

মেট্রিক ফাংশন

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন-১ \triangleright $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4, 5\}$ যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$.

ক. A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B)$

? $\cap P(C)$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) =$

$(A \times B) \cup (A \times C)$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান \blacktriangleleft

ক. দেওয়া আছে, $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$

A -তে প্রদত্ত সমীকরণ

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - ax - bx + ab = 0$$

$$\text{বা, } x(x - a) - b(x - a) = 0$$

$$\text{বা, } (x - a)(x - b) = 0$$

$$\text{হয়, } x - a = 0 \quad \text{অথবা } x - b = 0$$

$$\therefore x = a \quad \therefore x = b$$

$\therefore A$ সেটের উপাদানসমূহ a এবং b (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $B = \{2, 3\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

$$\therefore B \cap C = \{2, 3\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2\}$$

$$\text{এখন, } P(B \cap C) = \{\{2\}, \phi\}$$

$$\text{আবার, } P(B) = \{\{2, 3\}, \{2\}, \{3\}, \phi\}$$

$$\text{এবং } P(C) = \{\{2, 4, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \phi\}$$

$$\therefore P(B) \cap P(C) = \{\{2\}, \phi\}$$

$$\therefore P(B \cap C) = P(B) \cap P(C) \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ. এখানে, $B \cup C = \{2, 3\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned}\therefore A \times (B \cup C) &= \{a, b\} \times \{2, 3, 4, 5\} \\ &= \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 3), \\ &\quad (b, 4), (b, 5)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{আবার, } A \times B &= \{a, b\} \times \{2, 3\} \\ &= \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{এবং } A \times C &= \{a, b\} \times \{2, 4, 5\} \\ &= \{(a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 4), (b, 5)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (A \times B) \cup (A \times C) &= \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\} \cup \{(a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 2), \\ &\quad (b, 4), (b, 5)\} \\ &= \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (b, 5)\}\end{aligned}$$

$$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন-২ $\rightarrow A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - 9x + 20 = 0\}$

$$B = \{5, 6\} \text{ এবং } C = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } 6 \leq x \leq 12\}.$$

ক. A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

২

খ. $P(B \cup C)$ এর উপাদান সংখ্যা কত লেখ।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $P(A) \cap P(B) \neq P(A \cup B)$.

৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - 9x + 20 = 0\}$$

$$A\text{-তে প্রদত্ত সমীকরণ, } x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 4x - 5x + 20 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 4) - 5(x - 4) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 4)(x - 5) = 0$$

$$\therefore A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x = 4, 5\}$$

তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করলে, $A = \{4, 5\}$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $B = \{5, 6\}$

$$\text{এবং } C = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } 6 \leq x \leq 12\}$$

6 থেকে 12 মাঝে মৌলিক সংখ্যা 7 এবং 11

C এর তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ, $C = \{7, 11\}$

$$\therefore B \cup C = \{5, 6\} \cup \{7, 11\} = \{5, 6, 7, 11\}$$

$B \cup C$ এর উপাদান সংখ্যা, $n = 4$

$$\therefore P(B \cup C) \text{ এর উপাদান সংখ্যা} = 2^n = 2^4 = 16 \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $B = \{5, 6\}$

‘ক’ হতে পাই, $A = \{4, 5\}$

$$P(A) = \{\{4\}, \{5\}, \{4, 5\}, \phi\}$$

$$P(B) = \{\{5\}, \{6\}, \{5, 6\}, \phi\}$$

$$\therefore P(A) \cap P(B) = \{\{5\}, \phi\}$$

$$\text{আবার, } A \cup B = \{4, 5\} \cup \{5, 6\} = \{4, 5, 6\}$$

$$P(A \cup B) = \{\{4\}, \{5\}, \{6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{4, 5, 6\}, \phi\}$$

$$\therefore P(A) \cap P(B) \neq P(A \cup B) \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন-৩ চট্টগ্রাম মহানগরের একটি বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীদের উপর পরিচালিত এক জরিপে জানা যায় 40 জন দৈনিক প্রথম আলো, 32 জন ডেইলি স্টার, 28 জন দৈনিক আজাদী, 10 জন দৈনিক প্রথম আলো ও ডেইলি স্টার, 8 জন ডেইলি স্টার ও দৈনিক আজাদী, 5 জন প্রথম আলো ও দৈনিক আজাদী এবং 3 জন তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

ক. তথ্যগুলি ভেনচিত্রে উপস্থাপন কর। ২

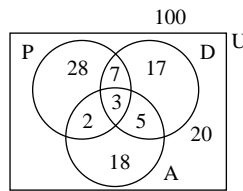
খ. কতজন শিক্ষার্থী পত্রিকা তিনটির

? একটিও পড়ে না? 8

গ. কতজন শিক্ষার্থী কেবলমাত্র দুইটি পত্রিকা পড়ে? 8

◀ ৩নং প্রশ্নের সমাধান ▶

ক.



