তৃতীয় অধ্যায়

জ্যামিতি

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ **ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।**

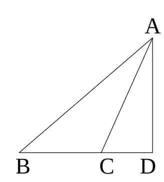
ক. AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$। ৪

গ. ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ

BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করে $BD \perp AD$ আঁকি।

সুতরাং, BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ. **প্রমাণ** : BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because$ $BD = BC + CD$]

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ....(i)

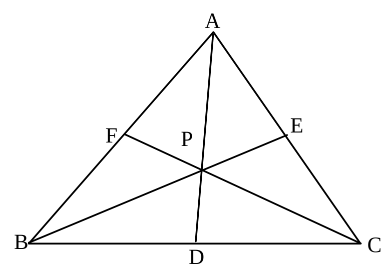
আবার, ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ

$\therefore$ $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) হতে $AD^2 + CD^2$ এর মান (i) এ

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (**প্রমাণিত**)

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$

প্রমাণ : ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ....(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ....(ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে, 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA2^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ ....(iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{PD}{AP} = \frac{1}{2}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{PD + AP}{AP} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AP} = \frac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AP$

$\therefore 4AD^2 = 9AP^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে, $4BE^2 = 9BP^2$ এবং $4CF^2 = 9\ CP^2$

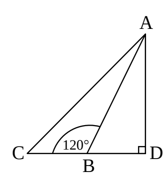
সুতরাং সমীকরণ (iv) থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9\ AP^2 + 9BP^2 + 9CP^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(PA^2 + PB^2 + PC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২ ▸



উপরের চিত্রে $\angle ABC = 120°$ এবং $AD \perp BC$.

ক. BD ও AB এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

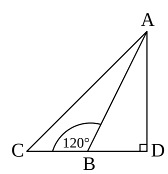
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর : ৪

$AC^2 – AB^2 = BC^2 + AB.BC$

গ. BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্রে $\angle ABC = 120°$



CD সরলরেখার ওপর $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ দুইটি সন্নিহিত কোণ

$\therefore \angle ABC + \angle ABD = 180°$

বা, $120° + \angle ABD = 180°$

$\therefore \angle ABD = 60°$

এখন সমকোণী ΔABD এর ভূমি = BD এবং অতিভুজ = AB

$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \frac{BD}{AB}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \frac{AB}{2}$

খ. দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle ABC = 120^\circ$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$

প্রমাণ : আমরা জানি, স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

এখন, ΔABC এ $\angle ABC = 120^\circ$ অর্থাৎ স্থূলকোণ

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ....(i)

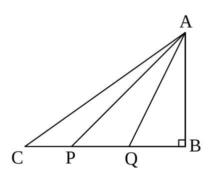
'ক' হতে পাই, $BD = \frac{1}{2}AB$

সমীকরণ (i) এ BD এর মান বসিয়ে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC\cdot\frac{1}{2}AB$

বা, $AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$ (**প্রমাণিত**)

গ.



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ, $CP = PQ = QB$। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔACQ–এর মধ্যমা AP   [$\because CP = PQ$]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ ....(i)

আবার, ΔAPB এর মধ্যমা AQ   [$\because PQ = QB$]

$\therefore AP^2 + AB^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ ....(ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AC^2 + AQ^2 + AP^2 + AB^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore$ $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩ ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত।

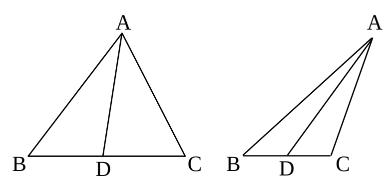
ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি লেখ এবং চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লেখিত তথ্যের ভিত্তিতে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$। ৪

গ. উদ্দীপকের উল্লেখিত তথ্যের ভিত্তিতে অঙ্কিত ত্রিভুজটি যদি সমদ্বিবাহু হয় তবে দেখাও যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

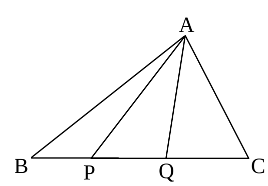
ক. **এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য :** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।



ΔABC–এর যেকোনো দুই বাহু AB ও AC অপর বাহু BC এর মধ্যবিন্দু D এবং মধ্যমা AD হলে,

$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$.

খ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। অর্থাৎ $BP = PQ = QC$। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔABQ–এর মধ্যমা AP   [$\because BP = PQ$]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ .... (i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ [$\because PQ = QC$]

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ ....(ii)

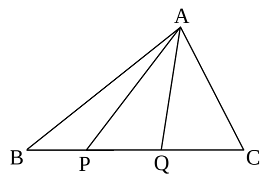
এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 – AP^2 – AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ (**প্রমাণিত**)

গ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এ $AB = AC$। ভূমি BC–এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

অঙ্কন : $AD \perp BC$ টানি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ ....(i)

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ ....(i)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD).BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD).BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $BD = CD$]

বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP.PC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৪ › **এ্যাপোলোনিয়াস নামক একজন গণিতবিদ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ওপর ভিত্তি করে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ক একটি উপপাদ্য বর্ণনা করেন।**

?

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। ২

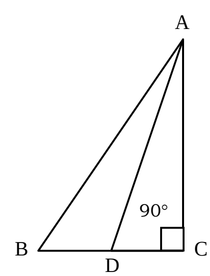
খ. ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং $BD = CD$ হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

গ. 'খ' নং প্রশ্নের চিত্রের BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো, যেন $CE = CD$ হয়। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$ ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সৃজনশীল প্রশ্ন ৩(ক) সমাধান দেখ।

খ.



যেহেতু, ΔABC এর $\angle C = 90°$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$

$= AC^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.CD$

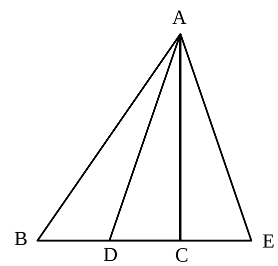
$= AC^2 + CD^2 + BD^2 + 2BD.BD [\because BD = CD]$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2 [\because AC^2 + CD^2 = AD^2]$

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ (প্রমাণিত)

গ.



ΔABC-এর $BD = CD$ দেওয়া আছে। প্রশ্নানুসারে, $CE = CD$

সুতরাং $BD = CD = CE$

এখন, A, E যোগ করি।

ΔABC-এ $BD = CD$

অর্থাৎ AD মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী–

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$ ....(i)

আবার, ΔADE-এ $CD = CE$

অর্থাৎ AC মধ্যমা

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে–

$$AD^2 + AE^2 = 2(AC^2 + CD^2)$$

বা, $AD^2 + AE^2 = 2AC^2 + 2CD^2$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

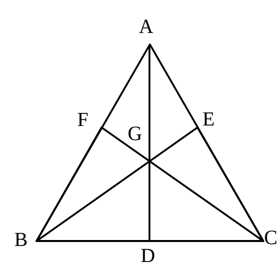
$AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 = 2AD^2 + 2CD^2 + 2AC^2 + 2CD^2$

বা, $AB^2 + AE^2 = 2AD^2 + 2CD^2 + 2AC^2 + 2CD^2 - AC^2 - AD^2$

বা, $AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$

$\therefore AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৫ ›



ABC সমবাহু ত্রিভুজের $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$

?

ক. সমবাহু ত্রিভুজ কাকে বলে? সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AD, BE ও CF ΔABC এর মধ্যমা। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **সমবাহু ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ $60°$।

খ. যেহেতু $AD \perp BC$

সুতরাং ΔABD ও ΔACD সমকোণী

এখন, সমকোণী ΔABD ও ΔAFD-এ

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC[উভয় সমবাহু ত্রিভুজের বাহু]

এবং AD সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$

অতএব AD, ΔABC এর একটি মধ্যমা।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

BE ও CF, ΔABC এর মধ্যমা

$\therefore$ AD, BE ও CF ΔABC এর মধ্যমা। **(প্রমাণিত)**

গ. **প্রমাণ :** AD, BE ও CF, ΔABC এর মধ্যমা

যেহেতু ΔABC এর AD মধ্যমা।

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ ....(i)

অনুরূপভাবে, BE মধ্যমা

$\therefore\ BC^2 + AB^2 = 2CE^2 + 2BE^2$ ....(ii)

এবং CF মধ্যমা

$\therefore\ AC^2 + BC^2 = 2AF^2 + 2CF^2$ ....(iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2BD^2 + 2AD^2 + 2CE^2 + 2BE^2 + 2BF^2 + 2CF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

[উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$ [D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore\ 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ .... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$$\therefore\ \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$$

