দ্বিতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ x, y, z এর একটি বহুপদী হলো, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $x + y + z \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$. ৪

গ. যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ ও $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

অনুশীলনীর ১৫নং সমাধান দেখ।

প্রশ্ন–২ $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$ এবং $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$.

[রা. বো. '১৫]

ক. $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্যসহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\dfrac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$

এখন $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূপে লিখলে হবে,

$P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$

$\therefore$ P(x) এর মুখ্য সহগ হলো 10. **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, $P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$

P(x) এর ধ্রুবপদ 9 এর উৎপাদকসমূহের সেট $f_1 = \{1, -1, 3 - 3, 9, -9\}$

P(x) এর মুখ্যসহগ 10 এর উৎপাদকসমূহের সেট $f_2 = \{1, -1, 2, -2, 5, -5, 10 - 10\}$

এখন, P(a) বিবেচনা করি, যেখানে $a = \frac{\pi}{4}$ এবং $\pi \in f_1, s \in f_2$

a = 1 হলে $P(1) = 10 - 1 + 15 + 9 \neq 0$

$a = -1$ " $P(-1) = -10 - 1 - 15 + 9 \neq 0$

$a = -\frac{1}{2}$ হলে $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4} + 15\left(-\frac{1}{2}\right) + 9$

$$= -\frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 9$$

$$= \frac{-5 - 1 - 30 + 36}{4}$$

$$= \frac{-36 + 36}{4}$$

$$= \frac{0}{4}$$

$$= 0$$

সুতরাং $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x + 1)$ অর্থাৎ $(2x + 1)$, P(x) এর একটি উৎপাদক।

এখন, $10x^3 - x^2 + 15x + 9$

$= 10x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 3x + 18x + 9$

$= 5x^2(2x + 1) - 3x(2x + 1) + 9(2x + 1)$

$= (2x + 1)(5x^2 - 3x + 9)$

$\therefore P(x) = (2x + 1)(5x^2 - 3x + 9)$

গ. দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$= x(x^2 + x - 6)$

$= x(x^2 + 3x - 2x - 6)$

$= x(x(x + 3) - 2(x + 3)\}$

$= x(x + 3)(x - 2)$

$\therefore \frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$

$= \dfrac{x^2 + x - 1}{x(x+3)(x-2)}$

ধরি, $\dfrac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 + x - 1 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + cx(x - 2)$ .....(ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0^2 + 0 - 1 = A(0 - 2)(0 + 3) + B.0(0 + 3) + c.0(0 - 2)$

বা, $-1 = A(-2). 3 + 0 + 0$

বা, $-1 = -6A$

বা, $A = \dfrac{1}{6}$

আবার সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2^2 + 2 - 1 = A(2 - 2)(2 + 3) + B.2(2 + 3) + c.2(2 - 2)$

বা, $4 + 2 - 1 = 0 + 10B + 0$

বা, $5 = 0 + 10B$

$\therefore B = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 + (-3) - 1 = A(-3 - 2)(-3 + 3) + B(-3)(-3 + 3) + c(-3)(-3 - 2).$

বা, $9 - 3 - 1 = 0 + 0 + 15c$

বা, $5 = 15c$

$\therefore c = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

এখন, A, B ও C এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}.$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন–৩ $F(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ একটি বহুপদী।

ক. $F(x)$ কে $(2x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. $F(x) = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x}{F(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, ভাজ্য $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

ভাজক $= (2x + 1)$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$f(x)$ কে $(2x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6.\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{4}{4} - \frac{6}{2} + 4$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + 1 - 3 + 4$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + 2$$

$$= \frac{1 - 6 + 32}{16}$$

$$= \frac{27}{16}$$

নির্ণেয় ভাগশেষ $\frac{27}{16}$.

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

এখানে, ধ্রুব সংখ্যা $= 4$

সুতাং ধ্রুবপদের উৎপাদকসমূহের সেট হতে পারে $\pm1, \pm2, \pm4$

$x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$f(-1) = (-4)^4 + 3(-1)^3 + 4(-1)^2 + 6(-1) + 4$$

$$= 1 - 3 + 4 - 6 + 4$$

$$= 9 - 9$$

$$= 0$$

$\therefore$ $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

$= x^4 + x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 4x + 4$

$= x^3(x + 1) + 2x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 4(x + 1)$

$= (x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$

$= (x + 1)\{x^2(x + 2) + 2(x + 2)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$

শর্তমতে, $f(x) = 0$

$\therefore$ $(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2) = 0$

বা, $x + 1 = 0$

বা, $x = -1$

অথবা, $x + 2 = 0$

বা, $x = -2$

অথবা, $x^2 + 2 = 0$

বা, $x = \sqrt{-2}$

যা গ্রহণযোগ্য নয়

নির্ণেয় মান $x = -1, -2$.

গ. $\dfrac{x}{f(x)} = \dfrac{x}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4}$

$= \dfrac{x}{(x + 1)(x + 2)(x^2 + 1)}$ [‘খ’ হতে প্রাপ্ত]

মনে করি,

$$\frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x^2 + 1} \text{ ....(i)}$$

বা, $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x^2+2)} = \dfrac{A(x+1)(x^2+2) + B(x+1)(x^2+2) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x^2+2)}$

এখন উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$x = A(x + 1)(x^2 + 2) + B(x + 1)(x^2 + 2) + C(x + 1)(x + 2)$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষ হতে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B$ ....(iii)

$0 = 2A + B + C$ ....(iv)

$1 = 2A + 2B + 3C$ ....(v)

সমীকরণ (iv) কে (iii) দ্বারা বিয়োগ করে পাই,

$A + C = 0$ ....(vi)

এখন সমীকরণ (iii) কে 2 দ্বারা গুন করে (v) কে বিয়োগ করে পাই,

$3c = 1$

বা, $c = \frac{1}{3}$

c এর মান সমীকরণ (vi)–এ বসিয়ে পাই,

$A + \frac{1}{3} = 0$

$\therefore A = -\frac{1}{3}$

A এর মান সমীকরণ (iii)–এ বসিয়ে পাই,

$-\frac{1}{3} + B = 0$

$\therefore B = \frac{1}{3}$

এখন, সমীকরণ (i)–এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4} = \frac{-\frac{1}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{3}}{x + 2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{3(x + 1)} + \frac{1}{3(x + 2)} - \frac{1}{3(x^2 + 2)}$$

$$= \frac{1}{3(x + 2)} - \frac{1}{3(x + 1)} - \frac{1}{3(x^2 + 2)}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৪ $\boldsymbol{f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8}$ **এবং** $\boldsymbol{P(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 8x + 15}}$

ক. $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $f(a)$ কে $(a - x)$ এবং $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0$ যেখানে $x \neq y$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$$\therefore f(-2) = (-2)^3 + 5(-2)^2 + 6(-2) + 8$$
$$= -8 + 20 - 12 + 8$$
$$= 8 \textbf{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = \dfrac{x+3}{x^2 + 8x + 15}$

$$= \frac{x+3}{x^2 + 5x + 3x + 15}$$
$$= \frac{x+3}{(x+5)(x+3)} = \frac{1}{x+5}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ. ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে,

$f(a)$ কে $(a - x)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$f(x) = x^2 + 5x^2 + 6x + 8$

এবং $f(a)$ কে $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$f(P) = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$

শর্তানুসারে, $f(x) = f(y)$

বা, $x^3 + 5x^2 + 6x + 8 = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$

বা, $x^3 - y^3 + 5(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 5(x + y)(x - y) + 6(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5x + 5y + 6) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6) = 0$

কিন্তু, $x - y \neq 0$

$\therefore x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0$ [যেখানে $x \neq y$] **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫

$$\mathbf{f(y) = \frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3}}$$

ক. $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(y) = 0$ হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(y)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(y) = \dfrac{y^3 - 2y2 + 1}{y^2 - 2y - 3}$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{27} - 2.\frac{1}{9} + 1}{\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3} = \frac{\frac{-1-6+27}{27}}{\frac{1+6-27}{9}}$$

$$= \frac{20}{27} \times \frac{9}{(-20)} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

খ. যদি $f(y) = 0$ হয়,

$$\therefore \frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = 0$$

বা, $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$

ধরি, $g(y) = y^3 - 2y^2 + 1$

$\therefore g(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore (y - 1)$, $g(y)$ এর একটি উৎপাদক।

বা, $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$

বা, $y^3 - y^2 - y^2 + y - y + 1 = 0$

বা, $y^2(y - 1) - y(y - 1) - 1(y - 1) = 0$

বা, $(y - 1)(y^2 - y) = 0$

হয়, $y - 1 = 0$ অথবা, $y^2 - y - 1 = 0$

$\therefore y = 1$

এখানে, সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = -1, c = -1$

$$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-1)}}{2.1}$$

$\therefore$ y এর মানগুলো হলোঃ $1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

গ. রাশিটি : $\dfrac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3}$

এখন, $\dfrac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = \dfrac{y(y^2 - 2y - 3) + 3y + 1}{y^2 - 2y - 3}$

$$= y + \frac{3y + 1}{(y - 3)(y + 1)}$$

$\therefore \dfrac{3y + 1}{(y - 3)(y + 1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\dfrac{3y + 1}{(y - 3)(y + 1)} \equiv \dfrac{A}{y - 3} + \dfrac{B}{y + 1}$ .... (i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে $(y - 3)(y + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই –

$3y + 1 \equiv A(y + 1) + B(y - 3)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $y = -1$ বসিয়ে পাই,

$3(-1) + 1 = A(-1 + 1) + B(-1 - 3)$

বা, $-3 + 1 = A.0 - 4B$

বা, $-2 \quad -4B$

$\therefore B = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $y = 3$ বসিয়ে পাই,

