অষ্টম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ৮.১

প্রশ্ন–১ একদিন সাবরিনা তার বান্ধবীকে বলল পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব 14.9×10^7 কি.মি. এবং পৃথিবীর কেন্দ্রবিন্দুতে সূর্যের ব্যাস $32'$ কোণ উৎপন্ন করে। পৃথিবী সূর্যের চারিদিকে ঘুরে আসতে $365\frac{1}{4}$ দিন সময় লাগে।

ক. কোণটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. সূর্যের ব্যাস নির্ণয় কর। ৪

গ. পৃথিবীর গতিবেগ ঘণ্টায় কত? ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\theta = 32' = \left(\frac{32}{60}\right)^0 = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{2\pi}{675}$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ. সূর্যের ব্যাস, $s = r\theta = 14.9 \times 10^7 \times \frac{2\pi}{675}$ কি.মি.

$= 13.87 \times 10^5$ কি. মি. **(Ans.)**

গ. পৃথিবীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $S = 2\pi r$

$= 2\pi \times 14.9 \times 10^7$ কি. মি.

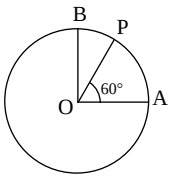
$= 93.657 \times 10^7$ কি. মি.

$365\frac{1}{4}$ দিন $= \frac{1461}{4} \times 24$ ঘণ্টা $= 8766$ ঘণ্টা।

$\therefore$ পৃথিবীর গতিবেগ $= \frac{93.675 \times 10^7 \text{ কি. মি.}}{8766 \text{ ঘণ্টা}}$

$= 1.068 \times 10^5$ কি.মি./ঘণ্টা **(Ans.)**

প্রশ্ন–২ 176 মিটার পরিধি বিশিষ্ট বৃত্তাকার মাঠের A বিন্দু থেকে পরিধি বরাবর দৌড়িয়ে এক বালক 7 সেকেন্ডে P বিন্দুতে পৌঁছায়। AP কেন্দ্রে $\angle AOP = 60°$ কোণ উৎপন্ন করলো। এখানে $AB \perp OA$।



ক. মাঠের ব্যাসার্ধ উপরের চিত্রের আলোকে নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle AOP$ একটি রেডিয়ান কোণ/ধ্রুব কোণ। ৪

গ. বালকটি কত বেগে দৌড়াচ্ছিল তা নির্ণয় কর। মাঠটির ক্ষেত্রফল আরও 500 বর্গ মি. বেশি হলে পরিধি বরাবর সম্পূর্ণ প্রদক্ষিণ করতে বালকটির কত সময় লাগতো তা নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, বৃত্তের পরিধি $2\pi r$

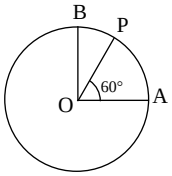
দেওয়া আছে, পরিধি 176 মিটার

$\therefore 2r\pi = 176$

বা, $r = \frac{176}{2r}$

$= 28.01$ **(Ans.)**

খ. চিত্রে, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AP চাপ কেন্দ্রে $\angle AOP$ কোণ তৈরি করে। প্রমাণ করতে হবে, $\angle AOP$ ধ্রুব কোণ।



প্রমাণ : যেহেতু $OB \perp OA$.

অতএব AB = পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$

এবং চাপ $AP = r\theta = \frac{\pi r}{3}$ $[\because \theta = 60° = \frac{\pi}{3}]$

আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

সুতরাং $\frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } AP}{\text{চাপ } AB}$

বা, $\angle AOP = \frac{\text{চাপ } AP}{\text{চাপ } AB} \times \angle AOB$

$= \frac{\frac{\pi r}{3}}{\frac{\pi r}{2}} \times$ এক সমকোণ

$= \frac{2}{3}$ সমকোণ

যেহেতু সমকোণ ও $\frac{2}{3}$ উভয়ই ধ্রুবক সেহেতু $\angle AOP$ একটি ধ্রুব কোণ।

(প্রমাণিত)

গ. চাপ AP কেন্দ্রে $\frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে ['খ' হতে]

এখানে ব্যাসার্ধ, $r = 28.01$ মিটার

$\therefore s = r\theta = 28.01 \times \frac{\pi}{3} = 29.3$ মিটার

বালকের বেগ = $\frac{29.3m}{7}$ মিটার/সেকেন্ড = 4.19 মিটার/সেকেন্ড

মাঠটির ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2$

$= \pi \times (28.01)^2$ বর্গমিটার

$= 2464.768$ বর্গমিটার

যদি আরও 500 মিটার বেশি হতো তাহলে

ক্ষেত্রফল হতো, $2464.768 + 500$ বর্গমিটার

$= 29964.768$ বর্গমিটার

এখন ব্যাসার্ধ r_1, হলে ক্ষেত্রফল πr_1^2

$\therefore \pi r_1^2 = 2964.768$

তখন ব্যাসার্ধ হতো, $r_1 = 30.72$ মিটার

এবং পরিধি, $2\pi r_1 = 193.02$ মিটার

মাঠটি প্রদক্ষিণ করতে প্রয়োজনীয় সময়

$= \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{বেগ}} = \frac{193.02}{4.19}$ সেকেন্ড

= 46 সেকেন্ড (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩ **535°, –365°, – 720° ও 1045°** চারটি কোণ।

ক. কোণ চারটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. কোণ চারটি কোন চতুর্ভাগে অবিস্থত, চিত্রসহ বর্ণনা কর। ৪

গ. টুটুল সাইকেলে চড়ে 70 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে কয়েকবার ঘুরে কেন্দ্রে 1045° কোণ তৈরি করে। টুটুল বৃত্তাকার পথে মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করল। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $535^\circ = \left(535 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \frac{107\pi^c}{36}$

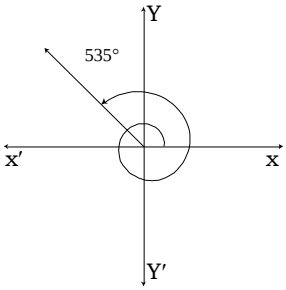
$-365^\circ = \left(-365 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \frac{-73\pi^c}{36}$

$-720^\circ = \left(-720 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = -4\pi^c$

$-1045^\circ = \left(1045 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \frac{209\pi^c}{36}$

খ. 535° কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে তা চিত্রসহ দেখানো হলো :

হিসাব : $535^\circ = 450^\circ + 85^\circ = 5 \times 90^\circ + 85^\circ$



ব্যাখ্যা : 535° কোণটি ধনাত্মক এবং 5 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 6 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 535° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 5 সমকোণ আসার পর পরবর্তী সমকোণের 85° পর্যন্ত বেশি ঘুরতে হয়েছে। সুতরাং 535° কোণটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

$-365° = -360° - 5° = -4 \times 90° - 5°$

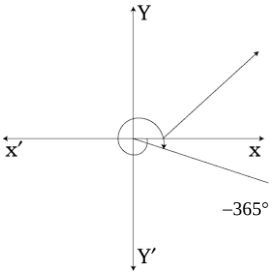
$-365°$ একটি ঋণাত্মক কোণ। $-365°$ কোণটি উৎপন্ন করতে কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরে একই দিকে আরও $5°$ ঘুরে চতুর্থ চতুর্ভাগে আসতে হয়েছে।

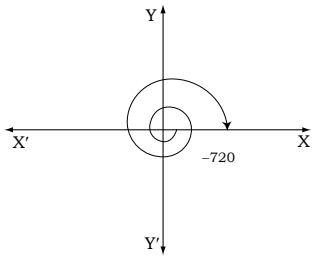
সুতরাং $-365°$ কোণটির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে।

$-720° = -8 \times 90° - 0°$

$-720°$ কোণটি ঋণাত্মক কোণ। $-720°$ কোণটি উৎপন্ন করতে রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে দুইবার সম্পূর্ণ বা 8 সমকোণ ঘোরতে হয়েছে।

সুতরাং $-720°$ কোণটির অবস্থান x অক্ষে।

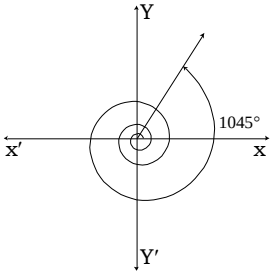




$1045°$ কোণটি কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে, তা চিত্রসহ দেখানো হলো:

হিসাব : $1045° = 1080° + 65° = 11 \times 90° + 55°$

ব্যাখ্যা : $1045°$ কোণটি ধনাত্মক এবং 11 সমকোণ



অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 12 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 1045° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে সমকোণ বা তিনবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পরবর্তী সমকোণের 55° পর্যন্ত বেশি ঘুরতে হয়েছে। সুতরাং 1045° কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

গ. দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ, $r = 70$ মিটার

মাঠের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 1045°$

$$= \frac{209\pi}{36} \text{ রেডিয়ান ['ক' অংশ হতে]}$$

$\therefore$ অতিক্রম দূরত্ব $s = r\theta = 70 \times \frac{209\pi}{36}$ মি. = 406·389 মি. (প্রায়)

$\therefore$ টুটুল বৃত্তাকার পথে মোট 406·389 মিটার (প্রায়) অতিক্রম করল।

(Ans.)

