সপ্তম অধ্যায়

অসীম ধারা

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ $1 + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

?

ক. উদাহরণসহ সমান্তর ধারার সংজ্ঞা দাও। ২

খ. $y = 2$ হলে, ধারাটির ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. y এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **সমান্তর ধারা :** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

উদাহরণ : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি সমান্তর ধারা।

এখানে, ২য় পদ – ১ম পদ = 3 – 1 = 2, ৩য় পদ – ২য় পদ = 5 – 3 = 2, ৪র্থ পদ – ৩য় পদ = 7 – 5 = 2, ৫ম পদ – ৪র্থ পদ = 9 – 7 = 2

$\therefore$ ধারাটি সমান্তর।

খ. **প্রদত্ত ধারা :** $1 + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^3} + \ldots\ldots\ldots$

$y = 2$ হলে,

ধারাটি, $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{(1+2)^2} + \frac{1}{(1+2)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1$

যেহেতু, ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r < 1$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি $= \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{1\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}$

$= \dfrac{1-\dfrac{1}{59049}}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\dfrac{59049-1}{59049}}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{59048}{59049} = \dfrac{29524}{19683}$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\dfrac{1}{y+1}}{1} = \dfrac{1}{1+y}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

বা, $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \dfrac{1}{1+y} < 1$

এখন $-1 < \dfrac{1}{1+y}$

বা, $-1 > 1 + y$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $-1-1 > 1+y-1$ [উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে]

বা, $-2 > y$

$\therefore y < -2$

আবার, $\dfrac{1}{1+y} < 1$

বা, $1 + y > 1$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $1 + y - 1 > 1 - 1$

$\therefore y > 0$

নির্ণেয় শর্ত : $y > 0$ অথবা, $y < -2$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

$= \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{y+1}}$ [‘ক’ হতে পাই]

$$= \frac{1}{\frac{y+1-1}{y+1}}$$

$$= \frac{y+1}{y}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২ $a = \frac{1}{4x+1} = r,\ 5{\cdot}23$

ক. একটি অনুক্রম ও একটি অসীম ধারার উদাহরণ দাও। ২

খ. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটিকে অনন্ত গুণোত্তর ধারার মাধ্যমে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. অসীম গুণোত্তর ধারাটি গঠন কর। x এর উপর প্রযোজ্য শর্তসহ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অনুক্রম : একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$ হলে, অনুক্রমটি $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$, ...

অসীম ধারা : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ .....

খ. আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটি $5{\cdot}023$

$5{\cdot}023 = 5{\cdot}023232323$ .....

$= 5 + (0{\cdot}023 + 0.00023 + 0{\cdot}0000023 + \text{.....})$

এখানে $0{\cdot}023 + 0{\cdot}00023 + 0{\cdot}0000023 + \text{.....}$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ, $a = 0{\cdot}023$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{{\cdot}00023}{0{\cdot}023} = 0{\cdot}01 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{0{\cdot}023}{1 - 0{\cdot}01}$$

$$= \frac{0\cdot023}{0\cdot99} = \frac{23}{990}$$

$\therefore 5\cdot0\dot{2}\dot{3} = 5 + \frac{23}{990} = \frac{4973}{990}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $a = \frac{1}{4x+1} = r$

$\therefore$ অসীম গুণোত্তর ধারাটি, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$

$\therefore \frac{1}{4x+1} + \frac{1}{(4x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^3} + \frac{1}{(4x+1)^4} + ...$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকে, যদি ও কেবল যদি, $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{4x+1}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{4x+1} < 1$

এখন, $\frac{1}{4x+1} > -1$ অথবা, $\frac{1}{4x+1} < 1$

বা, $4x + 1 < -1$ বিপরীতকরণ করে] বা, $4x + 1 > 1$

বা, $4x < -2$ [উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে] বা, $4x > 1 - 1$

[উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে]

বা, $x < -\frac{2}{4}$ বা, $4x > 0$

$\therefore x < -\frac{1}{2}$ $\therefore x > 0$

নির্ণেয় শর্ত : $x > 0$ অথবা $x < -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $= \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{4x+1}}{1-\frac{1}{4x+1}} = \frac{\frac{1}{4x+1}}{\frac{4x+1-1}{4x+1}} = \frac{\frac{1}{4x+1}}{\frac{4x}{4x+1}}$$

$$= \frac{1}{4x+1} \times \frac{4x+1}{4x} = \frac{1}{4x}$$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি $= \frac{1}{4x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩ ▶ একটি গুণোত্তর ধারার n তম পদ $\mathbf{U_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{(x+1)^n}; n \in \mathit{IN}}$।

ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং তা নির্ণয় কর। ৪

গ. $x = 1$ এর জন্য উক্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে কিনা? থাকলে যুক্তিসহ তা নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, সাধারণ পদ $u_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{(x+1)^n}$; $n \in IN$

$\therefore$ যখন $n = 1$ তখন $u_1 = -\frac{1}{x+1}$

$\therefore$ " $n = 2$ তখন $u_2 = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$\therefore$ " $n = 3$ তখন $u_3 = \frac{1}{(x+1)^3}$