ধরি, $U =$ সকল শিক্ষার্থীর সেট

$P =$ যারা প্রথম আলো পড়ে তাদের সেট

$D =$ যারা ডেইলি স্টার পড়ে তাদের সেট

A = যারা দৈনিক আজাদী পড়ে তাদের সেট

$$n(U) = 100, n(P) = 40, n(D) = 32, n(A) = 28, n(P \cap D) = 10, n(D \cap A) = 8, n(P \cap A) = 5, n(P \cap D \cap A) = 3$$

খ. শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর সেট U

তিনটি পত্রিকার অন্তত একটি পড়ে এমন শিক্ষার্থীর

$$\text{সেট} = (P \cup D \cup A)$$

∴ তিনটি পত্রিকার একটিও পড়ে না এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$$= n(U) - n(P \cup D \cup A)$$

$$= n(U) - [n(P) + n(D) + n(A) - n(P \cap D) - n(D \cap A) - n(P \cap A) + n(P \cap D \cap A)]$$

$$= 100 - [40 + 32 + 28 - 10 - 8 - 5 + 3]$$

$$= 100 - 80 = 20$$

∴ 20 জন শিক্ষার্থী পত্রিকা তিনটির একটিও পড়ে না। (Ans.)

গ. তিনটি পত্রিকাই পড়ে এমন শিক্ষার্থীর সেট = $(P \cap D \cap A)$

শুধু প্রথম আলো ও ডেইলি স্টার পড়ে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$$= n(P \cap D) - n(P \cap D \cap A)$$

$$= (10 - 3) = 7$$

শুধু ডেইলি স্টার ও আজাদী পড়ে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$$= n(D \cap A) - n(P \cap D \cap A)$$

$$= 8 - 3 = 5$$

শুধু আজাদী ও দৈনিক প্রথম আলো পড়ে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$$= n(A \cap P) - n(P \cap D \cap A)$$

$$= 5 - 3 = 2$$

∴ কেবলমাত্র দুইটি পত্রিকা পড়ে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$$= 7 + 5 + 2 \text{ জন} = 14 \text{ জন। (Ans.)}$$

প্রশ্ন-৪ $\rightarrow U \{x : x \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq x \leq 20\}$,

$$A = \{x : x, 2 \text{ এর গুণিতক}\}$$

$$B = \{x : x, 5 \text{ এর গুণিতক}\}$$

$$\text{এবং } C = \{x : x, 10 \text{ এর গুণিতক}\}$$



ক. উদ্দীপকের সেটগুলো কোন
পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়েছে? ২

খ. সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ
কর। 8

গ. প্রদত্ত তথ্যের আলোকে $C \subset A$, B
 $\subset A$ এবং $C \subset B$ এর সত্য বা মিথ্যা
যাচাই কর। 8

8 নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উদ্দীপকের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়েছে।

খ. দেওয়া আছে, $U = \{x : x \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq x \leq 20, \}$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$A = \{x : x, 2 \text{ এর গুণিতক}\}$$

$$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$B = \{x : x, 5 \text{ এর গুণিতক}\}$$

$$= \{5, 10, 15, 20\}$$

$$C = \{x : x, 10 \text{ এর গুণিতক}\}$$

$$= \{10, 20\}$$

গ. 'খ' হতে পাই, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$$B = \{5, 10, 15, 20\}$$

$$\text{এবং } C = \{10, 20\}$$

এখন, $C \subset A$ এর অর্থ হলো C সেট A এর প্রকৃত উপসেট। অর্থাৎ, C সেটের সকল উপাদান বা সদস্য A সেটেরও সদস্য হবে।

এখানে, C সেটের প্রত্যেকটি সদস্য A সেটের সদস্য।

সুতরাং $C \subset A$ তথ্যটি সত্য।

আবার, $B \subset A$ এর অর্থ হলো B সেট A এর প্রকৃত উপসেট। অর্থাৎ, B এর সকল সদস্য A সেটের সদস্য হবে।

এখানে, B সেটের প্রত্যেকটি সদস্য A সেটের সদস্য নয়।

সুতরাং $B \subset A$ তথ্যটি মিথ্যা।

এবং $C \subset B$ এর অর্থ হলো C সেট B এর প্রকৃত উপসেট।

অর্থাৎ C সেটের সকল সদস্য B সেটের সদস্য হবে।

এখানে, C সেটের প্রত্যেকটি সদস্য B সেটেরও সদস্য।

সুতরাং $C \subset B$ তথ্যটি সত্য।

প্রশ্ন-৫ > সার্বিক সেট U এর তিনটি উপসেট A, B ও C.