প্রশ্ন–৪ ▶ সোজা রেলপথে 60 কি. মি./ঘণ্টা গতিবেগে চলন্ত একটি ট্রেন ঢাকা থেকে ঈশ্বরদী পৌঁছাতে 3 ঘন্টা 45 মিনিট লাগে। ঢাকা ও ঈশ্বরদী পৃথিবীর কেন্দ্রে 2° কোণ উৎপন্ন করে।

ক. ঢাকা থেকে ঈশ্বরদীর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. ওপরের তথ্যানুযায়ী পৃথিবীর ব্যাসার্ধ বের কর। ৪

গ. পৃথিবীর ওপরের যে দুইটি স্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে 32″ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, ট্রেনের গতিবেগ 60 কি.মি./ঘণ্টা

প্রয়োজনীয় সময় 3 ঘন্টা 45 মিনিট $= \left(3 + \frac{45}{60}\right)$ ঘণ্টা

$= \left(3 + \frac{3}{4}\right)$ ঘণ্টা

$= \frac{15}{4}$ ঘণ্টা

∴ ঢাকা থেকে ঈশ্বরদীর দূরত্ব = টেনের গতিবেগ × সময়

$= 60$ কি.মি./ঘণ্টা $\times \frac{15}{4}$ ঘণ্টা

$= 225$ কি.মি. **(Ans.)**

খ. মনে করি, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = r

∴ ঢাকা ও ঈশ্বরদী দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রে

উৎপন্ন কোন $\theta = 2° = 2 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

∴ ঢাকা ও ঈশ্বরদীর মধ্যবর্তী দূরত্ব = S = চাপের দৈর্ঘ্য

$= 225$ কি.মি.

আমরা জানি, $S = r\theta$

বা, $r = \frac{s}{\theta}$

বা, $r = \frac{225}{\pi} = 225 \times \frac{90}{\pi}$

$= 6445{\cdot}76$ কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ. স্থান দুটি পৃথিবীর কেন্দ্র $\theta = 32''$ কোন উৎপন্ন করে

এখন $\theta = 32'' = \left(\frac{32}{60}\right)' = \left(\frac{32}{60 \times 60}\right) = \frac{32\pi}{3600 \times 180}$

এখন, চাপ $S = r\theta = 6445 \times \frac{32 \times \pi}{3600 \times 180}$ কি.মি.

$= 0{\cdot}999$ কি.মি. ≈ 1 কি.মি. **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ ▶ এক চাকাবিশিষ্ট সার্কাস সাইকেলের চাকার ব্যাস 70 সেমি. এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 7 বার আবর্তিত হয়।

ক. চাকাটি 1 বার ঘুরলে সাইকেলটি কত দূরে যাবে? ২

খ. সাইকেলের গতিবেগ ঘণ্টায় কত? ৪

গ. যদি একটি বাইসাইকেল উক্ত সাইকেলটির গতিবেগে বৃত্তাকার পথে 15 সেকেন্ডে বৃত্তের কেন্দ্রে $\frac{5\pi^c}{12}$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্তাকার পথটির ব্যাসার্ধ কত? ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, সাইকেলের চাকার ব্যাসার্ধ = r মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি = $2\pi r$ মি.

দেওয়া আছে, চাকার ব্যাস = 70 সে.মি. = 0.70 মি.

$\therefore r = \frac{0{\cdot}70 \text{ মি.}}{2} = 0{\cdot}35$ মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি = $2 \times 3.1416 \times 0{\cdot}35$ মি = $2{\cdot}199$ মি. **(Ans.)**

খ. চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 7 বার আবর্তিত হয়।

$\therefore$ সাইকেলটি 1 ঘণ্টায় বা (60×60) সেকেন্ডে অতিক্রম করে

$= 2{\cdot}199 \times 7 \times 60 \times 60$ মি.

$= \frac{2{\cdot}199 \times 7 \times 60}{1000}$ কি.মি.

$= 55{\cdot}415$ কি.মি. $= 55{\cdot}42$ কি.মি. **(Ans.)**

গ. প্রশ্নমতে, বাইসাইকেলের গতিবেগ = সাইকেলের গতিবেগ

= 55·42 কি.মি.

বাইসাইকেলটি

3600 সেকেন্ডে (1 ঘণ্টায়) অতিক্রম করে 55·42 কি.মি.

$\therefore$ 15 সেকেন্ডে অতিক্রম করে $\frac{55{\cdot}42 \times 15 \times 1000}{3600}$ মিটার

$= 230.917$ মিটার

অতিক্রান্ত দূরত্বের দৈর্ঘ্য, S = 230.917 মিটার

দেওয়া আছে, কেন্দ্রস্থ কোণ $\theta = \frac{5\pi^c}{12}$

মনে করি, বৃত্তাকার পথটির ব্যাসার্ধ = x মিটার

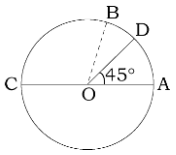
আমরা জানি, $S = r\theta$

বা, $230{\cdot}917 = x \times \frac{5\pi}{12}$

বা, $x = \frac{12 \times 230{\cdot}917}{5 \times 3{\cdot}1416}$

$\therefore$ $x = 176{\cdot}4072$ মিটার **(Ans.)**

প্রশ্ন–৬



চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকার ব্যাস AC = 70 সে.মি.

ক. AB চাপের দৈর্ঘ্য 35 সে.মি. হলে $\angle AOB$ এর মান কত? বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. চিত্রে $\angle AOD = 45^\circ$ হলে, AD চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 7 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কি.মি. হবে? ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উদ্দীপক অনুসারে, চাকার ব্যাস, AC = 70 সে.মি.

$\therefore$ চাকার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{70}{2}$ সে.মি.

$= 35$ সে.মি.

$\therefore$ $\angle AOB$ এর বৃত্তীয়মান $= \left(\frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}\right)^c = \left(\frac{35}{35}\right)^c = 1$ রেডিয়ান

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত $= 2\pi r : 2r = \pi : 1$ **(Ans.)**

খ. আমরা জানি,

$1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$

$\therefore$ $45^\circ = \frac{45\pi^c}{180} = \frac{\pi^c}{4}$

আবার, $\angle AOD$ এর বৃত্তীয় পরিমাণ $= \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$

বা, $\frac{\pi}{4} = \frac{\text{চাপ } AD}{r}$

বা, $4AD = r \times 3{\cdot}1416$

বা, $AD = \frac{3{\cdot}1416 \times 35}{4} = 27.489$ সে.মি. **(Ans.)**

গ. চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3{\cdot}1416 \times 35$ সে.মি.

$= 219.912$ সে.মি.

চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 7 বার আবর্তিত হয়

$\therefore$ চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে অতিক্রম করে

$= (7 \times 219{\cdot}912)$ সে.মি.

$\therefore$ চাকাটি 1 ঘণ্টায় বা, 3600 সেকেন্ডে অতিক্রম করে

$= \frac{7 \times 219{\cdot}912 \times 3600}{100 \times 1000}$ কি.মি.

$= 55.42$ কি.মি. **(Ans.)**

প্রশ্ন–৭ ▶ একটি বৃত্তচাপ 28 সে.মি. দীর্ঘ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

ক. কেন্দ্রস্থ কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি চাকা 500 সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করলে কতবার ঘুরবে? ৪

◀ ৭নং প্রশ্নের সমাধান ▶

ক. দেওয়া আছে, $\theta = 45° = 45 \times \frac{\pi^c}{180} = \frac{\pi c}{4}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 28$ সে. মি.

'ক' নং হতে পাই, $\theta = \frac{\pi c}{4}$

আমরা জানি, $s = r\theta = 28 \times \frac{\pi c}{4}$ সে.মি. $= \frac{28 \times 3.1416}{4}$ সে.মি.

$= 21.9912$ সে.মি. **(Ans.)**

গ. 'খ' থেকে পাই, বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য $= 22$ সে.মি.

চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 22$ সে.মি.

$= 138.2304$ সে.মি.

চাকাটি 138.2304 সে.মি. অতিক্রম করে 1 বার ঘুরে

$\therefore$ চাকাটি 500 সে.মি. অতিক্রম করে $\frac{500}{138.2304}$ বার ঘুরে

$= 3.617$ বার ঘুরে

≈ 4 বার **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▶ একটি চাকা বৃত্তাকার পথে 250 মিটার পথ যেতে 35 বার ঘুরে।

ক. চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ২

খ. চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 11 বার ঘুরলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত? ৪

গ. চাকাটি যদি বৃত্তের কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে তবে বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ৪

◀ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▶

ক. মনে করি, চাকার ব্যাসার্ধ r মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি $2\pi r$ মি.

আবার চাকা 1 বার ঘুরে অতিক্রম করে $\frac{250}{35} = 7.143$ মি.

প্রশ্নমতে, $2\pi r = 7.143$

বা, $r = \frac{7.143}{2\pi} = \frac{7.143}{2 \times 3.1416} = 1.137$ মি. **(Ans.)**

খ. 'ক' থেকে পাই, চাকাটি 1 বার ঘুরে 7.143 মিটার পথ অতিক্রম করে,

$\therefore$ চাকাটি 11 বার ঘুরে (11×7.143) মি. বা, 78.573 মি. পথ অতিক্রম করে,

$\therefore$ চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে যায় 78.573 মি.

$\therefore$ চাকাটি 3600 সেকেন্ডে যায় (78.573×3600) মি.

$= 282863.18$ মি.

$= 282.86$ কি.মি. **(Ans.)**

গ. মনে করি,

বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r মি.

চাকাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, S = 250 মি.

