

১ নং সৃজনশীল প্রশ্নঃ

$$f_1(x) = \frac{2x+5}{x+1}, f_2(x) = 4^x$$

ক. $f_1(x) = 5$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $f_1(x)$ এক-এক এবং অনটু ফাংশন।

গ. $f_1(x)$ - এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে উহার লেখচিত্র আঁক।

১ নং সৃজনশীল প্রশ্নের উত্তরঃ

ক. দেওয়া আছে, $f_1(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ এবং $f_1(x) = 5$

$$\therefore \frac{2x+5}{x+1} = 5 \text{ বা, } 2x+5 = 5x+5$$

$$\text{বা, } 5x - 2x = 5 - 5 \text{ বা, } 3x = 0$$

সুতরাং $x = 0$ (Ans.)

খ. $f_1(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $a, b \in \text{ডোম } f_1(x)$ এর জন্য $f_1(a) = f_2(b)$ হলে $a = b$ হয়

$$\therefore f_1(a) = f_2(b) \text{ বা, } \frac{2a+5}{a+1} = \frac{2b+5}{b+1}$$

$$\text{বা, } 2ab+2a+5b+5 = 2ab+2b+5a+5$$

$$\text{বা, } 2a-5a = 2b-5b \text{ বা, } -3a = -3b \therefore a = b$$

সুতরাং $f_1(x)$ এক-এক ফাংশন।

আবার, যে কোন সংখ্যা $y \in \mathbb{R}$ হলে

$$\text{ধরি, } f_1(x) = y = \frac{2x+5}{x+1}$$

$$\therefore y = \frac{2x+5}{x+1} \text{ বা, } xy + y = 2x+5 \text{ বা, } xy - 2x = 5 - y$$

$$\text{বা, } x(y - 2) = 5 - y \therefore x = \frac{5 - y}{y - 2}$$

এখন,

$$f_1\left(\frac{5-y}{y-2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{5-y}{y-2} + 5}{\frac{5-y}{y-2} + 1} = \frac{10 - 2y + 5y - 10}{5 - y + y - 2}$$

$$= \frac{3y}{y-2} \times \frac{y-2}{3} = y = f_1(x)$$

$\therefore f_1(x)$ অনটু ফাংশন।

অতএব, $f_1(x)$ এক-এক এবং অনটু ফাংশন। (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $f_2 f_2(x) = 4^x$

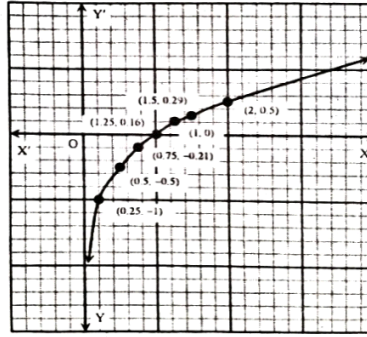
$$\text{ধরি, } f_2^{-1}(x) = a \text{ বা, } x = f_2(a)$$

$$\text{বা, } x = 4^a \text{ বা, } \log_4 x = a$$

$$\therefore f_2^{-1}(x) = \log_4 x \text{ (Ans.)}$$

x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $\log_4 x$ এর ভিন্ন ভিন্ন মান নির্ণয় করি।

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2
$\log_4 x$	-1	-0.5	-0.21	0	0.16	0.29	0.5



ছক কাগজে উভয় অক্ষ বরাবর প্রতি 5 ঘর সমান একক বিবেচনা করে বিন্দুগুলি স্থাপন করে যোগ করলে $f_2(x) = 4^x$ এর বিপরীত ফাংশন $\log_4 x$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

২ নং সৃজনশীল প্রশ্নঃ

$$F(x) = \sqrt{1-2x}$$

ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

খ. ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর।

গ. $F^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

২ নং সৃজনশীল প্রশ্নের উত্তরঃ

ক. দেওয়া আছে,

$$F(x) = \sqrt{1-2x}$$

$F(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি,

$$1-2x \geq 0$$

$$\text{বা, } -2x \geq -1$$

$$\text{বা, } 2x \leq 1$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore F(x) = \sqrt{1-2x} \text{ এর ডোমেন} = \left\{ x \in R : x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

