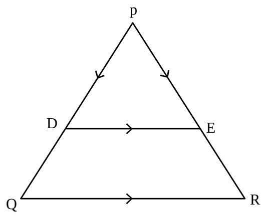
দ্বাদশ অধ্যায়
সমতলীয় ভেক্টর
গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১



ΔPQR–এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

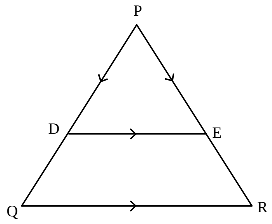
ক. $(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. DERQ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $FG \parallel DE \parallel QR$ এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$. ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



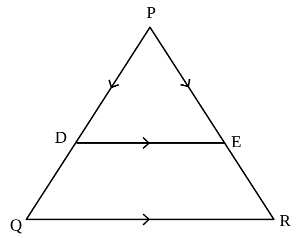
ΔPDE–এ $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$ [ত্রিভুজবিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ [যেহেতু, E, PR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

D, E যোগ করা হলো দেখাতে হবে যে, DE || QR এবং $DE = \frac{1}{2}QR$



প্রমাণ : D ও E যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

ΔPQR–এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ .... (i)

এবং ΔPDE এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ [$\because \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ [(i) হতে]

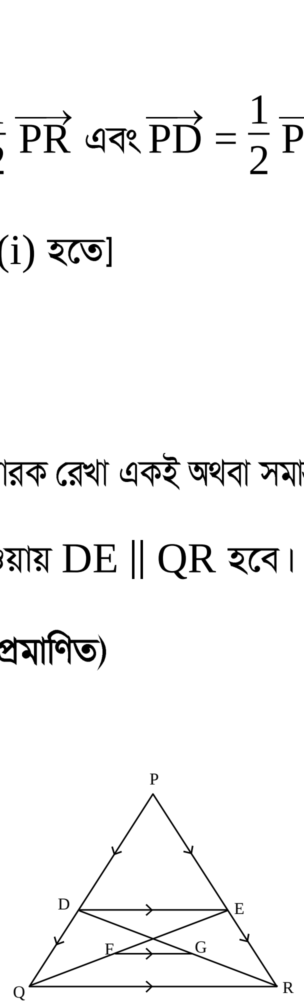
$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$\therefore DE = \frac{1}{2}QR$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল।

কিন্তু DE এবং QR ভিন্ন ভিন্ন রেখা হওয়ায় DE || QR হবে।

$\therefore$ DE || QR এবং $DE = \frac{1}{2}QR$ (**প্রমাণিত**)

গ.



মনে করি, DERQ ট্রাপিজিয়ামের DE || QR এবং QE ও DR কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G। F ও G যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$.

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মধ্যবিন্দুর সাপেক্ষে D, E, Q ও R এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{q}$ ও $\underline{r}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

$\therefore$ F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q})$ [$\because$ F, QE এর মধ্যবিন্দু]

এবং G বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d})$ [$\because$ G, DR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d} - \underline{e} - \underline{q})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{e} - \underline{d})\} \quad \therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

DE || QR হওয়ায় $(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{FG}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

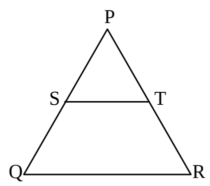
আবার, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})| = \frac{1}{2}|(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{DE}|)$

$\therefore FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$

অর্থাৎ FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২ ›



ΔPQR, এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T.

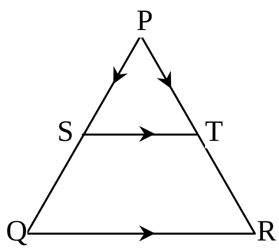
ক. $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || QR এবং $ST = \frac{1}{2} QR$. ৪

গ. □SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || ST || QR এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$. ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔPST এ ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$ .... (i)

আবার, PR বাহুর মধ্যবিন্দু T

$\therefore \overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ .... (ii)

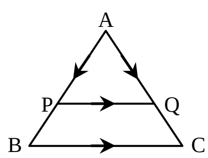
(i) ও (ii) হতে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ. সৃজনশীল ১(গ)নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন–৩



চিত্রে, ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল।

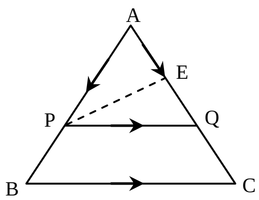
ক. APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি বর্ণনা কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Q, AC এর মধ্যবিন্দু। ৪

গ. PBCQ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC}\right)$। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔAPQ-এ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ এর আদিবিন্দু একই এবং $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{AQ}$ এর অন্তবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P ও Q যোগ করলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QP}$

খ. দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল PQ, AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে Q, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ : Q যদি $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু না হয়, তবে ধরি, E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ P, $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE}$ [$\because \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}$]

$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু হলে]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, PE || BC কিন্তু PQ || BC (উদ্দীপক অনুসারে)

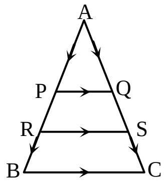
তাহলে $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ রেখাদ্বয় উভয়ে P বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল।

অতএব, $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ অবশ্যই সমাপাতিত হবে,

তাই E ও Q একই বিন্দু হবে।

অর্থাৎ Q, AC এর মধ্যবিন্দু (প্রমাণিত)

গ.



PBCQ ট্রাপিজিয়ামে R ও S যথাক্রমে PB ও QS এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P, B, C ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{q}$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{\underline{p} + \underline{b}}{2}$

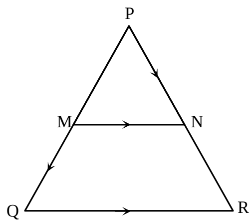
S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{\underline{c} + \underline{q}}{2}$

$$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{q}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{p}) = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b}) + \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{p})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PQ})$$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৪ ›



ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N.