$\therefore$ ধারাটি হবে, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} - .....$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{(x+1)^2} \div \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{x+1}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, $r = -\frac{1}{x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে,

যদি $|r| < 1$

অর্থাৎ $\left|\frac{-1}{x+1}\right| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{x+1}\right| < 1$

বা, $|x+1| > 1$ [$|x+1|$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\pm(x+1) > 1$

হয়, $(x+1) > 1$

বা, $x > 0$ অথবা, $-(x+1) > 1$

$x + 1 < -1$

$x < -2$

নির্ণেয় শর্ত : $x > 0$ অথবা, $x < -2$

গ. $x = 1$ হলে উক্ত ধারাটি হবে,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

এখানে, সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

যেহেতু $|r| < 1$

$\therefore$ $x = 1$ এর জন্য ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right\}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৪ $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ **একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ।**

ক. অনুক্রমটি তৈরি কর। ২

খ. অনুক্রমটির 20 তম পদ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. n এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে অনুক্রমটির যোগফল শূন্য হবে? ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$ এর জন্য অনুক্রমটি হলো

$$\cos\frac{\pi}{2}, \cos\pi \cos\frac{3\pi}{2}, \cos 2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots$$ **(Ans.)**

খ. অনুক্রমটির 20 তম পদ $= \cos\left(\frac{20\pi}{2}\right)$

$= \cos\left(20\,\frac{\pi}{2} + 0\right)$

$= -\cos 0°$

$= -1$ **(Ans.)**

এখন, অনুক্রমের ১ম দশটি পদ হলো :

0,–1, 0, 1, 0, –1, 0, 1, 0, – 1 .....

∴ ১ম 10 টি পদের সমষ্টি = –1 **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, অনুক্রমের সাধারণ পদ $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$

n = 1, 2, 3, ... এর জন্য অনুক্রমটির মান পাই,

$\cos\left(\frac{1\cdot\pi}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{2}\right) = -1$

$\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{5\cdot\pi}{2}\right) = 0$

.....

.....

∴ অনুক্রমটি হবে :

0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, 1, ...

এখানে, প্রাপ্ত অনুক্রমটি হতে দেখা যাচ্ছে, প্রথম 4টি পদের যোগফল = 0

প্রথম 8টি পদের যোগফল = 0

প্রথম 12 টি পদের যোগফল = 0

সুতরাং n এর মান 4 এর গুণিতক যেকোনো সংখ্যার জন্য অনুক্রমের যোগফল শূন্য হবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ ▶ **একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ** 2 এবং সাধারণ অনুপাত $\left(-\frac{1}{3}\right)$

?

ক. অসীম ধারা কী? ২

খ. ধারাটির 10 তম পদ ও প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots, u_a, \ldots\ldots$ হলে $u_1, u_2, u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_a + \ldots\ldots$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম ধারা বলা হয়। এই ধারাটি n তম পদ u_n।

খ. দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^{\circ} + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3^3} + \ldots\ldots\ldots$$

ধারাটি 10 তম পদ $= ar^{10-1}$

$$= ar^9$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{2}{3^9}$$

এখন ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি ;

$$S_{10} = \frac{a(1 - r^{10})}{1 - r} \; ; \; r < 1$$

$$= 2 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= 2 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{10}}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= 2 \times \frac{\frac{3^{10} - 1}{3^{10}}}{\frac{4}{3}} = 2 \times \frac{3^{10} - 1}{4 \times \frac{3^{10}}{3}}$$

$= \frac{3^{10}-1}{2 \times 3^9} = \frac{59048}{39366} = 1.5$ (আসন্ন) **(Ans.)**

গ. এখানে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{3}$

যেহেতু $r = -\frac{1}{3} < 1$, সেহেতু ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

∴ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-(-3)}$

$= \frac{2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

∴ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৬ ▶ একটি অসীম গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অনুপাত $-\frac{2}{7}$ ।

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির দশম পদ নির্ণয় করে প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

◀◀ ৬ নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে, ধারাটির ১ম পদ 1 এবং সাধারণ অনুপাত, $-\frac{2}{7}$

∴ ধারাটির ২য় পদ $= 1 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{7}$

৩য় পদ $= -\frac{2}{7} \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{2^2}{7^2}$

৪র্থ পদ $= \frac{2^2}{7^2} \times \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2^3}{7^3}$

নির্ণেয় গুণোত্তর ধারা, $1 - \frac{2}{7} + \frac{2^2}{7^2} - \frac{2^3}{7^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ. ধারাটির দশম পদ = $ar^{10-1} = 1 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^9 = -\frac{2^9}{7^9}$

এখন ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি, S_{10}

$$= a\frac{1-r^{10}}{1-r};\ r < 1$$

$$= 1 \times \frac{1-\left(\frac{-2}{7}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1-\frac{2^{10}}{7^{10}}}{1+\frac{2}{7}}$$

$$= \frac{\frac{7^{10}-2^{10}}{7^{10}}}{\frac{7+2}{7}} = \frac{7^{10}-2^{10}}{7^{10}} \times \frac{7}{9}$$

