫

প্রশ্ন ▶ ৮২ নিচের চিত্রে PQRS একটি সামান্তরিক।



[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

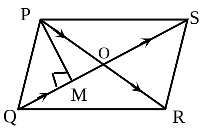
ক. PQ এবং PS এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR}$ এবং $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{OS}$. ৪

৮২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



PQ এর লম্ব অভিক্ষেপ QM.

এবং PS এর লম্ব অভিক্ষেপ SM.

খ সৃজনশীল ৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৭

গ সৃজনশীল ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৭

প্রশ্ন ▶ ৮৩ A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

[সরকারি জুবিলী উচ্চ বিদ্যালয়, সুনামগঞ্জ]

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ২

খ. দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাও যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ ৪

৮৩ নং প্রশ্নের সমাধান

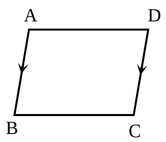
ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬২

খ দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$. দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।



$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, কোনো মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$। AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$.

প্রমাণ: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$

[$\because$ AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে]

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{n}{m}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{CB}| + |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{n + m}{m}$ [যোজন করে]

বা, $\dfrac{AC + CB}{AC} = \dfrac{n + m}{m}$

বা, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{n + m}{m}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{m + n}{m}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{m}{m + n}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $|\overrightarrow{AC}| = \left(\dfrac{m}{m + n}\right) |\overrightarrow{AB}|$

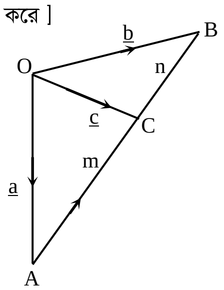
বা, $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{m}{m + n}\right) \overrightarrow{AB}$ [$\because$ $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \dfrac{m}{m + n}(\underline{b} - \underline{a})$ [$\because$ $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$]

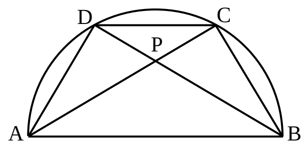
বা, $\underline{c} = \dfrac{m}{m + n}(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - m\underline{a} + m\underline{a} + n\underline{a}}{m + n}$

$\therefore$ $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ **(দেখানো হলো)**



প্রশ্ন ▶ ৮৪ *[বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার]*



চিত্রে AB ∥ CD

ক. সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 সে.মি. এবং বাহুদ্বয়ের একটি অপরটি অপেক্ষা 8 সে.মি. বড়। ABCD এর ক্ষেত্রফল 128 বর্গ সে.মি. হলে CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. অর্ধবৃত্তের AB ব্যাস এবং AC ও BD দুইটি জ্যা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$. ৪

গ. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে AC বাহুর A ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{c}$। P, AC কে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। দেখাও যে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{m\underline{c} + n\underline{a}}{m + n}$ ৪

৮৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপকে ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এবং AB ও CD সমান্তরাল। এখানে, বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব h = 8 সে.মি. এবং এর ক্ষেত্রফল 128 বর্গ সে.মি.।

ধরি, CD বাহুর দৈর্ঘ্য x সে.মি.

যেহেতু, AB > CD

সেহেতু, AB বাহুর দৈর্ঘ্য (x + 8) সে.মি.

$\therefore$ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \left(\dfrac{AB + CD}{2}\right) \times h$ বর্গ একক

$= \left(\dfrac{x + 8 + x}{2}\right) \times 8$ বর্গ সে.মি.

$= 8\,(x + 4)$ বর্গ সে.মি.

শর্তমতে, $8\,(x + 4) = 128$

বা, $x + 4 = \dfrac{128}{8}$

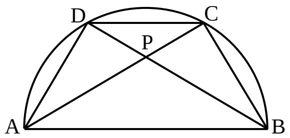
বা, $x + 4 = 16$

বা, $x = 16 - 4$

$\therefore$ $x = 12$

অতএব, CD বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. । **(Ans.)**

L



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত। AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC.\ AP + BD.\ BP$ ।

প্রমাণ: ΔCPD ও ΔAPB-এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC-এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$$

বা, $AP.CP = BP.DP$

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$ [উভয়পক্ষে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP\ (CP + AP) = BP.DP + DP^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$;
$\therefore AP^2 = AD^2 + DP^2$]

বা, $AP.AC = DP\ (BP + DP) + AD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$

[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD -এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$
বা $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

