দশম অধ্যায়

দ্বিপদী বিস্তৃতি

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ১০.১

প্রশ্ন–১ $128\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^8$ এবং $128\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^7$ দুইটি দ্বিপদী।

ক. দ্বিপদীদ্বয়কে $(1 + ax^2)^n$ আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে দ্বিপদীদ্বয়কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 - 2x^2)^7$ এর বিয়োগফল সর্বদা ধনাত্মক। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $128\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^7 = 2^7\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^7$

$= \left\{2\left(\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}^7$

$= (1 + 2x^2)^7$ **(Ans.)**

এবং $128\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^7 = 2^7\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^7$

$= \left\{2\left(\frac{1}{2}-x^2\right)\right\}^7$

$= (1 - 2x^2)^7$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, দ্বিপদীদ্বয় $(1 + 2x^2)^7$ ও $(1 - 2x^2)^7$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$

$(1 + 2x^2)^7 = 1 + 7(2x^2) + 21(2x^2) + 35(2x^2)^3 + 35(2x^2)^4$
$+ 21 (2x^2)^5 + 7(2x^2)^6 + (2x^2)^7$

$= 1 + 14x^2 + 21.4x^4 + 35.8x^6 + 35.16x^8 + 21.32x^{10}$
$+ 7.64x^{12} + 128x^{14}$

$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12}$
$+ 128x^{14}$

এবং $(1 - 2x^2)^7 = \{1 + (- 2x^2)\}^7$

$= 1 + 7(- 2x^2) + 21.(- 2x^2)^2 + 35(- 2x^2)^3 + 35(- 2x^2)^4$
$+ 21(- 2x^2)^5 + 7(- 2x^2)^6 + (- 2x^2)^7$

$= 1 - 7.2x^2 + 21.4x^4 - 35.8x^6 + 35.16x^8$
$- 21.32x^{10} + 7.64x^{12} - 128x^{14}$

$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8 - 672x^{10}$
$+ 448x^{12} - 128x^{14}$ **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $(1 + 2x^2)^7 = 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6$
$+ 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14}$

এবং $(1 - 2x^2)^7 = 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8$
$- 672x^{10} + 448x^{12} - 128x^{14}$

$\therefore (1 + 2x^2)^7 - (1 - 2x^2)^7$

$= 1+ 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12}$
$+ 128x^{14} - 1 + 14x^4 - 84x^4 + 280x^6 - 560x^8 + 672x^{10}$
$- 448x^{12} + 128x^{14}$

$= 28x^2 + 560x^6 + 1344x^{10} + 256x^{14}$

$= 4x^2 (7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$

এখানে x এর যেকোনো মানের জন্য $4x^2$ এবং

$(7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$ অঋণাত্মক সংখ্যা

$\therefore (1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 - 2x^2)^7$ এর বিয়োগফল সর্বদা ধনাত্মক।

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন–২ ▶ $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$

ক. দ্বিপদী রাশি কী? ২

খ. দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে প্রদত্ত রাশির x^3, x^4 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে ‘খ’ এ প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলা হয়।

$a + b, x - y, 1 + x, 1 - x^2, a^2 - b^2$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি।

খ. দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8 = \binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + \binom{8}{4}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1.1 + \frac{8}{1}\cdot\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^4}{16} + \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot$$

$$\left(-\frac{x^6}{64}\right) + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\left(\frac{x^8}{256}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - 2x^7 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে দেখা যাচ্ছে x^3 এর সহগযুক্ত পদ নেই।

অর্থাৎ x^3 এর সহগ 0, x^4 এর সহগ $\frac{7}{4}$ এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$.

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে :

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8 = 1 + 8\left(-\frac{x^2}{4}\right) + 28\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + 56\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3$$

$$+ 70\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4 + 56\left(-\frac{x^2}{4}\right)^5 + 28\left(\frac{-x^2}{4}\right)^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{8}{4}x^2 + \frac{28}{16}x^4 - \frac{56}{64}x^6 + \frac{70}{256}x^8 - \frac{56}{1024}x^{10} + \frac{28}{4096}x^{12}$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 - \frac{7}{8}x^6 + \frac{35}{128}x^8 - \frac{7}{128}x^{10} + \frac{7}{1024}x^{12}$$

$\therefore$ x^3 এর সহগ 0, x^4 এর সহগ $\frac{7}{4}$ এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$.

‘খ’ হতে প্রাপ্ত,

x^3 এর সহগ 0, x^4 এর সহগ $\frac{7}{4}$ এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$.

$\therefore$ ‘খ’– এ প্রাপ্ত মান সঠিক।

প্রশ্ন–৩ ▸ **$(2 - x)$ এবং $\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।**

ক. দ্বিপদী $(1 + y)^n$ –এর বিস্তৃতি লেখ। ২

খ. x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে রাশি দুইটির গুণফলকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. প্যাসেকেলের ত্রিভুজের মাধ্যমে 'খ' এর বিস্তৃতিটি যাচাই কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দ্বিপদী $(1 + y)^n$ –এর বিস্তৃতি নিম্নরূপ–

$$(1 + y)^n = \binom{n}{0} y^0 + \binom{n}{1} y^1 + \binom{n}{2} y^2 + \binom{n}{3} y^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} y^n \textbf{ (Ans.)}$$

খ. দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$$(2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8 = (2 - x)\left[\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \binom{8}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots\ldots\right]$$

বা, $(2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8 = (2 - x)\left[1.1 + \frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{8} + \ldots\ldots\right]$

$= (2 - x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= (2 + 8x + 14x^2 + 14x^3 + \ldots\ldots) + (-x - 4x^2 - 7x^3 - 7x^4 - \ldots\ldots)$

$= 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore (2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8 = 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

গ.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$
$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে পাই,

$(2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

$= (2 - x)\,[1 + 8\left(\frac{1}{2}x\right) + 28\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 56\left(\frac{1}{2}x\right)^3$

$+ 70\left(\frac{1}{2}x\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots]$

$= (2 - x)\,[1 + \frac{8}{2}x + \frac{28}{4}x^2 + \frac{56}{8}x^3 + \frac{70}{16}x^4 + \ldots\ldots]$

$= (2 - x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \frac{35}{8}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= (2 + 8x + 14x^2 + 14x^3 + \frac{35}{4}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$- (x + 4x^2 + 7x^3 + 7x^4 + \frac{35}{8}x^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ যা দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাওয়া বিস্তৃতির অনুরূপ।

$\therefore$ প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতিটি যাচাই করা হলো।

প্রশ্ন–৪ $(1 + 3x)^4$ একটি দ্বিপদী রাশি :

ক. দ্বিপদী রাশি বলতে কী বোঝ? ২

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে প্রদত্ত দ্বিপদী রাশিকে বিস্তৃত কর। ৪

গ. উক্ত বিস্তৃতি রাশি থেকে $(1.3)^4$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলে।

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে $(1 + 3x)^4$

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

1 4 6 4 1

$\therefore (1 + 3x)^4$

$= 1 + 4(3x) + 6(3x)^2 + 4(3x)^3 + 1(3x)^4$

$= 1 + 12x + 54x^2 + 108x^3 + 81x^4$ **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত $(1 + 3x)^4 = 1 + 12x + 54x^2 + 108x^3 + 81x^4$.

এখন উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 3 \times 0.1)^4$

$= 1 + 12 \times (0.1) + 54(0.1)^2 + 108(0.1)^3 + 81(0.1)^4$.

বা, $(1 + 0.3)^4 = 1 + 1.2 + 0.54 + 0.108 + 0.0081$.

$\therefore (1.3)^4 = 2.8561$. **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^6$

ক. $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^3$ কে বিস্তৃত কর। ২

খ. প্রদত্ত দ্বিপদী রাশিকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে বিস্তৃতি কর। ৪

গ. প্রদত্ত দ্বিপদী রাশিকে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃতি করে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^3$ এর বিস্তৃতি

$= 1 + 3\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + 3\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + \left(-\frac{x^2}{4}\right)^3$

$= 1 - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} - \frac{x^6}{64}$ **(Ans.)**

খ. $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^6$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

$$\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

$\therefore \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^6$ এর বিস্তৃতি

$$= 1 + 6\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + 15\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + 20\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + 15\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4 + 6\left(-\frac{x^2}{4}\right)^5 + 1\left(-\frac{x^2}{4}\right)^6$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \frac{15}{256}x^8 - \frac{3}{512}x^{10} + \frac{1}{4096}x^{12}$$ **(Ans.)**

গ. $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^6$ কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত করে পাই,

$$\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0 + \binom{6}{1}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + \binom{6}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 + 6\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{15}{16}x^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

উক্ত বিস্তৃতিতে, x^3 এর সহগ 0.