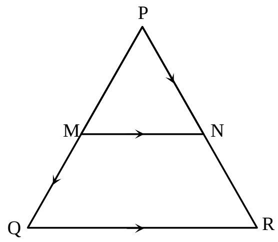
ক. $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2} QR$। ৪

গ. QRNM ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel MN \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



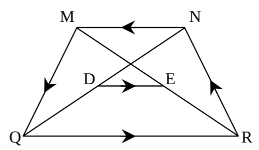
ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N

$\therefore \Delta PMN$–এ $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$

বা, $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ.



মনে করি, QRNM ট্রাপিজিয়ামের QR ও MN সমান্তরাল বাহু এবং MR ও QN কর্ণের মধ্যবিন্দু D ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel MN \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$

ধরি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে R, Q, N, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \underline{b} - \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{MN} = \underline{e} - \underline{d}$

এখন D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

এবং E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e} - \underline{c} - \underline{d})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c} + \underline{e} - \underline{d}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{NM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$$

$\therefore \overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{NM}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী

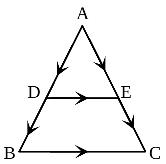
$$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{MN}|)$$

বা, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$ (প্রমাণিত)

$\therefore$ DE, MN ও QR সমান্তরাল।

অর্থাৎ $DE \parallel MN \parallel QR$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৫



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overline{AD} + \overline{DE})$ কে $\overline{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ ৪

গ. A ও B এর অবস্থান ভেক্টর A ও B এবং AB রেখাংশ c বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহিঃবিভক্ত হলে, C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$ ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE এ

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]

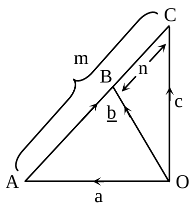
সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ. মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.

AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \frac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$

প্রমাণ : AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।



$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{m - n}{n}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{AC - BC}{BC} = \frac{m - n}{n}$

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{m - n}{n}$

বা, $BC = \frac{n}{m - n}AB$

বা, $\overrightarrow{BC} = \frac{n}{m - n}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c} - \underline{b} = \frac{n}{m - n}(\underline{b} - \underline{a})$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

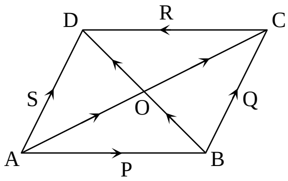
বা, $\underline{c} = \frac{n\underline{b} - n\underline{a}}{m - n} + \underline{b}$

বা, $\underline{c} = \frac{n\underline{b} - n\underline{a} + m\underline{b} - n\underline{b}}{m - n}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$

$\therefore \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ বা, $\dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৬ ▸



ক. ভেক্টর ত্রিভুজ বিধি কী? চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

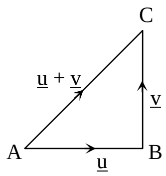
খ. প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের $\vec{AC}$ ও $\vec{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। (ভেক্টর বিধি প্রযোজ্য)। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত চতুর্ভুজের $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{DC}$ এবং $\vec{AD}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে, প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. কোন ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা দুই ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করে।

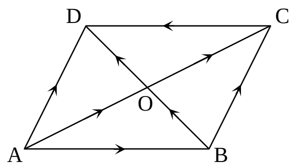
মনে করি $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{BC} = \underline{v}$ যেখানে $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর আদি বিন্দু। তাহলে $\underline{u}$ এর আদি বিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দুর সংযোজক $\vec{AC}$ দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হয়।



$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে, $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরত্রয় একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে বলে উপরিউক্ত যোজন পদ্ধতিতে ত্রিভুজ বিধি বলে।

খ. এখানে ABCD চতুর্ভুজ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ :



$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এখন $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$]

$= \overrightarrow{BC}$

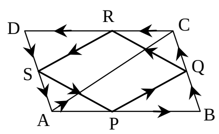
$\therefore |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$

এখন $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ হলে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হবে।

এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AD = BC এবং $AD \parallel BC$.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

চিত্র হতে, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$$\left[\because \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right]$$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{AC} = (\underline{a} + \underline{b})$ [$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$]

এবং $\overrightarrow{CA} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\because (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

[$\because \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$]

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS–একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৭ ▶ তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে অবস্থিত। বাড়ি হতে স্কুলে হেঁটে যেতে 1 ঘণ্টা এবং ছুটির পর সাইকেলে বাড়ি ফিরে আসতে 20 মিনিট সময় লাগে।

ক. বাড়ি হতে স্কুলের দূরত্ব ও 3 কিলোমিটার হলে স্কুলে হেঁটে যেতে তোমার গতিবেগ কত? ২

খ. স্কুল থেকে সাইকেলে বাড়ি ফিরে আসতে তোমার গতিবেগ নির্ণয় কর। সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার গতিবেগের কতগুণ? ৪

গ. বাসের গতিবেগ 36 কি.মি./ ঘন্টা হলে বাড়ি হতে স্কুলে যেতে তোমার কত সময় লাগবে? তিন মাধ্যমে তোমার গড় গতিবেগ কত? ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বাড়ির অবস্থানকে H দ্বারা এবং স্কুলের অবস্থানকে S দ্বারা চিহ্নিত করলে,

আমার গতিবেগ $\underline{u} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{HS}{\text{সময়}} = \frac{3}{1}$ কি.মি./ ঘন্টা দক্ষিণ দিকে = 3 কি.মি./ ঘন্টা দক্ষিণ দিকে।

(Ans.)

খ. মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.

মোট সময় = 20 মিনিট

আবার, এক ঘন্টা = 60 মিনিট

20 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব = 3 কি.মি.

$\therefore$ 60 " " " $= \frac{3 \times 60}{20}$ কি.মি.

= 9 কি.মি.

$\therefore$ স্কুল থেকে বাড়ি ফেরার সময় আমার গতিবেগ,

$\underline{v}$ = 9 কি. মি./ঘন্টা। **(Ans.)**

এখন সাইকেলের গতিবেগ = 9 কি. মি./ ঘন্টা

= 3×3 কি.মি./ ঘন্টা

= $3 \times$ হাঁটার গতিবেগ ['ক' হতে]

সুতরাং সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার বেগের তিনগুণ। **(Ans.)**

গ. 'ক' হতে মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.