$3.3 + 1 = A(3 + 1) + B(3 - 3)$

বা, $9 + 1 = 4.A + B.0$

বা, $10 = 4A$

$\therefore A = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

A ও B এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই –

$$\frac{3y + 1}{(y - 3)(y + 1)} = \frac{\frac{5}{2}}{y - 3} + \frac{\frac{1}{2}}{y + 1}$$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ : $\dfrac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = y + \dfrac{\frac{5}{2}}{y - 3} + \dfrac{\frac{1}{2}}{y + 1}$

$$= y + \frac{5}{2(y - 3)} + \frac{1}{2(y + 1)}$$

প্রশ্ন–৬ চলক **x** এর তিনটি বহুপদী $\mathbf{P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + k,}$

$\mathbf{N(x) = x^2 - 4x - 7}$ **এবং** $\mathbf{D(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8}$

ক. $D(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{N(x)}{D(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $x = -1$ বসালে $D(-1) = 0$ হয়।

অতএব, $(x + 1)$, $D(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\therefore D(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$
$$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$$
$$= x^2 (x + 1) - 2x (x + 1) - 8(x + 1)$$
$$= (x + 1) (x^2 - 2x - 8)$$
$$= (x + 1) (x^2 - 4x + 2x - 8)$$
$$= (x + 1) \{x(x - 4) + 2(x - 4)$$
$$= (x + 1) (x + 2) (x - 4) \textbf{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + k$

যেহেতু $(3x + 2)$ বা, $3\left(x + \frac{2}{3}\right)$ বা, $3\left\{x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক; সেহেতু উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

এখানে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + k$

$$= -18\left(\frac{8}{27}\right) + 15\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3} + k$$
$$= -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} + k$$
$$= \frac{-16 + 20 + 2 + 3k}{3} = \frac{6 + 3k}{3}$$

শর্তানুসারে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

বা, $\frac{6 + 3k}{3} = 0$

বা, $6 + 3k = 0 \therefore k = -2$

গ. দেওয়া আছে, $N(x) = x^2 - 4x - 7$

'ক' থেকে পাই,

$D(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)$

$\therefore \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$

$\therefore \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

মনে করি, $\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 4}$........ (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x + 2)(x - 4) + B(x + 1)(x - 4) + C(x + 1)(x + 2)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য।

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$1 + 4 - 7 = A(-1 + 2)(-1 - 4)$

বা, $-2 = A(-5) \therefore A = \frac{2}{5}$

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$4 + 8 - 7 = B(-2 + 1)(-2 - 4)$

বা, $5 = B(-1)(-6) \therefore B = \frac{5}{6}$

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$16 - 16 - 7 = C(4 + 1)(4 + 2)$

বা, $-7 = C(5)(6) \therefore C = -\frac{7}{30}$

এখন A, B, C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} \equiv \frac{2}{5(x + 1)} + \frac{5}{6(x + 2)} - \frac{7}{30(x - 4)};$$

এটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

প্রশ্ন–৭ ▶ শিক্ষক ছাত্রদের $F(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ লিখতে বললেন কিন্তু ভুল করে জামাল $f(x) = x^3 + 2x^3 - 1$ এবং দিদার $P(x) = x^2 + 2x - 3$ লিখল।

ক. f(x) কে x + 1 দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর। ২

খ. F(x) বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. জামালের লেখাকে লব এবং দিদারের লেখাকে হর ধরে রাশিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

অতএব, $x + 1$) $x^3 + 2x^2 - 1$ ($x^2 + x - 1$

$x^3 + x^2$

$x^2 - 1$

$x^2 + x$

$-x - 1$

$-x - 1$

0

$x + 1$ দ্বারা $f(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 0. **(Ans.)**

খ. $F(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

বহুপদীটির মুখ্য সহগ 1 এবং ধ্রুব পদ -8

ধ্রুব পদের উৎপাদক সমূহের সেট $= \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

$F(1) = 1^3 - 1^2 - 10.1 - 8 = -18 \neq 0$

$F(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

$\therefore$ $\{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - x^2 - 10x - 8$

$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$

$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$

$= (x + 1)(x - 4)(x + 2)$

বহুপদী F(x) এর উৎপাদক $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ **(Ans.)**

গ. রাশিটি $= \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

এখন, $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = x + \frac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)}$

এখানে, $\frac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)} \equiv \frac{A}{X + 3} + \frac{B}{x - 1}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষে $(x + 3)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x - 1 \equiv A(x - 1) + B(x + 3)$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$3.1 - 1 = A(1 - 1) + B(1 + 3)$

বা, $3 - 1 = A \times 0 + B.4$

বা, $2 = 4B$

$\therefore B = \frac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষকে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$3(-3) - 1 = A(-3 - 1) + B(-3 + 3)$

বা, $-9 - 1 = A(-4) + B \times 0$

বা, $-10 = 4A$

$\therefore A = \frac{5}{2}$

A ও B এর মান সমীকরণ (i)–এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{\frac{5}{2}}{x + 3} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1}$$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ, $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▸ x, y, z এর একটি বহুপদী হলো :

$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. $F(p, q, r)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এটি একটি চক্র-ক্রমিক প্রতিসম রাশি। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$ ৪

গ. যদি, $a = y + z - x$, $b = x + z - y$, $c = x + y - z$ হয় তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) = 4 F(x, y, z)$। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore F(p, q, r) = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

এখন, $F(q, r, p) = q^3 + r^3 + p^3 - 3pqr$

$= p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

এবং, $F(q, p, r) = q^3 + p^3 + r^3 - 3qpr$

$= p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

$\therefore F(p, q, r) = F(q, r, p) = F(q, p, r)$

অর্থাৎ, $F(p, q, r)$ একটি চক্র-ক্রমিক প্রতিসম রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. 'ক' হতে পাই, $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c) \{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c) (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$

$= \frac{1}{2} (a + b + c) (a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$\therefore F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

(দেখানো হলো)

গ. 'খ' হতে পাই,

$F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

দেওয়া আছে, $a = y + z - x$, $b = z + x - y$, $c = x + y - z$

$\therefore a + b + c = y + z - x + z + x - y + x + y - z = x + y + z$

এখন, $(a - b)^2 = (y + z - x - z - x + y)^2$

$= (2y - 2x)^2$

$= \{-2(x - y)\}^2$

$= 4(x - y)^2$

$(b - c)^2 = (z + x - y - x - y + z)^2$

$= (2z - 2y)^2$

$= \{-2(y - z)\}^2$

$= 4(y - z)^2$

এবং $(c - a)^2 = (x + y - z - y - z + x)^2$

$= (2x - 2z)^2$

$= (-2(z - x)\}^2$

$= 4(z - x)^2$

$\therefore F(a, b, c) = \frac{1}{2} (a + b + c) \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= \frac{1}{2}(x + y + z) \{4(x - y)^2 + 4(y - z)^2 + 4(z - x)^2\}$

$= 4 \times \frac{1}{2} (x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$= 4F(x, y, z)$

অর্থাৎ, $F(a, b, c) = 4F(x, y, z)$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৯ ▸ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $Q(x) = 6x^2 + 7x + a$

ক. $Q(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a = 2$ হলে দেখাও যে, $c = 2b$. ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত b ও c এর মান ব্যবহার করে $\frac{x}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$Q(x) = 6x^2 + 7x + a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$।

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে,

$Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ হবে

এখন, $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + a$

$$= 6 \times \frac{1}{4} - \frac{7}{2} + a$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{7}{2} + a$$

$$= \frac{3 - 7 + 2a}{2}$$

$$= \frac{2a - 4}{2}$$

$$= \frac{2(a - 2)}{2}$$

$$= a - 2$$

শর্তমতে, $a - 2 = 0$ $\therefore$ $a = 2$

নির্ণেয় মান $a = 2$

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$

$Q(x) = 6x^2 + 7x + 2$ $[\because a = 2]$

এবং $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $Q(x)$

এখন, $Q(x) = 6x^2 + 7x + 2$

$$= 6x^2 + 4x + 3x + 2$$

$$= 2x(3x + 2) + 1(3x + 2)$$

$= (3x + 2)(2x + 1)$

সুতরাং $(3x + 2)$ এবং $(2x + 1)$ রাশিদ্বয় হবে $P(x)$ বহুপদীর দুটি উৎপাদক।

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে,

$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ এবং $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

এখন, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{2}{3}\right) + c$

$$= 18 \times \left(-\frac{8}{27}\right) + 15 \times \frac{4}{9} - \frac{2b}{3} + c$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} - \frac{2b}{3} + c$$

$$= \frac{-16 + 20 - 2b + 3c}{3}$$

$$= \frac{4 - 2b + 3c}{3}$$

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 18.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c$

$$= 18 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 15 \times \frac{1}{4} - \frac{b}{2} + c$$

$$= -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} - \frac{b}{2} + c$$

$$= \frac{-9 + 15 - 2b + 4c}{4}$$

$$= \frac{6 - 2b + 4c}{4}$$

শর্তানুসারে, $\frac{4 - 2b + 3c}{3} = 0$ এবং $\frac{6 - 2b + 4c}{4} = 0$

অর্থাৎ, $4 - 2b + 3c = 0$ .... (i)

$6 - 2b + 4c = 0$ ....(ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$4 - 2b + 3c - 6 + 2b - 4c = 0$

বা, $-c - 2 = 0$

$\therefore c = -2$

সমীকরণ (i) –এ $c = -2$ বসিয়ে পাই,

$4 - 2b + 3(-2) = 0$

বা, $4 - 2b - 6 = 0$

বা, $-2b - 2 = 0$

বা, $-2b = 2$

$\therefore\ b = -1$

সুতরাং, $c = 2b$

গ. 'খ' হতে পাই, $b = -1, c = -2$

দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$

$$= 18x^3 + 15x^2 - x - 2 \quad [\because b = -1, c = -2]$$
$$= 18x^3 + 21x^2 + 6x - 6x^2 - 7x - 2$$
$$= 3x(6x^2 + 7x + 2) - 1(6x^2 + 7x + 2)$$
$$= (6x^2 + 7x + 2)(3x - 1)$$
$$= (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$$