কেন্দ্রস্থ কোণ $\theta = 60^\circ = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান।

আমরা জানি, $S = r\theta$

$$\text{বা, } r = \frac{S}{\theta}$$

$$\text{বা, } r = \frac{250}{\frac{\pi}{3}} = 250 \times \frac{3}{\pi} = \frac{750}{3.1416} = 238.73 \text{ মি.}$$

বৃত্তের ব্যাসার্ধ 238.73 মি. **(Ans.)**

n = 1894 বার (প্রায়)। **(Ans.)**

প্রশ্ন–৯ ▶ ঢাকা ও দুবাই স্থান দুইটি পৃথিবীর কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ **R** এবং স্থান দুইটি মধ্যবর্তী দূরত্ব **S**।

ক. দেখাও যে, পৃথিবীর পরিধি $2\pi R$ [পৃথিবীকে বৃত্ত মনে করে] ২

খ. S ও R এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। ৪

গ. যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হয় এবং ঢাকা ও দুবাই পৃথিবীর কেন্দ্রে $32°35'7''$ কোণ উৎপন্ন করে তবে স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? ৪

◀◀ ৯নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. পৃথিবীকে একটি বৃত্ত কল্পনা করলে এর ব্যাসার্ধ = R এবং ব্যাস = 2R

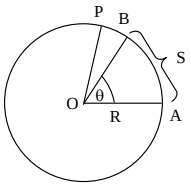
আমরা জানি, যেকোনো বৃত্তের ব্যাস এবং পরিধির অনুপাত সব সময় সমান এবং ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাটিকে π দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \pi$

বা, পরিধি = ব্যাস $\times \pi$

$\therefore$ পরিধি = $2\pi R$ **(দেখানো হলো)**

খ.



চিত্রে, মনে করি, পৃথিবীর কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ OA = R,

স্থান দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব AB = S

AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ AOB = θ রেডিয়ান।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA বা OB এর সমান করে একটি চাপ AP অঙ্কন করি। O, P যোগ করি।

$\therefore \angle AOP = 1$ রেডিয়ান।

আমরা জানি, কোনো বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$\therefore \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ AP}} = \frac{\angle AOB}{\angle AOP}$

বা, $\frac{S}{R} = \frac{\theta \text{ রেডিয়ান}}{1\text{রেডিয়ান}}$

বা, $\frac{S}{R} = \theta$

$S = R\theta$ **(Ans.)**

গ. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6440$ কি.মি.

ঢাকা ও দুবাই দ্বারা উৎপন্ন কোণ, $\theta = 32°35'7''$

$$= \left(32 + \frac{35}{60} + \frac{7}{60 \times 60}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{117307}{3600}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{117307}{3600} \times \frac{\pi}{180}\right) \text{ রেডিয়ান}$$

$= 0{\cdot}5687$ রেডিয়ান।

$\therefore$ ঢাকা ও দুবাইয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $S = R\theta$

$= 6440 \times 0{\cdot}5687$ কি.মি.

$= 3662{\cdot}43$ কি.মি. (প্রায়)

(Ans.)

প্রশ্ন–১০ ▶ কামাল সাইকেল চড়ে বৃত্তাকার পথে 20 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। চাপটি কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 150 মিটার। বৃত্তাকার পথের কেন্দ্র হতে 200 কিলোমিটার দূরে একটি পাহাড় 7′ কোণ উৎপন্ন করে।

ক. $30°$ কে রেডিয়ানে ও $7'$ কে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ২

খ. কামালের গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। ৪

▶◀ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. $30° = 30 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান

$= 0{\cdot}5236$ রেডিয়ান **(Ans.)**

এবং $7' = \left(\frac{7}{60}\right)^\circ = 0{\cdot}1167°$ **(Ans.)**

খ. বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{150}{2}$ মিটার $= 75$ মিটার

ধরি, চাপ AB $= s$ মিটার

আমরা জানি, $s = r\theta$ মিটার $= 75 \times \frac{\pi}{6}$ মিটার

$= 39{\cdot}27$ মিটার (প্রায়)

যেহেতু কামাল 20 সেকেন্ডে $39{\cdot}27$ মিটার অতিক্রম করে

$\therefore$ কামালের গতিবেগ $= \frac{39{\cdot}27}{20}$ মিটার/সেকেন্ড

$= 1{\cdot}9635$ মি. সেকেন্ড **(Ans.)**

গ. আবার, পাহাড় দ্বারা উৎপন্ন কোণ θ হলে

$\theta = 7' = \frac{7}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{7\pi}{60 \times 180}$ রেডিয়ান

পাহাড়ের দূরত্ব, $r = 200$ কিলোমিটার

$= 200 \times 1000$ মিটার

$= 200000$ মিটার

$\therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা s হলে,

$s = r\theta$ একক

$= 200000 \times \frac{7\pi}{60 \times 180}$ মি. $= 407{\cdot}24$ মি. **(Ans.)**

প্রশ্ন–১১ ▶ শিপলু একটি সাইকেল চড়ে বৃত্তাকার পথে 20 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। চাপটি কেন্দ্রে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 204 মিটার।

ক. $30°$ কোণকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। ২

খ. শিপলুর গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. কেন্দ্রে $720°$ কোণ উৎপন্ন করতে শিপলু বৃত্তাকার পথে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে এবং ঐ পথ অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে? ৪

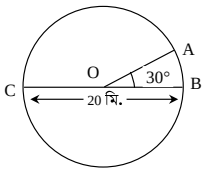
◀◀ ১১নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. আমরা জানি, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান।

$\therefore 30^\circ = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান। **(Ans.)**

খ.

ধরি, শিপলু ABC বৃত্তের B বিন্দু থেকে যাত্রা করে 20 সেকেন্ড পরে পরিধির উপর A বিন্দুতে আসে।



অতএব, AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB = 30^\circ$

OB = ব্যাসার্ধ $r = \frac{204}{2}$ মিটার = 102 মিটার।

ধরি, চাপ AB = s মিটার

আমরা জানি, $s = r\theta$

বা, $s = 102 \times 30 \times \frac{\pi}{180}$ মিটার $= 17\pi$ মিটার

$= 17 \times 3{\cdot}1416$ মিটার (প্রায়) $= 53{\cdot}4072$ মিটার

$= 53{\cdot}4072$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ শিপলুর গতিবেগ $= \frac{53{\cdot}4072}{20} = 2{\cdot}6703$

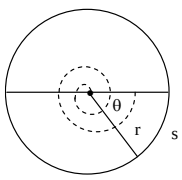
$= 2{\cdot}67$ মিটার/সেকেন্ড (প্রায়) **(Ans.)**

গ. ধরি, বৃত্তাকার পথে s দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore s = r\theta$

বা, $s = r \times \theta$

$= 102 \times 720 \times \frac{\pi}{180}$ মিটার



$= 408\pi$ মিটার

$= 408 \times 3{\cdot}1416$ মিটার (প্রায়)

$= 1281{\cdot}7728$ মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

নির্ণেয় সময় $= \frac{1281{\cdot}7728}{2{\cdot}67}$ ['খ' থেকে পাই]

$= 480$ সেকেন্ড $= 8$ মিনিট (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ ▶ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হলে পৃথিবীর উপরের দুইটি স্থানের কেন্দ্রে 55″ কোণ উৎপন্ন করে।

ক. কোণটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. স্থান দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. লোকটি সাইকেলে উক্ত পথ 4 মিনিটে অতিক্রম করলে লোকটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার? ৪

◀◀ ১২নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 55''$

$= \frac{55^\circ}{60 \times 60}$ [$\because 1^\circ = 60'$ এবং $1' = 60''$]

$= \frac{55 \times \pi}{60 \times 60 \times 180}$ রেডিয়ান $\left[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= 0{\cdot}000267$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ. ধরি, চাপ s স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্দেশ করে।

আমরা জানি, $s = r\theta$

$= (6440 \times 0{\cdot}000267)$ কি.মি.

$= 1{\cdot}71948$ কি.মি.

∴ স্থান দুইটির দূরত্ব 1·72 কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ. লোকটি 4 মিনিটে যায় 1·72 কি.মি.

∴ ” 1 ” ” $\frac{1{\cdot}72}{4}$ ”

∴ ” 60 ” ” $\frac{1{\cdot}72 \times 60}{4}$ ”

= 25·8 কি.মি. **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৩ ▶ একটি বৃত্তাকার চাকার 10 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখ কোণের পরিমাপ 30° ।

ক. রেডিয়ান কোণ কাকে বলে এবং এক রেডিয়ান কত ডিগ্রীর সমান? ২

খ. চাকাটির ব্যাস নির্ণয় কর। ৪

গ. চাকাটি 400 মিটার পথ অতিক্রম করতে কতবার ঘুরবে? ৪

◀◀ ১৩নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. **রেডিয়ান কোণ :** কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।

এক রেডিয়ান কোণ = 57·29578 ডিগ্রী (প্রায়)

খ. ধরি, AB চাপটি বৃত্তে $\angle AOB = 30°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \theta = 30° = \frac{30\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান

এবং AB = 10 সে.মি.

আমরা জানি, $s = r\theta$

বা, $r = \frac{s}{\theta} = \frac{10}{\frac{\pi}{6}} = \frac{60}{\pi}$

$\therefore$ চাকটির ব্যাস $= 2r = 2 \times \frac{60}{\pi} = 38·197$ সে.মি.(প্রায়) **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে পাই চাকাটির ব্যাস, $2r = 38·197$ সে.মি.

$\therefore$ চাকাটির পরিধি $= 2\pi r$ একক

$= 3·1416 \times 38·197$ সে.মি.