গাড়ির গতিবেগ = 36 কি.মি.

বাসে 45 কি. মি. যায় 1 ঘন্টায়

$\therefore$ 1 " " " $\frac{1}{36}$ "

$\therefore$ 3 " " " $\frac{3}{36}$ "

বা, $\frac{1}{12}$ ঘণ্টায় বা $\frac{60}{12}$ মিনিটে [$\because$ 1 ঘন্টা = 60 মিনিট]

বা 5 মিনিটে।

$\therefore$ বাড়ি হতে বাসে স্কুলে যেতে আমার 5 মিনিট সময় লাগবে। **(Ans.)**

হেঁটে যেতে সময় লাগে 1 ঘন্টা বা 60 মিনিট

সাইকেলে যেতে সময় লাগে 20 মিনিট।

তিন মাধ্যমে যেতে মোট সময় লাগে = (60 + 20 + 5) মিনিট।

= 85 মিনিট

তিন মাধ্যমে অতিক্রান্ত দূরত্ব = (3 + 3 + 3) বা 9 কি.মি.

$\therefore$ তিন মাধ্যমে গড় গতিবেগ $= \frac{\text{9 কি. মি.}}{\text{85 মিনিট}} = \frac{\text{9 কি.মি.}}{\frac{85}{60}\text{ ঘন্টা}}$

$= \dfrac{9 \times 60}{85}$ কি.মি./ ঘণ্টা

$= 6{\cdot}35$ কি.মি./ ঘন্টা (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▸ m ও n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$ একটি ভেক্টর। $(m + n)\, u = m\underline{u} + n\underline{u}$

ক. m ও n এর বিভিন্ন সাংখ্যিক মানের সূত্রটি যাচাই কর। ২

খ. ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক সংক্রান্ত সূত্র হতে এটি প্রমাণ কর। ৪

গ. অপর আরেকটি ভেক্টর u হলে $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ সূত্রটি প্রমাণ কর। ৪

▸◂ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

m = 1 এবং n = 2 হলে, বামপক্ষ $= (1 + 2)\, \underline{u}$

$= 3\underline{u}$

ডানপক্ষ $= 1\underline{u} + 2\underline{u} = \underline{u} + 2\underline{u} = 3\underline{u}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

আবার, m = 2 এবং n = 3 হলে, বামপক্ষ $= (2 + 3)\underline{u}$

$= 5\underline{u}$

ডানপক্ষ $= 2\underline{u} + 3\underline{u} = 5\underline{u}$

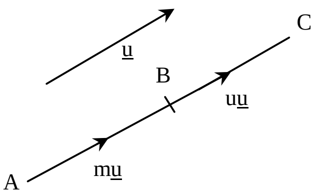
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অতএব, m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই করা হলো।

খ. **প্রমাণ :** m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = m\, |\underline{u}|$



AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন,

$|\overrightarrow{BC}| = n\,|\underline{u}|$

হয়।

$\therefore\ \overrightarrow{BC} = m\underline{u}$

এবং $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = m|\underline{u}| + n|\underline{u}| = (m+n)\,|\underline{u}|$

$\therefore\ \overrightarrow{AC} = (m+n)\,\underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore\ m\underline{u} + n\underline{u} = (m+n)\underline{u}$

m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে $m + n)\,\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m+n|\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক, তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m|\,|\underline{u}| + |n|\,|\underline{u}| = (|m| + |n|)\,|\underline{u}|$

[$\because$ $m\underline{u}, n\underline{u}$ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে]

এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। কিন্তু $m < 0$ এবং $n < 0$ হওয়ায় $|m| + |n| = |m+n|$ সেহেতু এক্ষেত্রে $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ পাওয়া গেল।

সর্বশেষ m এবং n এর মধ্যে $m > 0, n < 0$ হলে

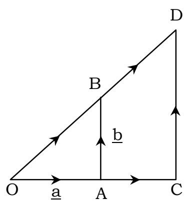
$(m+n)\,\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m+n\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে

(i) $\underline{u}$ এর দিকের সাথে একমুখী যখন $|m| > |n|$

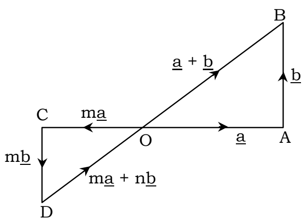
(ii) $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক যখন $|m| < |n|$

তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটিও দৈর্ঘ্য ও দিকে $(m+n)\,\underline{u}$ এর সাথে একমুখী হবে। **(প্রমাণিত)**

গ.



চিত্র –১



চিত্র –২

মনে করি, $\overrightarrow{OC} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = m OA হয়। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

$$\text{সেহেতু } \frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$$

$\therefore\ \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

চিত্র –১ এ m ধনাত্মক চিত্র –২ এ m ঋণাত্মক

$\therefore OC = m.\ OA,\ CD = m.\ AB,\ OD = m.\ OB$

এখন, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ বা, $m(\overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

$\therefore m\underline{u} + m\,\underline{v} = m(\underline{u} + \underline{v})$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৯ O কে মূলবিন্দু ধরে বিভিন্ন অবস্থানে A, B, C, D ও E পাঁচটি বিন্দু নিই।

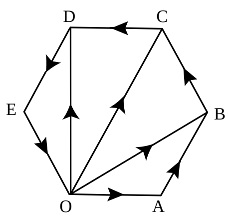
ক. চিত্র এঁকে O বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুগুলোর অবস্থান চিহ্নিত কর। ২

খ. দেখাও যে, $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, OABCDE ষড়ভূজের মূলবিন্দু O মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A, B, C, D, E এই পাঁচটি বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$ এবং $\overrightarrow{OE} = \underline{e}$



খ. ‘ক’ হতে, $= \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$

এখন, ΔOAB-এ

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

আবার, ΔOBC - এ

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ [[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \underline{c} - \underline{b}$

সুতরাং $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{b}$

$= \underline{c} = \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান।

(দেখানো হলো)

গ. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ [‘খ’ হতে]

এখন, ΔOCD- এ

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \underline{d} - \underline{c}$ [‘ক’ হতে]

আবার, ΔOAD- এ

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \underline{c} - \underline{d}$ [‘ক’ হতে]

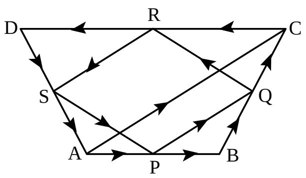
সুতরাং $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{c} + \underline{d} - \underline{c} + \underline{e} - \underline{d}$

$= \underline{e} = \overrightarrow{OE}$

বা, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১০



চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S.