প্রশ্ন–৬ **$(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিপদী সূত্রটি নিম্নরূপ :**

$$(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1}y + \binom{n}{2}y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y^n.$$

ক. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির সূত্রটি লেখ। ২

খ. সূত্রটি থেকে $(1 + 3x)^5$ কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(1 - 3x)^5$ কে বিস্তৃত কর এবং 'খ' ও 'গ' থেকে দেখাও যে উভয়ের বিস্তৃতি একই শুধু চিহ্ন আলাদা। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতি

$= \binom{n}{o} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \dots\dots\dots + \binom{n}{n} x^n.$

খ. ‘ক’ এ x এর পরিবর্তে 3x বসিয়ে পাই,

$(1 + 3x)^5 = \binom{5}{0}(3x)^0 + \binom{5}{1}(3x)^1 + \frac{5}{2}(3x)^2 + \binom{5}{3}(3x)^3 + \frac{5}{4}(3x)^4 + \frac{5}{5}(3x)^5.$

$= 1 + 15x + 10(9x^2) + 10(27x^3) + 5(81x^4) + 243x^5.$

$= 1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5.$ **(Ans)**

গ. প্যাসকেলের ত্রিভুজটি হলো :

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

$\therefore$ প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে পাই,

$(1 - 3x)^5 = 1 + 5(-3x) + 10(-3x)^2 + 10(-3x)^3$
$+ 5(-3x)^4 + (-3x)^5$

$= 1 - 15x + 10(9x^2) + 10(-27x^3) + 5(81x^4) - 243x^5$

$= 1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5$

‘খ’ ও ‘গ’ হতে দেখা যাচ্ছে $(1 + 3x)^5$ ও $(1 - 3x)^5$ এর বিস্তৃতি একই শুধু সহগের চিহ্ন আলাদা (**দেখানো হলো**)

প্রশ্ন–৭ ▸ $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিপদী সূত্রটি নিম্নরূপ :

$$(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1}y + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + \dots\dots\dots \binom{n}{n-1}y^{n-1} + y^n.$$

?

ক. সূত্রটি ব্যবহার করে $(1 + x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. ‘ক’ এর বিস্তৃতির সাহায্যে $(1- 4x)^5$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর মান যথেষ্ট ছোট হলে x^3 এবং তার ঊর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা

যায়। প্রমাণ কর যে $(1 + x)^5(1 - 4x)^5 = 1 - 15x + 70x^2$. ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $y = x$ ও $n = 5$ ব্যবহার করে পাই,

$(1 + x)^5$

$= \binom{5}{0}x^0 + \binom{5}{1}x^1 + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5.$

$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$

খ. 'ক'–এর বিস্তৃতিতে x এর পরিবর্তে $(-4x)$ বসিয়ে পাই,

$(1 - 4x)^5$

$= 1 + 5(-4x) + 10(-4x)^2 + 10(-4x)^3 + 5(-4x)^4 + (-4x)^5.$

$= 1 - 5 \times 4x + 10 \times 16x^2 - 10 \times 64x^3 + 5 \times 256x^4 - 1024x^5.$

$= 1 - 20x + 160x^2 - 640x^3 + 1280x^4 - 1024x^5$ **Ans.**

গ. x এর মান যথেষ্ট ছোট হলে x^3 এবং তার ঊর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। এক্ষেত্রে (ক) ও (খ) হতে পাই,

$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2$

এবং $(1 - 4x)^5 = 1 - 20x + 160x^2$

$\therefore (1 + x)^5(1 - 4x)^5$

$= (1 + 5x + 10x^2)(1 - 20x + 160x^2)$

$= 1 - 20x + 160x^2 + 5x - 100x^2 + 10x^2$

$= 1 - 15x + 70x^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৮ ▸ $(1 + y)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. $n = 6$ ও $n = 7$ এর জন্য দ্বিপদী সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $n = 8$ ও $n = 9$ এর জন্য বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় কর। $y = 2x$ এবং $n = 6$ এর জন্য দ্বিপদীটি বিস্তৃতি কর। ৪

গ. 'খ' এর সাহায্যে $(2.982)^6$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ নিম্নরূপ :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

$\therefore$ $n = 6$ হলে দ্বিপদী সহগ = 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

এবং $n = 7$ হলে দ্বিপদী সহগ = 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে–

$(1 + y)^8 = 1 + 8y + 28y^2 + 56y^3 + 70y^4 + 56y^5 + 28y^6 + 8y^7 + y^8.$

এবং $(1 + y)^9 = 1 + 9y + 36y^2 + 84y^3$

$+ 126y^4 + 126y^5 + 84y^6 + 36y^7 + 9y^8 + y^9.$

$y = 2x$ এবং $n = 6$ হলে দ্বিপদীটি $(1 + 2x)^6$

$\therefore$ $(1 + 2x)^6 = 1 + 6(2x) + 15(2x)^2 + 20(2x)^3$

$+ 15(2x)^4 + 6(2x)^5 + (2x)^6.$

$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6.$

গ. ‘খ’ থেকে পাই,

$(1 + 2x)^6 = 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$

এখন $(1 + 2x) = 2.982$

বা, $2x = 2.982 - 1$

$\therefore$ $x = \dfrac{1.982}{2} = 0.991$

$x = 0.991$ বসিয়ে পাই,

$\{1 + 2(0.991)\}^6$

$= 1 + 12(0.991) + 60(0.991)^2 + 160(0.991)^3$

$+ 240(0.991)^4 + 192(0.991)^5 + 64(0.991)^6.$

বা, $(1 + 1.982)^6 = 1 + 11.892 + 58.925$

$+ 155.719 + 231.476 + 183.514 + 60.621.$

$\therefore (2.982)^6 = 703.147$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৯ $\mathbf{128\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^7}$ **এবং** $\mathbf{128\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^7}$ **দুইটি দ্বিপদী রাশি।**

ক. $128\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^7$ কে $(1 + ax^2)^n$ আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. $128\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^7$ কে বিস্তৃতি কর। ৪

গ. দেখাও যে $(1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 - 2x^2)^7$ এর বিয়োগ ফল সর্বদা ধনাত্মক। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $128\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^7 = 2^7\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^7$

$= \left\{2\left(\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}^7$

$= (1 + 2x^2)^7$ **Ans.**

খ. $128\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^7$ এর $(1 + ax^2)^n$ আকার হবে $(1 - 2x^2)^7$.

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

$\therefore (1 - 2x^2)^7$ এর বিস্তৃতি

$1 + 7(-2x^2) + 21(-2x^2)^2 + 35(-2x^2)^3 +$

$35(-2x^2)^4 + 21(-2x^2)^5 + 7(-2x^2)^6 + 1(-2x^2)^7.$

$= 1 - 7.2x^2 + 21.4x^4 - 35.8x^6 + 35.16x^8$

$- 21.32x^{10} + 7.64x^{12} - 128x^{14}.$

$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8 - 672x^{10} + 448x^{12} - 128x^{14}.$

অনুরূপভাবে, $(1 + 2x^2)^7$

$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14}.$

গ. 'খ' থেকে পাই,

$(1 + 2x^2)^7 = 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10}$

$+ 448x^{12} + 128x^{14}.$

এবং $(1 - 2x^2)^7 = 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8 - 672x^{10}$

$+ 448x^{12} - 128x^{14}.$

$\therefore (1 + 2x^2)^7 - (1 - 2x^2)^7.$

$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10}$

$+ 448x^{12} + 128x^{14} - 1 + 14x^2 - 84x^4 + 280x^6$

$- 560x^8 + 672x^{10} - 448x^{12} + 128x^{14}.$

$= 28x^2 + 560x^6 + 1344x^{10} + 256x^{14}$

$= 4x^2(7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$

x এর যেকোনো মানের জন্য $4x^2$ এবং $(7 + 140x^4 + 336x^8 + 64x^{12})$ ধনাত্মক সংখ্যা।

$\therefore (1 + 2x^2)^7$ থেকে $(1 - 2x^2)^7$ এর বিয়োগফল সর্বদা ধনাত্মক সংখ্যা। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১০ $\mathbf{(1 + ax)^6}$ **একটি দ্বিপদী রাশি।**

ক. উক্ত রাশিকে বিস্তৃতি কর। ২

খ. $(1-x)(1 + ax)^6$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃতি কর। ৪

গ. $(1-x)(1 + ax)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃতি করলে যদি $1 + bx^2$ পাওয়া যায় তবে a, b এর মান নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(1 + ax)^6$

$= \binom{6}{0}(ax)^0 + \binom{6}{1}(ax)^1 + \binom{6}{2}(ax)^2 + \binom{6}{3}(ax)^3 + \binom{6}{4}(ax)^4 + ...$

$= 1 + 6ax + 15a^2x^2 + 20a^3x^3 + 15a^4x^4 + ...$

খ. ‘ক’ হতে আমরা পাই,

$\therefore (1 + ax)^6 = 1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...$

আবার, $(1 - x)(1 + ax)^6.$

$= (1 - x)(1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...)$

$= (1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...) - (x + 6ax^2 + 15a^2x^3 + ...)$

$= 1 + (6a - 1)x + (15a^2 - 6a)x^2 - 15a^2x^3 + ...$

গ. ‘খ’ হতে পাই,

$(1-x)(1 + ax)^6$

$= 1 + (6a - 1)x + (15a^2 - 6a)x^2 - 15a^2x^3 + ...$

শর্তমতে,

$1 + (6a - 1)x + (15a^2 - 6a)x^2 - 15a^2x^3 + ... = 1 + bx^2$

উভয়পক্ষ হতে x এবং x^2 এর সহগ তুলনা করে পাই,

$6a - 1 = 0$

বা, $6a = 1, \therefore a = \frac{1}{6}$

এবং $15a^2 - 6a = b$

বা, $15\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 6.\frac{1}{6} = b$

বা, $15\times\frac{1}{36} - 1 = b$

বা, $\frac{5}{12} - 1 = b$

বা, $\frac{5 - 12}{12} = b$

বা, $\frac{-7}{12} = b$

নির্ণেয় মান $a = \frac{1}{6}$ এবং $b = \frac{-7}{12}$

প্রশ্ন–১১ দেওয়া আছে, $A = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$, $B = (1 + ax)^6$ এবং $C = (1 - x)$ ।