$= 119·999$ সে.মি. $= 120$ সে.মি. (প্রায়)

চাকাটি 120 সে.মি. পথ অতিক্রম করতে 1 বার ঘুরে

" 1 " " " $\frac{1}{120}$ বার ঘুরে

$\therefore$ 400 মি. বা 40000 সে.মি. " " $\frac{40000}{120}$ " "

$= 333{\cdot}33$ ”

∴ চাকাটি 333 বার ঘুরে **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৪ মনে করি, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। রাজশাহী ও চট্টগ্রাম পৃথিবীর কেন্দ্রে $5°6'36''$ কোণ উৎপন্ন করে। রাফি একটি মাইক্রোবাস ভাড়া করে রাজশাহী হতে চট্টগ্রামে সরাসরি পৌছালো। গাড়িটির চাকার ব্যাস 0.82 মিটার।

ক. $5°6'36''$ কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. রাজশাহী হতে চট্টগ্রামের দূরত্ব নির্ণয় কর। ৪

গ. রাজশাহী হতে চট্টগ্রাম যেতে গাড়িটির চাকা কতবার ঘুরবে? ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $5°6'36'' = 5°\left(6+\frac{36}{60}\right)'$ [$1'$ (মিনিট) = $60''$ (সেকেন্ড)]

$= 5°\left(\frac{33}{5}\right)'$

$= \left(5+\frac{33}{5\times 60}\right)°$

$= \frac{511}{100}$

$= \frac{511}{100}\times\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $\left[1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)\text{ (রেডিয়ান)}\right]$

$= 0.0892$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ. রাজশাহী হতে চট্টগ্রামে গেলে পৃথিবীর সমান ব্যাসার্ধের বৃত্তে যে চাপ উৎপন্ন করে তা 0.0892 রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, চাপ, $s = r\theta$

এখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6440$ কি.মি. $= 6.44\times 10^{\circ}$ মিটার এবং $\theta = 0.0892$ রেডিয়ান

সুতরাং রাজশাহী হতে চট্টগ্রামের দূরত্ব,

$s = 6.44\times 10^6\times 0.0892$ মিটার

$= 574.45\times 10^3$ মিটার

$= 574.45$ কিলোমিটার **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, গাড়িটির ঢাকার ব্যাস = 0.82 মিটার

তাহলে ব্যাসার্ধ, r = 0.41 মিটার

চাকাটি একবার ঘুরলে চাকাটির পরিধির সমান $2\pi r$ মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। চাকাটির পরিধি = $2 \times 3.1416 \times 0.41$ মিটার

= 2.576 মিটার

'খ' প্রশ্নোত্তর হতে পাই, রাজশাহী হতে চট্টগ্রামের দূরত্ব অতিক্রম করতে ঘোরে 574.45 কিলোমিটার বা 574450 মিটার

চাকাটি 2.576 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করতে ঘোরে 1 বার

1 " " " " " $\frac{1}{2.576}$ "

$\therefore$ " 574450 " " " " $\frac{574450}{2.576}$ "

= 22300.77 "

সুতরাং রাজশাহী হতে চট্টগ্রাম যেতে গাড়িটির চাকা 2,23,001 বার ঘুরবে। **(Ans.)**

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ৮.২

প্রশ্ন–১ যদি **$\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = a$** হয়–

ক. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos\theta = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ ৪

গ. দেখাও যে, $(a^2 + 1)\cos\theta + (a^2 + 1)\sin\theta = (a + 1)^2 - 2$ ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = a$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = a(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = a(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$

বা, $1 = a(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$ [$\because \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$]

$\therefore \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{a}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = a$

ডানপক্ষ $= \dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

$$= \frac{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 - (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 + (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}$$

$[\because \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1]$

$$= \frac{\cot^2\theta + 2\cot\theta.\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta}{\cot^2\theta + 2\cot\theta.\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta}$$

$$= \frac{2\cot^2\theta + 2\cot\theta.\operatorname{cosec}\theta}{2\cot\theta.\operatorname{cosec}\theta + 2\operatorname{cosec}^2\theta}$$

$$= \frac{2\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}}{2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta} + 2.\dfrac{1}{\sin^2\theta}} = \frac{2\cos\theta\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)}{2\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)}$$

$= \cos\theta =$ বামপক্ষ

$\cos\theta = \dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ (প্রমাণিত)

গ. 'খ' থেকে পাই, $\cos\theta = \dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{a^4 + 2a^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2 + 1 - a^4 + 2a^2 - 1}{a^4 + 2a^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2}{(a^2 + 1)^2}} = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

বামপক্ষ $= (a^2 + 1)\cos\theta + (a^2 + 1)\sin\theta$

$$= (a^2 + 1)(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$= (a^2 + 1)\left(\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + \frac{2a}{a^2 + 1}\right)$$

$$= (a^2 + 1)\left(\frac{a^2 - 1 + 2a}{a^2 + 1}\right)$$

$$= a^2 - 1 + 2a$$

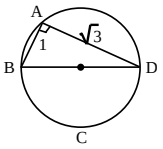
$= a^2 + 2a + 1 - 2$

$= (a + 1)^2 - 2$

= ডানপক্ষ

$\therefore (a^2 + 1)\cos\theta + (a^2 + 1)\sin\theta = (a + 1)^2 - 2$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–২



ক. ABCD বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin(B - D) = \sin B \cos D - \cos B \sin D$ ৪

গ. $\frac{\tan B + \sec B - 1}{\tan B - \sec B + 1}$ এবং $\frac{1 + \cos D}{\sin D}$ এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে ABCD একটি বৃত্ত এবং ΔABD এর শীর্ষ বিন্দুত্রয় ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

আমার জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

যেহেতু $\angle BAD$ = এক সমকোণ।

সুতরাং $\angle BAD$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

$\therefore$ BD হবে ABCD বৃত্তের ব্যাস।

এখানে AB = 1 একক, AD = $\sqrt{3}$ একক

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$

$\therefore$ BD = 2 একক

সুতরাং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = $\frac{2}{2}$ একক = 1 একক

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\sin(B - D) = \sin B \cos D - \cos B \sin D$

এখানে, AB = 1 একক, AD = $\sqrt{3}$ একক এবং BD = 2 একক।

এখন, $\tan\angle ABD = \frac{AD}{AB}$

বা, $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{1}$

বা, $\tan B = \sqrt{3}$

বা, $\tan B = \tan 60°$

$\therefore B = 60°$

অথবা, $\tan\angle ADB = \frac{AB}{AD}$

বা, $\tan D = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan D = \tan 30°$

$\therefore D = 30°$

বামপক্ষ = $\sin(B - D) = \sin(60° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

ডানপক্ষ = $\sin B \cos D - \cos B \sin D$

$= \sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\sin(B - D) = \sin B \cos D - \cos B \sin D$ (প্রমাণিত)

গ. $\frac{\tan B + \sec B - 1}{\tan B - \sec B + 1}$ এবং $\frac{1 + \cos D}{\sin D}$ এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে।

'খ' হতে পাই, $\angle B = 60°$ এবং $\angle D = 30°$

এখন, $\frac{\tan B + \sec B - 1}{\tan B - \sec B + 1} = \frac{\tan 60° + \sec 60° - 1}{\tan 60° - \sec 60° + 1}$

$= \frac{\sqrt{3} + 2 - 1}{\sqrt{3} - 2 + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

$= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$

$= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}$

$= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2.\sqrt{3}.1 + (1)^2}{3 - 1}$

$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{2(2+\sqrt{3})}{2} = 2+\sqrt{3}$$

আবার, $\frac{1+\cos D}{\sin D} = \frac{1+\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = 2+\sqrt{3}$$

সুতরাং $\frac{\tan B + \sec B - 1}{\tan B - \sec B + 1}$ এবং $\frac{1+\cos D}{\sin D}$

অর্থাৎ $\frac{\tan B + \sec B - 1}{\tan B - \sec B + 1}$ এবং $\frac{1+\cos D}{\sin D}$ রাশিদ্বয় পরস্পর সমান।

$\frac{\tan B + \sec B - 1}{\tan B - \sec B + 1} = \frac{1+\cos D}{\sin D}$ এটিই নির্ণেয় সম্পর্ক।

প্রশ্ন–৩ **ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির ভূমি, লম্ব ও অতিভুজ যথাক্রমে x, y ও r এবং ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ θ.**

ক. তথ্যানুসারে চিত্র অঙ্কন করে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও। ২

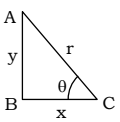
খ. প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

যার ভূমি BC = x একক লম্ব AB = y একক ও অতিভুজ AC = r একক।



ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ ∠ACB = θ

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

'ক' এর চিত্র থেকে পাই

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x} \text{ এবং } r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = \left(\frac{r}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{r^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$= \frac{r^2 - y^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} \left[\because r^2 = x^2 + y^2\right]$$

$$= 1$$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

'ক' এর চিত্র থেকে পাই,

$$\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{r}{y}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{x}{y} \text{ এবং } r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \left(\frac{r}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

$$= \frac{r^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2 - x^2}{y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x^2}{y^2} \left[\because r^2 = x^2 + y^2\right]$$

$$= \frac{y^2}{y^2} = 1$$

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৪ ▶ দুইটি কোণের পরিমাপ $A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$।

ক. $\sin(A + B)$ এবং $\sin(A - B)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$

গ. প্রমাণ কর যে, (i) $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$

(ii) $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A \sin B$ ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$

এখন, $\sin(A + B) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi + \pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{2} = 1$ **(Ans.)**

এবং $\sin(A - B) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi - \pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. Text পৃষ্ঠা ১৫৭ এর কাজ অংশের (iv) নম্বরের সমাধান দেখ।

$\therefore \tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$ **(দেখানো হলো)**