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

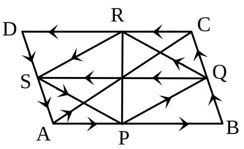
১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q.

আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।

$\therefore \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ **(দেখানো হলো)**

খ. মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, BD, DA বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, PQRS সামান্তরিকের $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\overrightarrow{PO} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QO} = \underline{q}$ ও $\overrightarrow{OR} = \underline{r}$ ও $\overrightarrow{OS} = \underline{s}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{p}| = |\underline{r}|$, $|\underline{s}| = |\underline{q}|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{SQ}$

আমরা জানি, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

বা, $\underline{p} + \underline{s} = \underline{q} + \underline{r}$

বা, $\underline{p} - \underline{r} = \underline{q} - \underline{s}$[উভয়পক্ষে $- \underline{s} - \underline{r}$ যোগ করে]

এখানে, $\underline{p}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক PR

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ এর ধারক PR.

$\underline{q}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক QS,

$\therefore \underline{q} - \underline{s}$ এর ধারক QS.

$\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে এদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু PR ও QS দুইটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = 0$ বা $\underline{p} = \underline{r}$ এবং $\underline{q} - \underline{s} = 0$ বা, $\underline{q} = \underline{s}$

$\therefore |\underline{p}| = |\underline{r}|$ এবং $|\underline{q}| = |\underline{s}|$

অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১১ ▸ ABC ত্রিভুজে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F

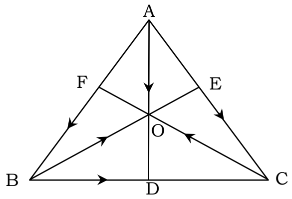
ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{AD}$–কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ BOF হতে পাই,

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BF}$$

বা, $\frac{2}{3}$ BE + $\frac{2}{3}$ CF = $\frac{1}{2}$ AB

$\therefore$ AB = $\frac{4}{3}$ (BE + CF)

খ. 'ক' এর চিত্রানুসারে Δ BAE হতে পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$ **(Ans.)**

Δ BCE থেকে পাই,

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE}$

$$= \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}.2\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

Δ AOB হতে পাই,

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$$

বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

গ. 'ক' এর চিত্রানুসারে,

মনে করি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

প্রমাণ :

Δ ABD হতে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ .... (i)

ΔACD থেকে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

(i) + (ii) করে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

বা, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}$

বা, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .... (iii)

একইভাবে দেখানো যায় যে,

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ .... (iv)

এবং $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ .... (v)

(iii), (iv) ও (v) যোগ করে পাই,

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{1}{2} \times 0$$

$$= 0$$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১২ A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$

?

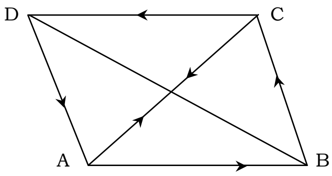
ক. (AB + BC + CD + DA) এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, ADCD একটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাও যে, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}$ হবে। ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC হতে পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ .... (i)}$$

ΔACD হতে পাই,

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} \text{ .... (ii)}$$

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$$

$$= \underline{0}$$

$\therefore$ (AB + BC + CD + DA) এর মান 0 **(Ans.)**

খ. A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} \text{ ....(i)}$$

আবার, C ও D-এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d} \text{ ....(ii)}$$

কিন্তু প্রদত্ত তথ্যানুসারে, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান হওয়ায় এদের ধারক রেখা পরস্পর সমান্তরাল বা একই হবে।

কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখা সমান্তরাল।

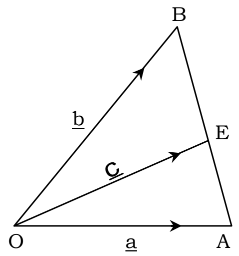
$\therefore$ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

আবার, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

একইভাবে দেখানো যায় যে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ও $AD \parallel BC$

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

গ.



মনে করি, AB রেখাংশ E বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দুতে অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}$

প্রমাণ : AB রেখাংশ E বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

$$\therefore \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{m}{n}$$

$$\text{বা, } \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{EB}|} = \frac{m}{n}$$

$$\text{বা, } \frac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{n}{m}$$

$$\text{বা, } \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{|\overrightarrow{AE}| + |\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = 1 + \frac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|}$$

$$= 1 + \frac{n}{m} = \frac{m + n}{m}$$

$$\therefore \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{m}{m + n}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \left(\frac{m}{m + n}\right)\overrightarrow{AB}$$

$AE = \underline{c} - \underline{a}$ ও $AB = \underline{b} - \underline{a}$

$$\therefore \underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a})$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a}$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)\underline{b} + \underline{a}\left(1 - \frac{m}{m+n}\right)$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)\underline{b} + \underline{a}\left(\frac{m}{m+n}\right)$$

$$= \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$$

$$\therefore \underline{c} = \frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৩ **ABCD সামান্তরিকের AC ও BD দুইটি কর্ণ।**

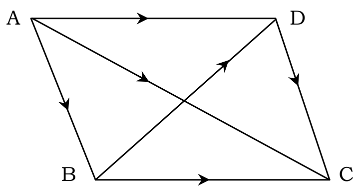
ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABD থেকে,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

ΔADC থেকে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ .... (i)

ΔBDC থেকে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

(i) + (ii) করে পাই,

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ (প্রমাণিত)

গ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

ΔADC থেকে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ .... (i)

ΔBCD থেকে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$............................ (ii)

(i) – (ii) করে পাই,

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

$= 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৪ ABC ত্রিভুজের BC, CA, ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

?