খ. ধরি, $x_1, x_2 \in \text{ডোম } F$

$F(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $F(x_1) = F(x_2)$

এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়,

$$F(x_1) = F(x_2)$$

$$\text{বা, } \sqrt{1-2x_1} = \sqrt{1-2x_2}$$

$$\text{বা, } 1-2x_1 = 1-2x_2$$

$$\text{বা, } -2x_1 = -2x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

\therefore ফাংশনটি এক-এক।

গ. ধরি, $y = F(x) = \sqrt{1-2x}$

$$\text{বা, } y^2 = 1-2x \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 2x = 1-y^2$$

$$\text{বা, } x = \frac{1-y^2}{2} = F^{-1}(y)$$

$$\therefore F^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2}$$

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2} \text{ (Ans.)}$$

৩নং সৃজনশীল প্রশ্নঃ

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}, g(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$$

ক. $g(-5)$ এবং $f\left(\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $f(x)$ এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $g(x) = g^{-1}(x)$

৩নং সৃজনশীল প্রশ্নের উত্তরঃ

ক. দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ এবং $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$$\therefore g(-5) = \frac{4(-5)-7}{2(-5)-4} = \frac{-20-7}{-10-4} = \frac{-27}{-14} = \frac{27}{14} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{এবং } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}-3}{2 \cdot \frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1-9}{3}}{\frac{2+3}{3}} = \frac{.8}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{8}{5} \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$x = -\frac{1}{2}$ বসালে প্রদত্ত ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$$\therefore \text{ডোম } f(x) = R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

আবার, ধরি, $y = f(x)$ তাহলে $x = f^{-1}(y)$ এবং $y = \frac{x-3}{2x+1}$

$$\text{বা, } 2xy + y = x - 3$$

$$\text{বা, } x - 2xy = y + 3$$

$$\text{বা, } x(1-2y) = y + 3$$

$$\therefore x = \frac{y+3}{1-2y}$$

$y = \frac{1}{2}$ বসালে প্রদত্ত ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত।

∴ রেঞ্জ $f(x) = R - \{\frac{1}{2}\}$ Ans.)

গ. দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

মনে করি, $g^{-1}(x) = a$

বা, $x = g(a)$

বা, $x = \frac{4a-7}{2a-4}$

বা, $2ax - 4x = 4a - 7$

বা, $a(2x - 4) = 4x - 7$

বা, $a = \frac{4x-7}{2x-4}$

∴ $g^{-1}(x) = \frac{4x-7}{2x-4} = g(x)$

সুতরাং $g(x) = g^{-1}(x)$ (দেখানো হল)

প্র্যাকটিস শীট

প্রশ্ন-১. $F(x) = (x+5)^2$ এবং P,Q,R তিনটি সান্ত সেট।

ক. প্রমাণ কর যে, $(p|O) = P \cap Q'$

খ. F ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর এবং ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর: $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$

প্রশ্ন-২. ঢাকা মহানগরের একটি বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীদের উপর পরিচালিত এক জরিপে জানা যায় 40 জন দৈনিক প্রথম আলো, 32 জন ডেইলি স্টার, 28 জন দৈনিক ইত্তেফাক, 10 জন প্রথম আলো, ও ডেইলি স্টার, 8 জন ডেইলি স্টার ও ইত্তেফাক, 5 জন প্রথম আলো ও ইত্তেফাক এবং 3 জন তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

ক. তথ্যগুলি ভেনচিত্রে উপস্থাপন কর।

খ. কতজন শিক্ষার্থী পত্রিকা তিনটির একটিও পড়ে না।

গ. কতজন শিক্ষার্থী কেবলমাত্র দুইটি পত্রিকা পড়ে।

প্রশ্ন-৩. A, B, C যে কোন সেট।

ক. A ও B এর জন্য মারগ্যানের সূত্র লিখ।

খ. দেখাও যে, $A - B = A \cap B'$

প্রমাণ কর যে, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

প্রশ্ন-৪. $f: x \rightarrow mx + c$ ফাংশনের জন্য 2 এবং 4 এর প্রতিবিম্ব যথাক্রমে 7 এবং -1

ক. m ও c এর মান নির্ণয় কর।

খ. f এর অধীনে 5 এর প্রতিবিম্ব এবং 3 এর প্রাক প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

গ. এর মান নির্ণয় কর যেন $4f^{-1}(x) = x$

প্রশ্ন-৫. $F(x) = \frac{1}{x-5}$

ক. $F(x) = 2$ হলে, x -এর মান নির্ণয় কর।

খ. $F(x)$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং ফাংশনটি এক-এক কিনা নির্ধারণ কর।

গ. $F^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।