গ. (i) বামপক্ষ $= \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ [$\because \sin(A + B) = 1$ তাই $\cos(A + B) = 0$]

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= 2\cos A \cos B = 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$ **(প্রমাণিত)**

(ii) বামপক্ষ $= \cos(A - B) - \cos(A + B)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 0$ [‘ক’ থেকে পাই]

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ = $2\sin A \sin B$

$= 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫ ▶ $\mathbf{A = \frac{\pi}{3}}$ **ও** $\mathbf{B = \frac{\pi}{6}}$ **হলে**

ক. $\cos(A+B)$ ও $\cos(A-B)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, (i) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A \sin B$

(ii) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A \sin B$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, (i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\frac{\sin^2(A+B)}{\sqrt{3}} = \tan(A-B)$ ৪

▶◀ ৫নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \cos(A+B) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi+\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{6}$

$= \cos\frac{\pi}{2} = 0$ **(Ans.)**

এবং $\cos(A-B) = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi-\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

খ. (i) বামপক্ষ = $\cos(A+B) = 0$ [‘ক’ হতে]

ডানপক্ষ = $\cos A\cos B - \sin A \sin B$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

cos(A + B) = cosA cosB – sinA sinB (দেখানো হলো)

(ii) বামপক্ষ = $\cos(A - B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ['ক' হতে]

ডানপক্ষ = cos A cos B + sin A sin B

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

cos(A – B) = cos A cos B + sin A sin B **(**দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{5}{6}$

বামপক্ষ = $\sin(A + B) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi + \pi}{6}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{2} = 1$$ **(Ans.)**

ডানপক্ষ = sinA cosB + cosA sinB

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

sin(A + B) = sin A cosB + cosA sinB (প্রমাণিত)

(ii) বামপক্ষ = $\frac{\sin^2(A + B)}{\sqrt{3}} = \frac{(1)^2}{\sqrt{3}}$ [(i) হতে]

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

ডানপক্ষ = $\tan(A - B) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{2\pi - \pi}{6}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\frac{\sin^2(A + B)}{\sqrt{3}} = \tan(A - B)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৬ দুটি বাহু একটি বিন্দুতে θ কোণে মিলিত হলো। কোণটির **cos** অনুপাত ঋণাত্মক এবং **tan** অনুপাতের মান $\frac{5}{12}$

ক. $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$ ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রশ্নমতে, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

আমরা জানি, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$\tan\theta = \frac{5}{12}$

বা, $\tan^2\theta = \left(\frac{5}{12}\right)^2$

বা, $\sec^2\theta - 1 = \frac{25}{144}$

বা, $\sec^2\theta = \frac{25}{144} + 1$

বা, $\sec^2\theta = \frac{169}{144}$

বা, $\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{169}{144}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{144}{169}$

বা, $\cos\theta = \pm\frac{12}{13}$

$\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ **(Ans.)**

গ. আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

বা, $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

বা, $\sin\theta = \frac{5}{12} \times \left(-\frac{12}{13}\right)$ ['খ' থেকে]

$\therefore \sin\theta = -\frac{5}{13}$

এখন, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta} = \frac{\left(\frac{-5}{13}\right) + \left(\frac{-12}{13}\right)}{\frac{1}{-\frac{12}{13}} + \frac{5}{12}} = \frac{-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{-\frac{13}{12} + \frac{5}{12}}$

$= \frac{-17}{13} \times \frac{12}{-8} = \frac{51}{26}$

$\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৭ ▶ $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে,

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ৪

গ. $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $x(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{x}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{1+\sin\theta+1-\sin\theta} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ [বিয়োজন–যোজন করে]

বা, $\frac{2\sin\theta}{2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (দেখানো হলো)

গ. 'খ' থেকে পাই, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

বা, $\frac{1}{\text{cosec}\theta} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

বা, $\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\text{cosec}^2\theta = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2$

বা, $\cot^2\theta + 1 = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$

বা, $\cot^2\theta = \frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2} - 1$

বা, $\cot^2\theta = \frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2}$

বা, $\cot^2\theta = \frac{4x^2}{(x^2-1)^2}$

বা, $\cot\theta = \frac{2x}{x^2-1}$

$\therefore \tan\theta = \frac{x^2-1}{2x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▶ যদি $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$ হয় তবে,

ক. $\tan^2\theta - \sin^2\theta =$ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ ৪

গ. দেখাও যে, $(m+n)^2 = \frac{16mn}{(m-n)^2}$ ৪

◀◀ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$

$\therefore \tan^2\theta - \sin^2\theta = (\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta) = mn$

$\therefore \tan^2\theta - \sin^2\theta = mn$ **(Ans.)**

খ. বামপক্ষ $= m^2 - n^2$

$= (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$

$= 4\tan\theta \sin\theta$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta \sin^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta (1 - \cos^2\theta)}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \tan^2\theta . \cos^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta}$

$= 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$

$= 4\sqrt{mn}$ = ডানপক্ষ

$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ **(প্রমাণিত)**

গ. ডানপক্ষ $= \frac{16mn}{(m-n)^2} = \frac{16(\tan^2\theta - \sin^2\theta)}{(2\sin\theta)^2}$ ['ক' থেকে]

$= \frac{16\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)}{4\sin^2\theta} = \frac{4\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}{\sin^2\theta}$

$= 4\left(\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) \quad = 4\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$= 4\tan^2\theta = (2\tan\theta)^2$

$= (\sin\theta + \tan\theta + \tan\theta - \sin\theta)^2$

$= (m + n)^2$ = বামপক্ষ

$(m + n)^2 = \frac{16mn}{(m-n)^2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৯ ▶ $\mathbf{\sin A = \frac{5}{13}}$ **,** $\mathbf{\cos B = \frac{3}{5}}$ **এবং** $\mathbf{6\sin^2 B + 5\cos B = 7}$

ক. cosA ও sinB এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{\cot B - \cot A}{\cot A \cot B + 1}$ এর মান কত? ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\cot B = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{5}{13}$

আমরা জানি, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

বা, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \cos A = \frac{12}{13}$

আবার, দেওয়া আছে, $\cos B = \frac{3}{5}$

আমরা জানি, $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

বা, $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$

$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{25 - 9}{25} = \frac{16}{25}$

$\therefore \sin B = \frac{4}{5}$

$\cos A = \frac{12}{13}$ এবং $\sin B = \frac{4}{5}$ **(Ans.)**

খ. $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$

$\cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{\cot B - \cot A}{\cot A \cot B + 1} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{\frac{3 \times 12}{4 \times 5} + 1}$

$= \frac{15 - 48}{20} \times \frac{20}{36 + 20}$

$= -\frac{33}{20} \times \frac{20}{56} = -\frac{33}{56}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $6\sin^2 B + 5\cos B = 7$

বা, $6 - 6\cos^2B + 5\cos B - 7 = 0$

বা, $6\cos^2B - 5\cos B + 1 = 0$

বা, $6\cos^2B - 2\cos B - 3\cos B + 1 = 0$

বা, $2\cos B(3\cos B - 1) - 1(3\cos B - 1) = 0$

বা, $(3\cos B - 1)(2\cos B - 1) = 0$

হয়, $3\cos B - 1 = 0$ অথবা, $2\cos B - 1 = 0$

$\therefore \cos B = \frac{1}{3}$ $\therefore \cos B = \frac{1}{2}$

$\cos B = \frac{1}{2}$ এর জন্য,

$$\sin^2B = 1 - \cos^2B = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cot^2B = \frac{\cos^2B}{\sin^2B} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$\cot B = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০ ▸ $\operatorname{cosec} A = \frac{a}{b}$ এবং A সূক্ষ্মকোণ যেখানে $a > b > 0$

ক. $\sin A + \operatorname{cosec} A$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\tan A = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ৪

গ. $a = 13$ এবং $b = 5$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \sec A = \frac{3}{2}$ ৪

▸◂ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $\sin A + \operatorname{cosec} A = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$ **(Ans.)**

খ. আমরা জানি, $\cos^2A = 1 - \sin^2A$

বা, $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2A} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

আবার, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$\therefore \tan A = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $a = 13$ এবং $b = 5$,

'খ' থেকে $\cos A = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \frac{\sqrt{169 - 25}}{13} = \sqrt{\frac{144}{13}} = \frac{12}{13}$

$\therefore \sec A = \frac{13}{12}$

বামপক্ষ = $\tan A + \sec A$

$= \frac{\sin A}{\cos A} + \sec A$

$= \sin A \sec A + \sec A$

$= \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{12} + \frac{13}{12} = \frac{5}{12} + \frac{13}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

= ডানপক্ষ

$\tan A + \sec A = \frac{3}{2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১১ $\tan\theta + \sec\theta = \frac{\sqrt{1 + \sin\theta}}{\sqrt{1 - \sin\theta}}$

ক. $\theta = 45°$ এর জন্য রাশিটি প্রমাণ কর। ২

খ. θ-এর মান ছাড়াই এটি প্রমাণ কর। ৪

গ. যদি $\tan\theta + \sec\theta = x$ হয় তাহলে $\sin\theta$ এর মান x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\theta = 45°$ হলে,

বামপক্ষ = $\tan\theta + \sec\theta$

$= \tan 45° + \sec 45°$

$= 1 + \sqrt{2}$

ডানপক্ষ = $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sqrt{\frac{1+\sin 45°}{1-\sin 45°}}$

$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(1)^2}}$ [$\sqrt{2}+1$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

$\theta = 45°$ এর জন্য $\tan\theta + \sec\theta = \frac{\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}$ **(প্রমাণিত হলো)**