= 0.7778 (আসন্ন) **(Ans.)**

গ. গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\frac{-2}{7}\right)} = \frac{1}{1+\frac{2}{7}}$

$$= \frac{1}{\frac{7+2}{7}} = \frac{7}{9}$$

∴ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $\frac{7}{9}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৭ ▸ $(1+y)^{-1} + (1+y)^{-2} + (1+y)^{-3} + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত ধারা

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. $y = -\frac{1}{3}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর।

ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম 12টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. y এর উপরে কোন শর্তসাপেক্ষে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারাটির (যেকোনো পদ ÷ পূর্ববর্তী পদ)

$= (1 + y)^{-2} \div (1 + y)^{-1} = \frac{1}{1 + y}$

অথবা, $(1 + y)^{-3} \div (1 + y)^{-2} = \frac{1}{1 + y}$

প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। এর সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{1 + y}$ **(Ans.)**

খ. অসীম ধারাটি $(1 + y)^{-1} + (1 + y)^{-2} + (1 + y)^{-3} + ...$

$$= \frac{1}{(1 + y)} + \frac{1}{(1 + y)^2} + \frac{1}{(1 + y)^3} + ...$$

$y = -\frac{1}{3}$ হলে,

ধারাটি $= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)3} + ...$

$$= \frac{3}{3 - 1} + \frac{9}{(3 - 1)^2} + \frac{27}{(3 - 1)^3} + ...$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + ...$$

যার ১ম পদ, $a = \frac{3}{2}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{3}{2}$

$\therefore$ ধারাটির দশম পদ $= ar^{10 - 1} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{10 - 1} = \frac{59049}{1024}$ **(Ans.)**

এবং প্রথম 12টি পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^{12} - 1)}{r - 1}$ [$\because r > 1$]

$$= \frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{12} - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{531441}{4096} - 1\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= 3\left(\frac{531441}{4096} - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{531441 - 4096}{4096}\right)$$

$$= 3\,\frac{527345}{4096}$$

$$= \frac{1582035}{4096}$$ **(Ans.)**

গ. 'ক' হতে প্রাপ্ত,

ধারাটির সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{y+1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{y+1}\right| < 1$

বা, $\frac{1}{|y+1|} < 1$

বা, $|y+1| > 1$

এখন, $|(y+1)|$ অঋণাত্মক হলে, $y + 1 > 1$ বা, $y > 0$

আবার $|(y+1)|$ ঋণাত্মক হলে, $-(y+1) > 1$

বা, $y + 1 < -1$

বা, $y < -2$

নির্ণেয় শর্ত হলো $y < -2$ অথবা $y > 0$ **(Ans.)**

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{y+1}}{1 - \frac{1}{y+1}} = \frac{\frac{1}{y+1}}{\frac{y+1-1}{y+1}}$$

$$= \frac{1}{y+1} \times \frac{y+1}{y}$$

$$= \frac{1}{y}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▸ 2 + 4 + 8 + 16 + ... একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং তৃতীয় আংশিক সমষ্টি কত? ২

খ. প্রদত্ত ধারাটির 20 তম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $x = -\frac{1}{2}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $\frac{1}{x+1}$ হয়, এক্ষেত্রে ধারাটির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ লিখে অনন্ত ধারাটি গঠন কর। x–এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে? ৪

▸◂ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, ধারাটি $2 + 4 + 8 + 16 +$ ---------- অসীম গুণোত্তর

$\therefore$ ধারাটির অনুপাত $r = \frac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}} = \frac{4}{2} = 2$ **(Ans.)**

এখন, ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি অর্থাৎ 3 তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত ধারাটির তৃতীয় আংশিক সমষ্টি $= 2 + 4 + 8 = 14$ **(Ans.)**

খ. ধারাটির ১ম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 2$

$\therefore$ ধারাটির 20তম পদ $= ar^{20-1} = 2.2^{20-1}$

$= 1048576$ **(Ans.)**

এবং ১ম দশটি পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$ $[\because r > 1]$

$= \frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$

$= 2^{11} - 2 = 2046$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$

$x = -\frac{1}{2}$ হলে প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ $\frac{1}{1+x}$ হয়।

অর্থাৎ $2 = \frac{1}{1+x}$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ হলে ধারাটি হবে,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

এক্ষেত্রে ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা এবং এর সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{1+x}$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{x+1}$

এখন প্রদত্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $-1 < r < 1$ হয়,

বা, $-1 < \frac{1}{x+1} < 1$ হয়, [$r = \frac{1}{x+1}$ বসিয়ে]

এখন $-1 < \frac{1}{x+1}$

বা, $\frac{1}{-1} > x + 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1 > x + 1$

বা, $-1 - 1 > x + 1 - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

বা, $-2 > x$

$\therefore x < -2$

অথবা $\frac{1}{x+1} < 1$

বা, $x + 1 > 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $x + 1 - 1 > 1 - 1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

$\therefore x > 0$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x < -2$ অথবা $x > 0$ হয়। **(Ans.)**

প্রশ্ন–৯ ▸ 1 + 2 + 4 + 8 + ...