ক. $A \subset B$ হলে দেখাও যে, $A \cup B = B$. ২

? খ. দেখাও যে, $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$. ৪

<< ণেং প্রশ্নের সমাধান >>

ক. ধরি, $x \in A \cup B$

তাহলে, $x \in A$ অথবা $x \in B$

$\therefore A \cup B \subset B$

আবার, ধরি, $x \in B$

তাহলে, $x \in B$ অথবা $x \in A$ [$\because A \subset B$]

বা, $x \in A \cup B$

$\therefore B \subset A \cup B$

$\therefore A \cup B = B$

$\therefore A \subset B$ হবে যদি এবং কেবল যদি $A \cup B = B$ (দেখানো হলো)

খ. ধরি, $x \in (A \cup B \cup C)'$

তাহলে, $x \notin (A \cup B \cup C)$

বা, $x \notin A$ এবং $x \notin B$ এবং $x \notin C$

বা, $x \in A'$ এবং $x \in B'$ এবং $x \in C'$

বা, $x \in (A' \cap B' \cap C')$

$\therefore (A \cup B \cup C)' \subset (A' \cap B' \cap C')$

আবার ধরি, $x \in A' \cap B' \cap C'$

তাহলে, $x \in A'$ এবং $x \in B'$ এবং $x \in C'$

বা, $x \notin A$ এবং $x \notin B$ এবং $x \notin C$

বা, $x \notin (A \cup B \cup C)$

বা, $x \in (A \cup B \cup C)'$

$\therefore A' \cap B' \cap C' \subset (A \cup B \cup C)'$

সুতরাং $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ (দেখানো হলো)

গ. মনে করি, $x \in A \cap (B \cap C)$

তাহলে, $x \in A$ এবং $x \in (B \cap C)$

বা, $x \in A$ এবং $(x \in B$ এবং $x \in C)$

বা, $(x \in A$ এবং $x \in B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \in C)$

বা, $x \in (A \cap B)$ এবং $x \in (A \cap C)$

বা, $x \in (A \cap B) \cap (A \cap C)$

$\therefore A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap (A \cap C)$

আবার, মনে করি, $x \in (A \cap B) \cap (A \cap C)$

তাহলে, $x \in (A \cap B)$ এবং $x \in (A \cap C)$

বা, $(x \in A$ এবং $x \in B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \in C)$

বা, $x \in A$ এবং $(x \in B$ এবং $x \in C)$

বা, $x \in A$ এবং $x \in (B \cap C)$

বা, $x \in A \cap (B \cap C)$

$\therefore (A \cap B) \cap (A \cap C) \subset A \cap (B \cap C)$

সুতরাং $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-৬ $S = \{3^n : n = 0$ অথবা $n \in \mathbb{N}\}$ একটি সেট।

ক. তালিকা পদ্ধতিতে \mathbb{N} কে প্রকাশ কর। ২

? খ. দেখাও যে, প্রদত্ত সেটটি \mathbb{N} এর সমতুল। ৪

গ. প্রদত্ত সেটের একটি প্রকৃত উপসেট বর্ণনা কর যা প্রদত্ত সেটের সমতুল। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. তালিকা পদ্ধতিতে $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

খ. S -এর বর্ণনাকারী রাশি $= 3^n$

$n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই;

$$n = 0 \text{ হলে, } 3^n = 3^0 = 1$$

$$n = 1 \text{ হলে, } 3^n = 3^1 = 3$$

$$n = 2 \text{ হলে, } 3^n = 3^2 = 9$$

$$n = 3 \text{ হলে, } 3^n = 3^3 = 27$$

.....

.....

$$n = n \text{ হলে, } 3^n = 3^n$$

$$\therefore S = \{1, 3, 9, 27, \dots\dots\dots\}$$

$$\text{আবার, } N = \{1, 2, 3, 4, \dots\dots\dots\}$$

S ও N-এর মধ্যে এক-এক মিল নিম্নরূপ :

N	1,	2,	3,
:			4,
	◇	◇	◇	◇
S	1,	3,	9,	27,
:			7,

অতএব, S সেটটি N-এর সমতুল সেট। (দেখানো হলো)