খ. বামপক্ষ = $\tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin^2\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

= ডানপক্ষ

$\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(\sin\theta + 1)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = x^2$

বা, $x^2 - x^2\sin\theta = 1 + \sin\theta$

বা, $x^2 - 1 = \sin\theta\,(1 + x^2)$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ **$\sec\theta - \tan\theta = p$** একটি সমীকরণ।

ক. $\sec\theta + \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{1-p^2}{1+p^2}$ ৪

গ. দেখাও যে, $(1+p^2)\cos\theta + (1+p^2)\sin\theta + 2p^2 = (1+p)^2$ ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\sec\theta - \tan\theta = p$

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta) \times p = 1$

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{p}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' অংশ হতে প্রাপ্ত,

$$\sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{p}$$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{p}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{p}$

বা, $\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{p}\right)^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{1}{p^2}$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{p^2}$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \frac{1}{p^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1}{p^2}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{1 + p^2}{1 - p^2}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{1 + p^2}{1 - p^2}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{1 + p^2}{1 - p^2}$

বা, $\sin\theta = \frac{1 - p^2}{1 + p^2}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore \sin\theta = \frac{1 - p^2}{1 + p^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $\sec\theta - \tan\theta = p$ .....(i)

'ক' হতে পাই, $\sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{p}$ .....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2\sec\theta = p + \frac{1}{p}$

বা, $2\sec\theta = \frac{1 + p^2}{p}$

বা, $\sec\theta = \frac{1 + p^2}{2p}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1 + p^2}{2p}$

$\therefore \cos\theta = \frac{2p}{1 + p^2}$ [বিপরীতকরণ করে]

বামপক্ষ $= (1 + p^2)\cos\theta + (1 + p^2)\sin\theta + 2p^2$

$= (1 + p^2) \cdot \frac{2p}{1 + p^2} + (1 + p^2) \cdot \frac{1 - p^2}{1 + p^2} + 2p^2$

$= 2p + 1 - p^2 + 2p^2$

$= p^2 + 2p + 1$

$= (p + 1)^2$

$= (1 + p)^2$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $(1 + p^2)\cos\theta + (1 + p^2)\sin\theta + 2p^2 = (1 + p)^2$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৩ **$a\sin\theta = b\cos\theta$**

ক. $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\cos = \pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta = \dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{b^2}{a^2}$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a\sin\theta = b\cos\theta$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{b}{a}$

$\therefore \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \dfrac{b + a}{b - a}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $a\sin\theta = b\cos\theta$

বা, $a^2\sin^2\theta = b^2\cos^2\theta$

বা, $a^2(1 - \cos^2\theta) = b^2\cos^2\theta$

বা, $a^2 - a^2\cos^2\theta = b^2\cos^2\theta$

বা, $a^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\cos^2\theta$

বা, $a^2 = (a^2 + b^2)\cos^2\theta$

বা, $\cos^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$

$\therefore \cos\theta = \pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $\cos\theta = \pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

দেওয়া আছে, $a\sin\theta = b\cos\theta$

বা, $\sin\theta = \dfrac{b}{a}\cos\theta = \dfrac{b}{a}\left(\pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

$$= \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

বামপক্ষ $= \operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2 \theta$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^4 + a^2b^2 - a^2b^2 - b^4}{a^2b^2}$$

$$= \frac{a^4}{a^2b^2} - \frac{b^4}{a^2b^2} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} =$$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৪ **$\tan\theta + \sec\theta = \frac{x}{y}$ এবং $A = \frac{\pi}{8}$, $B = \frac{3\pi}{8}$, $C = \frac{5\pi}{8}$, $D = \frac{7\pi}{8}$ হলে প্রমাণ কর যে,**

ক. $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$ ২

খ. $(x^2 + y^2)\sin\theta = x^2 - y^2$ ৪

গ. $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + \cos^2D = 2$ ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$ (প্রমাণিত)

খ. 'ক' হতে পাই,

$$\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{x^2}{y^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{x^2}{y^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

$\therefore (x^2+y^2)\sin\theta = x^2 - y^2$ **(প্রমাণিত)**

গ. বামপক্ষ $= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

[A, B, C ও D এর মান বসিয়ে]

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}$

$= \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 1 + 1 = 2$ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D = 2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৫ ▶ যদি $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$ হয় তবে,

?

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \frac{m+n}{2}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\sec\theta = \sqrt{mn}$ $\text{cosec}^2\theta$ ৪

▸◂ ১৫নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে,

$\tan\theta + \sin\theta = m$ .....(i)

$\tan\theta - \sin\theta = n$ .....(ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই, $2\tan\theta = m + n$

$\therefore \tan\theta = \frac{m+n}{2}$ **(প্রমাণিত)**

খ. বামপক্ষ $= m^2 - n^2$

$= (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$

$= 4\tan\theta \sin\theta$ [$\because 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$]

$= 4\sqrt{\tan^2\theta\sin^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta(1 - \cos^2\theta)}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \tan^2\theta\cos^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta}$

$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta}$

$= 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$

$= 4\sqrt{mn}$ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ **(প্রমাণিত)**

গ. 'ক' হতে, $\tan\theta = \frac{m+n}{2}$

বা, $2\tan\theta = m + n$ .....(i)

আবার, দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sin\theta = m$

$\underline{\tan\theta - \sin\theta = n}$

(–) করে $2\sin\theta = m - n$

$\therefore 2\sin\theta = m - n$ .....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) গুণ করে পাই,

$2\tan\theta \times 2\sin\theta = (m+n)(m-n)$

বা, $4\tan\theta\sin\theta = m^2 - n^2$

বা, $4\tan\theta\sin\theta = 4\sqrt{mn}$ ['খ' হতে]

বা, $\tan\theta\sin\theta = \sqrt{mn}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} . \sin\theta = \sqrt{mn}$

বা, $\sin^2\theta \sec\theta = \sqrt{mn}$

বা, $\frac{\sec\theta}{\text{cosec}^2\theta} = \sqrt{mn}$

অর্থাৎ $\sec\theta = \sqrt{mn}\ \text{cosec}^2\theta$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৬ ▶ $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে,

ক. $\tan\left(\frac{-23\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ৪

গ. দেখাও যে, $(x^2+1)\cos\theta + (x^2+1)\sin\theta = (x+1)^2 - 2$ ৪

◀◀ ১৬নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. $\tan\left(\frac{-23\pi}{6}\right) = -\tan\frac{23\pi}{6}$ [$\because \tan(-\theta) = -\tan\theta$]

$= -\tan\left(8\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

নির্ণেয় মান $\frac{1}{\sqrt{3}}$

খ. দেওয়া আছে,

$\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (প্রমাণিত)

গ. $\tan\theta + \sec\theta = x$ .....(i)

বা, $(\tan\theta + \sec\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = x(\sec\theta - \tan\theta)$

বা, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = x(\sec\theta - \tan\theta)$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{x}$ .....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে, $2\sec\theta = x + \frac{1}{x}$

বা, $2\sec\theta = \frac{x^2+1}{x}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{2x}$

$\therefore \cos\theta = \frac{2x}{x^2+1}$

বামপক্ষ = $(x^2+1)\cos\theta + (x^2+1)\sin\theta$

$= (x^2+1)\frac{2x}{x^2+1} + (x^2+1)\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ ['খ' হতে]

$= x^2 + 2x - 1$

$= x^2 + 2x + 1 - 2 = (x+1)^2 - 2$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ $(x^2+1)\cos\theta + (x^2+1)\sin\theta = (x+1)^2 - 2$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৭ ▶ $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে,

?

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ৪

গ. $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\sec\theta + \tan\theta = x$

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $x(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{x}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = x$

বা, $\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = x^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

[উভয়পক্ষে যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ .....(i)

$\therefore \sin^2\theta = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$

বা, $1 - \cos^2\theta = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$

বা, $\cos^2\theta = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2$

বা, $\cos\theta = \frac{2x}{x^2+1}$ .....(ii) [ধনাত্মক মান নিয়ে]

সমীকরণ (i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}}$

$\therefore \tan\theta = \frac{x^2-1}{2x}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৮ ▶ $p = \tan\theta$, $q = \sec\theta$, $r = \sin\theta + \cos\theta$

ক. $p = \frac{a}{b}$ $(a \neq b)$ হলে, $\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $p + q = y$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$\sin\theta = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$ ৪

গ. $r = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin\theta -$

$\cos\theta = \pm 1$ ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$p = \tan\theta$ এবং $p = \frac{a}{b}$

$\therefore \tan\theta = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta} = \frac{a^2}{b^2}$ [উভয়পক্ষে $\frac{a}{b}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ [বিপরীতকরণ করে]

নির্ণেয় মান $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

খ. দেওয়া আছে, $p = \tan\theta$ এবং $q = \sec\theta$

এবং $p + q = y$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = y$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = y$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = y$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = y^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = y^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = y^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{y^2}{1}$

বা, $\frac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{1+\sin\theta+1-\sin\theta} = \frac{y^2-1}{y^2+1}$ [বিয়োজন–যোজন করে]

বা, $\frac{2\sin\theta}{2} = \frac{y^2-1}{y^2+1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{y^2-1}{y^2+1}$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $r = \sin\theta + \cos\theta$ .....(i)

এবং $r = 1$ .....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta = 0$

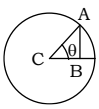
এখন, $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 4\sin\theta\cos\theta$

বা, $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1^2 - 0$

বা, $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1$

$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন– ১৯ ▶ AB = 3 সে.মি., BC = 4 সে.মি.।



ক. বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{7}{10}$

গ. প্রমাণ কর যে, $\sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A) = \sin A + \sin B + \sin C$ ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, AB = 3 সে.মি., BC = 4 সে.মি.