ক. দেখাও যে, প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। ২

খ. $r = 8$ হলে, ধারাটির r তম পদের মান কত? ৪

গ. এর n তম আংশিক সমষ্টি কত?
অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারা $1 + 2 + 4 + 8 + ...$

ধারাটির (যেকোনো পদ ÷ পূর্ববর্তী পদ) $= 2 \div 1 = 2$

অথবা $4 \div 2 = 2$

অথবা $8 \div 4 = 2$

সুতরাং, প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। **(দেখানো হলো)**

খ. প্রদত্ত ধারা $= 1 + 2 + 4 + 8 + ...$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $q = 2$

$\therefore$ ধারাটির r তম পদ $= aq^{r-1} = 1.2^{r-1} = 2^{r-1}$

$= 2^{8-1}$ [$\because r = 8$]

$= 2^7 = 128$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $q = 2$

এখানে, $q > 1$

$\therefore$ ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি $= \dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1}$

$= \dfrac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$

আমরা জানি, কোনো অনন্ত গুণোত্তর ধারার সাধারণ অনুপাত 1 অপেক্ষা বড় হলে, অসীমতক সমষ্টি থাকে না।

যেহেতু ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $q > 1$

সুতরাং অসীমতক সমষ্টি নেই। **(Ans.)**

প্রশ্ন–১০ ▸ $0\cdot\dot{0}2\dot{4}$ এবং $4\cdot\dot{0}2\dot{4}$ দুইটি পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশ।

ক. প্রথম পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশের ধারা নির্ণয় কর। ২

খ. 'ক'–এ প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত বের কর। ৪

গ. দ্বিতীয় পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

▸◂ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $0{\cdot}0\dot{2}\dot{4} = 0{\cdot}0242424 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 0{\cdot}024 + 0{\cdot}00024 + 0{\cdot}0000024 + \ldots.$

খ. 'ক' এ প্রাপ্ত ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

যার, প্রথম পদ, $u_1 = 0{\cdot}024$

এবং দ্বিতীয় পদ, $u_2 = 0{\cdot}00024$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{0{\cdot}00024}{0{\cdot}024} = 0{\cdot}01$**(Ans.)**

গ. দ্বিতীয় পৌনঃপুনিক ভগ্নাংশটি হলো :

$4{\cdot}0\dot{2}\dot{4} = 4{\cdot}0242424 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 4 + (0.024 + 0.00024 + 0.0000024 + \ldots..)$

বন্ধনীর ভেতরের ধারাটি একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 0.024$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.00024}{0.024} = 0.01$ $[\because r < 1]$

সুতরাং, $4{\cdot}0\dot{2}\dot{4} = 4 + \frac{a}{1-r}$

$= 4 + \frac{0.024}{1-0.01} = 4 + \frac{0.024}{0.99}$

$= 4 + \frac{24}{990} = 4 + \frac{8}{330}$

$= \frac{1328}{330} = \frac{664}{165}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১১ ▸ $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{4}{(3x-1)^3} - \frac{8}{(3x-1)^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

? ক. ধারাটির $(p+1)$ তম পদ বের কর।

খ. $x = 1$ হলে ধারাটির প্রথম 5 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকার জন্য x এর উপর আরোপিত শর্ত নির্ণয় কর। ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1}$

$$= \frac{-2}{3x-1}$$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার p তম পদ ar^{p-1}

$\therefore$ $(p+1)$ তম পদ $= ar^{p+1-1} = ar^p$

$$= \left(\frac{1}{3x-1}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3x-1}\right)^p$$

$$= (-2)^p \times \left(\frac{1}{3x-1}\right)\left(\frac{1}{3x-1}\right)^p$$

$$= (-2)^p \left(\frac{1}{3x-1}\right)^{p+1}$$ **(Ans.)**

খ. $x = 1$ হলে প্রদত্ত ধারাটি,

$$\frac{1}{3.1-1} - \frac{2}{(3.1-1)^2} + \frac{4}{(3.1-1)^3} - \frac{8}{(3.1-1)^4} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} - \frac{8}{24} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{2}$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = -\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2}$

$$= -1 < 1$$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 5 টি পদের সমষ্টি

$$= \frac{a\,(1-r^5)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}\{1-(1-1)^5\}}{1-(-1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1+1)}{2} = \frac{1}{2}$$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ধারা, $\frac{1}{3x-1} - \frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{4}{(3x-1)^3} - \frac{8}{(3x-1)^4} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-2}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1} = \frac{-2}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতকে সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{2}{3x-1} < 1$

এখন, $-1 < \frac{2}{3x-1}$ হলে

বা, $1 > \frac{2}{3x-1}$ [-1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3x - 1 > 2$