বা, $\dfrac{GD}{AG} = \dfrac{1}{2}$

বা, $\dfrac{GD + AG}{AG} = \dfrac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\dfrac{AD}{AG} = \dfrac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AG$

$\therefore\ 4AD = 9AG^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

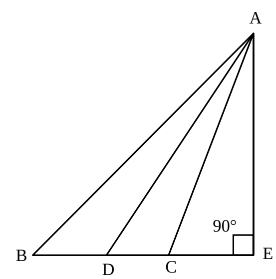
অনুরূপভাবে $4BE^2 = 9BG^2$ এবং $4CF^2 = 9CG^2$

এখন সমীকরণ (iv) থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AG^2 + 9BG^2 + 9CG^2$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3GA^2 + GB^2 + GC^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৬ **জুবায়ের তার স্যারের কাছ থেকে লম্ব অভিক্ষেপ সম্বন্ধে জানতে চাইলে তার স্যার এভাবে বললেন যে, কোনো একটি রেখার উপর অন্য একটি রেখা অবস্থান করলে প্রথমোক্ত রেখাটির যে ছায়া দ্বিতীয় রেখার উপর পড়ে, লম্বভাবে সে ছায়া দ্বারা প্রথমোক্ত রেখার অবস্থানকৃত অংশই প্রথম রেখার উপর দ্বিতীয় রেখার লম্ব অভিক্ষেপ।**



ক. লম্ব অভিক্ষেপ কী? চিত্রে BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপের নাম কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CE$. ৪

গ. D, BC এর মধ্যবিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **লম্ব অভিক্ষেপ :** কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সে বিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু বোঝায়।

চিত্রানুযায়ী, BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BE.

খ. **প্রমাণ :** ΔACE এর $\angle E = 90°$

সুতরাং পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ ....(i)

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$= AE^2 + (BC + CE)^2$

$= AE^2 + BC^2 + CE^2 + 2BC.CE$

$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CE$ [(i) নং থেকে মান বসিয়ে]

(প্রমাণিত)

গ. **প্রমাণ :** D, BC এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং $BD = CD$

ΔABEএর $\angle E = 90°$ সুতরাং $\angle ABE < 90°$

$\therefore\ \angle ADB$ হলো স্থূলকোণ।

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE$ ....(i)

আবার, ΔADE-এ $\angle E = 90°$

সুতরাং $\angle ADE$ হলো সূক্ষ্মকোণ

এখন সূক্ষ্মকোণী ΔACD-এ

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.CD.DE$ ....(ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE + AD^2 + CD^2 - 2.CD.DE$

$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DE - 2BD.DE$ [$\because$ BD = CD]

$= 2AD^2 + 2BD^2$

$= 2(AD^2 + BD^2)$

$\therefore\ AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৭ ▶ ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c এবং উহাদের উপর অঙ্কিত মধ্যমাগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f.

?

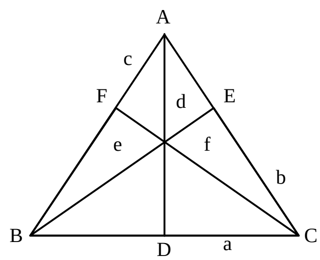
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী চিহ্নিত চিত্র আঁক এবং সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC এর $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$

এবং BC, CA এবং AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা তিনটি হলো $AD = d$, $BE = e$ এবং $CF = f$.

খ. **প্রমাণ :** ক নং প্রশ্নের চিত্র হতে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)\right\}$

বা, $b^2 + c^2 = 2\left(d^2 + \frac{1}{4}a^2\right)$

বা, $b^2 + c^2 = 2d + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2d^2$

বা, $2d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপভাবে, $e^2 = \dfrac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$

এবং $f^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

$\therefore\ d^2 + e^2 + f^2 = \dfrac{1}{4}\{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2$

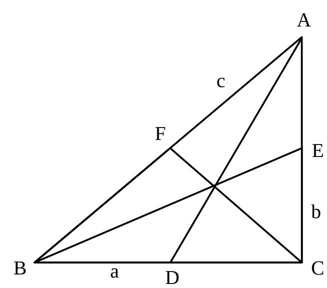
$+ 2(a^2 + b^2) - c^2\}$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$\therefore\ 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ. ধরি, ত্রিভুজটির $\angle C$ সমকোণ। এমতাবস্থায় চিত্রটি হয়–



$\angle C = 90°$ হলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $a^2 + b^2 = c^2$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + c^2$[উভয়পক্ষে c^2 যোগ করে]

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$

কিন্তু (খ) নং থেকে পাই,

$4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

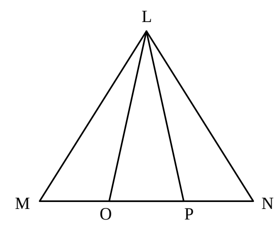
বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3.2c^2$

বা, $2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর জন্য, 2 (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি) = $3c^2$, যেখানে $\angle C = 90°$

অর্থাৎ সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৮ ▸



ΔLMN এর $LM = LN$ এবং $MO = OP = PN$.

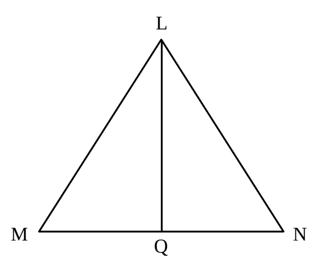
ক. ΔLMN এর MN বাহুর উপর মধ্যমা LQ হলে, দেখাও যে, $MN^2 = 4(LM^2 - LQ^2)$ ২

খ. প্রদত্ত চিত্রের MN বাহুর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $LN^2 - LP^2 = MP.NP$ ৪

গ. উদ্দীপকে প্রদত্ত তথ্য হতে প্রমাণ কর যে, $2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$ ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. যেহেতু ΔLMN একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ সুতরাং LQ মধ্যমা MN এর উপর লম্ব হবে।



ΔLQM এ–

$\therefore LQ^2 + QM^2 = LM^2$

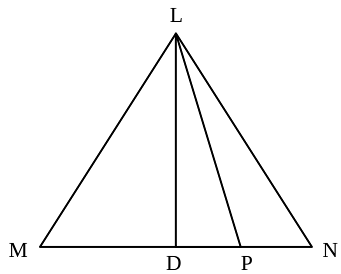
বা, $LQ^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = LM^2 \left[\because MQ = \frac{MN}{2}\right]$

বা, $\frac{MN^2}{4} = LM^2 - LQ^2$

বা, $MN^2 = 4LM^2 - 4LQ^2$

$= 4(LM^2 - LQ^2)$ (দেখানো হলো)

খ.



দেওয়া আছে, LMN সমবাহু ত্রিভুজের MN বাহুর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $LN^2 - LP^2 = MP.NP$

অঙ্কন : L থেকে ভূমি MN এর উপর LD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : LPD সমকোণী ত্রিভুজে,

$LP^2 = LD^2 + DP^2$.......(i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

আবার, LMD সমকোণী ত্রিভুজে,

$LM^2 = LD^2 + MD^2$ ....(ii)

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$LM^2 - LP^2 = LD^2 + MD^2 - LD^2 - DP^2$

$= MD^2 - DP^2$

$= (MD + DP) (MD - DP)$

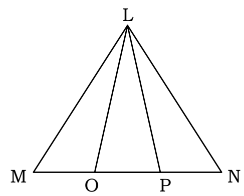
$= MP(DN - DP)$

[$\because$ MD + DP = MP এবং DN = MD]

$= MP.NP$

$\therefore LM^2 - LP^2 = MP.NP$ (প্রমাণিত)

গ. **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, LMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের LM = LN এবং ভূমি MN, P ও O বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$



প্রমাণ : ΔLMP-এ $MO = OP$

তাহলে, LO, ΔLMP এর মধ্যমা যা MP-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore LM^2 + LP^2 = 2LO^2 + 2OP^2$ ....(i)

আবার, LP, ΔLON এর মধ্যমা যা ON-কে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore LN^2 + LO^2 = 2LP^2 + 2OP^2$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$LM^2 + LN^2 + LP^2 + LO^2 = 2LO^2 + 2LP^2 + 4OP^2$

বা, $LM^2 + LN^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$

$\therefore 2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$ [$\because LM = LN$]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৯ ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB। স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC, BC এবং BC রেখার উপর AC রেখার লম্ব অভিক্ষেপ CD.

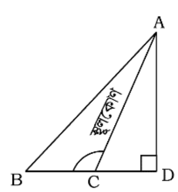
ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ উপরের তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ৪

গ. ΔABC-এ $CE \perp AB$ এবং P, CE এর উপর যেকোনো বিন্দু ও $BC > AC$ হলে প্রমাণ কর যে, $BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$. ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB। স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC রেখার উপর AC রেখার লম্ব অভিক্ষেপ CD.