গ. ধরি, F সেটটি S -এর একটি প্রকৃত উপসেট যার উপাদান সংখ্যা S-এর উপাদানের সমান নয়।

$$\text{ধরি, } F = \{3^{2n} : n = 0 \text{ অথবা } n \in N\}$$

$$F \text{ এর বর্ণনাকারী রাশি} = 3^{2n}$$

$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\dots\dots$ বসিয়ে পাই,

$$n = 0 \text{ হলে, } 3^{2n} = 3^{2 \cdot 0} = 1$$

$$n = 1 \text{ হলে, } 3^{2n} = 3^{2 \cdot 1} = 9$$

$$n = 2 \text{ হলে, } 3^{2n} = 3^{2 \cdot 2} = 81$$

$$n = 3 \text{ হলে, } 3^{2n} = 3^{2 \cdot 3} = 729$$

.....

.....

$$n = n \text{ হলে, } 3^{2n} = 3^{2n}$$

$$\therefore F = \{1, 9, 81, 729, \dots\dots\dots\}$$

$$\text{এবং } S = \{1, 3, 9, 27, \dots\dots\dots\}$$

F ও S এর মধ্যে এক-এক মিল নিম্নরূপ :

F	1, 9, 8
:	1, 72
	9,	
	↓ ↓ ↓ ↓	
S	1, 3, 9, 27,	
:	

অতএব, F সেট S সেটের সমতুল। (দেখানো হলো)

প্রশ্ন-৭ ▶ কোনো শ্রেণির 30 জন ছাত্রের 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলতে পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত একটি খেলা পছন্দ করে।

ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলো সাত সেটের

সংজ্ঞানুসারে বর্ণনা কর। ২

?

খ. কতজন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে? ৪

গ. কতজন ছাত্র কেবলমাত্র দুইটি খেলার একটি পছন্দ করে? ৪

◀ ৭ নং প্রশ্নের সমাধান ▶

ক. ধরি, সকল ছাত্রের সেট S,

ফুটবল পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট F,

ক্রিকেট পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট C,

যেহেতু প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত একটি খেলা পছন্দ করে।

প্রশ্নমতে, $S = F \cup C$

$$n(S) = 30$$

$$n(F) = 20$$

$$n(C) = 15$$

খ. 'ক' হতে পাই, $n(S) = 30$

$$\therefore n(F \cup C) = 30$$

তখন, $n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C)$

$$\text{বা, } 30 = 20 + 15 - n(F \cap C)$$

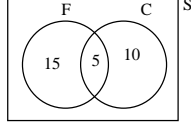
$$\text{বা, } 30 = 35 - n(F \cap C)$$

$$\text{বা, } n(F \cap C) = 35 - 30$$

$$\therefore n(F \cap C) = 5$$

অর্থাৎ, দুটি খেলাই পছন্দ করে 5 জন ছাত্র। **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $n(F \cap C) = 5$



ভেনচিত্র থেকে,

কেবলমাত্র ফুটবল খেলতে পছন্দ করে

$$= n(F) - n(F \cap C) = (20 - 5) = 15 \text{ জন}$$

এবং কেবলমাত্র ক্রিকেট খেলতে পছন্দ করে

$$= n(C) - n(F \cap C) = (15 - 5) = 10 \text{ জন}$$

$$\therefore \text{কেবলমাত্র একটি খেলা পছন্দ করে} = (15 + 10) \text{ জন}$$

$$= 25 \text{ জন (Ans.)}$$

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন- ১) $F(x) = \frac{1}{x-5}$ একটি ফাংশন,

ক. $F(x) = 2$ হলে, x -এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $F(x)$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং ফাংশনটি এক-এক কিনা নির্ধারণ কর। ৪

গ. $F^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{1}{x-5}$

আবার, $F(x) = 2$

$$\therefore \frac{1}{x-5} = 2$$

$$\text{বা, } x-5 = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } x = \frac{1}{2} + 5 = \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2} \text{ (Ans.)}$$

খ. $F(x) = \frac{1}{x-5}$

এখানে, $x-5=0$ বা, $x=5$ বসালে প্রদত্ত ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়। কিন্তু $x=5$ বাদে সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য $F(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

\therefore ডোম, $F = \mathbb{R} - \{5\}$ (Ans.)

যেকোনো ডোম $x_1 \in$ ডোম F , $x_2 \in$ ডোম F এর জন্য $F(x_1) = F(x_2)$ হবে, যদি ও কেবল যদি, $x_1 = x_2$ হয়।

$$\therefore \frac{1}{x_1-5} = \frac{1}{x_2-5}$$

$$\text{বা, } x_1-5 = x_2-5$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

সুতরাং, F এক-এক ফাংশন। (Ans.)