ক. $a = 1$ হলে B এর বিস্তৃতিটি নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, A এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ শূন্য এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$ । ৪

গ. যদি $(C \times B)$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃতি করলে $(1 + bx^2)$ পাওয়া যায় তবে a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $B = (1 + ax)^6$

$a = 1$ হলে, $B = (1 + x)^6$

$$= \binom{6}{0} x^0 + \binom{6}{1} x^1 + \binom{6}{2} x^2 + \binom{6}{3} x^3 + \binom{6}{4} x^4 + \binom{6}{5} x^5 + \binom{6}{6} x^6$$ [দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে]

$$= 1.1 + 6x + \frac{6.5}{1.2} x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3} x^3 + \frac{6.5.4.3}{4.3.2.1} x^4 + \frac{6.5.4.3.2}{5.4.3.2.1} + 1.x^6$$

$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$$A = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$A = \binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + 8 .\left(-\frac{x^2}{4}\right) + 28. \frac{x^4}{16} + 56\cdot\frac{-x^6}{64} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

বা, $A = 1 - 2x^2 + \frac{7x^4}{4} - \frac{7}{8} x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= 1 - 2x^2 + 0.x^3 + \frac{7}{4} x^4 - \frac{7}{8} x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

আবার A এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

(দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $C = (1 - x)$

এবং $B = (1 + ax)^6$

$\therefore C \times B = (1 - x)(1 + ax)^6$

$= (1 - x)(1 + 6ax + 15a^2x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= 1 + 6ax + 15a^2x^2 - x - 6ax^2 - 15a^2x^3 \ldots\ldots\ldots$

$= 1 - x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 - 15a^2x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $1 - x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 = 1 + bx^2$

বা, $- x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 = 1 + bx^2 - 1$

বা, $- x + 6ax + 15a^2x^2 - 6ax^2 = bx^2$

বা, $(- 1 + 6a)x + (15a^2 - 6a)x^2 = bx^2 + 0.x$

উভয়পক্ষ হতে x ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$-1 + 6a = 0$ এবং $15a^2 - 6a = b$

বা, $6a = 1$ বা, $b = 15 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 6 \times \frac{1}{6}$

বা, $a = \frac{1}{6}$ $= \frac{15}{36} - 1 = \frac{-21}{36} = \frac{-7}{12}$

নির্ণেয় মান $a = \frac{1}{6}$ এবং $b = \frac{-7}{12}$

প্রশ্ন–১২ ▸ $a = 2 - x, b = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

ক. b এর মধ্যপদ কত? ২

খ. ab কে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. 'খ' নং হতে প্রাপ্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $b = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{8}$

এখানে, b এর ঘাত, n = 8

$\therefore$ b এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ = $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ

= $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তম পদ

= (4 + 1) তম পদ

= 5 তম পদ

$\therefore$ 5 বা (4 + 1) তম পদ

$$^{8}C_4 \cdot 1^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^{8-4} = {}^{8}c_4 \left(\frac{1}{2}x\right)^{4}$$

$$= 70\,\frac{1}{16}\,x^4 = \frac{35}{8}\,x^4$$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, a = 2 – x

এবং $b = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{8}$

$\therefore ab = (2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{8}$

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$$(2 - x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^{8}$$

$$= (2-x)\left[\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \binom{8}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots\ldots\right]$$

$$= (2 - x)\left[1\cdot1 + \frac{8}{1}\cdot\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{8} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{16} + \ldots\ldots\right]$$

$$= (2 - x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \frac{35}{8}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

$$= \left(2 + 8x + 14x^2 + 14x^3 + \frac{35}{4}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) +$$

$$(-x - 4x^2 - 7x^3 - 7x^4 - \frac{35}{8}x^5 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$= 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore (2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8 = 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \cdots\cdots\cdots$$ **(Ans.)**

গ. 'খ' এ প্রাপ্ত x^4 পর্যন্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$$(2-0{\cdot}1)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8 = 2 + 7\,({\cdot}1) + 10({\cdot}1)^2 + 7({\cdot}1)^3 + \frac{7}{4}({\cdot}1)^4$$

বা, $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2 + .7 + 10 \times ({\cdot}01) + 7 \times ({\cdot}001) + \frac{7}{4} \times ({\cdot}0001)$

বা, $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2 + {\cdot}7 + 0{\cdot}1 + 0{\cdot}007 + 0{\cdot}000025$

বা, $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2{\cdot}807025$

$\therefore 1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8 = 2{\cdot}8070$ (চার দশমিক পর্যন্ত) **(Ans.)**

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ১০,২

প্রশ্ন–১ ▶ $(1+p^2)^7$, $\left(y^2+\frac{k}{y}\right)^6$ দু'টি দ্বিপদী রাশি।

ক. ১ম দ্বিপদীটির পদসংখ্যা এবং শেষপদ নির্ণয় কর। ২

খ. ১ম দ্বিপদীটি বিস্তৃতি কর। ৪

গ. দ্বিতীয় রাশির বিস্তৃতিতে y^3-এর সহগ 160 হলে k-এর মান নির্ণয় কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ আছে।

সুতরাং, $(1+p^2)^7$ এর বিস্তৃতিতে $(7+1)$ বা, 8টি পদ আছে। **(Ans.)**

$(1+p^2)^7$ দ্বিপদীটির শেষ পদ $= \binom{7}{7}(p^2)^7$

$= 1.p^{14} = p^{14}$ **(Ans.)**

খ. ১ম দ্বিপদীটিকে বিস্তৃতি করে,

$$(1+p^2)^7 = \binom{7}{0}(p^2)^0 + \binom{7}{1}(p^2)^1 + \binom{7}{2}(p^2)^2 + \binom{7}{3}(p^2)^3 + \binom{7}{4}(p^2)^4 + \binom{7}{5}(p^2)^5 + \binom{7}{6}(p^2)^6 + \binom{7}{7}(p^2)^7$$

$$=1.1+\frac{7}{1}p^2+\frac{7.6}{1.2}p^4+\frac{7.6.5}{1.2.3}p^6+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}p^8$$
$$+\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}p^{10}+\frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}p^{12}+1.p^{14}$$
$$=1+7p^2+21p^4+35p^6+35p^8+21p^{10}$$
$$+7p^{12}+p^{14}\ \textbf{(Ans.)}$$

গ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(y^2+\frac{k}{y}\right)^6 = (y^2)^6+\binom{6}{1}(y^2)^5\left(\frac{k}{y}\right)$$
$$+\binom{6}{2}(y^2)^4\left(\frac{k}{y}\right)^2+\binom{6}{3}(y^2)^3\left(\frac{k}{y}\right)^3$$
$$+\binom{6}{4}(y^2)^2\left(\frac{k}{y}\right)^4+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= y^{12}+\binom{6}{1}y^{10}\cdot\frac{k}{y}+\binom{6}{2}y^8\cdot\frac{k^2}{y^2}$$
$$+\binom{6}{3}y^6\cdot\frac{k^3}{y^3}+\binom{6}{4}y^4\cdot\frac{k^4}{y^4}+\ldots\ldots\ldots$$
$$= y^{12}+\binom{6}{1}ky^9+\binom{6}{2}k^2y^6$$
$$+\binom{6}{3}k^3y^3+\binom{6}{4}k^4+\ldots\ldots$$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{6}{3}k^3=160$

বা, $\frac{6.5.4}{1.2.3}k^3=160$

বা, $20k^3=160$

বা, $k^3=8$

$\therefore k=2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২ › দুটি দ্বিপদী রাশি যথাক্রমে $A=\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ এবং $B=(1+ax)^7$ যেখানে $a\neq 0$

?

ক. $a=1$ হলে B এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 সহগ পরস্পর সমান হলে a নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, A এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 1120। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$B = (1 + ax)^2 \therefore a = 1$ হলে $B = (1 + x)^7$

$n = 0$হলে 1

$n = 1$” 1 1

$n = 2$” 1 2 1

$n = 3$” 1 3 3 1

$n = 4$” 1 4 6 4 1

$n = 5$” 1 5 10 10 5 1

$n = 6$”1 6 15 20 15 6 1

$n = 7$”1 7 21 35 35 21 7 1

সহগগুলোর সমষ্টি = $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$

খ. দেওয়া আছে,

$B = (1 + ax)^7$

ধরি, $(1 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে $r + 1$ তম পদে x^3 এবং x^4 আছে।

$r + 1$ তম পদ = $^7C_r(ax)^r = {}^7C_r a^r x^r$

যেহেতু ইহাতে x^3 এবং x^4 আছে। সেহেতু $r = 3$ অথবা $r = 4$

x^3 এর সহগ = $^7C_3a^3$

x^4 এর সহগ = $^7C_4a^4$

প্রশ্নমতে, $^7C_3a^3 = {}^7C_4a^4$

বা, $^7C_4a^4 = {}^7C_3a^3$

$\therefore a = 1$

গ. দেওয়া আছে, $A = \left(x + \frac{2}{x}\right)^8$

যেহেতু $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা = $8 + 1$ বা 9 যা বিজোড় সংখ্যা। অতএব মধ্যপদ হবে একটি।