সুতরাং $\dfrac{x}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

ধরি, $\dfrac{x}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} \equiv \dfrac{A}{2x + 1} + \dfrac{B}{3x + 2}$

$$+ \frac{C}{3x - 1} \quad .... \text{(iii)}$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x = A(3x + 2)(3x - 1) + B(2x + 1)(3x - 1)$

$$+ C(2x + 1)(3x + 2) \quad .... \text{(iv)}$$

এখানে, সমীকরণ (iv) এর উভয়পক্ষে $x = -\dfrac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{1}{2} = A\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right\}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\}$$
$$+ B\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right\}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\} + C\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right\}$$
$$\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right\}$$

বা, $-\dfrac{1}{2} = A\left(-\dfrac{3}{2} + 2\right)\left(-\dfrac{3}{2} - 1\right)$

$$+ B(-1 + 1)\left(-\frac{3}{2} - 1\right) + C(-1 + 1)\left(-\frac{3}{2} + 2\right)$$

বা, $-\frac{1}{2} = A\,\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) + B.0.\left(-\frac{5}{2}\right) + C.0.\frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} = A.\left(-\frac{5}{4}\right) + 0 + 0$

বা, $-\frac{5}{4}.A = -\frac{1}{2}$

বা, $A = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

$\therefore\ A = \frac{2}{5}$

আবার সমীকরণ (iv) এর উভয়পক্ষে $x = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{2}{3} = A\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\right\}\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right\} + B\left\{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right\}$$
$$\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right\} + C\left\{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right\}\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\right\}$$

বা, $-\frac{2}{3} = A(-2 + 2)(-2 - 1) + B\left(-\frac{4}{3} + 1\right)(-2 - 1) + C\left(-\frac{4}{3} + 1\right)(-2 + 2)$

বা, $-\frac{2}{3} = A.0(-3) + B\left(-\frac{1}{3}\right)(-3) + C\left(-\frac{1}{3}\right).\,0$

বা, $-\frac{2}{3} = 0 + B.1 + 0$

$\therefore\ B = -\frac{2}{3}$

পুনরায়, সমীকরণ (iv) এর উভয়পক্ষে $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{3} = A.\left(3.\frac{1}{3} + 2\right)\left(3.\frac{1}{3} - 1\right) + B.\left(2.\frac{1}{3} + 1\right)\left(3.\frac{1}{3} - 1\right)$$
$$+ C.\left(2.\frac{1}{3} + 1\right)\left(3.\frac{1}{3} + 2\right)$$

বা, $\frac{1}{3} = A.(1 + 2)(1 - 1) + B\left(\frac{2}{3} + 1\right)(1 - 1)$

$$+ C\left(\frac{2}{3} + 1\right)(1 + 2)$$

বা, $\frac{1}{3} = A.3.0 + B.\frac{5}{3}.0 + C.\frac{5}{3}.3$

বা, $\frac{1}{3} = 0 + 0 + C.5$

$\therefore C = \frac{1}{15}$

A, B, C এর মান সমীকরণ (iii)-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(2x+1)(3x+2)(3x-1)} = \frac{\frac{2}{5}}{2x+1} + \frac{\frac{-2}{3}}{3x+2} + \frac{\frac{1}{15}}{3x-1}$$

$= \frac{2}{5(2x+1)} - \frac{2}{3(3x+2)} + \frac{1}{15(3x-1)}$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন-১০ $f(x) = x^2 - 7x - 6$ ও $g(x) = 2x^2 + x - a$ দুইটি বহুপদী।

ক. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হলে, $f(x)$ ও $g(x)$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদকটি নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{g(x)}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 7x - 6$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6$

$= -1 + 7 - 6$

$= 7 - 7 = 0$

$\therefore x - (-1)$ বা $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7x - 6 = x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6$

$= x^2(x + 1) - x(x + 1) - 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - x - 6)$

$= (x + 1) (x^2 - 3x + 2x - 6)$

$= (x + 1) \{(x(x - 3) + 2(x - 3)\}$

$= (x + 1) (x - 3) (x + 2)$

$= (x - 3) (x + 1) (x + 2)$

এটিই $f(x)$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ।

খ. এখানে, $g(x) = 2x^2 + x - a$ এবং $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - a$

বা, $0 = 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - a$

বা, $0 = 1 - a$

$\therefore\ a = 1$

অতএব, $g(x) = 2x^2 + x - 1$

$= 2x^2 + 2x - x - 1$

$= 2x(x + 1) - 1(x + 1)$

$= (x + 1)\,(2x - 1)$

'ক' হতে পাই, $f(x) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে, $f(x)$ ও $g(x)$ বহুপদীদ্বয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক হলো $(x + 1)$

গ. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - 7x - 6} = \frac{(x + 1)(2x - 1)}{(x - 3)(x + 1)(x + 2)} = \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

মনে করি, $\frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 3)} \equiv \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3}$

বা, $\frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 3)} \equiv \frac{A(x - 3) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)}$

বা, $2x - 1 \equiv A(x - 3) + B(x + 2)$.................. (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$2(-2) - 1 = A(-2 - 3) + (-2 + 2)$

বা, $-4 - 1 = A(-5) + B.0$

বা, $-5 = -5A$

$\therefore\ A = 1$

আবার, সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই

$2 \times 3 - 1 = A(3 - 3) + B(3 + 2)$

বা, $6 - 1 = A.0 + B \times 5$

বা, $5 = 5B$

$\therefore\ B = 1$

$\therefore \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$

অতএব, $\frac{g(x)}{f(x)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ হলো $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$

প্রশ্ন–১১ ▸ $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ একটি বহুপদী।

ক. $P(x)$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. যদি $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 2a + 2b - 5 = 0$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$P(x)$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$

$\therefore P(2) = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6$

$= 8 + 8 - 10 - 6$

$= 0$

নির্ণেয় ভাগশেষ 0.

খ. মনে করি, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

এখানে ধ্রুব সংখ্যা $= - 6$

সুতরাং উৎপাদনসমূহের সেট হতে পারে $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x = -3$ বসিয়ে পাই,

$P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^3 + 5 - 5(-3) - 6$

$= -27 + 18 + 15 - 6$

$= -33 + 33$

$= 0$

$\therefore (x + 3), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$= x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6$

$= x^2(x + 3) - x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x^2 - x - 2)$

$= (x + 3) (x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x + 3) \{x (x - 2) + 1(x - 2)\}$

$= (x + 3) (x + 1) (x - 2)$

$= (x + 1) (x - 2) (x + 3)$

নির্ণেয় উৎপাদক $(x + 1) (x - 2) (x + 3)$

গ. $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$P(a) = a^3 + 2a^2 - 5a - 6$

এবং $P(x)$ কে $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$P(b) = b^3 + 2b^2 - 5b - 6$

শর্তানুসারে, $a^3 + 2a^2 - 5a - 6 = b^3 + 2b^2 - 5b - 6$

বা, $a^3 - b^3 + 2a^2 - 2b^2 - 5a + 5b - 6 + 6 = 0$

বা, $a^3 - b^3 + 2a^2 - 2b^2 - 5a + 5b = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 2(a + b)(a - b) - 5(a - b) = 0$

বা, $(a - b)\{a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b - 5\} = 0$

বা, $a^2 + b^2 + ab + 2a + 2b - 5 = 0$ $[\because a - b \neq 0]$

$\therefore a^2 + b^2 + ab + 2a + 2b - 5 = 0$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১২ ▸ $bc(b^2 - c^2) + ca (c^2 - a^2) + ab (a^2 - b^2)$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী P(a) বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে P(b) নির্ণেয় কর। ২

খ. রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. রাশিটির প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশি $= bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab (a^2 - b^2)$

শর্তমতে, $P(a) = bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab (a^2 - b^2)$

$\therefore P(b) = bc(b^2 - c^2) + bc(c^2 - b^2) - b^2(b^2 - b^2)$

$= bc(b^2 - c^2) - bc(b^2 - c^2) - 0$

$= 0$

নির্ণেয় $P(b) = 0$.

খ. প্রদত্ত রাশি, $bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

$= bc(b^2 - c^2) + c^3a - ca^3 + a^3b - ab^3$

$= bc(b^2 - c^2) + a^3b - ca^3 - ab^3 + c^3a$

$= bc(b^2 - c^2) + a^3(b - c) - a(b^3 - c^3)$

$= bc(b + c)(b - c) + a^3(b - c) - a(b - c)(b^2 + bc + c^2)$

$= (b - c)\{(bc(b + c) + a^3 - a(b^2 + bc + c^2)\}$

$= (b - c)(b^2c + bc^2 + a^3 - ab^2 - abc - c^2a)$

$= (b - c)(a^3 - ab^2 - c^2a + bc^2 - abc + b^2c)$

$= (b - c)\{a(a^2 - b^2) - c^2(a - b) - bc(a - b)\}$

$= (b - c)(a - b)\{a(a + b) - c^2 - bc\}$

$= (b - c)(a - b)(a^2 + ab - c^2 - bc)$

$= (b - c)(a - b)(- bc + ab - c^2 + a^2)$

$= (b - c)(a - b)\{- b(c - a) - (c^2 - a^2)\}$

$= (b - c)(a - b)\{- b(c - a) - (c + a)(c - a)\}$

$= (b - c)(a - b)(c - a)(- b - c - a)$

$= (b - c)(a - b)(c - a)\{-(a + b + c)\}$

$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ **(Ans.)**

গ. ‘ক’ হতে প্রাপ্ত $P(b) = 0$

$\therefore$ $(a - b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক।

এখানে, প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক তাই $(b - c)$ এবং $(c - a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার, প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(a - b)(b - c)(c - a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্র-ক্রমিক এবং একমাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে।