গ. ধরি, $y = F(x) = \frac{1}{x-5}$

বা, $y = \frac{1}{x-5}$

বা, $xy - 5y = 1$

বা, $xy = 1 + 5y$

বা, $x = \frac{1+5y}{y}$

বা, $F^{-1}(y) = \frac{1+5y}{y}$ [$\because y = F(x) \therefore x = F^{-1}(y)$]

বা, $F^{-1}(x) = \frac{1+5x}{x}$

$\therefore F^{-1}(3) = \frac{1+5 \cdot 3}{3} = \frac{1+15}{3} = \frac{16}{3}$ (Ans.)

প্রশ্ন-২ $\rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এবং $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশন দুইটি $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ এবং $g(x) = \sqrt{x-2}$ দ্বারা

সংজ্ঞায়িত।

ক. ডোম f এবং ডোম g নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু

? ফাংশন। ৪

গ. x এর মান নির্ণয় কর যেখানে $5f$

$^{-1}(x) = g^{-1}(3)$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

এবং $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$

$f(x) = \frac{2x+2}{x-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $x-1 \neq 0$ অর্থাৎ $x \neq 1$ হয়

\therefore ডোম f = $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$

$g(x) = \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $x - 2 \geq 0$ অর্থাৎ $x \geq 2$ হয়

$$\therefore \text{ডোম } g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$$

খ. যেকোনো $x_1 \in \text{ডোম } f$, $x_2 \in \text{ডোম } f$ এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি $\frac{2x_1 + 2}{x_1 - 1} = \frac{2x_2 + 2}{x_2 - 1}$ হয়।

$$\therefore \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

$$\text{বা, } x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1$$

$$\text{বা, } x_2 - x_1 = x_1 - x_2$$

$$\text{বা, } 2x_2 = 2x_1$$

$$\text{বা, } x_1 = x_2$$

$\therefore f$ ফাংশনটি এক-এক।

আবার, যেকোনো সংখ্যা $y \in \mathbb{R}$ হলে

$$\text{ধরি, } y = \frac{2x + 2}{x - 1}$$

$$\text{বা, } yx - y = 2x + 2$$

$$\text{বা, } yx - 2x = y + 2$$

$$\text{বা, } x(y - 2) = y + 2$$

$$\therefore x = \frac{y + 2}{y - 2}$$

$$\text{এখন, } f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1} = \frac{2 \cdot \frac{y + 2}{y - 2} + 2}{\frac{y + 2}{y - 2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2y + 4 + 2y - 4}{y - 2}}{\frac{y + 2 - y + 2}{y - 2}} = \frac{4y}{4} = y = f(x)$$

$\therefore f$ ফাংশনটি অনুট।

অর্থাৎ f ফাংশনটি এক-এক এবং অনুট। (দেখানো হলো)

গ. ধরি, $y = f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$

বা, $yx - y = 2x + 2$

বা, $yx - 2x = y + 2$

বা, $x(y - 2) = y + 2$

বা, $x = \frac{y + 2}{y - 2}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y + 2}{y - 2}$ [$y = f(x)$ হলে $x = f^{-1}(y)$]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$

আবার, ধরি,

$y = g(x) = \sqrt{x - 2}$

বা, $y^2 = x - 2$

বা, $x = y^2 + 2$

বা, $g^{-1}(y) = y^2 + 2$ [$y = g(x)$ হলে $x = g^{-1}(y)$]

$\therefore g^{-1}(x) = x^2 + 2$

এবং $g^{-1}(3) = 3^2 + 2 = 11$

দেওয়া আছে, $5f^{-1}(x) = g^{-1}(3)$

বা, $5 \cdot \frac{x + 2}{x - 2} = 11$

বা, $5x + 10 = 11x - 22$

বা, $5x - 11x = -22 - 10$

বা, $-6x = -32$

বা, $x = \frac{-32}{-6}$

$\therefore x = \frac{16}{3}$ (Ans.)

প্রশ্ন-৩ $\rightarrow F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

? খ. ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর। ৪

গ. $F^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

$\therefore F(x) = \sqrt{1 - 2x} \in \mathbb{R}$ হবে যদি এবং কেবল যদি

$$1 - 2x \geq 0$$

$$\text{বা, } -2x \geq -1$$

$$\text{বা, } 2x \leq 1$$

$$\text{বা, } x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore F(x) \text{ ডোমেন} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

খ. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি

$F(x_1) = F(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

$$\text{বা, } \sqrt{1 - 2x_1} = \sqrt{1 - 2x_2} \text{ ফাংশনটি}$$

$$\text{বা, } 1 - 2x_1 = 1 - 2x_2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } -2x_1 = -2x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2 \text{ [-2 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$\therefore F(x)$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