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

প্রমাণ : ΔABD-এর $\angle D$ = এক সমেকাণ[$\because AD \perp BD$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC + CD)^2$

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$

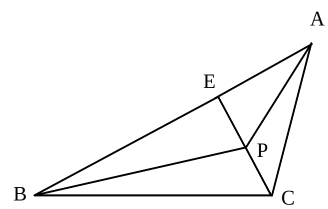
$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$

আবার, ΔACD এর $\angle D$ = এক সমকোণ হওয়ায়

$AD^2 + CD^2 = AC^2$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (**প্রমাণিত**)

গ.



ΔABC-এ $CE \perp AB$ এবং P, CE এর উপর যেকোনো বিন্দু ও $BC > AC$। প্রমাণ করতে হবে যে, $BP^2 – AP^2 = BC^2 – AC^2$

প্রমাণ : $CE \perp AB$ বলে $\angle BEP = \angle AEP$ = এক সমকোণ।

এখন, ΔBPE-এ $\angle BEP$ = এক সমকোণ

$\therefore BP^2 = BE^2 + PE^2$

তদ্রুপ $AP^2 = AE^2 + PE^2$

$\therefore BP^2 – AP^2 = BE^2 + PE^2 – AE^2 – PE^2$

$= BE^2 – AE^2$ ....(i)

আবার, ΔBEC-এ $\angle BEC$ = এক সমকোণ।

$\therefore BC^2 = BE^2 + CE^2$

তদ্রুপ $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$\therefore BC^2 – AC^2 = BE^2 + CE^2 – AE^2 – CE^2$

$= BE^2 - AE^2$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং তুলনা করে পাওয়া যায়,

$BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১০ ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC বা BC এর বর্ধিতাংশের উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

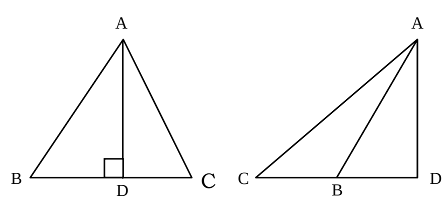
ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ৪

গ. ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$. ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র : ১ চিত্র : ২

ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC বা BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। অতএব BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

কিন্তু, $BD = BC - DC$ [চিত্র ১]

অথবা, $BD = DC - BC$ [চিত্র ২]

$\therefore BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC.CD$

$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$

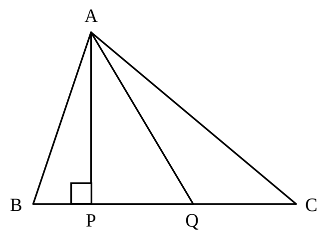
$= AD^2 + DC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

আবার, ΔADC এর $\angle D$ এক সমকোণ হওয়ায়

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ (প্রমাণিত)

গ.



ΔABC এর BC বাহু P ও Q সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

প্রমাণ : ΔABQ–এ AP, BQ এর উপর মধ্যমা। $[\because BP = PQ]$

$\therefore AB^2 + AQ^2 = 2AP^2 + 2PQ^2$ ....(i)

আবার, ΔAPC–এ AQ, PC এর উপর মধ্যমা $[\because PQ = QC]$

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AP^2$ ....(ii)

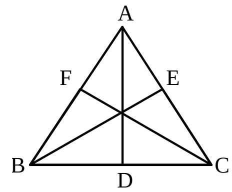
সমীকরণ (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 - AP^2 + 2AQ^2 - AQ^2 + 4PQ$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১১ ▸



চিত্রে ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমা।

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3(BC^2 + CA^2 + AB^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

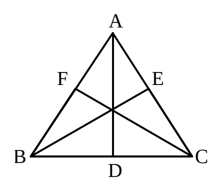
১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমা এবং $AD \perp BC$। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

খ. অনুশীলনী–৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ।

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

∴ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ....(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ....(ii)

$BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2BD^2 + 2CE^2 + 2BF^2$

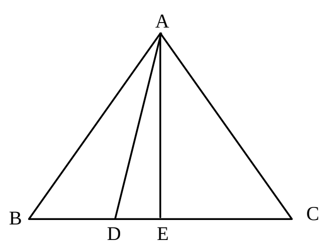
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4BD^2 + 4CE^2 + 4BF^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$ [$\because$ BD = DC, CE = AE, BF = AF]

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১২



উপরিউক্ত চিত্রে AD মধ্যমা এবং $AE \perp BC$

ক. উক্ত চিত্রের আলোকে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

গ. ΔABC-এ $AB = AC$, $AD \perp BC$ এবং P, BC এর উপর যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ ৪

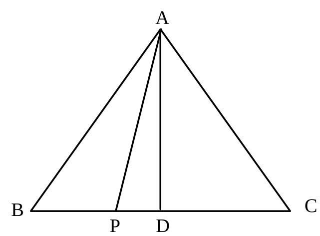
১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে ΔABC এ AD মধ্যমা এবং $AE \perp BC$। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

খ. অনুশীলনী–৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ। বোর্ড বই পৃষ্ঠা–৬৭।

গ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এ $AB = AC$, $AD \perp BC$ এবং ভূমি BC-এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.\ PC$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ [$\because$ $AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (i)

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because$ $AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)\ (BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD)\ BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ BD = CD]

বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore$ $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৩ ΔABC-এর $\angle C$= এক সমকোণ এবং AD মধ্যমা।

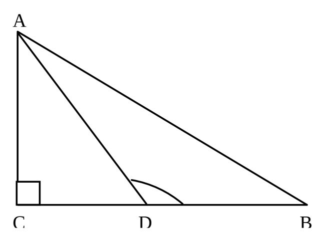
ক. উপরিউক্ত তথ্যের ভিত্তিতে চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

গ. ΔABC-এর AD, BE ও CF তিনটি মাধ্যমা হলে প্রমাণ কর যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



খ. ΔABC এর $\angle C = 90°$

অর্থাৎ, সমকোণী ΔABC এর অতিভুজ = AB

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$ [$\because BC = BD + CD$]

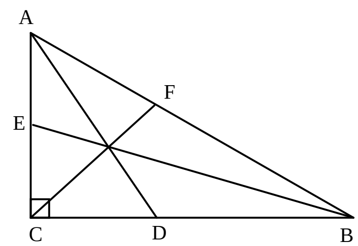
$= AC^2 + BD^2 + 2BD.CD + CD^2$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [$\because \Delta ACD$ এর $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC -এ $\angle C = 90°$

$\therefore\ AB^2 = AC^2 + BC^2$

এখন, ΔABC এ AD মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

$$= 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2BC}\right)^2 [\because\ BD = \frac{1}{2}BC]$$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD = (AB^2 + AC^2) - \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{2}$ .... (i)

অনুরূপভাবে পাই,

$2BE^2 = \frac{(AB^2 + BC^2) - AC^2}{2}$ ....(ii)

$2CF^2 = \frac{(AC^2 + BC^2) - AB^2}{2}$ ....(ii)

(i) + (ii) + (iii) নং হতে পাই,

$2(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$= \frac{4(AB^2 + BC^2 + AC^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(AB^2 + AB^{2)}}{2}$ $[\because\ AB^2 = AC^2 + BC^2]$

$= \dfrac{3.2AB^2}{2}$

$\therefore\ 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৪ ▶ ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

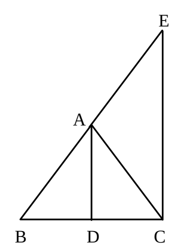
ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC ৪

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ ৪

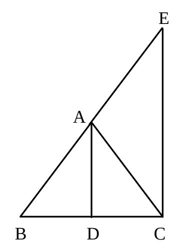
১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



প্রদত্ত তথ্যানুযায়ী চিত্রটি অঙ্কন করা হলো।

খ. মনে করি, AD রেখাংশ ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BA : AC



অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ :

ধাপ **যথার্থতা**

১. যেহেতু $DA \parallel CE$ এবং BC ও AC [অঙ্কন]

তাদের ছেদক $\therefore \angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

২. কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$ [স্বীকার]

$\angle AEC = \angle ACE$

$\therefore AC = AE$

৩. আবার, যেহেতু $AD \parallel CE$ [উপপাদ্য–১]

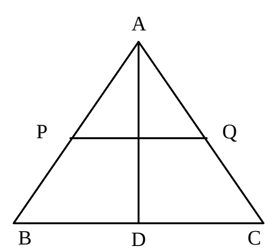
$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

৪. কিন্তু $AE = AC$ [ধাপ–২]

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$$

অর্থাৎ $BD : DC = BA : AC$ **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BP : CQ$



প্রমাণ : ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD

$\therefore BD : DC = AB : AC$ .... (i)

আবার, $PQ \parallel BC$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$$ [উপপাদ্য –১]

বা, $\frac{AP}{BP} + 1 = \frac{AQ}{CQ} + 1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$

বা, $AB : AC = BP : CQ$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$BD : DC = BP : CQ$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৫ ΔABC এর $\angle B = 90°$ এবং BC, AC ও AB এ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

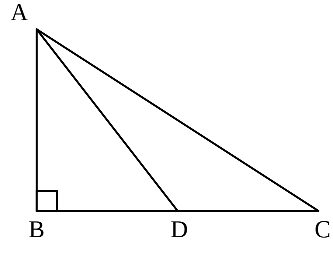
ক. প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AD^2 + 3BD^2$ ২

খ. উদ্দীপকের ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ΔABC এর $\angle B = 90°$. BC বাহুর মধ্যবিন্দু D প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AD^2 + 3BD^2$.