অর্থাৎ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা 5-তম পদ।

$\therefore$ 5 তম পদ বা, (4 + 1)তম পদ = $^8C_4x^{8-4}\left(\frac{2}{x}\right)^4$

$= {}^8C_4x^4\frac{2^4}{x^4} = {}^8C_4\,2^4$

= 1120 (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৩ $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6$ এবং $\left(k-\frac{y}{4}\right)^5$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

ক. প্রথম দ্বিপদী রাশিকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. 'ক' এর সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

গ. দ্বিতীয় দ্বিপদী রাশিটির বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 160 হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6 = 2^6 + {}^6C_1 2^{6-1}\left(\frac{x}{4}\right)^1 + {}^6C_2 2^{6-2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + {}^6C_3 2^{6-3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 \ldots\ldots$

$= 64 + 6.2^5\left(\frac{x}{4}\right)^1 + \frac{6.5}{1.2}.2^4\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}.2^3\left(\frac{x}{4}\right)^3 \ldots\ldots$

$= 64 + 48x + 15x^2 + 2.5x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ. এখন, $2 + \frac{x}{4} = 1.9975$

বা, $\frac{x}{4} = 1.9975 - 2$

বা, $\frac{x}{4} = -0.0025$

$\therefore$ $x = -0.01$

এখন $\left\{2 + \frac{(-0.01)}{4}\right\}^6 = 64 + 48(--0.01) + 15(-0.01)^2 + 2.5(-0.01)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

['ক' হতে]

বা, $(1.9975)^6 = 64 - 0.48 + 0.0015 - 0.0000025 + \ldots\ldots$

$= 64.0015 - 0.4800025 + \ldots\ldots\ldots$

$= 63.5215$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

গ. $\left(k - \frac{y}{4}\right)^5 = k^5 + {}^5C_1 k^{5-1}\left(\frac{-y}{4}\right) + {}^5C_2 k^{5-2}\left(\frac{-y}{4}\right)^2$

$+ {}^5C_3 k^{5-3}\left(\frac{-y}{4}\right)^3 + {}^5C_4 k^{5-4}\left(\frac{-y}{4}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots$

$= k^5 + 5k^4\left(\frac{-y}{4}\right) + 10k^3\frac{y^2}{16} + 10k^2\left(\frac{-y^3}{64}\right)$

$+ 5k\frac{y^4}{256} + \ldots\ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $\frac{10y^2}{16} = 160$

বা, $y^2 = \frac{160 \times 16}{10}$

বা, $y^2 = 16 \times 16$

$\therefore\ y = \pm 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৪ $\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}\right)^7$**; x** $\in$ ***IN*** **একটি দ্বিপদী রাশি। এর বিস্তৃতিতে $\mathbf{k^3}$ এর সহগ 560।**

ক. রাশিটির বিস্তৃতির সকল পদ লেখ। ২

খ. x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর মান বসালে $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থপদের সহগের দ্বিগুণ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$; $x \in IN$

$\left(k - \frac{x}{3}\right)^7 = k^7 + \binom{7}{1}k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \binom{7}{2}k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2$

$+ \binom{7}{3}k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \binom{7}{4}k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \binom{7}{5}k^2$

$\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \binom{7}{6}k\left(-\frac{x}{3}\right)^6 + \left(-\frac{x}{3}\right)^7$

$$= k^7 - \binom{7}{1}\frac{k^6x}{3} + \binom{7}{2}\frac{k^5x^2}{3^2} + \binom{7}{3}\frac{k^4x^3}{3^3}$$

$$+ \binom{7}{4}\frac{k^3x^4}{3^4} + \binom{7}{5}\frac{k^2x^5}{3^5} + \binom{7}{6}\frac{kx^6}{3^6} - \frac{x^7}{3^7}$$

খ. ‘ক’ হতে পাই,

k^3 এর সহগ $= \binom{7}{4}\frac{x^4}{3^4}$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{7}{4}\frac{x^4}{3^4} = 560$

বা, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = 1296$

$\therefore$ $x = 6 \quad [\because x \in IN]$ **(Ans.)**

গ. $x = 6$ বসালে $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^n = \left(1 + \frac{k}{6}\right)^n$

$\left(1 + \frac{k}{6}\right)^n$ এর বিস্তৃতি ৩য় পদ $= {}^nC_2 \left(\frac{k}{6}\right)^2$

এবং চতুর্থ পদ ${}^nC_3 \left(\frac{k}{6}\right)^3$

শর্তমতে, ${}^nC_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = {}^nC_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 2$

বা, $\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{6^2} = \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{6^3}$

বা, $\frac{1}{2!(n-2)(n-3)!} = \frac{2}{3!(n-3)!} \cdot \frac{1}{6}$

বা, $\frac{1}{2(n-2)} = \frac{2}{6 \times 6}$

বা, $4(n-2) = 36$

বা, $n - 2 = 9$

বা, $n = 11$

$\therefore$ $n = 11$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ $\mathbf{P = \left(2 + \frac{x}{2}\right)^8}$ **.................(i)**

$Q = (a + bx)$ ....(ii)

$R = (b - ax)^8$ ....(iii)

ক. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে (ii) নং এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $a = b = 1$ হলে, QR এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমানুসারে (i) নং কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং উহার সাহায্যে $(1{\cdot}995)^8$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে (ii)নং এর বিস্তৃতি :

$$Q = (a + bx)^7$$

$$= \binom{7}{0} a^7(bx)^0 + \binom{7}{1} a^6(bx)^1 + \binom{7}{2} a^5(bx)^2 + \binom{7}{3} a^4(bx)^3 + \binom{7}{4} a^3(bx)^4 + \binom{7}{5} a^2(bx)^5 + \binom{7}{6} a^1(bx)^6 + \binom{7}{7} a^0(bx)^7$$

$$= a^7 + \binom{7}{1}a^6bx + \binom{7}{2}a^5b^2x^2 + \binom{7}{3}a^4b^3x^3 + \binom{7}{4}a^3b^4x^4 + \binom{7}{5}a^2b^5x^5 + \binom{7}{6}a^1b^6x^6 + b^7x^7$$

খ. দেওয়া আছে, $Q = (a + bx)^7$

এবং $R = (b + ax)^8$

এখন $a = b = 1$ হলে,

$\therefore Q = (1 + x)^7$

এবং $R = (1 - x)^8$

এখন $QR = (1 - x)^7 (1 - x)^8$

$= (1 + x)^7(1 - x)^7 (1 - x)$

$= (1 - x^2)^7(1 - x)$

$= \left[1+\binom{7}{1}(-x^2)+\binom{7}{2}(-x^2)^2+\binom{7}{3}(-x^2)^3+\binom{7}{4}(-x^2)^4+\binom{7}{5}(-x^2)^5+\binom{7}{6}(-x^2)^6+\binom{7}{7}(-x^2)^7\right](1-x)$

$= \left[1 - 7x^2 + \frac{7.6}{1.2}x^4 + \frac{7.6.5}{1.2.3}(-x^6) + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}x^8 + \text{.........}\right](1 - x)$

$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + \text{........}) (1 - x)$

$= 1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 - x + 7x^3 - 21x^5 + 35x^7 - 35x^9 + \text{..............}$

$\therefore$ QR এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35।

গ. দেওয়া আছে,

(i) নং থেকে, $P = \left(2 + \frac{x}{2}\right)^8$

$= \binom{8}{0}2^8\left(\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{8}{1}2^7\left(\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{8}{2}2^6\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}2^5\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \text{......}$

$= 256 + 512x + \frac{8.7.64x^2}{1.2.4} + \frac{8.7.6.32x^3}{1.2^2.3.4}$

$= 256 + 512x + 448x^2 + 224x^3 + \text{........}$

মনে করি,

$\left(2 + \frac{x}{2}\right)^8 = (1.995)^8$

বা, $2 + \frac{x}{2} = 1.995$

বা, $\frac{x}{2} = - 0.005$

$\therefore\ x = - 0.01$

এখন, (i) নং এর বিস্তৃতিতে $x = -0.01$ বসিয়ে পাই,

$\left[2 + \left(\frac{-0.01}{2}\right)\right]^8 = 256 + 512(-0.01) + 448(-0.01)^2 + 224(-0.01)^3 + \text{...............}$

বা, $(2 - 0.005)^8 = 256 - 5.12 + 0.0448 - 0.000224 + \text{.......}$

বা, $(1.995)^8 = 250.924576$

≈ 250.9246

অতএব নির্ণেয় মান 250.9246 (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

প্রশ্ন–৬ ➤ যদি (i) $\left(2x + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ (ii) $(a + 3x)^n$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি।

ক. (ii) এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। ২

খ. (i) এর বিস্তৃতির x^{10} ও x^{-20} এর সহগ সমান হলে দেখাও যে, $a = 2$ ৪

গ. (ii) এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদের মান যথাক্রমে P, $\frac{21}{2}$ px ও 189 qx^2 হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি $= (2x^2)^{10} + {}^{10}C_1(2x^2)^9\left(\frac{a}{x^3}\right) + {}^{10}C_2(2x^2)^8\left(\frac{a}{x^3}\right)^2 + {}^{10}C_3(2x^2)^7\left(\frac{a}{x^3}\right)^3 + \ldots\ldots..$

$= 2^{10}x^{10} + 10.2^9\, x^{18}\frac{a}{x^3} + \frac{10 \times 9}{2.1}.2^8x^{16}\frac{a^2}{x^6} + \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}\, 2^7x^{14}\frac{a^3}{x^9} + \ldots\ldots.$