চিত্রানুসারে, সমকোণী ত্রিভুজ ΔABC হতে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$\therefore AC = 5$

$\therefore$ বৃত্তটির পরিধি $(2 \times 3{\cdot}1416 \times 5)$ সে.মি. $= 31{\cdot}416$ সে.মি. **(Ans)**

খ. দেওয়া আছে, AB = 3 সে.মি., BC = 4 সে.মি.

'ক' হতে পাই, AC = 5 সে.মি.।

$\therefore$ চিত্রানুসারে, $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

এবং $\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3+4}{5}}{\frac{5+3}{4}}$

$= \frac{7}{5} \times \frac{4}{8} = \frac{7}{10} =$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{7}{10}$ (প্রমাণিত)

গ. বামপক্ষ $= \sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A)$

$= \sin(\pi - C) + \sin(\pi - A) + \sin(\pi - B)$ [$\because A + B + C = \pi$]

$= \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} - C\right) + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} - A\right) + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} - B\right)$

$= \sin C + \sin A + \sin B$

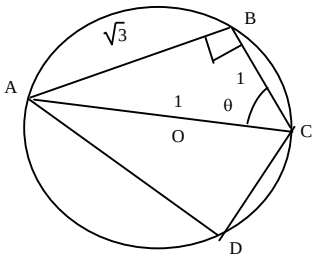
$= \sin A + \sin B + \sin C$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A) = \sin A + \sin B + \sin C$

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ৮.৩

প্রশ্ন–১



উল্লেখিত চিত্রের আলোকে নিম্নের প্রশ্নের উত্তর দাও :

ক. চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে AC নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ ৪

গ. $\sec\theta + \cos\theta = x$ হলে x-এর মান নির্ণয় কর ও সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ABC সমকোণী ত্রিভুজে [$\because \angle ABC$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]

$$\angle B = 90^\circ = \frac{90 \times \pi}{180} \left[\because 1^\circ = \frac{\pi}{180}\right]$$

ΔABC হতে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$

$\therefore AC = 2$ **(Ans.)**

খ. বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের জন্য

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ [$\because$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

বা, $\angle A = 180^\circ - \angle C$

এবং $\angle B + \angle D = 180^\circ$

বা, $\angle B = 180^\circ - \angle D$

এখন, বামপক্ষ = $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D$

$= \tan(180° - C) + \tan(180° - D) + \tan C + \tan D$

$= -\tan C - \tan D + \tan C + \tan D$

$= 0$

$\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ (**প্রমাণিত**)

গ. উদ্দীপকের চিত্র হতে পাই,

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

এখন, $\sec\theta + \cos\theta = x$

বা, $2 + \frac{1}{2} = x$

বা, $\frac{4+1}{2} = x$

বা, $x = \frac{5}{2}$

$$\therefore \sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2 + 2\cos^2\theta = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos^2\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1\ (\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)\ (2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta - 2 = 0$

বা, $\cos\theta = 2$

যা গ্রহণযোগ্য নয়।

অথবা $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

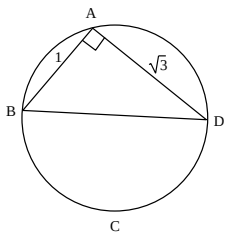
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

নির্ণেয় মান $x = \frac{5}{2}$ ও $\theta = \frac{\pi}{3}$

প্রশ্ন–২



এবং $P = \frac{\cot B + \operatorname{cosec} B - 1}{\cot B - \operatorname{cosec} B + 1}$; $Q = \frac{1 + \sin D}{\cos D}$.

ক. ABCD বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos(B - D) = \cos B\cos D + \sin B\sin D$. ৪

গ. দেখাও যে, $P = Q$। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ABCD বৃত্তটির ব্যাসার্ধ BD

ABCD বৃত্তে ABD সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ

[$\therefore$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ বলে]

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$

$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ [$\because$ AB = 1 এবং $AD = \sqrt{3}$]

$= \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

খ. চিত্র হতে $\cos B = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\therefore$ B = 60°

$\cos D = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$

$\therefore$ D = 30°

$\sin B = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin D = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$

বামপক্ষ = $\cos(B - D) = \cos(60° - 30°) = \cos 30°$

ডানপক্ষ = $\cos B \cos D + \sin B \sin D$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2. \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\cos(B - D) = \cos B \cos D + \sin B \sin D$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $P = \frac{\cot B + \operatorname{cosec} B - 1}{\cot B - \operatorname{cosec} B + 1}$

$Q = \frac{1 + \sin D}{\cos D}$

'খ' হতে পাই

$\cos B = \frac{1}{2}$ এবং $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos D = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin D = \frac{1}{2}$

$\therefore \cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

এখন, $P = \frac{\cot B + \operatorname{cosec} B - 1}{\cot B - \operatorname{cosec} B + 1}$

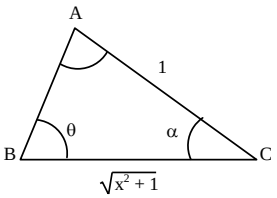
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 1} = \frac{\frac{1+2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{1-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}$$

$$Q = \frac{1+\sin D}{\cos D} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$\therefore$ P = Q (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৩



ক. $\sin(\theta + \alpha)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ ৪

গ. $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি,

প্রদত্ত ত্যথানুসারে

ΔABC-এ $\angle A = 90°$

$\angle B = \theta$ এবং $\angle C = \alpha$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $90° + \theta + \alpha = 180°$

বা, $\theta + \alpha = 180° - 90°$

বা, $\theta + \alpha = 90°$

$\therefore \sin(\theta + \alpha) = \sin 90° = 1$ **(Ans.)**

খ. চিত্র হতে পাই,

$$\sin\propto = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos\propto = \frac{1}{x^2+1}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $= (\sin\propto + \cos\propto)^2$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= 1 + \frac{2x}{x^2+1}$$

$\therefore$ ডানপক্ষ $= 1 + 2\sin\propto \cos\propto$

$$= 1 + 2.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= 1 + \frac{2x}{x^2+1}$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$(\sin\propto + \cos\propto)^2 = 1 + 2\sin\propto \cos\propto$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1}}$ [উভয় পক্ষকে $\sqrt{x^2+1}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\theta + 1 = \sqrt{3} \times \sin\theta$ ['চিত্র থেকে']

বা, $(\cos\theta + 1)^2 = (\sqrt{3} \times \sin\theta)^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 3\sin^2\theta$

বা, $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 3 - 3\cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(2\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -1$ যা গ্রহণযোগ্য নয়।

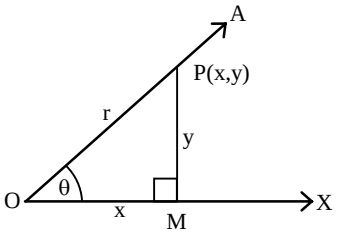
অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

নির্ণেয় মান $\theta = \frac{\pi}{3}$

প্রশ্ন–৪



ক. $x = y$ হলে প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{2}$

x. ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1.$ ৪

গ. $\frac{2y^2}{x^2 + y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ হলে θ

এর মান নির্ণয় কর। (যখন $0° < \theta <$

$\frac{\pi}{2}$). ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. POM সমকোণী ত্রিভুজে, $OP^2 = OM^2 + PM^2$

বা, $r^2 = x^2 + y^2$

বা, $r^2 = x^2 + x^2$ [$\because x = y$]

বা, $r^2 = 2x^2$

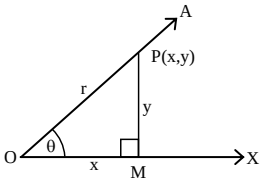
$\therefore r = \sqrt{2}x$ (প্রমাণিত)

খ. ΔPOM একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

যার ভূমি, OM = x;

লম্ব, PM = y এবং

অতিভুজ, OP = r



প্রমাণ করতে হবে যে,

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

চিত্র থেকে পাই,

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = \left(\frac{r}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{r^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2 - y^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2} \text{ [‘ক’ হতে পাই, } r^2 = x^2 + y^2]$$

$$= \frac{x^2}{x^2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ. চিত্র থেকে আমরা পাই,

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ [‘ক’ হতে]}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ [‘ক’ হতে]}$$

দেওয়া আছে, $\frac{2y^2}{x^2 + y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

বা, $2\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 - 3\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

বা, $(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 2 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -2$ বা, $2\cos\theta = 1$

[যা গ্রহণযোগ্য নয় কারণ, $-1 \le \cos\theta \le 1$] বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ ▶ $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{2}$; যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ। [ঢা. বো. ন. প্র. '১৫]

ক. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ৪

গ. $\frac{2x}{1+x^2} + \frac{x^2-1}{x^2+1} = \sqrt{2}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $\frac{1}{x}(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta) = 1$ [মান বসিয়ে]

$\therefore \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই,

$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)\,(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\,(1+\cos\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

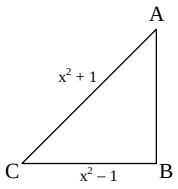
বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\therefore \sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' হতে পাই, $\sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

ΔABC এ $AB = \sqrt{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2} = 2x$

$\sin\theta = \frac{2x}{1+x^2}$

$\cos\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$



দেওয়া আছে, $\frac{2x}{1+x^2}$ +

$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta - \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta - 2 + 2\sqrt{2}\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2\sqrt{2}\cos\theta.1. + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos 45°$