ক. $\overrightarrow{BC}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু ও ছেদবিন্দুতে প্রত্যেক মধ্যমা 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। ৪

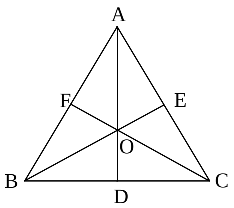
গ. EFBC ট্রাপিজিয়ামের BE ও CF বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

হলে প্রমাণ কর যে, $EF \parallel PQ$

$\parallel BC$ ও $PQ = \frac{1}{2}(BC - EF)$ ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔBOC হতে পাই,

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$ **Ans.**

খ. ধরি A, B, C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$

এখন, BC এর মধ্যবিন্দু D

$\therefore$ D এর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

যে বিন্দুটি AD-কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তার অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{2 \times \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) + 1 \times \underline{a}}{2 + 1}$

$= \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$

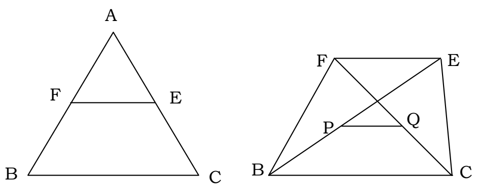
একইভাবে দেখানো যায় যে, বিন্দুটি BE ও CF-কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তার অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{3}$

$(\underline{b} + \underline{c} + \underline{a})$

অর্থাৎ দেখা যাচ্ছে যে, $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$–কে যে বিন্দুগুলো 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তাদের অবস্থান ভেক্টর একই অর্থাৎ তারা একই বিন্দু।

$\therefore$ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং ছেদবিন্দুতে প্রত্যেকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। **(প্রমাণিত)**

গ.



দেওয়া আছে, EFBC ট্রাপিজিয়ামের BE ও CF বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P,Q যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel PQ \parallel BC$ ও $PQ = \frac{1}{2}(BC - EF)$

প্রমাণ : মনে করি, যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E ও F ভেক্টরগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$,$\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{f}$

$\therefore\ \overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c}$, $\overrightarrow{FE} = \underline{e} - \underline{f}$

P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f})$

$\therefore\ PQ = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{f})\}$

$\therefore\ PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$

বা, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{FE}|) = \frac{1}{2}(BC - FE)$

কিন্তু $PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF})$ হওয়ায় $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি $-(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF})$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। আবার $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{FE}$ এর সমান্তরাল হবে।

প্রশ্ন–১৫ ▸ ABCD চতর্ভুজের AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S.

ক. $\overrightarrow{AR}$ কে $\overrightarrow{DA}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

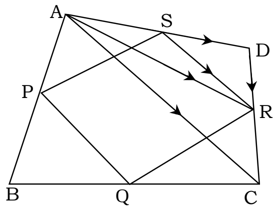
খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{AC}$ এবং

$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ ADR থেকে পাই,

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$\therefore \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ **(Ans.)**

খ. ‘ক’ চিত্র থেকে,

A , C যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

AD ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও R.

$\therefore \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

বা, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে SR ও AC এর ধারক রেখা এক হতে পারে না।

$\therefore$ SR || AC

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং SR || AC **(প্রমাণিত)**

গ. চিত্র ‘ক’ থেকে

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

AD ও DC এর মধ্যবিন্দু S ও R

$\therefore \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

এবং $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

এখন, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল কিন্তু স্পষ্টতই SR ও AC এর ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore$ SR || AC

একইভাবে দেখানো যায় যে,

PQ || AC

অর্থাৎ SR || PQ

অনুরূপভাবে পাই, PS || QR

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৬ $\underline{c}$, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ 3টি অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং m ও n দুটি স্কেলার গুণিতক।

ক. দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$ ২

খ. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ ৪

গ. $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $m = n = \underline{0}$ ৪

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুটি ভেক্টর।

এখন, $\underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 1.\underline{a} + 1.\underline{a} + 1.\underline{b} + 1.\underline{b}$

$= \underline{a}\,(1 + 1) + \underline{b}\,(1 + 1)$

$= 2\underline{a} + 2\underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$

$\therefore\ \underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$ **(দেখানো হলো)**

খ. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) + (-\underline{b}) = \underline{c} + (-\underline{b})$

বা, $\underline{a} + \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + \{\underline{b} + (-\underline{b})\} = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + (\underline{b} - \underline{b}) = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + 0 = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

$\therefore\ \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

গ. $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = 0 - n\underline{b}$

বা, $m\underline{a} = -n\underline{b}$

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হলে $m\underline{a}$, $\underline{b}\,n$ এর বিপরীত ভেক্টর হতে পারে না।

$\therefore\ m\underline{a} = \underline{0}$ ও $n\underline{b} = \underline{0}$

কিন্তু $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য ভেক্টর

$\therefore\ m = \underline{0}$ ও $n = \underline{0}$

$\therefore\ m = n = \underline{0}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৭ $\underline{c}$, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর রাশি এবং **m, n** স্কেলার গুণিতক।

ক. দেখাও যে $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(m - n)\,\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ এবং $m\,(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} + m(-\underline{b})$ ৪

গ. দেখাও যে, $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\underline{a} + \underline{a} = 1\underline{a} + 1\underline{a} = \underline{a}\,(1 + 1) = 2\,\underline{a}$

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ (দেখানো হলো)

খ. $(m - n)\underline{a} = \{m + (-n)\}\underline{a} = m\underline{a} + (-n)\underline{a}$

$= m\underline{a} - n\underline{a}$

$\therefore (m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

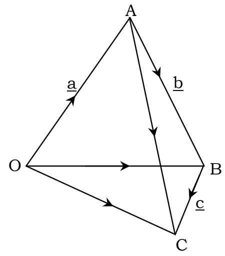
আবার , $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\{\underline{a} + (-\underline{b})\}$