বা, $AP.AC = AB^2 - BD\ (BD - DP)$

বা, $AP.AC = AB^2 - BD.BP$

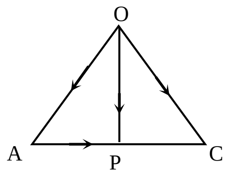
$\therefore$ $AB^2 = AP.AC + BD.\ BP$ **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, মূলবিন্দু O এবং A, C দুইটি বিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও C বিন্দুর অবস্থায় ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$

O, A; O, C যোগ করি। P, AC কে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। O, P যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\left(\frac{m\underline{c} + n\underline{a}}{m + n}\right)$

প্রমাণ: যেহেতু P, AC কে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে সেহেতু AP ঃ PC = m ঃ n



বা, $\frac{AP}{PC} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{AP}{PC} + 1 = \frac{m}{n} + 1$

বা, $\frac{AP + PC}{PC} = \frac{m + n}{n}$

বা, $\frac{AC}{PC} = \frac{m + n}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{PC}|} = \frac{m + n}{n}$, $[\therefore AC = |\overrightarrow{AC}|]$

বা, $|\overrightarrow{AC}| = \left(\frac{m + n}{n}\right)|\overrightarrow{PC}|$

তাহলে, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{PC}$

বা, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{PC}$

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \left(\frac{m + n}{n}\right)(\underline{c} - \overrightarrow{OP})$

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \left(\frac{m + n}{n}\right)\underline{c} - \left(\frac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP}$

বা, $\left(\frac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \left(\frac{m + n}{n}\right)\underline{c} + \underline{a} - \underline{c}$

বা, $\left(\frac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \left(\frac{m + n}{n} - 1\right)\underline{c} + \underline{a}$

বা, $\left(\frac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \frac{m}{n}\underline{c} + \underline{a}$

বা, $\left(\frac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \frac{m\underline{c} + n\underline{a}}{n}$

বা, $(m + n)\ \overrightarrow{OP} = m\underline{c} + n\underline{a}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP} = \frac{m\underline{c} + n\underline{a}}{m + n}$

অর্থাৎ O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{(m\underline{c} + n\underline{a})}{m + n}$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶৮৫ $(-2, -3)$ বিন্দুগামী একটি রেখার ঢাল 3 এবং রেখাটি x অক্ষ ও y অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। অপর একটি রেখা R(4, 3) এবং S(3, 0) বিন্দু দিয়ে যায়। *[বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল]*

ক. PQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. P, Q, R, S বিন্দু চারটি লেখ কাগজে স্থাপন করে দেখাও যে PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. উদ্দীপকের বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশসমূহ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি কী ধরনের হবে তা ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর। ৪

৮৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক অধ্যায় ১১ এর সৃজনশীল ৩১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২১৩

খ অধ্যায় ১১ এর সৃজনশীল ৩১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২১৩

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৫

[বি. দ্র. পাঠ্যবইয়ের A, B, C ও D এর পবিরর্তে P, Q, R ও S হবে এবং P, Q, R ও S এর পরিবর্তে A, B, C ও D বসিয়ে নির্ণয় করতে হবে।]

প্রশ্ন ▶৮৬ PQRS একটি সামান্তরিক যার কর্ণ দুটি O বিন্দুতে ছেদ করেছে। *[বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল]*

ক. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু বলতে কি বুঝায়? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\vec{PO} = \vec{OR}$ এবং $\vec{QO} = \vec{OS}$ ৪

৮৬ নং প্রশ্নের সমাধান

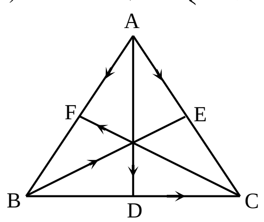
ক **পরিকেন্দ্র:** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

লম্ববিন্দু: ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুকে লম্ব বিন্দু বলে।

খ সৃজনশীল ৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৭

গ সৃজনশীল ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৭

প্রশ্ন ▶৮৭



ΔABC এ AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]

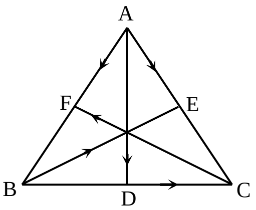
ক. $\overrightarrow{BC}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ ৪

গ. A(3, 4), B(– 4, 2), C(6, –1) এবং P(k, 3) বিন্দু চারটি ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে আবর্তিত হলে এবং ABCP এর ক্ষেত্রফল ΔABC এর ক্ষেত্রফলের তিনগুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি হতে পাই,

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BF}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CF}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CF}$ [∵ F, AB এর মধ্যবিন্দু ∴ $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
]