$= 1024x^{20} + 5120x^{15}a + 11520a^2x^{10} + 15360a^3x^5 + \ldots\ldots$

$\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির ১ম চারটি পদ হলো,

$1024x^{20}$, $5120x^{15}a$, $11520a^2x^{10}$ এবং $15360a^3x^5$

খ. 'ক' থেকে পাই, x^{10} এর সহগ $= 11520a^2$

ধরি, উক্ত বিস্তৃতির (r + 1) তম পদে x^{-20} বিদ্যমান।

$\therefore\ T_{r+1} = {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{a}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r2^{10-r}.x^{20-2r}.a^r.x^{-3r}$

$= {}^{10}C_r2^{10-r}.a^r.x^{20-2r-3r}$

প্রশ্নানুযায়ী,

$20 - 2r - 3r = -20$

বা, $20 - 5r = -20$

বা, $20 + 20 = 5r$

বা, $40 = 5r$

$\therefore\ r = 8$

অতএব, (r + 1) বা, (8 + 1) বা, 9তম পদে x^{-20} আছে।

$\therefore$ 9তম পদের সহগ = ${}^{10}C_8 2^{10-8} a^8$

$= {}^{10}C_{10-8} 2^2 a^8$

$= {}^{10}C_2 4a^8$

$= \dfrac{10 \times 9}{2} \times 4.a^8$

$= 180a^8$

যেহেতু x^{10} ও x^{-20} এর সহগ সমান

সেহেতু, $180a^8 = 11520a^2$

বা, $a^8 = \dfrac{11520a^2}{180}$

বা, $a^6 = 64 = 2^6$

$\therefore$ $a = 2$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $a = 2$

$\therefore$ (ii) রাশিটি হলো $(2 + 3x)^n$

$\therefore$ $(2 + 3x)^n$ এর বিস্তৃতি $= 2^n + n.2^{n-1}.3x + \dfrac{n(n-1)}{2}. 2^{n-2}(3x)^2 + ...$

$= 2^n + 2^{n-1}.3nx + \dfrac{9n(n-1)}{2} 2^{n-2}.x^2 + ...$

শর্তানুযায়ী, $p = 2^n$ ....(i)

$\dfrac{21}{2}px = 2^{n-1}.x^2$.............................(ii)

এবং $189qx^2 = \dfrac{9(n-1)n}{2}. 2^{n-2}x^2$ .... (iii)

(i) নং হতে পাই, $\dfrac{3.7px}{2} = 3nx.2^{n-1}$

বা, $\dfrac{7p}{2} = n.2^{n-1}$

বা, $7p = n.2^{n-1}.2$

বা, $7p = n.2^n$

বা, $7p = n.2^n$

বা, $7.2^n = n.2^n$ [1 হতে পাই]

বা, $\frac{7.2^n}{2^n} = n$

$\therefore\ n = 7$

(i) নং হতে পাই, $p = 2^7 = 128$

(ii) নং হতে পাই, $189qx^2 = \frac{9n(n-1)}{2}.2^{n-2}.x^2$

বা, $q = \frac{9.7(7-1).2^{7-2}}{2 \times 189}$

বা, $q = \frac{9.7.6.2^5}{2 \times 189}$

বা, $q = \frac{378.2^5}{378}$

বা, $q = 2^5 = 32$

$\therefore\ q = 32$

অতএব p ও q এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 128 ও 32।

প্রশ্ন–৭ **$(p + 2x)^n$** একটি দ্বিপদী রাশি।

ক. রাশিটির x^{n-3} এর সহগ কত? ২

খ. $(p + 2x)^5$ কে বিস্তৃতি কর। ৪

গ. উক্ত বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে P এর মান কত? ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(p + 2x)^n$ এর বিস্তৃতিতে r তম পদ $^nC_{r-1}\, P^{n-r}(2x)^{r-1}$

$\therefore\ n-2$ তম পদ $= {^nC_{n-3}}\, P^{n-(n-2)}(2x)^{n-3}$

$= {^nC_{n-3}}\, P^{n-n+2}\, 2^{n-3}\, x^{n-3}$

$= {^nC_{n-3}}\, P^2\, 2^{n-3}\, x^{n-3}$

$\therefore x^{n-3}$ এর সহগ $^nC_{n-3}\, P^2\, 2^{n-3}$

খ. $(p + 2x)^5 = p^5 + {^5C_1}\, P^{5-1}(2x) + {^5C_2}P^{5-2}\,(2x)^2$

$+ {^5C_3}P^{5-3}(2x)^3 + {^5C_4}P^{5-4}(2x)^4 + {^5C_5}P^0(2x)^5$

$= P^5 + 10p^4x + 40p^3x^2 + 80p^2x^3 + 80px^4 + 32x^5.$

গ. ‘খ’ থেকে প্রাপ্ত x^3 এর সহগ $= 80p^2$

শর্তমতে $80p^2 = 320$

বা, $p^2 = \frac{320}{80}$

বা, $p^2 = 4$

$\therefore$ p = 2 **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ **$(b + 2x)^5$ একটি দ্বিপদী রাশি।**

ক. $(b + 2x)^5$ কে দ্বিপদীর সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. বিস্তৃতির প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. x^3 এর সহগ 320 হলে b এর মান কত? ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(b + 2x)^5$

$= b^5 + 5c_1b^4 2x + 5c_2b^3(2x)^2 + 5c_3b^2(2x)^3 + 5c_4b(2x)^4 + 5c_5(2x)^5.$

খ. $(b + 2x)^5$

$= b^5 + 5c_1b^4(2x) + 5c_2b^3(2x)^2 + 5c_3b^2(2x)^3 + ...$

$= b^5 + 5b^4.2x + \frac{5!}{2!.3!} . b^3.4x^2 + \frac{5!}{3!. 2!} b^2 8x^3 + ...$

$= b^5 + 10xb^4 + 40x^2b^3 + 80x^3b^2 + ...$

গ. 'খ' হতে পাই,

x^3 এর সহগ = $80b^2$.

প্রশ্নমতে, $80b^2 = 320$

বা, $b^2 = 4$

$\therefore$ b = 2 **(Ans.)**

প্রশ্ন–৯ $\left(\mathbf{2x^2 + \frac{1}{2x}}\right)^n$

ক. n = 4 হলে দ্বিপদীটির তৃতীয় পদ কত? ২

খ. $\left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^5$ কে প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. দেখাও যে ধারাটির x বর্জিত পদ নেই। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, $(a + x)^n$ এর r তম পদ = $n_{C_{r-1}}\ a^{n-r}\ x^{r-1}$.

$\therefore \left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^4$ এর তৃতীয় পদ

$= {}^4C_2(2x^2)^{4-3}\left(\frac{1}{2x}\right)^2$

$= {}^4C_2\ 2x^2 . \frac{1}{4x^2}$

$= 6. \frac{1}{2} = 3$ **(Ans.)**

খ. $\left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^5$

$= (2x^2)^5 + {}^5C_1(2x^2)^{5-1}\left(\frac{1}{2x}\right) + {}^5C_2(2x^2)^{5-2}\left(\frac{1}{2x}\right)^2$

$+ {}^5C_3(2x^2)^{5-3}\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 32x^{10} + 5(2x^2)^4. \frac{1}{2x} + \frac{80x^6}{4x^2} + \frac{40x^4}{8x^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 32x^{10} + 40x^7 + 20x^4 + 5x + \ldots$ **(Ans.)**

গ. মনে করি,

দ্বিপদীটির (r + 1)তম পদ = x বর্জিত

$\therefore$ (r + 1)তম পদ = ${}^5C_r(2x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{2x}\right)^r$

$= {}^5C_r\ 2^{5-r}.\ x^{10-2r}.x^{-r}.2^{-r}.$

$= {}^5C_r 2^{5-2r}\ x^{10-3r}$

শর্তমতে, $10 - 3r = 0$

বা, $3r = 10$

$\therefore\ r = \frac{10}{3}$

$\therefore$ x বর্জিত পদ = $\frac{10}{3} + 1 = \frac{13}{3}$ যা অসম্ভব।

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নেই। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১০ $\left(3x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$

ক. রাশিতে কয়টি মধ্যপদ থাকবে এবং কেন? ২

খ. রাশিটির মধ্যপদ ও তার মান নির্ণয় কর। ৪

গ. রাশিটি থেকে $(r + 1)$ তম পদ নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উক্ত রাশিতে একটি মধ্যপদ থাকবে। এখানে ঘাত বা সূচক $n = 8$ একটি জোড় সংখ্যা হওয়ায় এর একটি মধ্যপদ থাকবে।

খ. এখানে, $n = 8$ জোড় সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যপদটি $= \left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ

$= \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তম পদ

$= (4 + 1)$ তম পদ

$= 5$ তম পদ

$\therefore$ 5তম পদ $= {}^8C_4(3x^2)^{8-4}\left(-\frac{1}{2x}\right)^4$

$= {}^8C_4 81x^8(-1)^4\, 2^{-4}.x^{-4}$

$= \frac{2835}{8}\, x^4$

গ. $(r + 1)$ তম পদ $= {}^8C_r(3x^2)^{8-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r$

$= {}^8C_r\, 3^{8-r}.\, x^{16-2r}(-1)^r.\, 2^{-r}.x^{-r}$

$= (-1)^r.\, {}^8C_r\, 3^{8-r},\, x^{16-3r},\, 2^{-r}.$

প্রশ্ন–১১ $(1 + x)^7$.