গ. দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

$$\text{ধরি, } y = F(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{এখন, } F(x) = y$$

$$\therefore x = F^{-1}(y)$$

$$\text{আবার, } y = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{বা, } y^2 = 1 - 2x$$

$$\text{বা, } 2x = 1 - y^2$$

$$\text{বা, } x = \frac{1 - y^2}{2}$$

$$\text{বা, } F^{-1}(y) = \frac{1}{2}(1 - y^2)$$

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2) \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন-৪ ▶ যদি $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ হয়, তবে A সেটে $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = x^2\}$

ক. S অন্তর্যটি কী ধরনের ফাংশন? ২

খ. S অন্তর্যটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. S অন্তর্যের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্তর্যটি ফাংশন কি-না তা লেখচিত্র হতে নির্ণয় কর। ৪

◀ ৪নং প্রশ্নের সমাধান ▶

ক. দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = x^2\}$

এখানে, $y = x^2$

বা, $y = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \dots\dots\dots(i)$

যা, $y = ax^2 + bx + c$ আকারের।

\therefore প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত ফাংশনের।

খ. দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = x^2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x^2$ এর মান নির্ণয় করি :

x	-2	-1	0	1	2
y =	4	1	0	1	4
x^2					

যেহেতু $4 \notin A$, সেহেতু $(-2, 4) \notin S$ এবং $(2, 4) \notin S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = x^2\}$

$= \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

এখন, ডোম, $S = \{-1, 0, 1\}$

এবং রেঞ্জ, $S = \{0, 1\}$

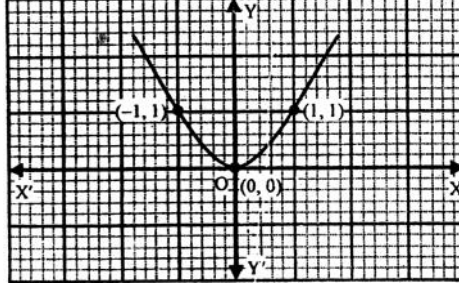
গ. $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = x^2\}$

এখানে, S এর বর্ণনাকারী সমীকরণ, $y = x^2$

(খ) থেকে আমরা পাই, প্রদত্ত অন্তর

$$S = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$$

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের পাঁচগুণকে একক ধরে সুবিধামতো X এবং Y অক্ষ নিয়ে বিন্দুগুলো স্থাপন করি এবং প্রদত্ত অন্তরের লেখচিত্র অঙ্কন করি।



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, Y অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখায় লেখের একাধিক বিন্দু অবস্থিত নয় অর্থাৎ S এর কোনো দুইটি সদস্যের একই প্রথম উপাদান নাই।

সুতরাং S একটি ফাংশন।

প্রশ্ন-৫ $f(x) = \frac{4x - 9}{x - 2}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ক্ষেত্রে—

ক. ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(-1)$ এবং $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর।

৪

গ. x এর মান নির্ণয় কর যেন, $4f^{-1}(x)$

$= x$ হয়। ৪

◀ ৫ নং প্রশ্নের সমাধান ▶

ক. $f(x) = \frac{4x - 9}{x - 2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \neq 2$ হয়

\therefore ডোম $f = \mathbb{R} - \{2\}$ বা $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$

খ. ধরি, $y = f(x) = \frac{4x - 9}{x - 2}, x \neq 2$

$$\text{বা, } y = \frac{4x - 9}{x - 2}$$

$$\text{বা, } xy - 2y = 4x - 9$$

$$\text{বা, } xy - 4x = 2y - 9$$

$$\text{বা, } x(y - 4) = 2y - 9$$

$$\text{বা, } x = \frac{2y - 9}{y - 4}$$

$$\text{বা, } f^{-1}(y) = \frac{2y - 9}{y - 4} \text{ [যেহেতু } y = f(x) \therefore f^{-1}(y) = x]$$

$$\text{বা, } f^{-1}(x) = \frac{2x - 9}{x - 4} \dots\dots\dots(i)$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } f^{-1}(-1) &= \frac{2(-1) - 9}{-1 - 4} \\ &= \frac{-2 - 9}{-5} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$\text{এবং } f^{-1}(-1) = \frac{2(1) - 9}{1 - 4} = \frac{7}{3} \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $4f^{-1}(x) = x$

$$\text{বা, } 4 \left(\frac{2x - 9}{x - 4} \right) = x \text{ [(i) নং থেকে মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } 8x - 36 = x^2 - 4x$$

$$\text{বা, } x^2 - 4x - 8x + 36 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x - 6x + 36 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 6) - 6(x - 6) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 6)(x - 6) = 0$$

$$\text{অর্থাৎ } x - 6 = 0 \text{ অথবা } x - 6 = 0$$

$$\therefore x = 6 \quad \therefore x = 6$$

নির্ণেয় মান 6

প্রশ্ন-৬ $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$ দ্বারা একটি ফাংশন বর্ণিত হলো।