প্রমাণ : ΔABD এ, $\angle B = 90°$

$\therefore AD^2 = AB^2 + BD^2$........................ (i)

আবার, ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle B = 90°$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= AB^2 + (2BD)^2$ [D, BC এর মধ্যবিন্দু $\therefore BC = 2BD$)

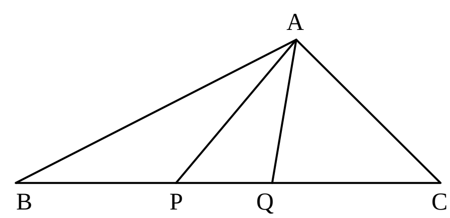
$= AB^2 + 4BD^2$

$= AB^2 + BD^2 + 3BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [(i) নং হতে]

$\therefore AC^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

খ.



দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ BP = PQ = QC। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

প্রমাণ : ΔABQ এর মধ্যমা AP[$\because$ BP = PQ]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ .... (i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ[$\because$ PQ = QC]

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ .... (ii)

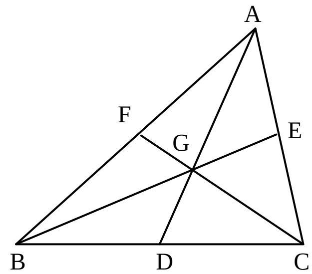
এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

প্রমাণ : ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$................. (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ .... (ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i) , (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে, 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৬ ▸ ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AD, BC এর মধ্যমা।

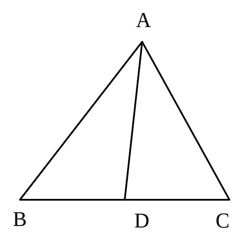
ক. উপরের তথ্যের আলোকে ত্রিভুজ অঙ্কন করে চিহ্নিত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ ৪

গ. $\angle C = 90^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

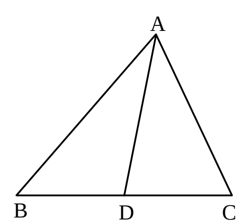
১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AD, BC বাহুর মধ্যমা।



খ. অনুশীলনী ৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ।

গ.



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; AD. BC এর মধ্যমা এবং $\angle C = 90^\circ$

প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ : পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .... (i)

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $AD^2 = AC^2 + CD^2$

বা, $AD^2 = AC^2 + BD^2$ [$\because$ D. BC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $AC^2 + BD^2 = AD^2$

বা, $AC^2 = AD^2 - BD^2$

সমীকরণ (i) নং হতে, $AB^2 = AD^2 - BD^2 + BC^2$

$= AD^2 - BD^2 + (2BD)^2$

$= AD^2 - BD^2 + 4BD^2$

$\therefore\ AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▶ ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. O বিন্দুটির নাম কি? O, AD কে কি অনুপাত বিভক্ত করে? ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

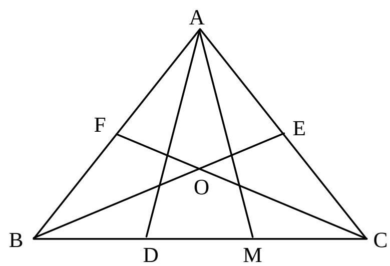
গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO + CO^2)$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. O বিন্দুটির নাম ভরকেন্দ্র।

O বিন্দু AD কে 2 : 1 অনুপাত বিভক্ত করে।

খ.



ΔABC এ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

অঙ্কন : A হতে BC এর ওপর AM লম্ব টানি।

প্রমাণ : ΔABC এ $\angle ADB$ স্থূলকোণ

$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DM$ ....(i)

আবার, $\angle ABC$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.DM$

$= AD^2 + BD^2 - 2BD.DM$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BD.DM - 2BD.DM$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ **(দেখানো হলো)**

গ. সমাধান ‘খ’ এর চিত্র হতে পাই,

ΔABC এ AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O থেকে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্ব যথাক্রমে OA, OB ও OC.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

প্রমাণ : ΔABC এ AD মধ্যমা

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$ ....(i)

অনুরূপভাবে, $AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + 2CE^2$ ....(ii)

এবং $AC^2 + BC^2 = 2CF^2 + 2AF^2$ ....(iii)

সমীকরণ, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2BC^2 + 2AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2AF^2.$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = 4AB^2 + 4BD^2 + 4BE^2 + 4CE^2 + 4CF^2 + 4AF^2.$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2AF)^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = BC^2 + AC^2 + AB^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $4AB^2 + AB^2 + 4BC^2 - BC^2 + 4AC^2 - AC^2 = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $3AB^2 + 3BC^2 + 3AC^2 = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ....(iv)

আবার, O মধ্যমা তিনটির ছেদ বিন্দু বলে মধ্যমাত্রয় ভরকেন্দ্র পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$$\therefore\ OA = \frac{2}{3} AD$$

বা, $AD = \frac{3}{2} OF$

আবার, $OB = \frac{2}{3} BE$

বা, $BE = \frac{3}{2} OB$

এবং $OC = \frac{2}{3} CF$

বা, $CF = \frac{3}{2} OC$

এখন, সমীকরণ (iv) হতে পাই,

$$3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4\left\{\left(\frac{3}{2} OA\right)^2 + \left(\frac{3}{2} OB\right)^2 + \left(\frac{3}{2} OC\right)^2\right\}$$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4\left(\frac{9}{4} OA^2 + \frac{9}{4} OB^2 + \frac{9}{4} OC^2\right)$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 9(A^2 + OB^2 + OC^2)$

$\therefore\ AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. এবং $AD \perp BC$.

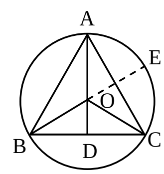
ক. AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য ব্যবহার করে ABC ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এবং বৃত্তক্ষেত্র ABC–এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, 'O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABC সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত। পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. এবং $AD \perp BC$।



$\therefore AD = OA + OD$

$= OA + \dfrac{OA}{2}$ [O বিন্দুতে AD, 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়]

$= \left(4 + \dfrac{4}{2}\right)$ সে. মি.

$= 6$ সে. মি.

নির্ণেয় AD এর দৈর্ঘ্য 6 সে. মি.।

খ. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $AB \cdot AC = BE \cdot AD$

বা, $AB^2 = 8 \times 6$ বর্গ সে. মি. [ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AB = AC$ এবং $BE = 2.OB = 2.4$ সে. মি. $= 8$ সে. মি.]

বা, $AB^2 = 48$ বর্গ সে. মি.

বা, $AB = \sqrt{48}$ সে. মি.

$\therefore AB = 4\sqrt{3}$ সে. মি.

ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সে. মি. **(Ans.)**

গ. ‘খ’ হতে,

সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4\sqrt{3}$ সে. মি.।

আমরা জানি,

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2$ বর্গ সে. মি.

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 48$ বর্গ সে. মি.

$= 12\sqrt{3}$ বর্গ সে. মি.

$= 20.785$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক। (যেখানে r বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

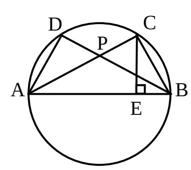
$= 3.1416 \times 4^2$ বর্গ সে. মি. [$\because$ r = 4]

$= 3.1416 \times 16$ বর্গ সে. মি.