অর্থাৎ, তা $k(a + b + c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ $bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

$= K(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ ....(i)

a, b, c এর সকল মানের জন্য (i) সত্য।

$\therefore$ (i) নং এ $a = 0, b = 1, c = 2$ বসিয়ে পাই,

$2(1 - 4) + 0(4 - 0) + 0(0 - 1) = k(0 - 1)(1 - 2)(2 - 0)(0 + 1 + 2)$

বা, $-6 + 0 + 0 = k(-1)(-1)(2)(3)$

বা, $-6 = 6K$

$\therefore k = -1$

সমীকরণ (i)–এ $K = -1$ বসিয়ে পাই,

$bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ $\mathbf{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}$ **একটি বীজগাণিতিক রাশি এবং** $\mathbf{\frac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)}}$, $\mathbf{\frac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)}}$, $\mathbf{\frac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)}}$ **তিনটি মূলদ ভগ্নাংশ।**

ক. দেখাও যে, বীজগাণিতিক রাশিটি অপ্রতিসম। ২

খ. বীজগাণিতিক রাশিটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. মূলদ ভগ্নাংশ তিনটির যোগের সরলমান নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশি = $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

রাশিটিতে a ও b এর স্থান বিনিময় করে পাই,

$b^2(a - c) + a^2(c - b) + c^2(b - a)$

যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

$\therefore$ প্রদত্ত বীজগাণিতিক রাশিটি অপ্রতিসম। **(দেখানো হলো)**

খ. প্রদত্ত রাশি, $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

$= a^2(b - c) + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2$

$= a^2(b - c) + b^2c - bc^2 - ab^2 + c^2a$

$= a^2(b - c) + bc(b - c) - a(b^2 - c^2)$

$= a^2(b - c) + bc(b - c) - a(b + c)(b - c)$

$= (b - c)\{a^2 + bc - a(b + c)\}$

$= (b - c)(a^2 + bc - ab - ca)$

$= (b - c)(a^2 - ab - ca + bc)$

$= (b-c)\{a(a-b) - c(a-b)\}$

$= (b-c)(a-b)(a-c)$

$= (b-c)(a-b)\{-(c-a)\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)$ **(Ans.)**

গ. $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

$= \dfrac{-(1-a^3)}{-(a-b)(c-a)} + \dfrac{-(1-b^3)}{-(b-c)(a-b)} + \dfrac{-(1-c^3)}{-(c-a)(b-c)}$

$= \dfrac{1-a^3}{(a-b)(c-a)} + \dfrac{1-b^3}{(b-c)(a-b)} + \dfrac{1-c^3}{(c-a)(b-c)}$

$= \dfrac{(1-a^3)(b-c) + (1-b^3)(c-a) + (1-c^3)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \dfrac{1(b-c) - a^3(b-c) + 1(c-a) - b^3(c-a) + 1(a-b) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \dfrac{1(b-c+c-a+a-b) - \{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$[\because a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(a+b+c)]$

$= \dfrac{0 - \{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= a+b+c$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৪ ▸ $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$ **একটি ভগ্নাংশ।**

ক. প্রদত্ত ভগ্নাংশটি কোন ধরনের ভগ্নাংশ? ২

খ. ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশের আকারে লেখ। ৪

গ. প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব x^3 এবং হর $x^4 + 3x^2 + 2$ উভয়েই x চলকের বহুপদী।

এখানে, লব x^3 এর মাত্রা 3 এবং হর $x^4 + 3x^2 + 2$ এর মাত্রা 4।

যেহেতু প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব এর মাত্রা হর এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট

সুতরাং, $\frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

খ. প্রদত্ত ভগ্নাংশের হর $= x^4 + 3x^2 + 2$

$= x^4 + 2x^2 + x^2 + 2$

$= x^2 (x^2 + 2) + 1(x^2 + 2)$

$= (x^2 + 2)(x^2 + 1)$ **(Ans.)**

আবার, $\frac{x^3}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{(Cx + D)}{x^2 + 1}$

গ. 'খ' অংশ হতে প্রাপ্ত $\frac{x^3}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{(Cx + D)}{x^2 + 1}$ ......(i)

মনে করি, $\frac{x^3}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর উভয় পক্ষকে $(x^2 + 2)(x^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2)$

$\equiv Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D$

$\equiv (A + C)\, x^3 + (B + D)\, x^2 + (A + 2C)\, x + (B + 2D)$...... (ii)

সমীকরণ (ii) এর x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$A + C = 1$.............. (iii)

$B + D = 0$.............. (iv)

$A + 2C = 0$............. (v)

$B + 2D = 0$.............(vi)

সমীকরণ (iv) ও (vi) হতে পাই, $B = 0$ এবং $D = 0$

সমীকরণ (v) নং হতে পাই,

$A + C + C = 0$

বা, $1 + C = 0$ $\quad [\because A + C = 1]$

$\therefore C = -1$

$C = -1$ হলে সমীকরণ (iii) হতে পাই,

$A - 1 = 1$

$\therefore A = 2$

এখন, A, B, C এবং D এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{2.x + 0}{x^2 + 2} + \frac{-1.\,x + 0}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{2x}{x^2+2} - \frac{x}{x^2+1}$$ এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন–১৫ ▸ $\mathbf{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}}$

এবং $\mathbf{P(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}}$

ক. P(x) এর ৩য় ও ৪র্থ পদের সমষ্টি কত? ২

খ. $\frac{1}{1+x} + P(x)$ কে সরল কর। ৪

গ. দেখাও যে, a = b = c অথবা ab + bc + ca = 0 ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$

৩য় ও ৪র্থ পদের সমষ্টি

$$= \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$$

$$= \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{8x^8 - 8 + 16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{8x^8 + 8}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)} = \frac{8}{(x^8-1)}$$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\frac{1}{1+x} + P(x)$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{x^8-1} \quad \text{[ক হতে]}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \left(\frac{4x^4-4+8}{(x^4+1)(x^4-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \left(\frac{2x^2-2+4}{(x^2+1)(x^2-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{x^2-1}$$

$$= \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \ \textbf{(Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

$[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)\}]$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ac + ab}{abc} = 0$

$\therefore ab + bc + ca = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$ | $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$ | $\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$ | বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$ | বা, $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = 0$

বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ | বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ | বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a}$

$\therefore a = b$ | $\therefore b = c$ | $\therefore c = a$

$\therefore a = b = c$

$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হলে $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন-১৬ ▸ $P(x) = x^{16} - 1$ এবং $G(x) = \frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8}$

ক. দেখাও যে, $(x + 1)$ ও $(x - 1)$ উভয়ই $F(x)$ এর একটি উৎপাদক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $G(x) + \frac{16}{F(x)} = -\frac{1}{1 - x}$ ৪

গ. মনে করি, $G(x) = x^n + a^n$ যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a ধ্রুবক। n বিজোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $G(x) = (x + a)\,Q(x)$ হয়। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $F(x) = x^{16} - 1$

$(x + 1)$, $F(x)$ এর উৎপাদক হলে $F(-1) = 0$ হবে।

$\therefore F(-1) = (-1)^{16} - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

$\therefore$ $(x + 1)$, $F(x)$ এর উৎপাদক।

আবার, $(x - 1)$, $F(x)$ এর উৎপাদক হলে $F(1) = 0$ হবে।

$\therefore$ $F(1) = (1)^{16} - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

$\therefore$ $(x + 1)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$(x + 1)$ ও $(x - 1)$ উভয়ই $F(x)$ এর উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

খ. বামপক্ষ $= G(x) + \dfrac{16}{F(x)}$

অনুশীলনী ২ এর ১২(d) নং সমাধান দেখ।

$\therefore$ $G(x) + \dfrac{16}{F(x)} = -\dfrac{1}{1 - x}$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $G(x) = x^n + a^n$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক।

এখানে, $G(-a) = (-a)^n + a^n$

$= (-1)^n a^n + a^n$

$= -a^n + a^n$ [$\because$ n বিজোড় হলে $(-1)^n = -1$]

$= 0$

$\therefore$ $\{x - (-a)\}$ অর্থাৎ $(x + a)$, $a(x)$ এর একটি উৎপাদক।

(দেখানো হলো)

দেওয়া আছে, $a(x) = (x + a)\ Q(x)$ ....(i)

এখানে $G(x)$ এর x চলকের মাত্রা n.

$(x + a)$ এ চলকের মাত্রা 1.

$\therefore$ $s(x)$ এ x চলকের মাত্রা হবে $(n - 1)$

আবার, $G(x) = x^n + a^n$

$= (x - a)\ [x^{n-1}a.x^{n-2} + a^2x^{n-3} -\ldots\ldots. (-1)^{n-2}. a^{n-2}. x + (-1)^{n-1} a^{n-1}]$

.....................(ii)

[$\because$ $x^n + y^n = (x + y)\ \{x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2$ .... $+ (-1)^{n-2}xy^{n-2}$

$+ (-1)^{n-1}y^{n-1}\}$]

সমীকরণ (i) ও (ii) সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2 x^{n-3}, a^3x^{n-4} + ...+(-1)^{n-1}a^{n-1}.$

(Ans.)

প্রশ্ন–১৭ ▸ $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(a, b, c)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $F(a, b, c) = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ রাশিটিতে a এর পরিবর্তে b, b এর পরিবর্তে c এবং c এর পরিবর্তে a বসালে আমরা পাই,

$$F(b, c, a) = (b + c + a)(bc + ca + ab) - bca$$
$$= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$$
$$= F(a, b, c)$$

$\therefore F(a, b, c)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$$F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$$
$$= a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + c^2a - abc$$
$$= a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + bc^2 + ac^2$$
$$= a^2b + ca^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 + abc + ac^2$$
$$= a^2(b + c) + ab(b + c) + bc(b + c) + ac(b + c)$$
$$= (b + c)(a^2 + ab + bc + ac)$$
$$= (b + c)\{a(a + b) + c(a + b)\}$$
$$= (b + c)(a + b)(a + c)$$
$$= (a + b)(b + c)(c + a) \textbf{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = 0$

অর্থাৎ, $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$

$\therefore (a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$

এখন, $(a + b + c)^3$

$= (a + b + c)^3 - 3abc + 3abc$

$= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$

$[\because abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)]$

$= (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\} + 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ab - 3bc -$

$3ca) + 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc.$

$= a^3 + b^3 + c^3$

$\therefore (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন-১৮ ▸ $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$ এবং $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x + b$.

