

১. নং প্রশ্নের সমাধান

যদি $a = 2 + 3^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$ ও $p = 1000$ দুটি সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন হয় এবং
 $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$

ক. $InP = 2.3026 \times \log P$ সূত্র ব্যবহার করে InP এর আসন্ন মান নির্ণয় করো।

খ. প্রদত্ত ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় করো

গ. প্রমাণ কর যে, $a^3 - 6a^2 - 15a - 44 = 0$.

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$p = 1000 \text{ এবং } InP = 2.3026 \times \log P$$

$$\text{বা, } \log P = \log 1000 = \log 10^3$$

$$\text{বা, } \log P = 3 \log 10 = 3 \times 1$$

$$\therefore \log P = 3$$

$$\text{এখন, } InP = 2.3026 \times \log P$$

$$= 2.3026 \times 3 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\therefore InP = 6.9078 \text{ (প্রায়) (Ans.)}$$

(খ) এর সমাধান:

প্রদত্ত ধারা, $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$

এখানে,

$$r = \frac{2}{8} = \frac{2}{2} = \frac{1}{4}$$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত,

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি,

$$|r| < 1 \text{ হয়,}$$

$$\text{বা, } -1 < r < 1$$

প্রাপ্ত সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{4}$, থেকে বড় এবং 1 থেকে ছোট।

\therefore অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$$\therefore \text{ অসীমতক সমষ্টি } = \frac{a}{1-r}$$

এখানে, প্রথম পদ $a = 8$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{4}$

$$\frac{8}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{\frac{4-1}{4}} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \text{ (Ans.)}$$

∴ অসীমতক সমষ্টি

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a = 2 + 3^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$

$$\text{বা, } (a-2) = 3^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{বা, } (a-2)^3 = \left(3^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \right)^3 \quad [\text{ঘন করে}]$$

$$= \left(3^{\frac{4}{3}} \right)^3 + \left(3^{\frac{2}{3}} \right)^3 + 3 \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \left(3^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= 3^4 + 3^2 + 3 \cdot 3^{1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} \times (a-2) \quad [(i) \text{ হতে}]$$

$$= 81 + 9 + 3 \cdot 3^{\frac{3+4+2}{3}} (a-2)$$

$$\text{বা, } (a-2)^2 = 90 + 3^{\frac{9}{3}} (a-2)$$

$$\text{বা, } a^3 - 3 \cdot a \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 - 2^3 = 90 + 3^3 (a-2)$$

$$\text{বা, } a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 90 + 27(a-2)$$

$$\text{বা, } a^3 - 6a^2 + 12a - 8 - 90 - 27a + 54 = 0$$

$$\text{বা, } a^3 - 6a^2 - 15a - 44 = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

১নং প্রশ্নের সমাধান

$$i. \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \dots \dots \dots$$

$$ii. 8 + 88 + 888 + \dots \dots \dots$$

ক. $x = \frac{1}{3}$ হলে (i) নং অসীম গুণোত্তর ধারাটির প্রথম আট পদেও সমষ্টি কত?

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (i) নং অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. (ii) নং ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \dots$

$x = \frac{1}{2}$ হলে, ধারাটি $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$

এখানে, ১ম পদ $a = \frac{1}{2}$

$$r = \frac{2^2}{1} = \frac{1}{2}$$

সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2} < 1$

$$= a \cdot \frac{1-r^8}{1-r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}$$

\therefore ১ম আট পদের সমষ্টি

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{256-1}{256} = \frac{255}{256} (\text{Ans.})$$

(খ) এর সমাধান:

প্রদত্ত ধারাটির ১ম পদ $a = \frac{1}{3x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{(3x+1)^2} \div \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

$$\therefore \left| \frac{1}{3x+1} \right| < 1$$

$$\text{বা, } -1 < \frac{1}{3x+1} < 1$$

$$\text{বা, } -1 < \frac{1}{3x+1}$$

$$\text{বা, } -1 > \frac{1}{3x+1} \quad [\text{বিপরীতকরণ করে}]$$

$$\text{বা, } -1 > 3x+1$$

$$\text{বা, } -1-1 > 3x+1-1$$

$$\text{বা, } -2 > 3x$$

$$\therefore x < -\frac{2}{3}$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{3x+1} < 1$$

$$\text{বা, } 3x+1 > 1$$

$$\text{বা, } 3x > 1-1$$

$$\text{বা, } 3x > 0$$

$$\therefore x > 0$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় শর্ত: } x < -\frac{2}{3} \text{ অথবা } x > 0 \text{ (Ans.)}$$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x+1}}{1-\frac{1}{3x+1}} = \frac{\frac{1}{3x+1}}{\frac{3x+1-1}{3x+1}} = \frac{1}{3x} \text{ (Ans.)}$$