$= 50.2656$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও বৃত্তক্ষেত্র ABC–এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{20.785}{50.2656} = \frac{1}{2.42} = 1 : 2.42$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩

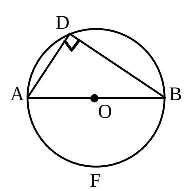


ক. দেখাও যে, $\angle ADB = 90°$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AE.BE = CE^2$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান



ক. O কেন্দ্রিক বৃত্তের AB ব্যাস। ব্যাসের যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর F বিন্দু নিই।

এখন AFB চাপের উপর দণ্ডায়মান।

বৃত্তস্থ $\angle ADB = \frac{1}{2}$

কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$

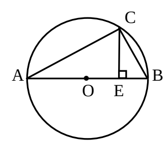
$= \frac{1}{2} \times$ এক সরল কোণ

$= \frac{1}{2} \times 180°$

$= 90°$

$\therefore \angle ADB = 90°$ **(দেখানো হলো)**

খ.



AB ব্যাস $\therefore \angle ACB = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী এবং $CE \perp AB$

এখন, ΔACE ও ΔBCE এ

$\angle AEC = \angle BEC$ [সমকোণ]

$\angle CAE = \angle BCE =$ [প্রত্যেক $\angle ACE$ এর পূরক কোণ]

অবশিষ্ট $\angle ACE =$ অবশিষ্ট $\angle CBE$

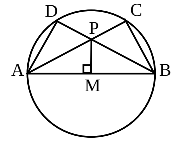
$\therefore \Delta ACE$ ও ΔBCE সদৃশকোণী তাই এরা সদৃশ

$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{AE}{CE}$

বা, $CE.CE = AE.BE$

$\therefore CE^2 = AE.BE$ **(প্রমাণিত)**

গ.



$PM \perp AB$ অঙ্কন করি।

A, M, P, D সমবৃত্তস্থ। কারণ $\angle AMP + \angle ADP$ = 1 সমকোণ + 1 সমকোণ = 2 সমকোণ।

উক্ত AMPD বৃত্তের AM ও DP জ্যা বহিঃস্থ B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ AB.BM = BD.BP...............(i)

আবার, B, M, P, C সমবৃত্তস্থ। কারণ $\angle BMP + \angle PCB$ = 1 সমকোণ + 1 সমকোণ = 2 সমকোণ।

উক্ত BMPC বৃত্তের BM ও CP জ্যা বহিঃস্থ A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ AB.BM = AC.AP...............(ii)

(i) ও (ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

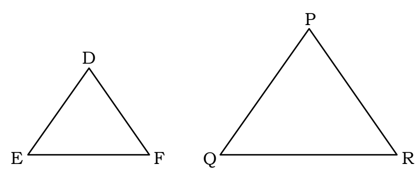
AB.BM + AB.AM = BD.BP +AC.AP

বা, AB(BM + AM) = AC.AP + BD.BP

বা, AB.AB = AC.AP + BD.BP

$\therefore AB^2 = AC.AP + BD.BP$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৪



ΔDEF ও ΔPQR সদৃশকোণী।

ক. ত্রিভুজের সদৃশতা বলতে কী বোঝ? ২

খ. ΔDEF ও ΔPQR সদৃশ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PQR ত্রিভুজের QR বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা PQ ও PR কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ত্রিভুজের সদৃশতার দুইটি ক্ষেত্র

১. কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা

২. বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা

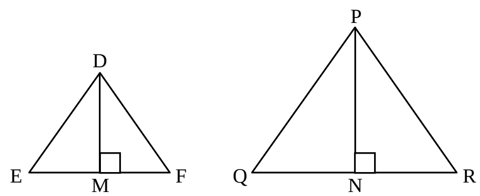
কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা : ত্রিভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলা হয়।

বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা : সমানসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের একটির শীর্ষ বিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, ত্রিভুজ দুইটির–

a. অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং

b. অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাত সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) ত্রিভুজ বলা হয়।

খ.



মনে করি, ΔDEF ও ΔPQR সদৃশ এবং তাদের দুইটি অনুরূপ বাহু EF ও QR।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \dfrac{EF^2}{QR^2}$

অঙ্কন : EF ও QR এর উপর যথাক্রমে DM ও PN লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔDEF এর ভূমি = EF এবং উচ্চতা = DM

$$\therefore \Delta DEF = \frac{1}{2} \times EF \times DM$$

$$\left[\because \text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}\right]$$

আবার, ΔPQR এর ভূমি = QR এবং উচ্চতা = PN

$$\therefore \Delta PQR = \frac{1}{2} \times QR \times PN$$

$$\therefore \frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2} \times EF \times DM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{EF.DM}{QR.PN}$$

আবার, ΔDEM ও ΔPQN-এ

$\angle DME = \angle PNQ$ = এক সমকোণ

$\angle DEM = \angle PQN$

$\angle EDM = \angle QPN$

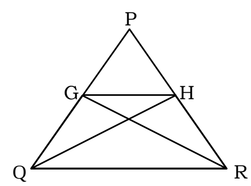
$\therefore$ ΔDEM ও ΔPQN সদৃশকোণী তাই সদৃশ।

$$\therefore \frac{EF}{QR} = \frac{DM}{PN} = \frac{EF}{QR}$$

$$\therefore \frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF}{QR} \times \frac{EF}{QR} = \frac{EF^2}{QR^2}$$

$$\therefore \frac{\Delta DEF}{PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, PQR ত্রিভুজের QR বাহুর সমান্তরাল GH রেখাংশ PQ ও PR-কে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PG : GQ = PH : HR$

অঙ্কন : G, R ও G, H যোগ করি।

প্রমাণ : ΔPGH এবং ΔGHQ একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHQ} = \frac{PG}{GQ}$$

আবার, ΔPGH এবং ΔGHR একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHR} = \frac{PH}{HR}$$

$\therefore$ $\Delta GHR = \Delta GHQ$

[$\because$ একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত]

$$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHQ} = \frac{\Delta PGH}{\Delta GHR}$$

$$\therefore \frac{PG}{GQ} = \frac{PH}{HR}$$

অর্থাৎ PG : GQ = PH : HR (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৫ ▸ ΔABC-এ ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

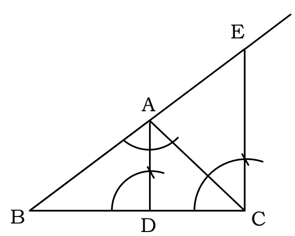
ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC ৪

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ ৪

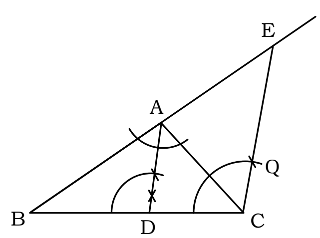
৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC-এ ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। তথ্য অনুসারে চিত্রটি আঁকা হলো।

খ.



ΔABC–এ ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BA : AC

প্রমাণ : যেহেতু AD || CE এবং AC তাদের ছেদক।

$\therefore \angle DAC = \angle ACE$ [একান্তর কোণ]

আবার, AD || CE এবং BE তাদের ছেদক

$\therefore \angle BAD = \angle AEC$

কিন্তু $\angle BAD = \angle DAC$ [কারণ AD, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$

$\therefore \Delta AEC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অর্থাৎ AE = AC.

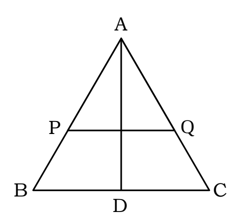
এখন, ΔBCE-এ AD || CE

$\therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$

বা, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$ [$\because$ AE = AC]

$\therefore$ BD : DC = BA : AC (**প্রমাণিত**)

গ.



ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BP : CQ

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে বলে,

BD : DC = AB : AC [খ অনুসারে]

বা, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ .... (i)

যেহেতু PQ || BC

$\therefore \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AQ}{CQ}$

বা, $\dfrac{AP + BP}{BP} = \dfrac{AQ + CQ}{CQ}$ [যোজন করে]

বা, $\dfrac{AB}{BP} = \dfrac{AC}{QC}$

বা, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BP}{CQ}$

বা, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BP}{CQ}$ [(i) নং হতে]

সুতরাং BD : DC = BP : CQ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৬ **ΔABC এর পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব।**

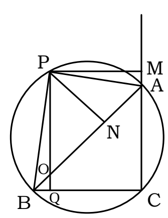
ক. চিত্র এঁকে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের নাম লেখ। ২

খ. PQ ও BN এর ছেদবিন্দু O হলে, প্রমাণ কর যে, PO.OQ = BO.ON ৪

গ. প্রমাণ কর যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ। ৪

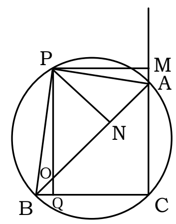
৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্রে, ΔABC-এ পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব। P, A ও P, B যোগ করি। ফলে APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ অঙ্কিত হলো।

খ.