বা, $x > \frac{2+1}{3}$

বা, $x > 1$

আবার, $\frac{-2}{3x-1} < 1$

বা, $\frac{2}{3x-1} > -1$ [-1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2 > -3x + 1$

বা, $1 > -3x$

বা $x < \frac{-1}{3}$

∴ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x > 1$ অথবা $x < \frac{-1}{3}$ হয়।

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x-1}}{1-\frac{-2}{3x-1}}$

$$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1+2}{3x-1}} = \frac{1}{3x+1}$$

$x > 1$ বা $x < \frac{-1}{3}$ এবং সমষ্টি $\frac{1}{3x+1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ক. ধারাটির ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির 8টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে নির্ণয় কর। ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারাটি, $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n-তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির ষষ্ঠ পদ $= 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6-1} = 1 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

খ. আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because |r| < 1]$

$\therefore$ ধারাটির ৪টি পদের সমষ্টি $= \frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \frac{1 - \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^4}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\frac{16 - 1}{16}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\frac{15}{16}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} = \frac{15\sqrt{2}}{16(\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{15\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{16(\sqrt{2} - 1)\,(\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \frac{15\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{16 \times (2 - 1)}$$

$$= \frac{30 + 15\sqrt{2}}{16 \times 1}$$

$$= \frac{30 + 15\sqrt{2}}{16}$$ **(Ans.)**

গ. এখানে, $|r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $s_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2-1}$$

$$= 2 + \sqrt{2}$$

অসীমতক সমষ্টি $2 + \sqrt{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৩ $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} +$ ..... একটি ধারা।

ক. $x = \frac{1}{2}$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত ধারাটির পঞ্চম পদ এবং প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই শর্তে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারা $S = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} +$ .....

$x = \frac{1}{2}$ হলে,

ধারাটি, $S = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)^2} + \frac{1}{\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)^3} + ...$

$= \frac{1}{1+1} + \frac{1}{(1+1)^2} + \frac{1}{(1+1)^3} + ...$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ **(Ans.)**

ধারাটির সাধারণ অনুপাত $= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' অংশ হতে প্রাপ্ত ধারা,

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

এখানে, ধারাটির ১ম পদ $a = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{2} < 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির পঞ্চম পদ $= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^4} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$ **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি

$$S_5 = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} \quad [\because |r| < 1]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{32}$$

$$= \frac{32 - 1}{32} = \frac{31}{32} \textbf{ (Ans.)}$$

গ. প্রদত্ত ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{2x + 1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x + 1)^2} \div \frac{1}{2x + 1} = \frac{1}{2x + 1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{2x + 1}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{2x + 1} < 1$ হয়

এখন, $-1 < \frac{1}{2x + 1}$

বা, $\frac{1}{-1} > 2x + 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1 - 1 > 2x + 1 - 1$ [উভয়পক্ষে (-1) যোগ করে]

বা, $-2 > 2x$

বা, $-1 > x$ [উভয়পক্ষে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x < -1$

আবার, $\frac{1}{2x + 1} < 1$

বা, $2x + 1 > 1$

বা, $2x + 1 - 1 > 1 - 1$

বা, $2x > 0$

$\therefore x > 0$

নির্ণেয় শর্ত : $x < -1$ অথবা $x > 0$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} = \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x+1-1}{2x+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x}{2x+1}} = \frac{1}{2x+1} \times \frac{2x+1}{2x}$$

$$= \frac{1}{2x} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন–১৪ **4 + 8 + 16 + 32 +.....একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।**

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং চতুর্থ আংশিক সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির 7 তম পদ, 10 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর। ধারাটির প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

ধারাটি 4 + 8 + 16 + 32 + ... অসীম গুণোত্তর ।

∴ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}} = \frac{8}{4} = 2$ **(Ans.)**

∴ চতুর্থ আংশিক সমষ্টি = 4 + 8 + 16 + 32 = 60 **Ans.**

খ. আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

'ক' হতে পাই,

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 4$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 2$

$\therefore$ ধারাটির 7 তম পদ $= 4 \times 2^{7-1}$ [$\because n = 7$]

$= 4 \times 2^6 = 4 \times 64$

$= 256$ **(Ans)**

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $= 4 \times 2^{10-1}$ [$\because n = 10$]

$= 4 \times 2^9 = 4 \times 512$

$= 2048$ **(Ans.)**

এবং ধারাটির r তম পদ $4 \times 2^{r-1}$ [$\because n = r$]

$= 4 \times \frac{2^r}{2} = 2.2^r$

$= 2^{r+1}$ **(Ans.)**

গ. আমরা জানি, যেকোনো অসীম গুণোত্তর ধারার শুধুমাত্র $|r| < 1$ শর্তে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

কিন্তু 'ক' হতে পাই,

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = 2$

বা, $|r| = |2| = 2 > 1$

$\therefore$ ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি থাকবে না **(Ans.)**