ক. রাশিটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $(1 - x)^8(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতি লেখ। ৪

গ. $(1 - x)^8(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^3 ও x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$(1 + x)^7 = {}^7C_0x^0 + {}^7C_1x^1 + {}^7C_2x^2 + {}^7C_3x^3 + {}^7C_4x^4.$$

$$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + ... \textbf{ (Ans.)}$$

খ. $(1 + x)^7(1 - x)^8 = (1 - x)^7(1 - x)(1 + x)^7$

$$= (1 - x)(1 - x^2)^7 = (1 - x)\{1 + (-x^2)\}^7$$

$$= (1 - x)\left[1 + {}^7C_1(-x^2) + {}^7C_2(-x^2)^2 + {}^7C_3(-x^2)^3 + {}^7C_4(-x^2)^4 + ...\right]$$

$$= (1 - x)(1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + ...1)$$

$$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + ...) - (x - 7x^3 + 21x^5 - 35x^7 + 35x^9)$$

$$= 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 - 35x^9 \ .... \textbf{ (Ans.)}$$

গ. "খ" হতে পাই

$$(1 - x)^8(1 + x)^7 = 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 - 35x^9 \ ....$$

$\therefore$ x^3 এর সহগ = 7 এবং

x^7 এর সহগ = 35. **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ $\left(x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^6$

ক. সাধারণ পদের মান কত? ২

খ. x বর্জিত পদ ও তার মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(1 + x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 ও 22তম পদ দুটি সমান হলে x এর মান কত? ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(x^2 - 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

এর সাধারণ পদ $(r + 1) = {}^{12}C_r\, x^{12-r} \frac{(-1)^r}{x^r}$

$= (-1)^r.\ {}^{12}C_r x^{12-2r}$. **(Ans.)**

খ. মনে করি, $(r + 1)$ তম পদটি x বর্জিত

'ক' থেকে $(r + 1)$ তম পদ $= (-1)^r\ .{}^{12}C_r x^{12-2r}$

শর্তমতে, $12 - 2r = 0$

বা, $2r = 12$

$\therefore\ r = 6$

$\therefore\ (6 + 1) = 7$ তম পদটি x বর্জিত, এর মান

$= (-1)^6\ {}^{12}C_6$

$= 924$ **(Ans.)**

গ. $(1 + x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে,

21 তম পদ $= {}^{44}C_{20}\ x^{20}$ ....(i)

22 তম পদ $= {}^{44}C_{21}\ x^{21}$ ....(ii)

শর্তমতে, ${}^{44}C_{20}\ x^{20} = {}^{44}C_{21}\ x^{21}$

বা, $\frac{44!}{20!\ 24!} = \frac{44!}{21!\ 23!}\ x$

বা, $\frac{1}{24} = \frac{x}{21}$

বা, $x = \frac{21}{24}$

$\therefore\ x = \frac{7}{8}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৩ $\mathbf{P = (1 + x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^8}$ **.........(i)**

$\mathbf{Q = \left(2x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}}$ **..........(ii)**

? ক. (i) কে x^{-3} পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. ‘ক’ থেকে প্রাপ্ত ফলাফল ব্যবহার করে

$11 \times (1.1)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) এর বিস্তৃতি থেকে x^0 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(1 + x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^8$

$= (1 + x)\left[{}^8C_0\left(\frac{1}{x}\right)^0 + {}^8C_1\left(\frac{1}{x}\right)^1 + {}^8C_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^8C_3\left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^8C_4\left(\frac{1}{x}\right)^4 + ...\right]$

$= (1 + x)\left(1 + 8.\frac{1}{x} + 28.\frac{1}{x^2} + 56.\frac{1}{x^3} + 70.\frac{1}{x^4} + ...\right)$

$= \left(1 + \frac{8}{x} + \frac{28}{x^2} + \frac{56}{x^3} + ...\right) + \left(x + 8 + \frac{28}{x} + \frac{56}{x^2} + \frac{70}{x^3} + ...\right)$

$= \left(9 + x + \frac{36}{x} + \frac{84}{x^2} + \frac{126}{x^3} + ...\right)$ **(Ans.)**

খ. ‘ক’ হতে পাই, $\left(9 + x + \frac{36}{x} + \frac{84}{x^2} + \frac{126}{x^3} + ...\right)$

এখন $x = 10$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 10) \times \left(1 + \frac{1}{10}\right)^8 = 9 + 10 + \frac{36}{10} + \frac{84}{(10)^2} + \frac{1026}{(10)^3} + ...$

বা, $11 \times (1 + .1)^8 = 19 + 3.6 + .84 + 1.026 +$

বা, $11 \times (1.1)^8 = 24.466$ **(Ans.)**

গ. মনে করি, $(r + 1)$ তম পদে x^0 এর সহগ বিদ্যমান।

$\therefore$ $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r\,(2x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r$

$= {}^{10}C_r.\left(-\frac{1}{2}\right).\, 2^{10-r}.\, x^{20-5r}$

শর্তমতে, $20 - 5r = 0$

বা, $r = \frac{20}{5}$

$\therefore r = 4$

$\therefore x^0$ এর সহগ ${}^{10}C_4\left(-\frac{1}{2}\right)^4 . 2^{10-4} = {}^{10}C_4 . \frac{1}{2^4} . 2^6$

$= 4 \times 210$

$= 840$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৪ **$A = (2x + 3y)^5$ ....(i)**

$B = (1 + x)(a - bx)^{12}$..........(ii)

$C = (2x - 3y)^5$ ....(iii)

ক. A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে x^8 এর সহগ 0 হলে $\frac{a}{b}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে যদি $x = \frac{3}{2}$ এবং $y = \frac{2}{3}$ হয় তাহলে (iii) বিস্তৃতিটির বিজোড় পদগুলোর যোগফল, জোড় পদগুলোর যোগফল অপেক্ষা বেশি। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(2x + 3y)^5$

$= (2x)^5 + {}^5C_1(2x)^4 . 3y + {}^5C_2(2x)^3(3y)^2$

$+ {}^5C_3(2x)^2(3y)^3 + {}^5C_4(2x)(3y)^4 + (3y)^5.$

$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$ **(Ans.)**

খ. $(1 + x)(a - bx)^{12}$

$= (1 + x)\{a^{12} + {}^{12}C_1a^{11}(-bx) + {}^{12}C_2a^{10}(-bx)^2$

$+ {}^{12}C_3a^9(-bx)^3 + {}^{12}C_4a^8(-bx)^4 + {}^{12}C_5a^7(-bx)^5$

$+ {}^{12}C_6a^6(-bx)^6 + {}^{12}C_7a^5(-bx)^7 + {}^{12}C_8a^4(-bx)^8 + ...\}$

$= \{a^{12} + {}^{12}C_1a^{11}(-bx) + {}^{12}C_2a^{10}(-bx)^2 + {}^{12}C_3a^9(-bx)^3$

$+ {}^{12}C_4a^8(-bx)^4 + {}^{12}C_5a^7(-bx)^5 + {}^{12}C_6a^6(-bx)^6 + {}^{12}C_7a^5(-bx)^7$

$+ {}^{12}C_8a^4(-bx)^8 + ...\}$

$= \{a^{12}x + {}^{12}C_1a^{11}(-bx^2) + {}^{12}C_2\,a^{10} + b^2x^3 - {}^{12}C_3\,a^9b^3x^4$

$+ {}^{12}C_4\,a^8b^4x^5 - {}^{12}C_5a^7b^5x^5 + {}^{12}C_6a^6b^6x^7 - {}^{12}C_7a^5b^7x^8 + ...\}$

x^8 এর সহগ = ${}^{12}C_8a^4b^8 - {}^{12}C_7a^5b^7$.

শর্তমতে, ${}^{12}C_8a^4b^8 - {}^{12}C_7a^5b^7 = 0$

বা, $\frac{{}^{12}C_8}{{}^{12}C_7} = \frac{a^5b^7}{a^4b^8}$

বা, $\frac{5}{8} = \frac{a}{b}$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{5}{8}$ **(Ans.)**

গ. $(2x - 3y)^5$

মনে করি

বিজোড় পদগুলোর যোগফল = s_1 এবং

জোড় পদগুলোর যোগফল = s_2

$(2x - 3y)^5 = s_1 - s_2$

বা, $s_1 - s_2 = \left(2.\frac{3}{2} - 3.\frac{2}{3}\right)^5 [\because x = \frac{3}{2}, y = \frac{2}{3}]$

$= (3 - 2)^5 = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৫ ▸ **দুটি দ্বিপদী রাশি যথাক্রমে $\mathbf{M = \left(x + \frac{2}{x}\right)^8}$ এবং $\mathbf{N = (1 + ax)^2}$ যেখানে $\mathbf{a \neq 0}$.**

ক. $a = 1$ হলে, N এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. N এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, M এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 1120. ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$N = (1 + ax)^7$$

$a = 1$ হলে, $N = (1 + x)^7$

$(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি $= (1 + 1)^7$

$= 2^7 = 128$ **(Ans.)**

খ. $N = (1 + ax)^7$

$(1 + ax)^7$ এর বিস্তৃতিতে $= 1^7 + {}^7C_1.1^6ax + {}^7C_2.1^5(ax)^2$

$+ {}^7C_3.1^4(ax)^3 + {}^7C_4.1^5.(ax)^4 + \ldots\ldots..$

$= 1 + 7ax + 21a^2x^2 + 35a^3x^3 + 35a^4x^4 + \ldots\ldots.$

এখানে, x^3 এর সহগ $= 35a^3$

এবং x^4 এর সহগ $= 35a^4$

প্রশ্নমতে, $35a^4 = 35a^3$

$\therefore a = 1$

নির্ণেয় মান $a = 1$

গ. $M = \left(x + \frac{2}{x}\right)^8$

এখানে, M এর বিস্তৃতিতে $n = 8$ জোড় সংখ্যা

$\therefore \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তম বা $(4 + 1)$ তম পদ মধ্যপদ,