$= m\underline{a} + m(-\underline{b})$

$\therefore m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} + m(-\underline{b})$ (প্রমাণিত)

গ. মনে করি,

OABC চতুর্ভুজে



$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \underline{c}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$

প্রমাণ :

Δ AOB হতে পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b}$

Δ OBC হতে পাই,

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OC} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ .... (i)

Δ ABC থেকে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \underline{b} + \underline{c}$

Δ OAC হতে পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = \overrightarrow{OC}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৮ m, n স্কেলার এবং $\underline{a}$, $\underline{b}$ ভেক্টর।

ক. প্রমাণ কর যে, $(m - n)\underline{a} = m\underline{a}$

$- n\underline{a}$ ২

খ. $a \neq 0$ ও $b \neq 0$ হলে প্রমাণ কর যে,

$a = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হয়। ৪

গ. $\underline{a} \neq 0$ ও $\underline{b} \neq 0$; $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমান্তরাল

এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে দেখাও

যে, $m = n = 0$. ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(m - n)\underline{a} = \{m + (-n)\}\underline{a}$

$= m\underline{a} + (-n)\underline{a}$

$= m\underline{a} - n\underline{a}$

$\therefore (m-n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ (প্রমাণিত)

খ. মনে করি, $\underline{a} = m\underline{b}$

তাহলে $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল দেখানোই যথেষ্ট হবে।

$\underline{a} = m\underline{b}$ হওয়ায় $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর স্কেলার গুণিতক।

$\therefore \underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক একই যদি $m > 0$ হয় এবং বিপরীতমুখী হবে যদি $m < 0$ হয়। এখন $m \neq 0$ কারণ $m = 0$ হলে $\underline{a} = 0$ হবে যা অসম্ভব এখন, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক যদি একই হয় তাহলে তারা সদৃশ সমান্তরাল আর যদি বিপরীত হয় তাহলে তারা বিসদৃশ সমান্তরাল হবে। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে $\underline{a} \parallel \underline{b}$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = 0 - n\underline{b}$

বা, $m\underline{a} = - n\underline{b}$

যদি $m \neq 0$ ও $n \neq 0$ হয় তাহলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

(i) বিপরীতমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন একই হয়,

(ii) সমমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন বিপরীত হয়।

উভয় ক্ষেত্রেই $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হবে যা অসম্ভব কেননা দেওয়া আছে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ পরস্পর অসমান্তরাল।

$\therefore\ m \neq 0$ ও $n \neq 0$ হতে পারে না।

$\therefore\ m = n = 0$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৯ ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD.

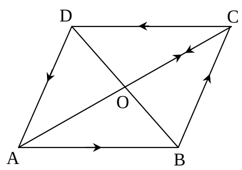
ক. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} =$ কত? ২

খ. যদি AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তবে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. AB ও AC ভেক্টরদ্বয়কে AD ও BD এর সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ ABC থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .... (i)

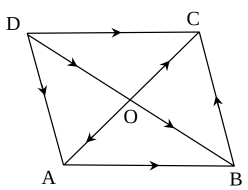
Δ CDA থেকে পাই,

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .... (ii)

(i) + (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = 0$ **(Ans.)**

খ.



দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ ....(i)

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .... (ii)

(i) + (ii) থেকে $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ও $\overline{AB} = \overrightarrow{DC}$

অনুরূপভাবে, AD || BC ও AD = BC.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক (**প্রমাণিত**)

গ. 'খ' এর চিত্র থেকে, ABCD একটি সামান্তরিক।

ΔABD হতে পাই,

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

এবং Δ ACD থেকে ,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \qquad = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২০ ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\vec{AD} + \vec{DE})$ কে $\vec{AC}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2} BC$. ৪

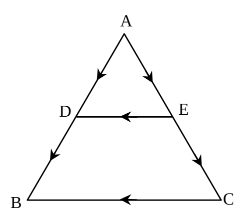
গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের BD ও CE বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(DE + BC)$ ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE-এ

$\vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

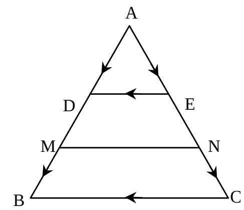
$= \frac{1}{2} \vec{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]



সুতরাং, $\vec{AD} + \vec{DE} = \frac{1}{2} \vec{AC}$

খ. সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ.



DBCE ট্রাপিজিয়ামে M ও N যথাক্রমে BD ও CE-এর মধ্যবিন্দু।

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D, B, C ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{e}$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $DE = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$ [$\because$ M, DB-এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c})$ [$\because$ N, EC-এর মধ্যবিন্দু]

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$$

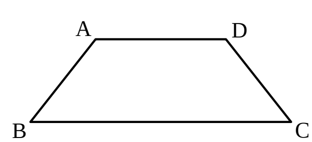
$$= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c} - \underline{d} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE})$$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও তাদের সমান্তরাল হবে।

$\therefore MN \parallel BC \parallel DE$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২১ ▸



P, Q, R, S বিন্দুগুলো ABCD চতুর্ভুজের বাহুসমূহের মধ্যবিন্দু।

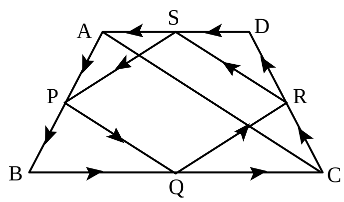
ক. $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel AC$ এবং $PQ = \frac{1}{2} AC$. ৪

২১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র হতে,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

খ. দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $DA = \underline{d}$

‘ক’ হতে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ এবং $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

আবার, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \underline{c} + \underline{d}$

[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

$\therefore (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$ [$\because \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$]

$= \underline{0}$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR ও PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক।**(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, ΔABC এর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q ; P,Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, PQ $\parallel$ AC এবং $PQ = \frac{1}{2} AC$.