ক. $\{P(-1) + Q(-1)\}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. x এর কোন কোন মানের জন্য $P(x) = 0$ হবে, যেখানে $P(-7) = 0$ ৪

গ. $(x - 1)$ যথাক্রমে $P(x)$ এবং $Q(x)$ উভয়ের উৎপাদক হলে, প্রমাণ কর যে, $a + b + 17 = 0$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$

$\therefore P(-1) = (-1)^3 + 7(-1)^2 - (-1) + a$

$= -1 + 7 + 1 + a$

$= 7 + a$

এবং $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x + b$

$\therefore Q(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 + 5(-1)^2 + 8(-1) + b$

$= 1 + 4 + 5 - 8 + b$

$= 2 + b$

$\therefore P(-1) + Q(-1) = 7 + a + 2 + b$

$= a + b + 9$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$

$\therefore P(-7) = (-7)^3 + 7(-7)^2 - (-7) + a$

$= -343 + 343 + 7 + a$

$= 7 + a$

যেহেতু $P(-7) = 0$

বা, $7 + a = 0$

$\therefore a = -7$

$P(x) = x^3 + 7x^2 - x - 7$

$= x^2(x + 7) - 1(x + 7)$

$= (x^2 - 1)(x + 7)$

$= (x + 1)(x - 1)(x + 7)$

দেওয়া আছে, $P(x) = 0$ হবে

$\therefore (x + 1)(x - 1)(x + 7) = 0$

বা, $x = -1$ অথবা $x = 1$ অথবা $x = -7$

$\therefore x = -1$ অথবা $x = 1$ অথবা $x = 7$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$

$(x - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P(1) = 0$ হবে।

$\therefore P(1) = (1)^3 + 7(1)^2 - 1 + a$

বা, $0 = 1 + 7 - 1 + a$

বা, $0 = 7 + a$

বা, $7 + a = 0$

$\therefore a = -7$

আবার, $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x + b$

$(x - 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $Q(1) = 0$ হবে,

$\therefore Q(1) = (1)^4 - 4(1)^3 + 5(1)^2 + 8(1) + b$

বা, $0 = 1 - 4 + 5 + 8 + b$

বা, $0 = 10 + b$

বা, $10 + b = 0$

$\therefore\ b = -10$

এখন, $a + b + 17 = -7 - 10 + 17 = 0$

$\therefore\ a + b + 17 = 0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-১৯ ▸ যদি $\mathbf{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}}$ **হয়,**

ক. দেখাও যে, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$ ২

খ. দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ এবং $a = b = c$ ৪

গ. যদি $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $a = b = c$ ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

বা, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

(দেখানো হলো)

খ. 'ক' হতে পাই, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore\ bc + ca + ab = 0$ (দেখানো হলো)

যেহেতু দুই বা ততোধিক বর্গের যোগফল শূন্য হলে, প্রত্যেক বর্গের যোগফল আলাদাভাবে শূন্য হয়,

সুতরাং $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$

বা, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

$\therefore a=b$

আবার, $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$

বা, $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

$\therefore b=c$

$\therefore a=b=c$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$

বা, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)^3-3.\frac{1}{\sqrt[3]{a}}.\frac{1}{\sqrt[3]{b}}.\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)\left\{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2\right\}=0$

হয়, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)=0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2=0$

$$\therefore \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2 = 0$$

বা, $a^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a = b$

আবার, $\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^2 = 0$

বা, $c^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}}$

$\therefore c = b$

$\therefore a = b = c$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২০ ▸ x চলকের দুইটি বহুপদী $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - a$ এবং $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

ক. $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $x + 2$, $P(x)$ এর উৎপাদক হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $P(x)$ ও $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$= 2.\frac{1}{8} - 7.\frac{1}{4} + 7.\frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{7}{4} + \frac{7}{2} - 2$$

$= \frac{1 - 7 + 14 - 8}{4}$

$= \frac{15 - 15}{4} = 0$ **(Ans.)**

খ. $x + 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $P(-2) = 0$ হবে,

এখন, $P(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) - a$

$= 2(-8) + 3.4 + 6 - a$

$= -16 + 12 + 6 - a$

$= 2 - a$

এখন, $2 - a = 0$

$\therefore a = 2$

নির্ণেয় a এর মান 2.

গ. মনে করি, $x + b$, $P(x)$ ও $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক।

যখন $b \neq 0$

তাহলে, $P(-b) = 2(-b)^3 + 3(-b)^2 - 3(-b) - 2$

$= -2b^3 + 3b^2 + 3b - 2$

$Q(-b) = 2(-b)^3 - 7(-b)^2 + 7(-b) - 2$

$= -2b^3 - 7b^2 - 7b - 2$

প্রশ্নমতে, $-2b^3 + 3b^2 + 3b - 2 = 0$ .... (i)

এবং $-2b^3 - 7b^2 - 7b - 2 = 0$ .... (ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$3b^2 + 7b^2 + 3b + 7b = 0$

বা, $10b^2 + 10b = 0$

বা, $10b(b + 1) = 0$

কিন্তু $b \neq 0$

$b + 1 = 0$

বা, $b = -1$

$\therefore$ $P(x)$ ও $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক $(x - 1)$

প্রশ্ন-২১ ▸ x, y ও z চলকের একটি সমমাত্রিক বহুপদী হলো,

$$\mathbf{F(x, y, z) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz}}$$

ক. দেখাও যে, F(x, y, z) একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. F(x, y, z) = 0 হলে দেখাও যে, x = y = z এবং xy + yz + zx = 0 ৪

গ. xy + yz + zx = 0 হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{x^2 - yz} + \frac{1}{y^2 - zx} + \frac{1}{z^2 - xy} = 0$$ ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(x, y, z) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz}$

F(x, y, z) একটি চক্র–ক্রমিক রাশি হবে যদি এবং কেবল যদি F(x, y, z) = F(y, z, x) হয়।

এখন, $F(y, z, x) = \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{yzx}$

$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz}$

$= F(x, y, z)$

অর্থাৎ F(x, y, z) চক্র–ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, F(x, y, z) = 0

$\therefore \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$

$\therefore xy + yz + zx = 0$

অথবা, $\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2\right\}=0$

কিন্তু কতকগুলো বর্গরাশির সমষ্টি শূন্য হলে তারা প্রত্যেকে আলাদাভাবে শূন্য হবে।

$\therefore \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2=0$ | $\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2=0$ এবং $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0$ | বা, $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$ বা, $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=0$

বা, $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ | বা, $\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ | বা, $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}$

$\therefore x=y$ | $\therefore y=z$ | $\therefore z=x$

$\therefore x=y=z$ **(দেখানো হলো)**

গ. $xy+yz+zx=0$

বা, $xy+yz=-zx$

বা, $y^2+xy+yz=y^2-zx$

বা, $y(x+y+z)=y^2-zx$

$\therefore \frac{1}{y^2-zx}=\frac{1}{y(x+y+z)}$

আবার, $xy+yz+zx=0$

বা, $yz+zx=-xy$

বা, $z^2+yz+zx=z^2-xy$

বা, $z(z+y+x)=z^2-xy$

বা, $z(x+y+z)=z^2-xy$

$\therefore \frac{1}{z^2-xy}=\frac{1}{z(x+y+z)}$

অনুরূপভাবে, $\frac{1}{x^2-yz}=\frac{1}{x(x+y+z)}$

এখন, $\frac{1}{x^2-yz}+\frac{1}{y^2-zx}+\frac{1}{z^2-xy}=\frac{1}{x(x+y+z)}+\frac{1}{y(x+y+z)}+\frac{1}{z(x+y+z)}$

$=\frac{0}{xyz(x+y+z)}=0$

$$\therefore \frac{1}{x^2 - yz} + \frac{1}{y^2 - zx} + \frac{1}{z^2 - xy} = 0$$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-২২ ▸ $\mathbf{F(a, b, c) = \dfrac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)}}$

ক. দেখাও যে, F(a, b, c) চক্র-ক্রমিক রাশি। ২

খ. F(a, b, c) এর সরলফল নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি F(a, b, c) = 0 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(a, b, c) = \dfrac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)}$

$\therefore F(b, c, a) = \dfrac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)} + \dfrac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)}$

$= F(a, b, c)$

আবার $F(c, b, a) = \dfrac{c^3 - 1}{(c - b)(c - a)} + \dfrac{b^3 - 1}{(b - a)(b - c)} + \dfrac{a^3 - 1}{(a - c)(a - b)}$

$= F(a, b, c)$

$\therefore$ F(a, b, c) একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. $F(a, b, c) = \dfrac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)}$

$= \dfrac{a^3 - 1}{-(a - b)(c - a)} + \dfrac{b^3 - 1}{-(b - c)(a - b)} + \dfrac{c^3 - 1}{-(c - a)(b - c)}$

$= \dfrac{(a^3 - 1)(b - c) + (b^3 - 1)(c - a) + (c^3 - 1)(a - b)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{\{a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)\} - \{(b - c) + (c - a) + (a - b)\}}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$

$$= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$= a + b + c$ **(Ans.)**

গ. $F(a, b, c) = 0$ এবং $F(a, b, c) = a + b + c$

$\therefore a + b + c = 0$ বা $a + b = -c$

এখন, $a^3 + b^3 + c^3$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$

$= (-c)^3 - 3ab(-c) + c^3$

$= -c^3 + 3abc + c^3$

$= 3abc$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন-২৩ ▸ $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্র-ক্রমিক সমমাত্রিক। ২