$\therefore$ (4 + 1) তম পদ = $^8C_4.(x)^{8-4}.\left(\frac{2}{x}\right)^4$

$= {}^8C_4.x^4\frac{2^4}{x^4}$

$= 2^4.\ {}^8C_4$

$= 16 \times 70$

$= 1120$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৬ $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ **একটি দ্বিপদী রাশি।**

ক. দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার লেখ। ২

খ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ কে বিস্তৃত কর। ৪

গ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় সমান হলে, a এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots + y^n.$

খ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10} = (2x^2)^{10} + \binom{10}{1} (2x^2)^{10-1} \left(\frac{a}{x^3}\right)^1 + \binom{10}{2} (2x^2)^{10-2}\left(\frac{a}{x^3}\right)^2 + \binom{10}{3} (2x^2)^{10-3}\left(\frac{a}{x^3}\right)^3\binom{10}{4}(2x^2)^{10-4} \left(\frac{a}{x^3}\right)^4 + \binom{10}{5}(2x^2)^{10-5}\left(\frac{a}{x^3}\right)^5 + \binom{10}{6}(2x^2)^{10-6}\left(\frac{a}{x^3}\right)^6 \binom{10}{7}(2x^2)^{10-7}\left(\frac{a}{x^3}\right)^7 + \binom{10}{8}(2x^2)^{10-8}\left(\frac{a}{x^3}\right)^8 + \binom{10}{9} (2x^2)^{10-9}\left(\frac{a}{x^3}\right)^9 + \binom{10}{10}(2x^2)^{10-10}\left(\frac{a}{x^3}\right)^{10}$

$= 1024x^{20} + 10.512.x^{18}.\frac{a}{a^3} + 45.256.x^{16}.\ \frac{a^2}{x^6}$

$$+ 120\cdot128\cdot x^{14}\cdot\frac{a^3}{x^9} + 210.64.x^{12}\cdot\frac{a^4}{x^{12}}$$

$$+ 252\cdot32\cdot x^{10}\,\frac{a^5}{x^{15}} + 210\cdot16\cdot x^{18}\cdot\frac{a^6}{x^{18}} + 120\cdot8\cdot x^6\cdot\frac{a^7}{x^{21}}$$

$$+ 45\cdot4\cdot x^4\cdot\frac{a^8}{x^{24}} + 10.2.x^2.\frac{a^9}{x^{27}} + \frac{a^{10}}{x^{30}}$$

$$= 1024x^{20} + 5120ax^{15} + 11520a^2x^{10}$$

$$+ 15360a^3x^5 + 13440a^4 + 8064\frac{a^5}{x^5} + 3360\,\frac{a^6}{x^{10}}$$

$$+ 960\cdot\frac{a^7}{x^{15}} + 180\cdot\frac{a^8}{x^{20}} + 20\cdot\frac{a^9}{x^{25}} + \frac{a^{10}}{x^{30}}.$$ **(Ans.)**

গ. $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ বা, $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{a}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r2^{10-r}a^rx^{20-5r}$

যদি $(r + 1)$ তম পদে x^5 থাকে, তবে $20 - 5r = 5$, অর্থাৎ $r = 3$

আবার, যদি $(r + 1)$ তম পদে x^{15} থাকে, তবে $20 - 5r = 15$, অর্থাৎ $r = 1$ সুতরাং x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান হলে,

${}^{10}C_3\cdot2^{10-3}\cdot a^3 = {}^{10}C_1\cdot2^{10-1}\cdot a$

বা, $\frac{10\times9\times8}{3\times2}\cdot2^7\cdot a^3 = 10\cdot2^9a$

বা, $a^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [ধনাত্মক মান নিয়ে] **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৭ $A = \left(2x^2 + \frac{1}{2x}\right)^8$

ক. দেখাও যে, ${}^8C_5 = {}^8C_3$ ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. Ax^2 এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ বিদ্যমান কিনা তা গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে উপস্থাপন কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বামপক্ষ $= {}^8C_5$

$$= \frac{8!}{5!(8-5)!} \quad \left[\because {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\right]$$

$$= \frac{8!}{5!3!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 56$$

বামপক্ষ = ${}^8C_3$

$$= \frac{8!}{3!(8-3)!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 56$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, ${}^8C_5 = {}^8C_3$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে,

$$A = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$$

এখানে, $n = 8$ [জোড় সংখ্যা]

$\therefore$ A এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে = $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তমপদ

$= \left(\frac{8}{2} + 1\right)$ তমপদ

$= (4 + 1)$ তমপদ

$= 5$ তমপদ

$\therefore$ A বিস্তৃতির 5 তমপদ = $\binom{8}{4} (2x^2)^{8-4} \left(\frac{-1}{2x}\right)^4$

$$= \frac{8!}{4!(8-4)!} (2x^2)^4 \left(\frac{-1}{2x}\right)^4$$

$$= \frac{8!}{4!4!} \cdot 16 \times x^8 \cdot \frac{1}{16 \cdot x^4}$$

$$= \frac{8!}{4!4!} \cdot x^{8-4}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \cdot x^4$$

$$= \frac{1680}{24} \cdot x^4 = 70x^4 \text{ (Ans.)}$$

গ. $A = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8 = {}^8C_0(2x^2)^8 + {}^8C_1(2x^2)^7\left(-\frac{1}{2x}\right)^1 + {}^8C_2\,(2x^2)^6\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^8C_3(2x^2)^5\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^8C_4(2x^2)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + {}^8C_5\,(2x^2)^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 + {}^8C_6(2x^2)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{8!}{0!(8-0)!} \times 2^8 \cdot x^{16} - \frac{8!}{1!(8-1)!} \times 2^7 \cdot x^{14} \times \frac{1}{2x} + \frac{8!}{2!(8-2)!} \times 2^6 \times x^{12} \times \frac{1}{4x^2} - \frac{8!}{3!(8-3)!} \times 2^5 \times x^{10} \times \frac{1}{8 \times x^3} + \frac{8!}{4!(8-4)!}\, 2^4 \times x^8 \times \frac{1}{2^4 \times x^4} - \frac{8!}{5!(8-5)!} \times 8 \times x^6 \times \frac{1}{2^5 \times x^5} + \frac{8!}{6!(8-6)!} \times 4 \times x^4 \times \frac{1}{2^6 \times x^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

এখন, $Ax^2 = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8 x^2$

$$= 256x^{18} - 512x^{15} + 448x^{12} - 224x^9 + 70x^6 - 14x^3 + \frac{7}{4} \ldots.$$

$\therefore$ Ax^2 এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ বিদ্যমান।

$\therefore$ বর্জিত পদটি হল 7 তম পদ। **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৮ $\mathbf{p = \left(a + \frac{x}{2}\right)^8}$

$\mathbf{Q = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8}$

ক. একটি ধারার n তম পদ $= 2^{n-1}$ ধারাটি লেখ এবং দেখাও যে, এর অসীমতক সমষ্টি নেই। ২

খ. P এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে b, 512x এবং cx^2 হলে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. Q এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

ধারার n তম পদ = 2^{n-1}

$\therefore$ ধারাটির ১ম পদ = $2^{1-1} = 2^0 = 1$

২য় পদ = $2^{2-1} = 2^1 = 2$

৩য় পদ = $2^{3-1} = 2^2 = 4$

নির্ণেয় ধারাটি, 1 + 2 + 4 + ... **(Ans.)**

এখানে, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{2}{1} = 2$

$\therefore |r| = |2| = 2 \nless 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নেই। **(দেখানো হলো)**

খ. এখানে, $P = \left(a + \frac{x}{2}\right)^8$

$\therefore$ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$P = \left(a + \frac{x}{2}\right)^8 = a^8 + \binom{8}{1} a^7 \left(\frac{x}{2}\right) + \binom{8}{2} a^6 \left(\frac{x}{2}\right)^2 + ...$

$= a^8 + 8a^7 \cdot \frac{x}{2} + \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} a^6 \cdot \frac{x^2}{4} + ...$

$= a^8 + 4a^7x + 7a^6x^2 + ...$

কিন্তু P এর বিস্তৃতির ১ম তিনটি পদ যথাক্রমে b, 512x এবং cx^2।

$b + 512x + cx^2 .... = a^8 + 4a^7x + 7a^6x^2 + ...(i)$

(i) নং এর উভয়পক্ষ হতে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$b = a^8 ....(ii)$

$512 = 4a^7$

বা, $a^7 = \frac{512}{4}$

বা, $a^7 = 128$

বা, $a^7 = 2^7$

$\therefore a = 2$

আবার, $c = 7a^6$

$= 7\cdot 2^6$ [a এর মান বসিয়ে]