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}$

$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}) - \overrightarrow{CF}$ [□ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$]

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}\right) - \overrightarrow{CF}$ ... ... (i)

আবার, ΔBEC এ $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC}$

বা, $\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

∴ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE}$

(i) নং হতে পাই,

$\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BE}) - \overrightarrow{CF}$

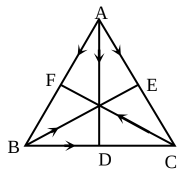
বা, $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF}$

বা, $\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF}$

∴ $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF})$ **(Ans.)**

খ ΔABD-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

∴ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (i)



[D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

ΔACF-এ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$

∴ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$

∴ $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

[F, AB এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং ΔABE-এ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$

∴ $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (iii)

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \underline{0}$

∴ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(6 + 4 + 24 + 16 - 12 + 3)$

$= \frac{1}{2}(41) = \frac{41}{2}$ বর্গ একক

ABCP চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & k & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(6 + 4 + 18 + 4k + 16 - 12 + k - 9)$

$= \frac{1}{2}(23 + 5k)$ একক

প্রশ্নানুসারে, $3 \times \frac{41}{2} = \frac{1}{2}(23 + 5k)$

বা, $\frac{123}{2} = \frac{1}{2}(23 + 5k)$

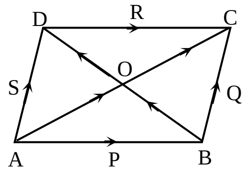
বা, $123 = 23 + 5k$

বা, $5k = 123 - 23$

বা, $5k = 100$

∴ $k = 20$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৮



[পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী]

ক. ভেক্টরের যোগের বিধির সংজ্ঞা চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

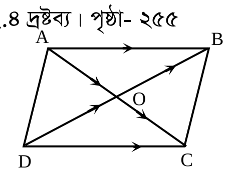
খ. প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। (ভেক্টরের বিধি প্রযোজ্য) ৪

গ. উদ্দীপকে উলেণ্টখিত চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S হলে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক হবে। ৪

৮৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ-১২.৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৫৫

খ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [∵ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [∵ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [∵ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

∴ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

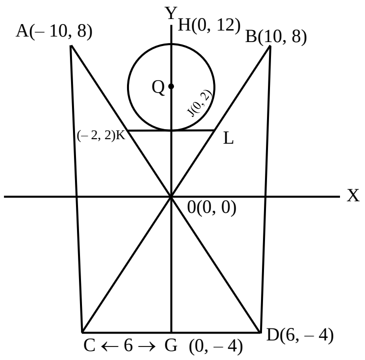
$\therefore AB = DC$ এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ $AB \,||\, DC$

[∵ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৫

প্রশ্ন ▶ ৮৯



[নারায়ণগঞ্জ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নারায়ণগঞ্জ]

ক. Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. J, KL এর মধ্যবিন্দু হলে CD ও KL এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর 2KL = AB – CD ৪

৮৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রানুসারে, Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের HJ ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় H(0, 12) ও J(0, 2).

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র, $Q\left(\frac{0+0}{2}, \frac{12+2}{2}\right) \equiv Q(0, 7)$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $QJ = \sqrt{(0-0)^2 + (7-2)^2} = 5$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-0)^2 + (y-7)^2 = 5^2$ **(Ans.)**

খ চিত্রানুসারে, K(– 2, 2), J(0, 2)

ধরি, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

যেহেতু J, KL এর মধ্যবিন্দু। সুতরাং,

$\frac{x-2}{2} = 0$ এবং $\frac{y+2}{2} = 2$

বা, $x - 2 = 0$ বা, $y + 2 = 4$

$\therefore x = 2$ $\therefore y = 2$

$\therefore$ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 2)

$\therefore$ KL রেখার ঢাল $= \frac{2-2}{2+2} = 0$

এবং KL রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4^2} = 4$

আবার, C বিন্দু DG রেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দু। সুতরাং, CD রেখার ঢাল = DG রেখার ঢাল $= \frac{-4+4}{6-0} = 0$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (p, q)

 C বিন্দু G(0, – 4) বিন্দু থেকে 6 একক দূরত্বে x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত এবং CG বা CD বা DG রেখার ঢাল শূন্য। সুতরাং

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0 – 6, – 4) = (– 6, – 4)

$\therefore$ CD রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+6)^2 + (-4+4)^2} = \sqrt{12^2}$

$= 12 = 3 \times 4 = 3 \times$ KL রেখার দৈর্ঘ্য

$\therefore$ CD = 3KL

 CD ও KL রেখার ঢাল 0। সুতরাং $CD \,||\, KL$.