প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ}$ ....(i)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ....(ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BQ}$

এখন (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{PB} = 2\,\overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{PB} + 2\,\overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ})$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{PQ}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PQ}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

আবার, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ বা, $PQ = \frac{1}{2}AC$ (**প্রমাণিত**)

আবার, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ $PQ \parallel AC$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন–২২ ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্য বিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S। A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$.

?

ক. R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. PBDS ট্রাপিজিয়াম–এ PB ও SD এর তীর্যক বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \,||\, BD \,||\, PS$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BD + PS)$. ৪

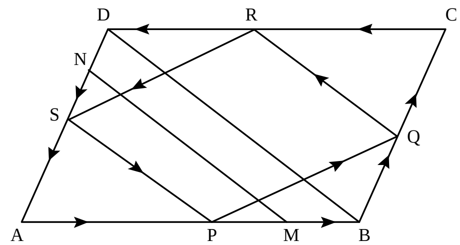
২২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$ এবং R বিন্দু CD বাহুর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{c + d}{2}$ **(Ans.)**

খ. অনুশীলনী ১২–এর উদাহরণ ৫ দেখ।

গ.



মনে করি, PBDS ট্রাপিজিয়ামের BD || PS এবং PB ও SD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, MN | | BD || PS এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BD + PS)

প্রমাণ : দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$। P ও S যথাক্রমে AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু।

মনে করি, PBDS ট্রাপিজিয়ামের BD | | PS এবং PB ও SD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, MN | | BD | | PS এবং MN = $\frac{1}{2}$(BD + PS)

প্রমাণ : দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$। P ও S যথক্রমে AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ P বিন্দু অবস্থান ভেক্টর $\underline{p} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

S " " " $\underline{s} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

আবার, M ও N যথাক্রমে PB ও DS বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{b})$

$$= \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{b}}{4} + \frac{\underline{b}}{2}$$

N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{n} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{d}) = \frac{\underline{d}}{2} + \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{d}}{4}$

$\therefore\ \overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

$$= \frac{\underline{d}}{2} + \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{d}}{4} - \frac{\underline{a}}{4} - \frac{\underline{b}}{4} - \frac{\underline{b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{d} - \underline{b}) + \frac{1}{4}(\underline{d} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BD})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}(2\overrightarrow{PS})$$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক]

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS})$$

BD || PS হওয়ায় $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে।

তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে কারণ–

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS})$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS}|)$$

$$\therefore\ MN = \frac{1}{2}(BD + PS)$$

অর্থাৎ MN || BD || PS এবং $MN = \frac{1}{2}(BD + PS)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২৩ ▸ ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD

?

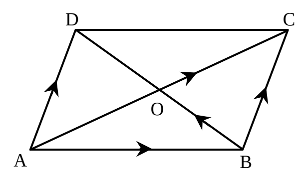
ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক। ৪

২৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র হতে পাই,

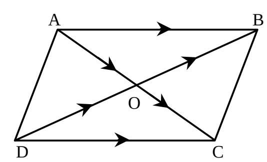
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ [$\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

এবং $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ–৪ দেখ।

গ. মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$]

$\therefore$ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টত : $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

[$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২৪ ▸ Δ ABC ও D, E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। P, Q যথাক্রমে BE ও CD এর মধ্যবিন্দু। কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে <u>a</u>, <u>b</u>, <u>c</u>

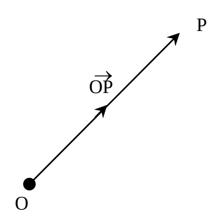
ক. কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলতে কী বোঝায়? ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, PQ || DE এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - DE)$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DP || AC এবং $DP = \frac{1}{4}AC$ ৪

২৪নং প্রশ্নের সমাধান

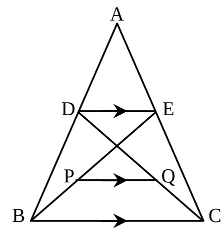
ক. সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O এর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু বলা হয়।



খ. দেওয়া আছে, ΔABC-এ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ $DE \parallel BC$ এর $DE = \frac{1}{2} BC$

$\therefore$ BCED একটি ট্রাপিজিয়াম।



আবার, BE ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q P, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে

$PQ \parallel DE$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - DE)$

প্রমাণ : মনে করি কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$ ও $\underline{e}$

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because$ P, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$ [$\because$ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e}) = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

DE || BC হওয়ায় $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তরাল হবে।

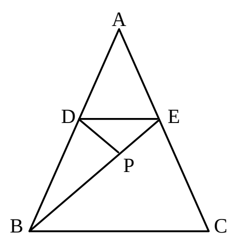
$\therefore$ PQ || DE

আবার, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}|$

বা $PQ = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{DE}|\right) = \frac{1}{2}(BC - DE)$

$\therefore$ PQ || DE এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(দেখানো হলো)**

গ.



চিত্রে, ABC ত্রিভুজে D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। P, BE এর মধ্যবিন্দু। যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$

$\therefore$ D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}\left\{b + \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})\right\}$

$\therefore \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\left\{b + \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})\right\} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}(a + c) - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$= \frac{1}{4}(\underline{c} - \underline{a}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

সুতরাং $|\overrightarrow{DP}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$

$\therefore DP = \frac{1}{4}AC$ এবং $\overrightarrow{DP}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল।

$\therefore DP \parallel AC$ এবং $DP = \frac{1}{4}AC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৫ A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$।

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ২

খ. দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, দেখাও যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ ৪

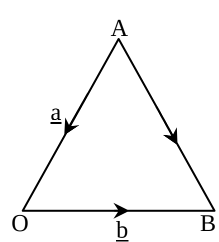
২৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, কোনো সমতলে O বিন্দু সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OB}$



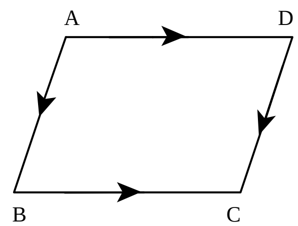
বা, $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

(দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।



A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ

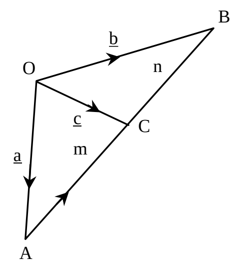
ABCD একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

গ. মনে করি, কোনো মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$। AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$$\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$$



প্রমাণ : $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$

[∵ AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।]

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{n}{m}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}| + |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{n + m}{m}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AC + CB}{AC} = \frac{n + m}{m}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{m + n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{m + n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{m}{m + n}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $|\overrightarrow{AC}| = \left(\frac{m}{m + n}\right) |\overrightarrow{AB}|$

বা, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{m}{m + n}\right) \overrightarrow{AB}$ [∵ $\overrightarrow{AC}$ = এবং $\overrightarrow{AB}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \dfrac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a})$ [$\because \overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$]

বা, $\underline{c} = \dfrac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - m\underline{a} - m\underline{a} + n\underline{a}}{m+n}$

$\therefore \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + m\underline{a}}{m+n}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–২৬ **P, Q, R, S একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D।**

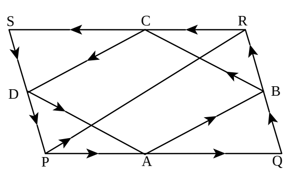
ক. AB এর অবস্থান ভেক্টর PQ ও QR এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

২৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্র হতে,



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}$

$\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right)$

খ. দেওয়া আছে, PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{a}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{b}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{SP} = \underline{d}$

'ক' হতে পাই, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ এবং $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

$\therefore (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP}$

$= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR}$ $[\because \overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}]$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = (\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

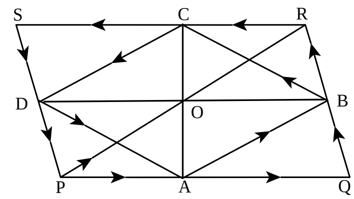
$\therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল। অনুরূপভাবে BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ABCD সামান্তরিকের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

$\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|a| = |c|$, $|b| = |d|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

‘খ’ হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} - \underline{c} - \underline{d} = \underline{b} + \underline{c} - \underline{c} - \underline{d}$

[উভয় পক্ষে $-\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

$\therefore$ $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$

এখানে, $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC

$\therefore$ $\underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC

আবার, $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD

$\therefore$ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান করে অশূন্য ভেক্টর তাদের ধারকরেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু AC ও BD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টর অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore$ $\underline{a} - \underline{c} = 0$

বা, $\underline{a} = \underline{c}$

এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$

$\therefore \underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\therefore$ ABCD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-২৭ ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD।

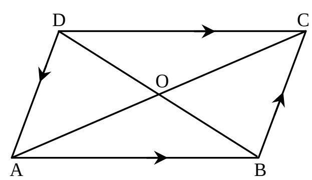
ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে প্রমাণ কর যে, APCQ একটি সামান্তরিক। ৪

২৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD যাদের ছেদ বিন্দু O।

ΔABD−এ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \text{ ....(i)}$$

ΔABC-এ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

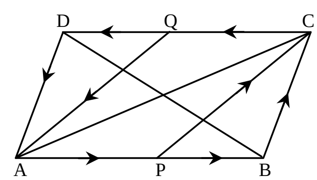
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ....(ii) $\left[\begin{array}{l} \because \text{ABCD সামান্তরিক} \\ \therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{array}\right]$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সমীকরণে $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ ৪ দেখ।

গ.



ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, APCQ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

ΔPBC–এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী,

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad [\because \text{P, AB এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b} \text{ .... (i)}$$

ΔADQ - এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DA}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \qquad [\because \text{Q, CD এর মধ্যবিন্দু}]$$

$= \frac{1}{2}\underline{c} + \underline{d}$

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$ .... (ii) $\left[\begin{array}{l} \because \text{ ABCD সামান্তরিক} \\ \because \underline{a} = \underline{c} \text{ এবং } \underline{b} = \underline{d} \end{array}\right]$

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{QA}$

ভেক্টরদ্বয় সমান। অর্থাৎ তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা PC || QA

আবার, P, AB এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\underline{a}$ ....(iii)

এবং Q, CD এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

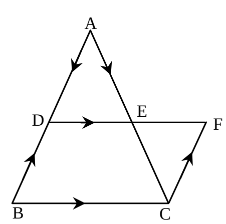
বা, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\underline{c}$

$\therefore \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\underline{a}$

সুতরাং $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{CQ}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ APCQ একটি সামান্তরিক (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২৮



উপরের চিত্রে ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E এবং BCFD একটি সামান্তরিক।

ক. ($\overrightarrow{AD}$ + $\overrightarrow{DE}$) কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ৪

গ. BCFD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{BF}$ ও $\overrightarrow{CD}$ হলে, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$ এবং $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$ ৪

২৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE-এ

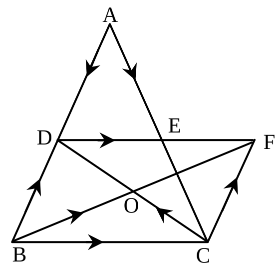
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E , AC এর মধ্যবিন্দু]

সুতরাং $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ–৩ দেখ।

গ. এখানে BF ও CD, BCED সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়।



$\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে,

ΔBCD –এ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ .... (i)

আবার, ΔBDF –এ $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$

$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$

[BCFD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DF}$]

$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ [(i) নং হতে]

$\therefore \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

অতএব, (i) ও (ii) নং সমীকরণ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

আবার, (ii) নং থেকে পাই,

$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$

বা, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$ [উভয় পক্ষে $\overrightarrow{CD}$ যোগ করে]

বা, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$ .... (iii) [BCFD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CF}$]

আবার, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$ [(iii) নং ব্যবহার করে]

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})$

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$ [$\because \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$]

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BC}$ .... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{CF}$ এবং $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BC}$ **(দেখানো হলো)**