? ক. ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f^{-1}(p) = Kp$ হলে, p এর সাপেক্ষে
 k কে প্রকাশ কর।

8

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ফাংশনটির রেঞ্জ y

$$\therefore f(x) = y$$

$$\text{বা, } \frac{2x+2}{x-1} = y$$

$$\text{বা, } xy - y = 2x + 2$$

$$\text{বা, } xy - 2x = y + 2$$

$$\text{বা, } x(y - 2) = y + 2$$

$$\text{বা, } x = \frac{y+2}{y-2}$$

এখন, $x = \frac{y+2}{y-2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি এবং কেবল যদি $y - 2 \neq 0$ হয়, অর্থাৎ, $y \neq 2$

$$\therefore \text{রেঞ্জ } f = \mathbb{R} - \{2\}$$

খ. 'ক' থেকে পাই,

$$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-2} \quad [\because y = f(x) \therefore x = f^{-1}(y)]$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}; x \neq 2$$

$$\therefore f^{-1}(3) = \frac{3+2}{3-2} = \frac{5}{1} = 5 \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$, $x \neq 1$

$$\therefore f(p) = \frac{2p+2}{p-1}; p \neq 1$$

$$\text{আবার, } f^{-1}(p) = kp$$

$$\text{বা, } p = f(kp)$$

$$\text{বা, } p = \frac{2kp+2}{kp-1}$$

$$\text{বা, } 2kp+2 = kp^2 - p$$

$$\text{বা, } kp^2 - 2kp - p - 2 = 0$$

$$\text{বা, } kp^2 - 2kp = p + 2$$

$$\text{বা, } kp(p - 2) = p + 2$$

$$\therefore k = \frac{p + 2}{p(p - 2)}$$

প্রশ্ন-৭ $x^2 + y^2 = 9$ দ্বারা একটি অন্য় বর্ণিত হলো।

ক. অন্য়টিকে $y = f(x)$ আকারে প্রকাশ কর। ২

? খ. অন্য়টি ফাংশন কিনা যাচাই কর যেখানে, $y \geq 0$; ফাংশন হলে এর ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রদত্ত অন্য়টির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৷ ৭ নং প্রশ্নের সমাধান ৷

ক. দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 = 9$

$$\text{বা, } y^2 = 9 - x^2$$

$$\text{বা, } y = \pm \sqrt{9 - x^2}$$

যা $y = f(x)$ আকভরের।

খ. 'ক' হতে পাই, $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$

এখন, $y \geq 0$ হলে, $y = \sqrt{9 - x^2}$

$$\text{ধরি, } y = f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

মনে করি, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\sqrt{9 - x_1^2} = \sqrt{9 - x_2^2}$$

$$\text{বা, } 9 - x_1^2 = 9 - x_2^2$$

$$\text{বা, } x_1^2 = x_2^2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

সুতরাং $f(x) = y = \sqrt{9 - x^2}$ একটি ফাংশন হবে।

এখন $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য,

$$y = \sqrt{9 - x^2} \in \mathbb{R} \text{ হবে যদি এবং কেবল যদি}$$

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$\text{বা, } -x^2 \geq -9$$

$$\text{বা, } x^2 \leq 9$$

$$\text{বা, } |x| \leq 3 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } -3 \leq x \leq 3$$

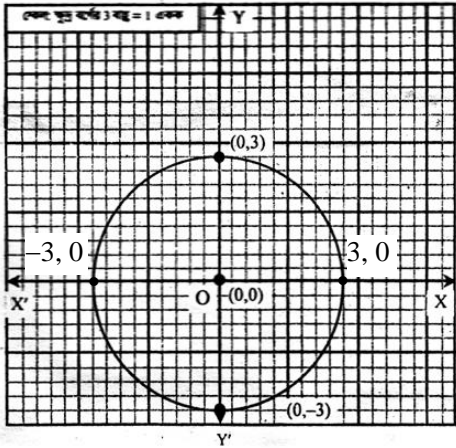
$$\therefore \text{ডোমেন} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3\} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{গ. S-এর বর্ণনাকারী সমীকরণ, } x^2 + y^2 = 9 \text{(i)}$$

$$\text{বা, } (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

\therefore S-এর লেখ একটি বৃত্ত।

(i) নং সমীকরণটির লেখচিত্র একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্র (0,0) ও ব্যাসার্ধ 3। এখন ছক কাগজে x অংশ ও y অংশ অঙ্কন করে (0,0) বিন্দু স্থাপন করি। (0,0) বিন্দুটিকে কেন্দ্র করে 3 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই প্রদত্ত সমীকরণের লেখচিত্র যা ছক কাগজে দেখানো হলো।



$$-29 = 64 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন-১৬▶ $A = \{X : X \in Z \text{ এবং } x^2 \leq 4\}$