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $8 + 88 + 888 + \dots$

ধরি, $S = 8 + 88 + 888 + \dots n$ তম পদ

বা, $S = 8(1 + 11 + 111 + \dots n$ তম পদ)

বা, $\frac{S}{8} = 1 + 11 + 111 + \dots n$ তম পদ

বা, $\frac{9S}{8} = 9 + 99 + 999 + \dots$

বা, $\frac{9S}{8} = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots$

$$= 10 + 100 + 1000 + \dots n \text{ তম পদ} - (1 + 1 + 1 + \dots n \text{ তম পদ})$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots n \text{ তম পদ}) - n$$

$$= 10 \cdot \frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - n$$

$$\text{বা, } S = \frac{8}{9} \left\{ \frac{10}{9} (10^n - 1) - n \right\}$$

$$\therefore S = \frac{80}{81} (10^n - 1) - \frac{8}{9} n \text{ (Ans.)}$$

$n = 11$ হলে,

$$S_{11} = \frac{80}{81}(10^{11} - 1) - \frac{8}{9} \times 11$$

$$= \frac{80}{81}(10^{11} - 1) - \frac{88}{9} \text{ (Ans.)}$$

প্র্যাকটিস অংশ:-সৃজনশীল প্রশ্ন:

অধ্যায়-৭

প্রশ্ন-১. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা ৪ মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল ৪৪ বর্গমিটার।

ক. দৈর্ঘ্যকে x মি. এবং প্রস্থকে y মি. ধরে সমীকরণ দুইটি লিখ।

খ. x ও y এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{1}{x-y}$$

গ. কে কোনো ধারার n ম পদ এবং $x-y$ কে সাধারণ অনুপাত বিবেচনা করে গঠিত ধারার অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় করো।

$$U_r = \frac{1}{r(r+1)}$$

প্রশ্ন-২. একটি অনুক্রমের r -তম পদ

ক. ধারাটি নির্ণয় কর এবং ধারাটি সম্পর্কে কী বলা যায়?

খ. ধারাটির ১০ম পদ এবং প্রথম ১০ পদের সমষ্টি নির্ণয় করে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং r এর মান যথেষ্ট ছোট হলে, U_r এর প্রান্তীয় মান কী হবে?

$$\frac{1}{3125}$$

প্রশ্ন-৩. একটি গুলোত্তর ধারার ৩য় পদ ০.০০৮ এবং ৫ম পদ ৩১২৫

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

খ. ধারাটি লিখ এবং প্রাপ্ত ধারার প্রথম ৪টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. 'খ' থেকে প্রাপ্ত ধারাটিকে বীজগণিতিক রাশি x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রশ্ন-৪. নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং প্রশ্নগুলো উত্তর দাও:

৬ অসীমতক সমষ্টি বিশিষ্ট একটি গুলোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r এবং $a = 6r$

ক. ধারাটিকে r এর সাহায্যে প্রকাশ কর।

খ. ধারাটির a এবং r এর মান নির্ণয় কর।

গ. ধারাটি নির্ণয় করে এর প্রথম ১৫ টি পদের সমষ্টি ও অসীমতক সমষ্টির সম্পর্কে মন্তব্য কর।

$$12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$$

প্রশ্ন-৫. একটি অসীম ধারা।

ক. প্রদত্ত অসীম ধারাটি কোন ধরনের। প্রদত্ত ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি কত?

খ. প্রদত্ত ধারাটির ১০ তম পদের মান এবং প্রথম ১০টি পদের সমষ্টি কত?

গ. প্রদত্ত ধারাটির n তম পদ আংশিক সমষ্টি S_n হলে প্রমাণ কর যে, $81(S_8 - S_4) = S_4$