আমরা জানি,

ধারাটির n তম পদের সমষ্টি, $S_n = a\frac{r^n - 1}{r - 1}$ $1 \because r > 1$

$\because$ ধারাটির 20টি পদের সমষ্টি $S_{20} = 4 \times \frac{2^{20} - 1}{2 - 1}$

$= 4(2^{20} - 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৫ ▶ একটি গুণোত্তর ধারার n তম পদ, $U_n = \frac{1}{(3x)^n}$

ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $x = 1$ এবং $x = \frac{1}{4}$ এর ক্ষেত্রে অসীমতক সমষ্টি থাকবে কি না এবং থাকলে তা নির্ণয় কর। ৪

◀◀ ১৫নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে, $U_n = \frac{1}{(3x)^n}$

$n = 1$ হলে, ধারাটির ১ম পদ $= \frac{1}{3x}$

$n = 2$ হলে, ধারাটির ২য় পদ $= \frac{1}{(3x)^2}$

$n = 3$ হলে, ধারাটির ৩য় পদ $= \frac{1}{(3x)^n}$

$\therefore$ ধারাটি হলো $\frac{1}{3x} + \frac{1}{(3x)^2} + \frac{1}{(3x)^n} + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, r = ২য় পদ ÷ ১ম পদ

$$= \frac{1}{(3x)^2} \div \frac{1}{3x} = \frac{1}{(3x)^2} \times 3x$$

$$= \frac{1}{3x} \textbf{ (Ans.)}$$

খ. কোনো ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি সাধারণ অনুপাত $|r| < 1$ হয়।

এখানে, $r = \frac{1}{3x}$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি থাকার শর্ত $|\frac{1}{3x}| < 1$

$\frac{1}{3x}$ ধনাত্মক হলে $\frac{1}{3x} < 1$

বা, $3x > 1$

$\therefore x > \frac{1}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x}$ ঋণাত্মক হলে, $-\frac{1}{3x} < 1$

বা, $\frac{1}{3x} > -1$ [(-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $3x < -1$ [ব্যস্তকরণ করে]

$\therefore x < -\frac{1}{3}$

নির্ণেয় শর্ত : $x < -\frac{1}{3}$ অথবা $x > \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3x}\right)}{1-\left(\frac{1}{3x}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3x}\right)}{\frac{3x-1}{3x}}$$

$$= \frac{1}{3x-1} \textbf{ (Ans.)}$$

গ. $x = 1$এর জন্য ধারাটি হলো,

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$

$x = 1$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে কারণ $|r| < 1$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{1}{3.1-1} = \frac{1}{2}$ ['খ' থেকে]

আবার, $x = \frac{1}{4}$ হলে অসীমতক সমষ্টি থাকবে না

কারণ $-\frac{1}{3} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৬ ▶ কোন গুণোত্তর ধারায় প্রথম পদ $\frac{2}{3}$ এবং অসীমতক সমষ্টি $\frac{1}{2}$

ক. সাধারণ অণুপাত r ধরে সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. ধারাটি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি $\frac{40}{81}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

▶◀ ১৬নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. এখানে,

প্রথম পদ, $a = \frac{2}{3}$

সাধারণ অনুপাত = r

অসীমতক সমষ্টি = $\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a}{1-r} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত, $\frac{\frac{2}{3}}{1-r} = \frac{1}{2}$

বা, $1 - r = \frac{2}{3} . 2$

বা, $r = 1 - \frac{4}{3}$

$\therefore\ r = -\frac{1}{3}$

ধারার ২য় পদ = $\frac{2}{3} \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{9}$

৩য় পদ = $(-\frac{2}{9}) \times (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{27}$

৪র্থ পদ = $\frac{2}{27} \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{81}$

নির্ণেয় গুণোত্তর ধারা, $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + ...$ **(Ans.)**

গ. ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি = $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because r < 1]$

বা, $\frac{40}{81} = \frac{\frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

বা, $\frac{40}{81} = \frac{\frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{\frac{4}{3}}$

বা, $\frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \frac{40}{81} \times \frac{4}{3}$

বা, $1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{40}{81} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$

বা, $1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{80}{81}$

বা, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{80}{81}$

বা, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{81}$

বা, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

$\therefore$ n = 4

নির্ণেয় n এর মান 4 **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৭ **3 + 33 + 333 + ... একটি অসীম ধারা।**

ক. প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হলে

$3S_n$ = কত? ২

খ. S_n এর মান নির্ণয় করে দেখাও যে, S_n

$= \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$ ৪

গ. ধারাটির প্রথম 5 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর, প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে কি? ব্যাখ্যা কর। ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\therefore$ S_n = 3 + 33 + 333 + ... n সংখ্যক পদ পর্যন্ত

উপরিউক্ত ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n

$S_n = \frac{3}{9}\left\{10.\frac{10^n - 1}{10} - n\right\}$

$\therefore$ 3 S_n = 9 + 99 + 999 + ... + n সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