$= 448$

a এর মান (ii) নং বসিয়ে পাই, $b = 2^8 = 256$

$\therefore$ a, b ও c এর মান যথাক্রমে 2,256 ও 448 **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে,

$$Q = \left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^8$$

এখানে, n = 8 জোড়সংখ্যা। সুতরাং Q এর বিস্তৃতির মধ্যপদ হবে $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা (4 + 1) তম পদ।

$$\therefore \text{ Q এর বিস্তৃতির মধ্যপদ} = {}^8C_4\,(2x2)^{x-4}\left(-\frac{1}{2x}\right)^4$$

$$= 70\cdot 2^4\cdot x^8\,\frac{1}{2^4\cdot x^4}$$

$$= 70x^4 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন–১৯ **$(a + 2x)^5$ একটি দ্বিপদী।**

ক. a = 1 হলে, প্যাসেকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতিটি নির্ণয় কর। ২

খ. প্রদত্ত দ্বিপদী বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে a মান কত হবে? ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত a এর ঋণাত্মক মান বসিয়ে দ্বিপদীটির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

n = 0   1

n = 1   1   1

n = 2   1   2   1

n = 3   1   3   3   1

n = 4   1   4   6   4   1

n = 5   1   5   10   10   5   1

এখন, প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে দ্বিপদীর বিস্তৃতি নির্ণয় করি।

$\therefore (a + 2x)^5 = (1 + 2x)^5$ [$\because$ a = 1]

$= 1 + .1.2x + 10.1(2x)^2 + 10.1(2x)^3 + 5.1(2x)^4 + (2x)^5$

$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$ **(Ans.)**

খ. মনে করি,

প্রদত্ত দ্বিপদীর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদে x^3 বর্তমান।

এখন, (r + 1) তম পদ = $^5C_r a^{5-r}(2x)^r$

$= {^5C_r} a^{5-r} 2^r x^r$

$\because r = 3$

প্রশ্নমতে, $^5C_3 a^{5-3} 2^3 = 320$

বা, $10 \cdot 8a^2 = 320$

বা, $80a^2 = 320$

বা, $a^2 = \frac{320}{80}$

বা, $a^2 = 4$

$\therefore a = \pm 2$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $a = -2$ [‘খ’ হতে পাই]

$\therefore$ প্রদত্ত দ্বিপদীটি হয় = $(-2 + 2x)^5$

প্রদত্ত দ্বিপদীটির বিস্তৃতিতে মোট পদ সংখ্যা = (5 + 1) টি = 6টি

$\therefore$ 3, 4 নং পদ দুটি মধ্যপদ।

$\therefore$ 3তম পদ = $^5C_2(-2)^{5-2}(2x)^2$

$= 10(-2)^3 \cdot 4x^2$

$= -320x^2$

এবং 4 তম পদ = $^5C_3(-2)^{5-3}(2x)^3$

$= 10(-2)^2 \cdot 8x^3$

$= 10 \cdot 4 \cdot 8x^3$

$= 320x^3$

$\therefore (-2 + 2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদদ্বয় $-320x^2$, $320x^3$ **(Ans.)**

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২৮ $A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এবং $B = \left(a - \frac{x}{3}\right)^7$, $a \neq 0$.

ক. A এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে a^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2-x)A$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1{\cdot}9 \times (1{\cdot}05)^8$ মান নির্ণয় কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8 = 1 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + ...$$

$$= 1 + 8{\cdot}\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}\,\frac{x^3}{8} + ...$$

$$= 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + ... \textbf{(Ans.)}$$

খ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(a - \frac{x}{3}\right)^7 = a^7 + {}^7C_1\, a^6\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2\, a^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3\, a^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4\, a^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + ...$$

$[a \neq 0]$

এখানে, বিস্তৃতিটির a^3 এর সহগ ${}^7C_4\left(-\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{3^4} = \frac{35}{81}x^4$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = 560 \times \frac{81}{35}$

বা, $x^4 = 1296$

বা, $x^4 = (\pm 6)^4$

$\therefore\ x = \pm 6$ **(Ans.)**

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2-x)$ A কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করতে হবে। অর্থাৎ $(2-x)\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করতে হবে।

$\left[\text{‘ক’ হতে পাই } A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8\right]$

[অনুশীলনী ১০·১ এর উদাহরণ ৭ নং দেখ]

প্রশ্ন–২৯ $(1-3x)^5$, $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এবং $\left(x^2+\frac{K}{x}\right)^6$ তিনটি দ্বিপদী রাশি।

ক. প্রথম দ্বিপদী রাশিকে বিস্তৃত কর। ২

খ. দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির x^3 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. তৃতীয় রাশির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে K এর মান কত হবে? ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অনুশীলনী–১০·১ এর উদাহরণ ২ নং দেখ।

খ. অনুশীলনী–১০·১ এর উদাহরণ ৪ নং দেখ।

গ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1\,(x^2)^5\left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2\,(x^2)^4\left(\frac{k}{x}\right)^2 + {}^6C_3\cdot(x^2)^3\cdot\left(\frac{k}{x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^{12} + {}^6C_1\,x^{10}\cdot\frac{k}{x} + {}^6C_2\,x^8\cdot\frac{k^2}{x^2} + {}^6C_3\,x^6\,\frac{k^3}{x^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

এখানে, বিস্তৃতিটির x^3 এর সহগ,

$${}^6C_3k^3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot k^3 = 20k^3$$

প্রশ্নানুসারে, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = \frac{160}{20}$

বা, $k^3 = 8$

বা, $k^3 = 2^3$

$\therefore k = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩০ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি নিম্নরূপ:

(i) 1 + x (ii) 1 – x (iii) 2x + 1

ক. (i) নং রাশির বর্গকে হর এবং (iii) নং রাশিকে লব ধরে গঠিত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. সূচকের মৌলিক সূত্রটি লেখ। (i) নং রাশিকে 4 এর সূচক এবং (ii) নং রাশিকে 4 এর সূচক ধরে গঠিত রাশিদ্বয়ের সমষ্টি 10 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে (p + 1) তম পদ কত? (i) নং এবং (ii) নং রাশির গুণফলের সূচক n হলে, এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদের সহগের সংখ্যাসূচক মান, তৃতীয় পদের সহগের দ্বিগুণ হয়। n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. (i) রাশির বর্গকে হর ও (iii) নং রাশিকে লব ধরে গঠিত ভগ্নাংশ

$$= \frac{2x + 1}{(1 + x)^2}$$

ধরি, $\frac{2x + 1}{(1 + x)^2} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{(1 + x)^2}$ ....(i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(1 + x)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই–

$2x + 1 = A(1 + x) + B$ ....(ii)

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই–

$2(-1) + 1 = A(1 - 1) + B$

বা, $-2 + 1 = B$

$\therefore B = -1$

(ii) নং–এ x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$2x + 1 = A + Ax + B = Ax + (A + B)$

$\therefore A = 2$

$\frac{2x + 1}{(1 + x)^2}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ = $\frac{2}{1 + x} - \frac{1}{(1 + x)^2}$ **(Ans.)**

খ. সূচকের মৌলিক সূত্র : $a^m \cdot a^n = a^{m + n}$

(i) নং রাশিকে 4 সূচক ধরি = $4^{1 + x}$

(ii) নং রাশিকে 4 এর সূচক ধরি = $4^{1 - x}$

প্রশ্নমতে,

$4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

বা, $4 \cdot 4^x + \frac{4}{4^x} = 10$ $\left[\because a^{m+n} = a^m a^n, a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}\right]$

বা, $4 \cdot 4^x \cdot 4^x + 4 = 10 \cdot 4^x$

বা, $4(4^x)^2 - 10 \cdot 4^x + 4 = 0$

বা, $4a^2 - 10a + 4 = 0$ [$4^x = a$ ধরে]

বা, $4a^2 - 8a - 2a + 4 = 0$

বা, $4a(a-2) - 2(a-2) = 0$

বা, $(a-2)(4a-2) = 0$

হয় $a - 2 = 0$ অথবা, $4a - 2 = 0$

$\therefore$ $a = 2$ বা, $4a = 2$

$\therefore$ $a = \frac{1}{2}$

$a = 2$ হলে, $4^x = 2$

বা, $(4)^x = 4^{\frac{1}{2}}$ [$\because \sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$]

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$

আবার, $a = \frac{1}{2}$ হলে, $4^x = \frac{1}{2}$

বা, $4^x = \frac{1}{\sqrt{4}}$

বা, $4^x = 4^{\frac{-1}{2}}$

$\therefore$ $x = -\frac{1}{2}$

নির্ণেয় সমাধান : $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

গ. $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(p + 1)$ তম পদ = ${}^nC_p . x^{n-p} \cdot y^p$. **(Ans.)**

(i) নং এবং (ii) নং রাশির গুণফলের সূচক n হলে,

রাশিটি = $\{(1 + x)(1 - x)\}^n = (1 - x^2)^n$

এখানে, $(1 - x^2)^n = {}^nC_0.1^{n-0}\cdot(-x^2)^0 + {}^nC_1.1^{n-1}(-x^2)^1 + {}^nC_2.1^{n-2}\cdot(-x^2)^2 + {}^nC_3.1^{n-3}\cdot(-x^2)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

এখানে, তৃতীয় পদের সহগের সংখ্যাসূচক মান = ${}^nC_2(-1)^2 = {}^nC_2$

চতুর্থ পদের সহগ = ${}^nC_3(-1)^3 = -\,{}^nC_3$

শর্তমতে, $2\cdot{}^nC_2 = {}^nC_3$

বা, $2\cdot\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

বা, $2 = \frac{n-2}{3}$

$\therefore$ $n = 8$ **(Ans.)**