খ. $F(a, b, c)$ কে উৎপাদকের বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $F(a, b, c) = 0$ হলে, দেখাও যে, $a + b + c = 0$ এবং $a = b = c$ ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(a, b, c)$ এর প্রত্যেক পদের মাত্রা 3

$F(a, b, c)$ একটি সমমাত্রিক বহুপদী।

এখন, $F(a, b, c)$ তে a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c এর স্থলে a বসিয়ে পাই,

$F(b, c, a) = b^3 + c^3 + a^3 - 3bca$; যা $F(a, b, c)$ এর সমান।

$\therefore F(a, b, c)$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক সমমাত্রিক। (**দেখানো হলো**)

খ. $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc$

$= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)\,(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\,\{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$F(a, b, c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\,\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = 0$

$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

বা, $\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = 0$

$\therefore a + b + c = 0$ **(দেখানো হলো)**

অথবা, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

কিন্তু এরা বর্গরাশি বলে প্রত্যেকে অঋণাত্মক, যেহেতু তাদের সমষ্টি 0, সুতরাং তাদের প্রত্যেকের মান শূন্য হবে।

$\therefore (a - b)^2 = 0$

বা, $a - b = 0$

বা, $a = b$

আবার, $(b - c)^2 = 0$

বা, $b - c = 0$

বা, $b = c$

$\therefore\ a = b = c$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২৪ ▸ $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$ **এবং** $g(y) = z^{2y} - 3\cdot 2^{y+2} + 32$

ক. $f(1)$ এবং $f(-1)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $g(y) = 0$ হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. f(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $f(1) = \dfrac{1^3 - 2.1^2 + 1}{1^2 - 2.1 - 3} = \dfrac{0}{1 - 5} = 0$

$f(-1) = \dfrac{(-1)^3 - 2(-1)^2 + 1}{(-1)^2 - 2(-1) - 3} = \dfrac{-1 - 2 + 1}{1 + 2 - 3} = \dfrac{-2}{0}$

কিন্তু $\dfrac{-2}{0}$ অসংজ্ঞায়িত। এক্ষেত্রে এর কোনো মান নেই। **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $g(y) = 2^{2y} - 3\cdot 2^{y+2} + 32$

বা, $2^{2y} - 3.2^{y+2} + 32 = 0$ $[\because g(y) = 0]$

বা, $2^{2y} - 3.2^y.2^2 + 32 = 0$

বা, $2^{2y} - 3.2^y.4 + 32 = 0$

বা, $(2^y)^2 - 12.2^y + 32 = 0$

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$ [ধরি $2^y = x$]

বা, $x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$

বা, $(x - 8)(x - 4) = 0$

হয়, $x - 8 = 0$ অথবা $x - 4 = 0$

বা, $x = 8$ | বা, $x = 4$

বা, $2^y = 2^3$ | বা, $2^y = 2^2$

$\therefore y = 3$ | $\therefore y = 2$

নির্ণেয় মান $y = 2, 3$

গ. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$= \dfrac{x(x^2 - 2x - 3) + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$= x + \dfrac{3x + 1}{x^2 - 3x + x - 3}$

$= x + \dfrac{3x + 1}{x(x - 3) + 1\,(x - 3)}$

$$= x + \frac{3x+1}{(x-3)(x+1)} \text{ ....(i)}$$

মনে করি, $\frac{3x+1}{(x-3)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$ … … ...(ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x + 1 \equiv A(x+1) + B(x-3)$ … … … …… … (iii)

সমীকরণ (iii) -এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$3 \times (-1) + 1 = A(-1+1) + B(-1-3)$

বা, $-2 = B \times (-4)$

বা, $B = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (iii) -এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 \times 3 + 1 = A(3+1) + B(3-3)$

বা, $10 = A \times 4$

বা, $A = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

সমীকরণ (ii) -এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{\frac{5}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \frac{5}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3} = x + \frac{5}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন-২৫ ▸ $\mathbf{F(a, b, c) = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}}$

ক. দেখাও যে, F(a, b, c) একটি সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক। ২

খ. F(a, b, c) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $F(a, b, c) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে,
$ab + bc + ca = 0$ অথবা $a = b$
$= c$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(a, b, c)$ এর প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 3। সুতরাং এটি সমমাত্রিক।

আবার, $F(a, b, c) = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

এতে a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c এর স্থলে a বসিয়ে পাই,

$$F(a, b, c) = \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{3}{bca} = F(a, b, c)$$

$\therefore$ $F(b, c, a\ )$ চক্র-ক্রমিক রাশি।

$F(a, b, c)$ একটি সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

$$= \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} - \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ca}\right) \textbf{ (Ans.)}$$

গ. আবার, $F(a, b, c) = 0$

$$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

$$\therefore \frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$$

বা, $bc + ca + ab = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

কিন্তু এরা বর্গরাশি বলে প্রত্যেকেই অঋণাত্মক, তাদের মান শূন্য বলে প্রত্যেকের মান শূন্য হবে,

$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$

বা, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

$\therefore\ a=b$

আবার $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$

বা, $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

$\therefore\ b=c$

সুতরাং $a = b = c$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৬ ▸ $F(a, b, c) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ এবং $F'(a, b, c) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c) = 3(a - b)(b - c)(c - a)$ ২

খ. $F'(a, b, c)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. সরল কর $\frac{a^2+(b-c)^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2+(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$ । ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(a, b, c) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

মনে করি, $a - b = x$

$b - c = y$

এবং $c - a = z$

$\therefore\ x + y + z = 0$

এখন, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$\therefore (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$

(দেখানো হলো)

খ. $F'(a, b, c) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= a(b^2 - c^2) + bc^2 - a^2b + ca^2 - b^2c$

$= a(b^2 - c^2) - bc\,(b - c) - a^2(b - c)$

$= (b - c)\{a(b + c) - bc - a^2\}$

$= (b - c)\{ab + ac - bc - a^2\}$

$= (b - c)\{c(a - b) - a(a - b)\}$

$= (b - c)(a - b)(c - a)$

$= (a - b)(b - c)(c - a)$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{a^2 + (b - c)^2}{(a - b)(c - a)} + \dfrac{b^2 + (c - a)^2}{(a - b)(b - c)} + \dfrac{c^2 + (a - b)^2}{(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{\{a^2 + (b - c)^2\}(b - c) + \{b^2 + (c - a)^2\}\,(c - a) + \{c^2 + (a - b)^2\}(a - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{a^2(b - c) + (b - c)^3 + b^2(c - a) + (c - a)^3 + c^2(a - b) + (a - b)^3}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{\{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)\} + \{(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3\}}{(a - b)(b - c)(c - a)}$ [ক থেকে]

$= \dfrac{\{a^2(b - c) + b^2c - ab^2 + c^2a - c^2b\} + 3(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{\{a^2(b - c) + bc(b - c) - a(b^2 - c^2)\} + 3(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{\{(b - c)\}\ \{a^2 + bc - ab - ac\} + 3(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{\{(b - c)\}\ a(a - b) - c(a - b)\} + 3(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{-(b - c)(a - b)(c - a) + 3(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \dfrac{2(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)} = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন-২৭ ▸ $\phi(a) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

ক. প্রমাণ কর যে, $a - b$, $\phi(a)$ এর একটি উৎপাদক। ২

খ. $\phi(a)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. সরল কর : $\dfrac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^2}{(c - a)(c - b)}$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\phi(a) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

$\therefore \phi(b) = b^2(b - c) + b^2(c - b) + c^2(b - b)$

$= b^3 - b^2c + b^2c - b^3 + 0 = 0$

যেহেতু $\phi(b) = 0$, সেহেতু $(a - b)$, $\phi(a)$ এর একটি উৎপাদক।

(প্রমাণিত)

খ. $\phi(a) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

$= a^2(b - c) + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2$

$= a^2(b - c) + bc(b - c) - a(b^2 - c^2)$

$= (b - c)\{a^2 + bc - a(b + c)\}$

$= (b - c)\{a^2 + bc - ab - ac\}$

$= (b - c)\{a(a - b) - c(a - b)\}$

$= (b - c)(a - b)(a - c)$

$= -(a - b)(b - c)(c - a)$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত রাশি,

$$\frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}$$

$$= \frac{a}{-(a - b)(c - a)} + \frac{b^2}{-(b - c)(a - b)} + \frac{c^2}{-(c - a)(b - c)}$$

$$= \frac{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$$

$$= \frac{-(a - b)(b - c)(c - a)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$$ ['খ' হতে]

$= 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২৮ ▸ চলক x এর তিনটি রাশি $(x + 3), (x^2 - 9)$, x^3

ক. উপরিউক্ত রাশিসমূহ হতে ১ম ও ২য় রাশি দ্বারা একটি প্রকৃত এবং ২য় ও ৩য় রাশি দ্বারা একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ তৈরি কর। ২

খ. অপ্রকৃত ভগ্নাংশটি থেকে একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ পৃথক কর। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে,প্রথম রাশি $= x + 3$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

এবং তৃতীয় রাশি $= x^3$

এখন, $\dfrac{x + 3}{(x + 3)(x - 3)} = \dfrac{1}{x - 3}$; যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

এবং $\dfrac{x^3}{x^2 - 9}$, যা একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত অপ্রকৃত ভগ্নাংশটি হচ্ছে $\dfrac{x^3}{x^2 - 9}$

এখন, $\dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \dfrac{x^3 - 9x + 9x}{x^2 - 9}$

$= \dfrac{x(x^2 - 9) + 9x}{x^2 - 9}$

$= \dfrac{x(x^2 - 9)}{(x^2 - 9)} + \dfrac{9x}{x^2 - 9}$

$= x + \dfrac{9x}{x^2 - 9} = x + \dfrac{9x}{(x + 3)(x - 3)}$

এখানে $\dfrac{9x}{(x + 3)(x - 3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটি হচ্ছে $\dfrac{9x}{(x + 3)(x - 3)}$

মনে করি, $\frac{9x}{(x+3)(x-3)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 3)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$9x \equiv A(x-3) + B(x+3)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$9 \times 3 = A(3-3) + B(3+3)$

বা, $27 = A \times 0 + B \times 6$

বা, $27 = 6B$

$\therefore B = \frac{9}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii)–এ $x = -3$ বসিয়ে পাই

$9(-3) = A(-3-3) + B(-3+3)$

বা, $-27 = -6A + B \times 0$

$\therefore A = \frac{9}{2}$

A ও B এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{\frac{9}{2}}{x+3} + \frac{\frac{9}{2}}{x-3}$$

$$\therefore \frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{9}{2(x+3)} + \frac{9}{2(x-3)}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২৯ ▸ $5x^3 + 6x^2 - 32x + 6$ একটি x চলকের বিন্দু।

?