উপরিউক্ত চিত্রে PQ এবং BN পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PO.OQ = BO.ON$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $PN \perp AB$ এবং $PQ \perp BC$

$\therefore \angle PQB = \angle PNB$ [সমকোণ বলে]

এখন ΔPON এবং ΔBOQ এর মধ্যে $\angle PNO = \angle OQB$

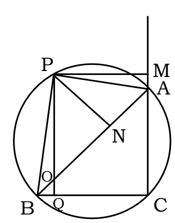
এবং $\angle PON = \angle BOQ$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{PN}{BQ} = \frac{PO}{BO} = \frac{ON}{OQ}$$

$\therefore PO.OQ = BO.ON$ **(প্রমাণিত)**

গ.



প্রমাণ করতে হবে যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : Q, N; N, M এবং P, B যোগ করি।

প্রমাণ : PNAM চতুর্ভুজে $\angle PNA + \angle PMA$ = দুই সমকোণ

[$\because PN \perp AB$ এবং $PM \perp AM$]

$\therefore$ PNAM চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore$ PM চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle PAM$ = বৃত্তস্থ $\angle PNM$

আবার, $PQ \perp BC$ এবং $PN \perp AB$

$\therefore \angle PNB = \angle PQB$ = দুই সমকোণ

$\therefore$ PNQB চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore \angle PNQ + \angle PBQ = 180°$

বা, $\angle PNQ = 180° - \angle PBQ$ .... (i)

আবার, APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজটিতে

$\angle PAC + \angle PBC = 180°$

বা, $\angle PAC = 180° - \angle PBC = 180° - \angle PBQ$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে পাই,

$\angle PNQ = \angle PAC = 180° - \angle PAM$

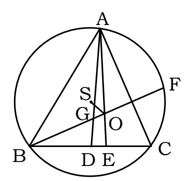
$= 180° - \angle PNM \quad [\because \angle PAM = \angle PNM]$

$\therefore \angle PNQ + \angle PNM = 180°$

$\therefore$ QN ও NM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore$ Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৭ ▶ ΔABC এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং BC এর মধ্যবিন্দু D.



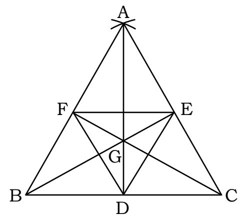
ক. ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে কত অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. দেখাও যে, G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র। ৪

গ. যদি ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর AD, BE ও CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF ৪

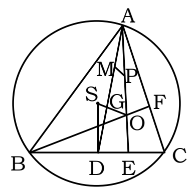
৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্রে G হলো ΔABC এর ভরকেন্দ্র। ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

খ.



অঙ্কন : AO এর মধ্যবিন্দু P বিন্দু দিয়ে OS এর সমান্তরাল PM আঁকি, যেন তা AD কে M বিন্দুতে ছেদ করে। S, D যোগ করি।

প্রমাণ : AO এর মধ্যবিন্দু P এবং $MP \parallel OS$

$\therefore$ AG এর মধ্যবিন্দু M অর্থাৎ $AM = MG$

আবার, APM ও DGS ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle DGS$ = বিপ্রতীপ $\angle AGO = \angle AMP$

$\angle SDG = \angle MAP$ $\quad [\because SD \parallel AE]$

এবং $SD = \frac{1}{2} AO = AP$

$\therefore$ APM ও DGS ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

$\therefore AM = GD$

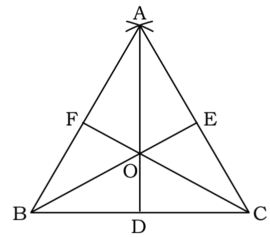
অর্থাৎ $AM = MG = GD$

$\therefore GD = \frac{1}{3} AD$, অর্থাৎ $GD = \frac{1}{2} GA$

যেহেতু AD একটি মধ্যমা এবং G বিন্দু AD মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

গ.



প্রমাণ : ΔBOF ও ΔCOE এ

$\angle OFB = \angle OEC = 90°$ [$\because CF \perp AB, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOF = \angle COE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}$

বা, $BO.OE = CO.OF$ .... (i)

আবার, ΔBOD ও ΔAOE-এ

$\angle ODB = \angle OEA = 90°$ [$\because AD \perp BC, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOD = \angle AOE$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BO}{AO} = \frac{OD}{OE}$

বা, $AO.OD = BO.OE$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$AO.OD = BO.OE = CO.OF$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন–৮ ▸ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় ও বাহুগুলোর মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ক একটি উপপাদ্য রয়েছে। উপপাদ্যটি টলেমির উপপাদ্য নামে পরিচিত।

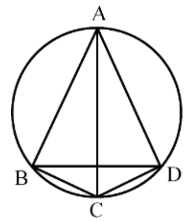
ক. টলেমির উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। ২

খ. উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণ কর। ৪

গ. AB ব্যাসের উপর অর্ধবৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

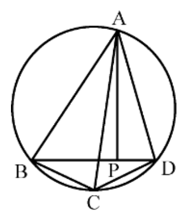
ক. **টলেমির উপপাদ্য :** কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণ হলে টলেমির উপপাদ্য অনুসারে,

$AC.\ BD = AB.CD + BC.AD$

খ.



বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

অঙ্কন : A বিন্দুতে DA রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান $\angle DAP$ অঙ্কন করি যেন AP রেখা BD কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কনানুসারে]

প্রত্যেকের সাথে $\angle PAC$ যোগ করলে

$\angle BAC + \angle PAC = \angle PAD + \angle PAC$

অর্থাৎ $\angle BAP = \angle CAD$

$\angle ABD = \angle ACD$ [যেহেতু একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলো সমান]

$\therefore \Delta ABP$ এবং ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$

[যেহেতু সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

অর্থাৎ $AC.BP = AB.CD$ .... (i)

আবার, $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ADP = \angle ACB$ [যেহেতু একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলো সমান]

$\therefore \Delta ABC$ এবং ΔAPD সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{PD}{BC}$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

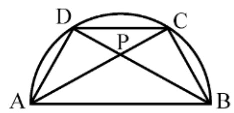
অর্থাৎ $AC . PD = AD.BC$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB.CD + BC.AD = AC.BP + AC.PD = AC(BP + PD) = AC.BD$

অর্থাৎ $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ (**প্রমাণিত**)

গ.



অঙ্কন : A, D; B, C ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCPD ও ΔAPB–এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC এর উপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\dfrac{AP}{DP} = \dfrac{BP}{CP}$

বা, $AP.CP = BP.DP$

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$

[উভয় পক্ষে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP.(AP + CP) = BP.DP + AD^2 + DP^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$

$\because AP^2 = AD^2 + DP^2$]

বা, $AP.AC = DP (BP+DP) + AD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 – BD^2$

[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

বা, $AP.AC = AB^2 - BD\ (BD - DP)$

বা, $AP.AC = AB^2 - BD.BP$

$\therefore\ AB^2 = AC.AP + BD.BP$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৯ **সূক্ষ্মকোণী ΔABC এর A, B, C শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। D ও E, E ও F এবং F ও D যোগ করায় পদে ত্রিভুজ DEF উৎপন্ন হয়েছে।**

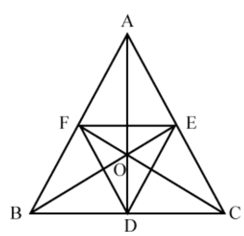
ক. বর্ণনা অনুযায়ী চিত্র অঙ্কন করে পাদ ত্রিভুজ চিহ্নিত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AD, BE ও CF পাদ ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক। ৪

গ. দেখাও যে, পাদত্রিভুজ অঙ্কনের ফলে উৎপন্ন ত্রিভুজগুলো মূল ত্রিভুজের সদৃশ। ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC–এ AD, BE ও CF যথাক্রমে শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব। D ও E, E ও F এবং F ও D যোগ করায় ΔDEF উৎপন্ন হলো। তাহলে, ΔDEF ই ΔABC ত্রিভুজের পাদ ত্রিভুজ।

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, AD, BE ও CF যথাক্রমে $\angle FDE$, $\angle DEF$ এবং $\angle EFD$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : OECD চতুর্ভুজে $\angle ODC$ + উহার বিপরীত $\angle OEC = 2$ সমকোণ, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, C, E বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই OE চাপের উপর অবস্থিত $\angle ODE = \angle OCE$

আবার, OFBD চতুর্ভুজ $\angle ODB$ + উহার বিপরীত $\angle OFB = 2$ সমকোণ। কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, B, F বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত $\angle ODF = \angle OBF$