$B = \{X \in \mathbb{N} : x \text{ বিজোড় সংখ্যা এবং } x < 5\}$

$C = \{3, 5\}$

ক. A সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে
প্রকাশ কর। ২

খ. দেখাও যে, $P(B) \cup P(C) \subset P(B$
 $\cup C)$ ৪

? গ. $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$
এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$ অন্তর্গত
তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা করে ডোম S
এবং রেঞ্জ S নির্ণয় কর। ৪

◀ ১৬ নং প্রশ্নের সমাধান ▶

ক. দেওয়া আছে, $A = \{x : x \in Z \text{ এবং } x^2 \leq 4\}$

এখানে, $Z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

শর্তমতে, $A = \{0, \pm 1, \pm 2\}$

$= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

খ. দেওয়া আছে, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ বিজোড় সংখ্যা এবং } x < 5\}$

$\therefore B = \{1, 3\}$

এবং $C = \{3, 5\}$

এখন $P(B) = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

$P(C) = \{\phi, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$

$\therefore P(B) \cup P(C) = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}\}$

আবার, $B \cup C = \{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$

$\therefore P(B \cup C) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\},$
 $\{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

সুতরাং $P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = \sqrt{4 - x^2} \text{ এবং } A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = \sqrt{4 - x^2}$ এর মান নির্ণয় করি :

x	-2	-1	0	1	2
y = $\sqrt{4 - x^2}$	0	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	0

এখন, $\sqrt{3} \in 4 \therefore (-1, \sqrt{3}) \in s$ এবং $(1, \sqrt{3}) \in s$

$$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = \sqrt{4 - x^2}\}$$

$$= \{(-2, 0), (0, 2), (2, 0)\}$$

S এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেই $(-2, 0, 2)$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $\{0, 2\}$

$$\therefore \text{ডোম } S = (-2, 0, 2) \text{ এবং রেঞ্জ } S = (0, 1)$$

প্রশ্ন-১৭ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{2, 3, 5\}$ যা সেটের নির্দিষ্ট উপাদান দ্বারা সমন্বিত।

ক. $P(B)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$
এবং $x = y^2\}$ অন্তর্ভুক্ত করে তালিকা
পদ্ধতিতে বর্ণনা করে ডোম S এবং
রেঞ্জ S নির্ণয় কর। ৪

গ. উপরে বর্ণিত অন্তর্ভুক্তির লেখচিত্র অঙ্কন
কর এবং অন্তর্ভুক্তি ফাংশন কিনা তা
লেখচিত্র হতে নির্ণয় কর। ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $B = \{2, 3, 5\}$

$$P(B) = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}\}$$

খ. $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } x = y^2\}$

$$= \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y = \pm \sqrt{x}\}$$

এখন, $y = \pm \sqrt{x}$

- 2 ও -1 এর জন্য y এর মান অবাস্তব

$x = 0$ হলে, $y = 0 \in a \therefore (0, 0) \in S$

$x = 1$ হলে, $y = \pm 1 \in A \therefore (1, 1), (1, -1) \in S$

$$x = 2 \text{ হলে, } y = \pm\sqrt{2} \notin A$$

$$\therefore (2, \pm\sqrt{2}) \notin S$$

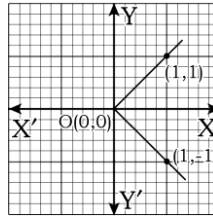
$$\therefore S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$$

$$\therefore \text{ডোম } S = \{0, 1\} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{রেঞ্জ } S = \{0, 1, -1\} \text{ (Ans.)}$$

গ. 'খ' হতে পাই, অক্ষয়, $S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$

X-অক্ষ বরাবর 5 ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর 5 ঘর = 1 একক ধরে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে প্রদত্ত অক্ষয়ের লেখচিত্র পাওয়া যায়।



যেহেতু $x = 1$ এর দুটি ইমেজ বা প্রতিচ্ছবি যথা $1, -1$ পাওয়া যায়। সুতরাং S অক্ষয়টি ফাংশন নয়।