ক. বহুপদটিকে x এর সর্বনিম্ন ঘাত বিশিষ্ট পদকে এবং পদটিতে x এর ঘাত কত? ২

খ. P(x) কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. P(x) কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষকে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে বের কর এবং দেখাও যে,

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বহু পদটিকে x এর সর্বনিম্ন ঘাত বিশিষ্ট পদ 6 এবং ঐ পদে x এর ঘাত 0.

খ.

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-2 & 5x^3 + 6x^2 - 32x + 6 & 5x^2 + 16x \\
 & 5x^3 - 10x^2 & \\
\hline
 & \quad 16x^2 - 32x & \\
 & \quad 16x^2 - 32x & \\
\hline
 & \qquad\qquad 6 &
\end{array}
$$

নির্ণেয় ভাগফল $5x^2 + 16x$.

গ. ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে P(x) কে (x – 2) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে P(2).

$\therefore P(2) = 5.2^3 + 6.2^2 - 32.2 + 6$

$= 40 + 24 - 64 + 6$

$= 70 - 64 = 6$

এখানে, ভাজক = $x - 2$

ভাগফল = $5x^2 + 16x$

ভাজ্য = $5x^3 + 16x^2 - 32x + 6$ এবং ভাগশেষ = 6

সুতরাং, ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

$= (x - 2)(5x^2 + 16x) + 6$

$= 5x^3 + 16x^2 - 10x^2 - 32x + 6$

$= 5x^3 + 6x^2 - 32x + 6$

= ভাজ্য

∴ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩০ ▸ $P(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 10$ হয়, তাহলে–

ক. $P\left(\frac{1}{m}\right)$ নির্ণয় কর। [যখন r = 0] ২

খ. $P(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় কর। ৪

গ. $P(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 6a + 6b + 7 = 0$ ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 10$

$$\therefore P\left(\frac{1}{m}\right) = \left(\frac{1}{m}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 7\cdot\frac{1}{m} + 10$$

$$= \frac{1}{m^3} + \frac{6}{m^2} + \frac{7}{m} + 10$$

$$= \frac{1 + 6m + 7m^2 + 10m^3}{m^3}$$

$$= \frac{10m^3 + 7m^2 + 6m + 1}{m^3} \textbf{ (Ans.)}$$

খ. $P(-5) = (-5)^3 + 6(-5)^2 + 7(-5) + 10$

$= -125 + 150 - 35 + 10$

$= 0$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $(x + 5)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

$\therefore x^3 + 6x^2 + 7x + 10$

$= x^3 + 5x^2 + x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x^2(x + 5) + x(x + 5) + 2(x + 5)$

$= (x + 5)(x^2 + x + 2)$

$= (x + 5)(x^2 + 2x + x + 2)$

$= (x + 5)\{x(x + 2) + 1(x + 2)\}$

$= (x + 5)(x + 2)(x + 1)$

$\therefore P(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক $(x + 5)(x + 2)(x + 1)$ **(Ans.)**

গ. $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$P(a) = a^3 + 6a^2 + 7a + 10$

$P(x)$ কে $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$P(b) = b^3 + 6b^2 + 7b + 10$

শর্তানুসারে, $a^3 + 6a^2 + 7a + 10 = b^3 + 6b^2 + 7b + 10$

বা, $a^3 - b^3 + 6(a^2 - b^2) + 7(a - b) = 0$

বা, $(a - b)\ (a^2 + b^2 + ab + 6a + 6b + 7) = 0$

$\therefore\ a^2 + b^2 + ab + 6a + 6b + 7 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩১ ▸ $\mathbf{P(x) = \dfrac{x\ \ 1}{x^2 - 7x + 12},\ g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}}$।

ক. $P(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. $g(x) = 2^{\frac{1}{3}}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 7x + 12}$

$$\therefore\ P(-2) = \frac{-2 + 1}{(-2)^2 - 7(-2) + 12}$$

$$= \frac{-1}{4 + 14 + 12} = -\frac{1}{30}\ \textbf{(Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 7x + 12} = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x - 3x + 12}$

$$= \frac{x + 1}{x(x - 4) - 3(x - 4)}$$

$$= \frac{x + 1}{(x - 4)(x - 3)}$$

$$\frac{x + 1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x + 1}{(x - 4)(x - 3)}$$

ধরি, $\dfrac{x + 1}{(x - 4)(x - 3)} \equiv \dfrac{A}{x - 4} \equiv \dfrac{B}{x - 3}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x - 4)\ (x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + 1 \equiv A(x - 3) + B(x - 4)$ ....(ii)

$x = 3$ হলে,

$3 + 1 = - B$

$\therefore B = - 4$

$x = 4$ হলে,

$4 + 1 = A$

$\therefore A = 5$

A ও B এর মান সমীকরণ (i) -এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x+1}{(x-4)(x-3)} = \frac{5}{x-4} - \frac{4}{x-3}$$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}$

আবার, $g(x) = 2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore (1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $\left\{(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $(1 + x + 1 - x) + 3(1 + x)^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{1}{3}}\left\{(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right\} = 2$

বা, $2 + 3(1 - x)^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 2$

বা, $3(1 - x)^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $3(1 - x)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $1 - x = 0$

$\therefore$ $x = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩২ ▸ দেওয়া আছে,

$$\mathbf{P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

$$\mathbf{Q(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + k}$$

$$\mathbf{R(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8}$$

ক. $R(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক $3x + 2$ হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\dfrac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, $f(x) = x^2 - x^2 - 10x - 8$

$\therefore\ f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

$\therefore\ \{x - (-1)\} = x + 1$

অর্থাৎ $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - x^2 - 10x - 8$

$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$

$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$

$= (x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\}$

$= (x + 1)(x - 4)(x + 2)$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$Q(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ অর্থাৎ $\left\{x - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}$

$Q(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + k$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore Q\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

বা, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 + 7\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 17\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 17\left(-\frac{2}{3}\right) + k = 0$

বা, $\frac{16}{81} - \frac{7 \times 8}{27} + 17 \times \frac{4}{9} - \frac{34}{3} + k = 0$

বা, $\frac{16}{81} - \frac{56}{27} + \frac{68}{9} - \frac{34}{3} + k = 0$

বা, $\frac{16 - 168 + 612 - 918 + 81k}{81} = 0$

বা, $-458 + 81k = 0$

$\therefore k = 5\frac{53}{81}$

নির্ণেয় k এর মান $5\frac{53}{81}$

গ. $\frac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$\therefore P(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$

$= -1 + 6 - 11 + 6$

$= 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ বা $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

তাহলে, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x + 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$\therefore \frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} \equiv \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে (x + 1)(x + 2)(x+ 3) দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) –এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 = A(-1+2)(-1+3) + B(-1+1)(-1+3)$

$+ C(-1+1)(-1+2)$

বা, $1 = A(1)(2)$

বা, $2A = 1$

$\therefore A = \frac{1}{2}$

সমীকরণ (ii) –এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$(-2)^2 = A(-2+2)(-2+3) + B(-2+1)(-2+3)$

$+ C(-2+1)(-2+2)$

বা, $4 = B(-1)(1)$

বা, $-B = 4$

$\therefore B = -4$

সমীকরণ (ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 = A(-3+2)(-3+3) + B(-3+1)(-3+3)$

$+ C(-3+1)(-3+2)$

বা, $9 = C(-2)(-1)$

বা, $2C = 9$

$\therefore C = \frac{9}{2}$

A, B ও C এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-4}{x+2} + \frac{\frac{9}{2}}{x+3}$$

$\therefore \frac{x^2}{P(x)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{x+2} + \frac{9}{2(x+3)}$ এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(Ans.)

প্রশ্ন–৩৩ ▸ $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ একটি বহুপদী।

?

ক. $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ হয় তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ২

খ. উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে $P(a)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. যদি $a \neq b$ এবং $P(a) = P(b)$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ ৪

▸◂ ৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$P(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a)$

$P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$x = -4$ হলে, $P(-4) = (-4)^3 + 5(-4)^2 + 6(-4) + 8$

$= -64 + 80 - 24 + 8$

$= -88 + 88$

$= 0$

$\therefore$ $(x + 4)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$= x^3 + 4x^2 + x^2 + 4x + 2x + 8$

$= x^2(x + 4) + x(x + 4) + 2(x + 4)$

$= (x + 4)(x^2 + x + 2)$ **(Ans.)**

গ. এখানে, $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$\therefore P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

এবং $P(b) = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

$\therefore P(a) = P(b)$

বা, $a^3 + 5a^2 + 6a + 8 = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

বা, $a^3 - b^3 + 5a^2 - 5b^2 + 6a - 6b + 8 - 8 = 0$

বা, $a^3 - b^3 + 5(a^2 - b^2) + 6(a - b) = 0$

বা, $(a - b)\{a^2 + ab + b^2 + 5(a + b) + 6\} = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6) = 0$

হয়, $(a - b) = 0$ অথবা, $(a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6) = 0$

কিন্তু, $a - b \neq 0$

$\therefore a \neq b$

$\therefore a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6 = 0$

বা, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩৪ ▸ i) $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$

ii) $R = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

এবং iii) $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$

?