$\therefore$ $CD \,||\, KL$ এবং CD = 3KL ইহাই নির্ণেয় সম্পর্ক। **(Ans.)**

গ 'খ' হতে পাই, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 6, – 4) এবং L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 2)

$\therefore$ BC এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{10-6}{2}, \frac{8-4}{2}\right) = (2, 2)$

= L বিন্দুর স্থানাঙ্ক

আবার, AD এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{-10+6}{2}, \frac{8-4}{2}\right) = (-2, 2)$

= K বিন্দুর স্থানাঙ্ক

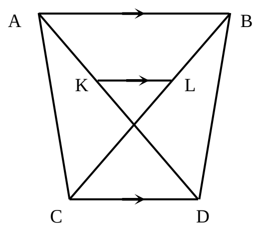
A, B যোগ করি। তাহলে, ABDC ট্রাপিজিয়ামের কর্ণ AD ও BC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে K ও L. প্রমাণ করতে হবে যে, 2KL = AB – CD.

প্রমাণ: মনে করি, মূলবিন্দু সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$.

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{CD} = \underline{d} - \underline{c}$

$\therefore$ L বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

K বিন্দুর অবস্থার ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$



$\therefore$ $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{d})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) - (\underline{d} - \underline{c})\}$

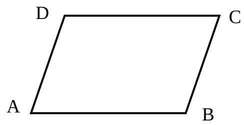
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right)$

$\therefore$ $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

বা, $\left|2\overrightarrow{KL}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right|$

$\therefore$ 2KL = AB – CD **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৯০



চিত্রঃ ABCD একটি সামান্তরিক। *[লায়ন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]*

ক. সিলিন্ডার ও কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র দুইটি লিখ। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, উদ্দীপকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$. ৪

৯০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে বক্রতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ বর্গএকক। কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং হেলানো উচ্চতা l একক হলে বক্রতলের ক্ষেত্রফল πrl বর্গ একক।

খ উচ্চতর গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৪

গ সৃজনশীল ৮৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৫২

প্রশ্ন ▶ ৯১ ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে AC ও BD

[বীরগঞ্জ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, দিনাজপুর]

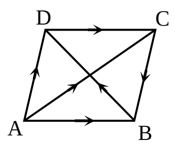
ক. C বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ কর। ২

খ. $\overrightarrow{AO} = \underline{a}, \overrightarrow{BO} = \underline{b}, \overrightarrow{OC} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \underline{0}$ ৪

৯১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



C বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \overrightarrow{CA}$

এবং C বিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \overrightarrow{CB}$

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৬৪

গ দেওয়া আছে, ABCD একটি সামান্তরিক। $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর কর্ণদ্বয়।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \underline{0}$

প্রমাণঃ ΔABD-তে

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ .... (i)

আবার, ΔACD-তে $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ [ABCD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ [$\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$]

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ .... (ii)

বা, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}$ [উভয় পক্ষে $\overrightarrow{BD}$ যোগ করে পাই]

$= 2\overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ ... ... (iii)

$\therefore \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৯২ ΔABC এর শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(2, –4), B(– 4, 4) এবং C(3, p) [যেখানে $p > 0$] *[মাতৃপীঠ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর]*

ক. AC = BC হলে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB রেখার সমীকরণ এবং ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা হয়, তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$. ৪

৯২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A ≡ (2, – 4)

B ≡ (– 4, 4)

C ≡ (3, p)

এবং AC = BC

বা, $\sqrt{(2-3)^2 + (-4-p)^2} = \sqrt{(-4-3)^2 + (4-p)^2}$

বা, $1 + 16 + 8p + p^2 = 49 + 16 - 8p + p^2$

বা, $8p + 8p = 65 - 17$

বা, $16p = 48$

$\therefore$ $p = 3$ **(Ans.)**

খ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-2}{2+4} = \frac{y+4}{-4-4}$

বা, $\frac{x-2}{6} = \frac{y+4}{-8}$

বা, $-8x + 16 = 6y + 24$

বা, $-8x - 6y + 16 - 24 = 0$

বা, $-8x - 6y - 8 = 0$

বা, $-2(4x + 3y + 4) = 0$

$\therefore$ $4x + 3y + 4 = 0$ **(Ans.)**

'ক' থেকে পাই, p = 3

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 3)

বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে নিয়ে পাই,

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(6 + 12 + 16 + 12 + 12 - 8)$

$= \frac{1}{2} \times 50$

= 25 বর্গএকক **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ২২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৪