খ. Sn = 3 + 33 + 333 + ... n তম পদ

$= \frac{3}{9}$ (9 + 99 + 999 + ... + n তম পদ

$= \frac{3}{9}$ {(10 – 1) + (100 – 1) + (1000 – 1) +.....n তম পদ – n}

$= \frac{3}{9}$ {(10 + 10^2 + 10^2 + ... + n তম পদ) – n}

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right\}$$

$$= \frac{10(10^n - 1)}{27} - \frac{n}{3}$$

$\therefore S_n = \frac{10(10^n - 1)}{27} - \frac{n}{3}$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' হতে পাই,

n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$

ধারাটি প্রথম 5 পদের সমষ্টি, $S_5 = \frac{10}{27}(10^5 - 1) - \frac{5}{3}$

$$= \frac{10}{27}(99999) - \frac{5}{3}$$

$$= 37035 \textbf{ (Ans.)}$$

যেহেতু $3 + 33 + 333 + ...$

$$= \frac{1}{3}(10 + 10^2 + 10^3 + ...) - (1 + 1 + ...)$$

এখন, $(10 + 10^2 + 10^3 + ...$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = 10$

যেহেতু $|r| = 10 > 1$

কাজেই ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই। **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৮ ▶ নিচের ধারাটি লক্ষ কর :

$$\frac{1}{3x - 1} + \frac{1}{(3x - 1)^2} + \frac{1}{(3x - 1)^3} + ...$$

? ক. $x = 2$ হলে, ধারাটি নির্ণয় কর এবং
প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

খ. $x = 1$ হলে, ধারাটির 12 তম পদ এবং প্রথম 12টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots\ldots$

$x = 2$ হলে ধারাটি,

$$\frac{1}{3.2-1} + \frac{1}{(3.2-1)^2} + \frac{1}{(3.2-1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(Ans.)}$$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{5^2}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5^2} \times \frac{5}{1} = \frac{1}{5}$ **(Ans.)**

খ. $x = 1$ হলে ধারাটি,

$$\frac{1}{3.1-1} + \frac{1}{(3.1-1)^2} + \frac{1}{(3\cdot 1-1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2^2} \div \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ $= ar^{12-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1}$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2048}$$

$$= \frac{1}{4096} \quad \textbf{(Ans.)}$$

$\therefore$ ধারাটির 12 পদের সমষ্টি $= \dfrac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4096}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{4095}{4096} \quad \textbf{(Ans.)}$$

গ. প্রদত্ত রাশি,

$$\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ধারাটির প্রথম পদ $a = \dfrac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{1}{(3x-1)^2} \div \dfrac{1}{3x-1} = \dfrac{1}{(3x-1)^2} \times \dfrac{3x-1}{1}$

$$\therefore r = \frac{1}{3x-1}$$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

$\therefore \dfrac{1}{3x-1} < 1$ অথবা, $\dfrac{1}{3x-1} > 1$

বা, $3x - 1 > 1$ বা, $3x - 1 < 1$

বা, $3x - 1 + 1 > 1 + 1$ বা, $3x < -1 + 1$

বা, $3x > 2$ বা, $3x < 0$

$\therefore x > \dfrac{2}{3}$ $\therefore x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ অথবা $x < 0$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। **(Ans.)**

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x-1}}{1-\frac{1}{3x-1}}$

$$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1-1}{3x-1}} = \frac{1}{3x-2} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন– ১৯ **নিচের ধারাটি লক্ষ কর : $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।**

ক. $x = 1$ হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 2$ হলে প্রাপ্ত ধারাটির পঞ্চম এবং দশম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ধারাটি, $S = \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots$

$x = 1$ হলে, $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots\ldots$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{4^2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ. এখানে, $x = 2$ হলে ধারাটি,

$S = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + ...$

ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{7}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{7} < 1$

ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1}$

ধারাটির 5 তম পদ $= \frac{1}{7} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{5-1} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7^4} = \frac{1}{7^5}$ **(Ans.)**

ধারাটির 10–তম পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because |r| < 1]$

$$= \frac{\frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{7^{10}}\right)}{1 - \frac{1}{7}}$$

$$= \frac{7^{10} - 1}{7^{10}} \times \frac{1}{7} \times \frac{7}{6}$$

$$= \frac{7^{10} - 1}{6.7^{10}}$$ **(Ans.)**

গ. কোনো ধারার সাধারণ অনুপাত, $|r| < 1$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3x+1}$

শর্তমতে, $\left|\frac{1}{3x+1}\right| < 1$

$\frac{1}{3x+1} < 0$ হলে,

$-\frac{1}{x+1} < 1$

বা, $\frac{1}{3x+1} > -1$

বা, $3x + 1 < -1$

বা, $3x < -2$

$\therefore x < -\frac{2}{3}$

আবার, $\frac{1}{3x+1} \geq 0$ হলে,

বা, $\frac{1}{3x+1} < 1$

বা, $3x + 1 > 1$

$\therefore x > 0.$

নির্ণেয় শর্ত, $x < \frac{2}{3}$ অথবা $x > 0$

প্রশ্ন–২০ $\frac{1}{3x+2} + \frac{2}{(3x+2)^2} + \frac{4}{(3x+2)^3} + \frac{8}{(3x+2)^4} + \ldots\ldots\ldots$

?