ক. $(x - 2)$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয় তবে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $R = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ অথবা

$ab + bc + ca = 0$ ৪

গ. (iii) এর প্রত্যেকটি অনুপাতের মান k ধরে প্রমাণ কর যে, $(a + b + c)(x + y + z) = ax + by + cz$ ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$

$(x - 2)$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$

$\therefore P(2) = 5.2^3 + 6.2^2 - a.2 + 6$

বা, $P(2) = 40 + 24 + 6 - 2a$

বা, $P(2) = 70 - 2a$

শর্তমতে, $P(2) = 6$

বা, $70 - 2a = 6$

বা, $70 - 6 = 2a$

বা, $64 = 2a$

বা, $a = \frac{64}{2}$

$\therefore a = 32$

নির্ণেয় a এর মান 32

খ. দেওয়া আছে, $R = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

$\therefore$ হয় $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\dfrac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore\ bc + ca + ab = 0$

অথবা, $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)^2 = 0$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং,

$\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 = 0$ | $\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)^2 = 0$ এবং $\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)^2 = 0$

বা, $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = 0$ | বা, $\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c} = 0$ বা, $\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a} = 0$

বা, $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$ | বা, $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$ | বা, $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} = 0$

$\therefore\ a = b$ | $\therefore\ b = c$ | $\therefore\ c = a$

$\therefore\ a = b = c$

সুতরাং, $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{b^3} = \dfrac{3}{abc}$ হলে, $ab + bc + ca = 0$ অথবা $a = b = c$

(প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $\dfrac{x^2 - yz}{a} = \dfrac{y^2 - zx}{b} = \dfrac{z^2 - xy}{c}$

$\therefore\ \dfrac{x^2 - yz}{a} = \dfrac{y^2 - zx}{b} = \dfrac{z^2 - xy}{c} = k$ (ধরি)

$\therefore\ \dfrac{x^2 - yz}{a} = k$

অর্থাৎ $\dfrac{x^2 - yz}{k} = a$ ....(i)

আবার, $\dfrac{y^2 - zx}{b} = k$

$\therefore \dfrac{y^2 - zx}{k} = b$ ....(ii)

এবং $\dfrac{z^2 - xy}{c} = k$

$\therefore \dfrac{z^2 - xy}{k} = c$ ....(iii)

এখন, বামপক্ষ = $(a + b + c)(x + y + z)$

$= \left(\dfrac{x^2 - yz}{k} + \dfrac{y^2 - zx}{k} + \dfrac{z^2 - xy}{k}\right)(x + y + z)$ [(i), (ii) ও (iii) নং থেকে]

$= \left(\dfrac{x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy}{k}\right)(x + y + z)$

$= \dfrac{1}{k}(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \dfrac{1}{k}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$= \dfrac{1}{k}(x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz)$

$= \dfrac{1}{k}\{x(x^2 - yz) + y(y^2 - zx) + z(z^2 - xy)\}$

$= x\dfrac{(x^2 - yz)}{k} + y\dfrac{(y^2 - zx)}{k} + z\dfrac{(z^2 - xy)}{k}$

$= ax + by + cz$ [(i), (ii) ও (iii) নং হতে]

= ডানপক্ষ

$\therefore (a + b + c)(x + y + z) = ax + by + cz$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-৩৫ ▸ $\mathbf{\dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}}$ **একটি ভগ্নাংশ।**

? ক. হরকে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২

খ. ভগ্নাংশটির লবকে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে,
$a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0$ ৪

গ. ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $f(x) = x^2 + 2x - 3$

ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে আমরা জানি, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ কে $(x - 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(3)$

$\therefore\ f(3) = 3^2 + 2.3 - 3$

$= 9 + 6 - 3$

$= 12$

হরকে $(x - 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 12 **(Ans.)**

খ. ধরি, ভগ্নাংশটির লব $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

'ক' হতে পাই, $P(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে যথাক্রমে $P(a)$ এবং $P(b)$

$\therefore\ P(a) = a^3 + 2a^2 + 1$

এবং $P(b) = b^3 + 2b^2 + 1$

প্রশ্নমতে, $P(a) = P(b)$

বা, $a^3 + 2a^2 + 1 = b^3 + 2b^2 + 1$

বা, $a^3 - b^3 + 2a^2 - 2b^2 + 1 - 1 = 0$

বা, $a^3 - b^3 + 2(a^2 - b^2) = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + \{2(a + b)\ (a - b)\} = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b) = 0$

হয়, $a - b = 0$ অথবা, $a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0$

কিন্তু $a - b \neq 0 \because a \neq b$

$\therefore a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x \quad 3} = \dfrac{x(x^2 + 2x - 3) + 3x + 1}{(x^2 + 2x - 3)} = x + \dfrac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)}$

এখানে, $\dfrac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\dfrac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)} \equiv \dfrac{A}{x + 3} + \dfrac{B}{x - 1}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 3)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x + 1 \equiv A(x - 1) + B(x + 3)$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$3 \cdot 1 + 1 = A(1 - 1) + B(1 + 3)$

বা, $3 + 1 = A \times 0 + B.4$

বা, $4 = 4B$

$\therefore B = 1$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$3(-3) + 1 = A(-3 - 1) + B(-3 + 3)$

বা, $-9 + 1 = A(-4) + B \times 0$

বা, $-8 = -4A$

$\therefore A = 2$

A ও B এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x - 1}$$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ,

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}$$

প্রশ্ন–৩৬ ▸ $P(x) = x^2 - 9x - 6$, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

ক. $P(x)$ কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে বের কর। ২

খ. $Q(x)$ কে উৎপাদক উপপাদ্য ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^2 - 9x - 6$

$P(x)$ কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(-2)$.

এখন $P(-2) = (-2)^2 - 9(-2) - 6$

$= 4 + 18 - 6$

$= 16$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$= x(x^2 + x - 6)$

ধরি, $R(x) = x^2 + x - 6$

$R(x)$ এর মুখ্য সহগ 1 এবং ধ্রুব পদ -6

-6 এর উৎপাদকসমূহের সেট $= \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$

$\therefore R(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 \neq 0$

$R(-1) = (-1)^2 - 1 - 6 = -6 \neq 0$

$R(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$

$\therefore (x - 2)$, $R(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^2 + x - 6$

$= x^2 - 2x + 3x - 6$

$= x(x - 2) + 3(x - 2)$

$= (x - 2)(x + 3)$

$\therefore Q(x) = xR(x)$

$= x(x - 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

গ. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2 - 9x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}$

'খ' হতে পাই, $x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)}$

ধরি, $\dfrac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 2} + \dfrac{C}{x + 3}$ ....(i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2)$ ...(ii)

এখন (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A(-2)(3) + 0 + 0$

বা, $-6A = -6$

$\therefore A = 1$

আবার সমীকরণ (ii) উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$4 - 18 - 6 = 0 + B . 2(5) + 0$

বা, $-20 = 10B$

$\therefore B = -2$

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$

বা, $30 = 15C$

$\therefore C = 2$

A, B ও C এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩৭ ▸ $F(x, y, z) = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $x - y = \frac{1}{p}, y - z = \frac{1}{q}, z - x = \frac{1}{r}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $pq + qr + rp = 0$ অথবা $p = q = r$ ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

এখন, $F(y, z, x) = (y-z)^3 + (z-x)^3 + (x-y)^3$

$= (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

$= F(x, y, z)$

আবার, $F(z, x, y) = (z-x)^3 + (x-y)^3 + (y-z)^3$

$= (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

$= F(x, y, z)$

$\therefore F(x, y, z) = F(y, z, x) = F(z, x, y)$

অতএব, $F(x, y, z)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$F(x, y, z) = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

$= (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

$= (x-y)^3 + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^2 + z^3 - 3z^2x + 3zx^2 - x^3$

$= (x-y)^3 + 3z(x^2-y^2) - 3z^2(x-y) - (x^3-y^3)$

$= (x-y)^3 + 3z(x+y)(x-y) - 3z^2(x-y) - (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= (x-y)\{(x-y)^2 + 3z(x+y) - 3z^2 - (x^2+xy+y^2)\}$

$= (x-y)(x^2 - 2xy + y^2 + 3zx + 3yz - 3z^2 - x^2 - xy - y^2)$

$= (x-y)\{3z(y-z) - 3x(y-z)\}$

$= 3(x-y)(y-z)(z-x)$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $x - y = \frac{1}{p}$

$y - z = \frac{1}{q}$

এবং $z - x = \frac{1}{r}$

'খ' হতে পাই,

$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$

বা, $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 - 3(x-y)(y-z)(z-x) = 0$

বা, $\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \left(\frac{1}{q}\right)^3 + \left(\frac{1}{r}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{r} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

$\therefore \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 0$

বা, $\frac{qr + rp + pq}{pqr} = 0$

বা, $qr + rp + pq = 0$

$\therefore pq + qr + rp = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2 = 0$ **(প্রমাণিত)**

[যেহেতু কতকগুলো রাশির বর্গের সমষ্টি 0 হলে তারা পৃথক পৃথকভাবে 0 হয়]

$\therefore \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 0, \qquad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$ এবং $\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = 0$

বা, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ বা, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ বা, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q}$

$\therefore p = q \quad \therefore q = r \quad \therefore r = p$

সুতরাং $pq + qr + rp = 0$ অথবা $p = q = r$ **(প্রমাণিত)**