ΔABE ও ΔACF থেকে, $\angle OBF$ ও $\angle OCE$ উভয়ই $\angle BAC$ এর পূরক কোণ।

$\therefore \angle OCE = \angle OBF$

$\therefore \angle ODE = \angle OCE = \angle OBF = \angle ODF$

$\therefore$ AD রেখাংশ $\angle FDE$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিণ্ডক।

গ. প্রমাণ করতে হবে যে, ΔAEF, ΔBDF, ΔCDE মূল ΔABC এর সদৃশ।

প্রমাণ : O, D, C, E সমবৃত্ত।

[$\because \angle ODC + \angle OEC = 90° + 90° = 180°$]

$\therefore \angle ODE = \angle OCE$ [একই চাপস্থিত কোণ]

$\therefore \angle EDC = 90° - \angle ODE = 90° - \angle OCE = 90° - \angle FCA$

$= \angle BAC$

[$\because \angle AFC = 90°$, $\therefore \angle BAC + \angle FCA = 90°$

অর্থাৎ, $\angle BAC = 90° - \angle FCA$]

আবার, ΔACF-এ $\angle AFC = 90°$ বলে,

$\angle ACF + \angle FAC + 90° = 180°$

বা, $\angle FCA + \angle FAC = 90°$

বা, $\angle FAC = 90° - \angle FCA$

বা, $\angle BAC = 90° - \angle FCA$

$\therefore \angle EDC = \angle BAC$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$\angle DEC = \angle BAC$

এখন, ΔABC ও ΔCDE–এ

$\angle EDC = \angle BAC$ এবং

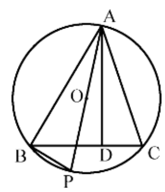
$\angle DEC = \angle ABC$

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, ΔBDF ও ΔAEF ত্রিভুজদ্বয় ও ΔABC–এর সদৃশ।

$\therefore$ $\Delta AEF, \Delta BDF, \Delta CDE$ ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০



ক. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। ৪

গ. চিত্র হতে দেখাও যে, $AD.BC = AB.DC + BP.AC$ ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য :** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদের ছেদবিন্দু হতে কোনো বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

খ. **অঙ্কন :** B, P যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ AB এর জন্য $\angle ADB$ ও $\angle ACB$ বা, $\angle ACB$ বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

AP বৃত্তের ব্যাস বলে $\angle APB$ অর্ধঃবৃত্তস্থ কোণ এবং BC বাহুর উপর AD লম্ব হওয়ায় $\angle ADC$ সমকোণ।

এখন ΔAPB ও ADC এর মধ্যে $\angle APB = \angle ACD$

[একই বৃত্তাংস্থিত কোণ সমান]

$\angle ABP$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = $\angle ADC$

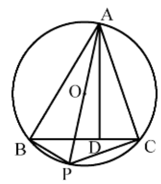
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle CAD$

$\therefore$ ΔABP ও ΔADC সদৃশকোণী

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$

সুতরাং AB.AC = AP.BD

গ.



মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABPC চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও PC এবং BP ও AC। AP এবং BC চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, AP.BC = AB.PC + BP.AC

অঙ্কন : $\angle BAP$ কে $\angle CAP$ এর ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AC রেখাংশের সাথে $\angle BAP$ এর সমান করে $\angle CAD$ আঁকি যেন AD রেখা BC কর্ণকে D বিন্দুতে ছেদ করে। P, C যোগ করি।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAP = \angle CAD$

উভয়পক্ষে $\angle PAD$ যোগ করে পাই,

$\angle BAP + \angle PAD = \angle CAD + \angle PAD$

অর্থাৎ $\angle BAD = \angle PAC$

এখন ΔABD ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle ACD = \angle APC$

$\angle ABC = \angle APC$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ADB$ = অবশিষ্ট $\angle ACP$

$\therefore$ ΔABC ও ΔAPC সদৃশকোণী

$\therefore \frac{BD}{PC} = \frac{AB}{AP}$

অর্থাৎ AP.BD = AB.PC .... (i)

আবার, ΔABP ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle DAC$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ACD = \angle APB$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং ΔABP ও ΔADC সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AC}{AP} = \frac{DC}{BP}$$

অর্থাৎ $AP.DC = BP.AC$ .... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AP.BD + AP.DC = AB.PC + BP.AC$

বা, $AP(BD + DC) = AB.PC + BP.AC$

বা, $AP.BC = AB.PC + BP.AC$ [যেহেতু $BD + DC = BC$]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১১ ▸ ΔABC এর S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এবং AP এর মধ্যমা।

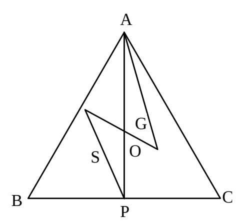
ক. ΔABC অঙ্কন কর এবং OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্কটি লেখ। ২

খ. ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র G হলে দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. ΔABC এর $\angle$C সমকোণ হলে এবং C থেকে অতিভুজের উপর লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD{\cdot}BD$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক.

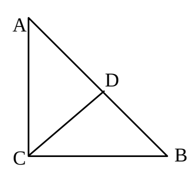


ΔABC–এর S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এবং AP এর মধ্যমা।

OA ও SP এর মধ্যে সম্পর্কটি হলো: OA = 2SP **(Ans.)**

খ. অনুশীলনী ৩·২ এর উপপাদ্য–৩·১০, পৃষ্ঠা–৭২ দ্রষ্টব্য।

গ.



দেওয়া আছে ΔABC–এর $\angle C = 90^\circ$। CD, AB এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.BD$

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle C = 90^\circ$

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ ....(i)

আবার, ΔADC-এ $\angle ADC = 90^\circ$ [$\because CD \perp AB$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ$ ....(ii)

[∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle ACD + \angle BCD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle BCD = \angle CAD$

এখন, ΔADC ও ΔBDC –এ

$\angle ADC = \angle BDC = 90°$

$\angle CAD = \angle BCD$

এবং অবশিষ্ট $\angle ACD$ = অবশিষ্ট $\angle CBD$

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$$

অর্থাৎ, $CD^2 = AD.BD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১২ ▸ AB = 6 cm ব্যাস বিশিষ্ট অর্ধ বৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. অর্ধবৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AE. EC = BE.ED ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AE + BD.BE$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বৃত্তের ব্যাস, d = 6cm

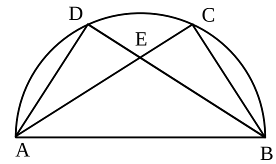
ব্যাসার্ধ, r = 3cm

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

$\therefore$ অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\pi r^2}{2}$

$$= \frac{3{\cdot}1416 \times 3^2}{2} = 14{\cdot}14\text{cm}^2$$ **(Ans.)**

খ.



এখানে, ABCD একটি অর্ধবৃত্ত এবং AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

AE.EC = BE.ED

অঙ্কন : A, D এবং B , C যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBCE এর মধ্যে

$\angle AED = \angle BEC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle ADE = \angle BCE$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

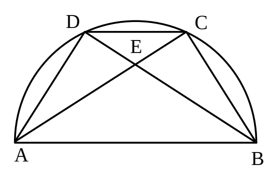
$\angle DAE = \angle CBE$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore \Delta ADE$ ও ΔBCE সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{DE}{ED}$

$\therefore$ AE. EC = BE. ED (**প্রমাণিত**)

গ.



দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB^2 = AC. AE + BD. BE

অঙ্কন : C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCED এ ΔAEB এ

$\angle EDC = \angle EAB$ [একই চাপ BC -এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DEC = \angle AEB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$$

বা, $AE. CE = BE. DE$

বা, $AE. CE + AE^2 = BE. DE + AE^2$ [উভয়পক্ষে AE^2 যোগ করে]

বা, $AE (CE + AE) = BE.DE + DE^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADE = \angle ADB = 90°$

$\therefore AE^2 = AD^2 + DE^2$]

বা, $AE\ AC = DE (BE + DE) + AD^2$

বা, $AE.AC = DE.BD + AB^2 - BD^2$

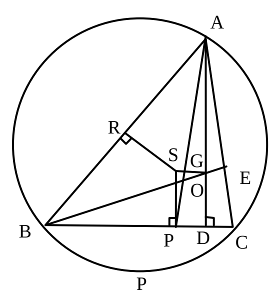
[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

বা, $AE.AC = AB^2 - BD(BD - DE)$

বা, $AE.AC = AB^2 - BD. BE$

$\therefore AB^2 = AE.AC + BD. BE$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৩ ▸



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC = a, AC = b এবং AB = c.

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BP^2 + AP^2)$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ। ΔABC এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্বে OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP.