ক. $x = 1$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত বের কর। ২

খ. 'ক' এ প্রাপ্ত ধারা হতে অষ্টম পদ এবং প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রদত্ত ধারাটির x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

ধারাটি $\frac{1}{3x+2} + \frac{2}{(3x+2)^2} + \frac{4}{(3x+2)^3} + \frac{8}{(3x+2)^4} + \ldots.$

$x = 1$ হলে, $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{8}{5^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

যা একটি গুণোত্তর ধারা।

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{2}{5^2}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, ধারাটি $= \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \ldots\ldots\ldots$

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{5}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{5} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অষ্টম পদ $= ar^{8-1} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{2^7}{5^8}$ **(Ans.)**

এবং প্রথম 8 পদের সমষ্টি $= \frac{a(1 - r^8)}{1 - r}$ [$\because |r| < 1$]

$$= \frac{\frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{2}{5}\right)\right\}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}\left(1 - \frac{2^8}{5^8}\right)}{\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{5^8 - 2^8}{5^8}\right) \times \frac{5}{3} = \frac{5^8 - 2^8}{3.5^8}$$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত,

$r = \frac{2}{(3x + 2)^2} \div \frac{1}{(3x + 2)} = \frac{2}{3x + 2}$

অসীমতক সমষ্টি থাকবে, যদি $|r| < 1$ হয়

বা, $\left|\frac{2}{3x + 2}\right| < 1$

অঋণাত্মক মান নিয়ে

$\therefore \frac{2}{3x + 2} < 1$

বা, $\frac{3x + 2}{2} > 1$

বা, $3x + 2 > 2$

বা, $3x > 0$

$\therefore x > 0$

আবার, ঋণাত্মক মান নিয়ে

$-\left(\frac{2}{3x + 2}\right) < 1$

বা, $\frac{2}{3x + 2} > -1$

বা, $\frac{2}{3x + 2} < -1$

বা, $3x + 2 < -2$

বা, $3x < -4$

$\therefore x < -\frac{4}{3}$

নির্ণেয় শর্ত : $x > 0$ অথবা $x < -\frac{4}{3}$

আবার, অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{1}{3x + 2}}{1 - \frac{2}{3x + 2}}$

$= \frac{\frac{1}{3x + 2}}{\frac{3x + 2 - 2}{3x + 2}}$

$= \frac{1}{3x + 2} \times \frac{3x + 2}{3x}$

$= \frac{1}{3x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২১ ▶ একটি দন্ডের দৈর্ঘ্য 1100 সে.মি.। একে 25টি অংশে বিভক্ত করা হলো। ক্ষুদ্রতম অংশ থেকে আরম্ভ করে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য সমান্তর ধারাভুক্ত এবং বৃহত্তম টুকরাটির দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের 10 গুণ।

ক. ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্যকে **a,** সাধারণ অন্তরকে d ধরে একটি সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। ৪

গ. বৃহত্তম টুকরার দৈর্ঘ্য এবং প্রদত্ত ধারার 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

▶◀ ২১নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. এখানে, ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য = a

টুকরা দৈর্ঘ্যের সাধারণ অন্তর = d

টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, (a + d), (a + 2d),.....

25-তম টুকরার দৈর্ঘ্য a + (25 – 1) d = a + 24d

শর্তমতে, a + 24d = 10a **(Ans.)**

খ. 'ক' থেকে পাই, a + 24d = 10a

$\therefore$ 9a – 24d = 0 ..... (i)

প্রশ্নানুসারে ধারাটির যোগফল

$= a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (a + 24d)$

$= \frac{25}{2}\{2.a + (25 - 1)d\}$

$= \frac{25}{2}(2a + 24d)$

$= 25\,(a + 12d)$

প্রশ্নমতে, 25 (a + 12d) = 1100

a + 12d = 44 ..... (ii)

(ii) নং থেকে $a = 44 - 12\,d$ ..... (iii)

a এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$9\,(44 - 12 - 24 = 0$

বা, $9 \times 44 = 9 \times 12d + 24d$

বা, $396 = 108d + 24d$

বা, $396 = 132d$

$\therefore\ d = 3$

d এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$a = 44 - 12 \times 3 = 8$

$\therefore\ a = 8$ এবং $d = 3$ **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, ক্ষুদ্রতম টুকরার দৈর্ঘ্য, $a = 8$ সে.মি.

বৃহত্তম টুকরার দৈর্ঘ্য $= 10a = 10 \times 8 = 80$ সে.মি. **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটি হলো $= 8 + (8 + 3) + (8 + 2 \times 3) + ...$

$= 8 + 11 + 14 + ...$

ধারাটির একটি সমান্তর ধারা ধারাটির প্রথম 20 পদের সমষ্টি।

$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 8 + (20 - 1)3\}$ [$\because$ $a = 8$ এবং $d = 3$]

$= 10\,(16 + 19 \times 3)$

$= 10\,(16 + 57) = 730$ **(Ans.)**