$\therefore$ OA = 2SP .... (i)

ইহাই OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক।

খ. চিত্রানুসারে ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S। AP একটি মধ্যমা। S, O যোগ করি। মনে করি, SO রেখাংশ AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

'ক' থেকে প্রাপ্ত (i) নং সমীকরণ থেকে OA = 2SP

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$

এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$

এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \Delta AGO$ এবং ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{OA}{SP}$

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2SP}{SP}$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2}{I}$

$\therefore AG : GP = 2 : 1$

অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

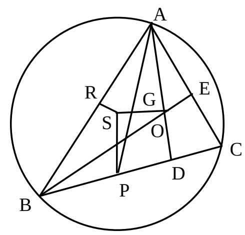
$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

অর্থাৎ S , G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(দেখানো হলো)**

গ. অনু. ৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৫ (এ্যাপোলিনিয়াসের উপপাদ্য) দেখ।

বি. দ্র. পাঠ্য বইয়ের D ও E স্থলে P ও D হবে।

প্রশ্ন-১৪ ▸



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, $BC = a$, $AC = b$ এবং $AB = c$ [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিল্লা সেনানিবাস]

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $a.CD = b.CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা কর। ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অতিরিক্ত সৃজনশীল ১১(ক) সমাধান দেখ।

খ. অতিরিক্ত সৃজনশীল ১১ (খ) সমাধান দেখ।

গ. আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

এখন, $AD \perp BC$ হওয়ায় ΔABC এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ।

[$\because \angle ACB <$ সমকোণ $\angle ADC$]

এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ বলে।

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$ .... (i)

আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.\ CE$

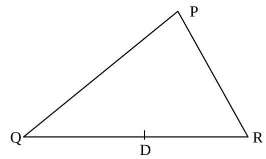
বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$ [উভয় পক্ষকে $AC^2 + BC^2$ বিয়োগ করে]

বা, $BC.CD = AC.CE$ [উভয় পক্ষকে (-2) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $a.\ CD = b.\ CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২৩ ▸



ΔPQR এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু।

ক. লম্ববিন্দু ও ভরকেন্দ্র কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ ৪

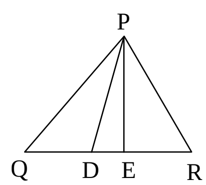
গ. $\angle Q = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ ৪

২৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **লম্ববিন্দু :** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে লম্ববিন্দু বলা হয়।

ভরকেন্দ্র : ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

খ.



ΔPQR–এ D, QR–এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

অঙ্কন : QR বাহুর উপর PE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔPQD এর $\angle PDQ$ স্থূলকোণ এবং QD রেখার বর্ধিতাংশের উপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE। স্থূলকোণের ক্ষেত্রে, পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE$ .... (i)

এখানে, ΔPRD এর $\angle PDR$ সূক্ষ্মকোণ এবং DR রেখার ওপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE + PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$

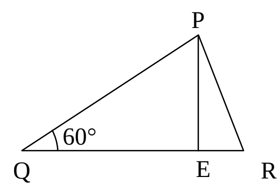
$= 2PD^2 + QD^2 + RD^2 + 2QD.DE - 2RD.DE$

$= 2PD^2 + QD^2 + QD^2 + 2QD.DE - 2QD.DE \quad [\because QD = RD]$

$= 2PD^2 + 2QD^2$

$= 2(PD^2 + QD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ.



দেওয়া আছে, ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$

অঙ্কন : $PE \perp QR$ টানি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

$\therefore$ ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ এবং তাহলে QE, QR এর ওপর PQ এর ওপর অভিক্ষেপ।

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.QE$ .... (i)

সমকোণী ΔPQE-এ লম্ব PE, ভূমি QE এবং অতিভুজ PQ

$\therefore \cos \angle PQD = \frac{QE}{PQ} \left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \frac{QE}{PQ} [\because \angle PQE = 60°]$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{QE}{PQ}$

$\because QE = \frac{1}{2} . PQ$

এখন, (i)–এ QE এর মান বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ . \frac{1}{2} QR.$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ . QR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৪ ▸ ΔABC–এর $\angle A = 1$ সমকোণ এবং $AB = AC$

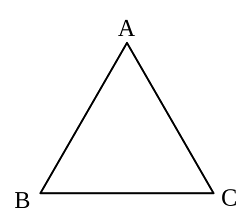
ক. ত্রিভুজটি আঁক। AB ও AC বাহুর বিপরীত কোণ নির্দেশ কর। ২

খ. BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ ৪

গ. A হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD হলে, প্রমাণ কর যে, $AD^2 = BD.CD$ ৪

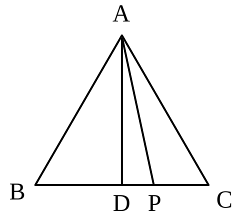
২৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



AB বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ACB$ ও AC বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ABC$

খ.



মনে করি, ΔABC–এ $AB = AC$। BC এর উপর যেকোনো বিন্দু P নিই।

A হতে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর ছেদবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ΔABC–এ $AB = AC$ এবং $AD \perp BC$

$\therefore BD = CD$

ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

আবার, APD সমকোণী ত্রিভুজে

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

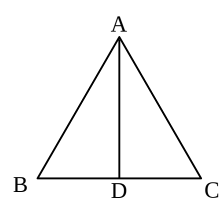
$\therefore AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

$= BD^2 - PD^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

$= BP \,.\, PC$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP \,.\, PC$ (**প্রমাণিত**)

গ.



ΔABC–এ $\angle A = 90°$. AD, BC এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 = BD.CD$

প্রমাণ : $\angle A = 90°$

$\therefore \angle ABD + \angle ACD = 90°$ .... (i)

আবার, ΔADC–এ $\angle ADC = 90°$ [$\because AD \perp BC$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই

$\angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle ABD = \angle CAD$

এখন, ΔABD ও ΔACD–এ

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

$\angle ABD = \angle CAD$

$\therefore \angle BAD = \angle ACD$ হবে

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ

$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$

বা, $AD^2 = BD.CD$

$\therefore AD^2 = BD.CD$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২৫ ▸ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD।

?

ক. AD কে ত্রিভুজের মধ্যমা বলা যাবে কি? ২

খ. BC এর উপরস্থ P যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে,

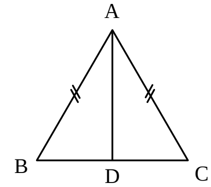
$AB^2 - AP^2 = BP . PC$ ৪

গ. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে দেখাও যে,

$AB^2 = 2R . AD$ ৪

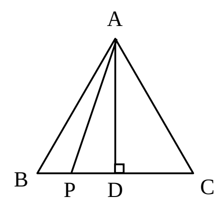
২৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. যেহেতু ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC।



আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে সুতরাং BD = CD = $\frac{1}{2}$ BC অর্থাৎ D, BC এর মধ্যবিন্দু। অতএব AD রেখা অবশ্যই ত্রিভুজের মধ্যমা হবে।

খ. মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। A, P যোগ করি। দেখাতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$



অঙ্কন : A হতে ভূমি BC–এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : APD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (i) [পিথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী]

আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

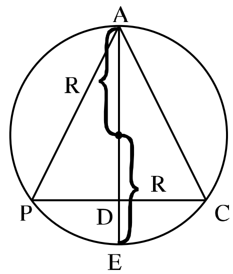
বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD)\cdot BP$ [$\because BD = CD$]

বা, $AB^2 - AP^2 = BP\cdot PC$ [$\because CD = BD$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে] **(প্রমাণিত)**

গ.



বিশেষ নির্বচন : ধরি, সমদ্বিবাহু ΔABC-এ $AB = AC$। A থেকে BC-এর উপর লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2R.AD$।

অঙ্কন : AD-কে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADC ও ΔACE-এ

$\angle ADC = \angle ACE$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ACE = 90°$ এবং AD, BC এর উপর লম্ব বলে $\angle ADC = 90°$]

$\angle EAC$ সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle ACD$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AE}$ [$\therefore$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $AC^2 = AE.AD$

বা, $AB^2 = AE.AD$ .... (i) [$\because AB = AC$]

সমকোণী ত্রিভুজ ΔABD ও ΔACD এর মধ্যে

অতিভুজ $AB = AC$ [দেওয়া আছে]

এবং AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$

অর্থাৎ $AD \perp BC$ এবং AD, BC এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore AD$, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

[কেন্দ্র থেকে জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AE, ΔABC–এর পরিব্যাস

$AE = 2R$ [$\because$ R, ΔABC–এর পরিব্যাসার্ধ]

তাহলে (i) হতে পাই,

অর্থাৎ, $AB^2 = 2R \, . \, AD$ **(দেখানো হলো)**