$\therefore \theta = 45°$

নির্ণেয় θ এর মান $45°$

প্রশ্ন–৬ **$\cot\alpha = -1$, যেখানে $\pi < \alpha < 2\pi$ এবং $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, যেখানে $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.**

ক. α এবং θ কোন কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত ব্যাখ্যা কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$ সমীকরণ হতে θ এর মান বের কর। ৪

গ. এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘন্টায় 5 কি.মি. বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে যে বৃত্তচাপ অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে $(\alpha - \theta)$ কোণ উৎপন্ন করলে বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\cot\alpha = -1$, $\pi < \alpha < 2\pi$

এবং $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

যেহেতু $\cot\alpha$ ঋণাত্মক এবং $\pi < \alpha < 2\pi$

$\therefore \alpha$ চতুর্থ চতুর্থভাগে অবস্থিত।

$\sin\theta$ ঋণাত্মক এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \theta$ তৃতীয় চতুর্থভাগে অবস্থিত।

খ. $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

বা, $\cot\theta = \pm 1$

হয়, $\cot\theta = 1$ অথবা, $\cot\theta = -1$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4}$ বা, $\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $\cot\theta = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ বা, $\cot\theta = -\cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$ [যেহেতু $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{3}$]

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}$ বা, $\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$

নির্ণেয় মান $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ $\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$

গ. দেওয়া আছে, $\cot\alpha = -1;\ \pi < \alpha < 2\pi$

বা, $\cot\alpha = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $\cot\alpha = -\cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{4}$

এবং $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{3}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$

লোকটি 1 ঘণ্টায় যায় 5 কি. মি.

বা, 60×60 সেকেন্ডে যায় 5000 মিটার

$\therefore$ 1 সেকেন্ডে যায় $\frac{5000}{60 \times 60}$ মিটার

$\therefore$ 36 সেকেন্ডে যায় $\frac{5000 \times 36}{60 \times 60}$ মিটার

$= 50$ মিটার

অর্থাৎ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $S = 50$ মিটার

কোণ, $\alpha - \theta = \frac{7\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = \frac{21\pi - 16\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

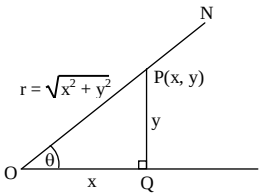
আমরা জানি, ব্যাসার্ধ r হলে,

$S = r\theta$

বা, $r = \frac{S}{\theta} = 50 \div \frac{5\pi}{12} = \frac{50 \times 12}{5\pi} = \frac{120}{\pi}$

$\therefore$ ব্যাস $= 2r = \frac{120}{\pi} \times 2 = \frac{240}{\pi} = 76.39$ মিটার **(Ans.)**

প্রশ্ন–৭



ক. θ কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$ ৪

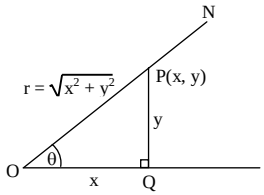
গ. $\frac{y}{r} + \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \sqrt{2}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore \theta° = \frac{\pi\theta}{180}$ রেডিয়ান

খ. মনে করি, ON রশ্মি ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে আবর্তনের ফলে θ কোণ উৎপন্ন করে। যে কোণ θ কোণের প্রমিত বা আদর্শ অবস্থান ON রশ্মির (যেকোনো চতুর্ভাগে থাকতে পারে।) ON রশ্মির উপর P বিন্দুর অবস্থান P(x, y) হলে আমরা পাই, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (POQ সমকোণী ত্রিভুজ এবং OP = r অতিভুজ)।



বা, $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore \quad x^2 \le r^2$ এবং $y^2 \le r^2$

বা, $|x|^2 \le r^2$ এবং $|y|^2 \le r^2$

বা, $|x| \le r$ এবং $|y| \le r$

বা, $-r \le x \le r$ এবং $-r \le y \le r$

বা, $-1 \le \frac{x}{r} \le 1$ এবং $-1 \le \frac{y}{r} \le 1$..... (i)

এখন, POQ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$..... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাওয়া যায় $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$

সুতরাং $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান -1 অপেক্ষা ছোট এবং $+1$ বড় নয়।

গ. দেওয়া আছে, $\frac{y}{r} + \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ $[\because x = \sqrt{r^2 - y^2}]$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $-2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2\sqrt{2}\cos\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

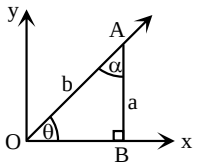
বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos 45°$

$\therefore \theta = 45°$

নির্ণেয় θ এর মান $45°$।

প্রশ্ন–৮



ক. $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a = 1, b = \sqrt{2}$ হলে দেখাও যে, $(\sec\theta - \cos\alpha)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\alpha)(\tan\theta + \cot\alpha) = 1$ ৪

গ. $\frac{\sqrt{3}a}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = 2$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $AB = a, AO = b$

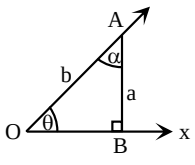
সমকোণী ত্রিভুজ ΔAOB–এ, $AO^2 = AB^2 + OB^2$

বা, $OB^2 = AO^2 - AB^2$

$= b^2 - a^2$

$\therefore OB = \sqrt{b^2 - a^2}$

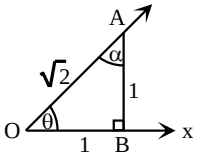
$\therefore \cot\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ **(Ans.)**



খ. দেওয়া আছে, $a = 1, b = \sqrt{2}$

$\therefore AO = \sqrt{2}, AB = 1$

$\therefore OB = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{1} = 1$



$\therefore \sec\theta = \frac{OA}{OB}$, $\text{cosec}\theta = \frac{OA}{AB}$ এবং $\tan\theta = \frac{AB}{OB}$

$= \frac{\sqrt{2}}{1} \quad = \frac{\sqrt{2}}{1} \quad = \frac{1}{1}$

$= \sqrt{2} \quad = \sqrt{2} \quad = 1$

$\cos\alpha = \frac{AB}{OA}$, $\sin\alpha = \frac{OB}{OA}$ এবং $\cot\alpha = \frac{AB}{OB}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1} = 1$

বামপক্ষ $= (\sec\theta - \cos\alpha)(\text{cosec}\theta - \sin\alpha)(\tan\theta + \cot\alpha)$

$= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 + 1)$

$= \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{\sqrt{2}} \times \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{\sqrt{2}} \times 2$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$(\sec\theta - \cos\alpha)(\text{cosec}\theta - \sin\alpha)(\tan\theta + \cot\alpha) = 1$ (**দেখানো হলো**)

গ. এখানে $\sin\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{a}{b}$

এবং $\cos\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{3a}}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$

বা, $(\sqrt{3}\sin\theta)^2 = (2 - \cos\theta)^3$ [বর্গ করে]

বা, $3\sin^2\theta = 4 - 2.2\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $3(1 - 3\cos^2\theta) = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $3 - 3\cos^2\theta = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $-4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 1 = 0$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta)^2 - 2.2\cos\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$

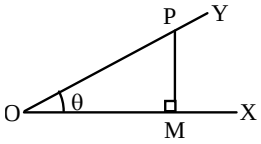
বা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৯ চিত্রে **OM = 4** একক এবং **PM = 3** একক।



ক. যদি $\theta = \frac{\pi^c}{12}$ হয়, তবে $\tan\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan 11\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$ এবং $\tan\theta$ ঋণাত্মক হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1 + \sin\theta)\sec\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

গ. চিত্রে $PM \perp OM$ এবং $\frac{OP^2}{OM^2} + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$ কে θ কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রকাশ করে গঠিত সমীকরণ সমাধান কর। যেখানে $\frac{3\pi^c}{2} \le \theta \le \frac{5\pi^c}{2}$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi^c}{12}$

$\therefore \tan\theta \tan 5\theta \tan 7\theta \tan 11\theta$

$= \tan\frac{\pi^c}{12}\tan\frac{5\pi^c}{12}\tan\frac{7\pi^c}{12}\tan\frac{11\pi^c}{12}$

$= \tan\frac{\pi^c}{12}\tan\frac{5\pi^c}{12}\tan\left(\pi^c - \frac{5\pi^c}{12}\right)\tan\left(\pi^c - \frac{\pi^c}{12}\right)$

$= \tan\frac{\pi^c}{12}\tan\frac{5\pi^c}{12}\left(-\tan\frac{5\pi^c}{12}\right)\left(-\tan\frac{\pi^c}{12}\right)$

$= \tan^2\frac{\pi^c}{12}\tan^2\frac{5\pi^c}{12} = \tan^2\frac{\pi^c}{12}\left\{\tan\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{\pi^c}{12}\right)\right\}^2$

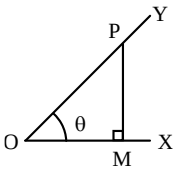
$= \tan^2\frac{\pi^c}{12}.\cot^2\frac{\pi^c}{12}$

$= 1 \qquad \left[\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}\right]$

নির্ণেয় মান 1

খ. দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$ [



চিত্র থেকে]

ΔPOM সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$OP^2 = OM^2 + PM^2$

$= 4^2 + 3^2$

$= 25$

$\therefore OP = \pm 5$

যেহেতু, $\sin\theta$ ঋণাত্মক হবে সেহেতু, $OP = -5$

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore \sec\theta = -\frac{5}{4}$

এখন, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1+\sin\theta)\sec\theta} = \frac{-\frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{2}{5}\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{1}{2}} = \frac{14}{5}$

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1 + \sin\theta)\sec\theta} = \frac{14}{5}$ (প্রমাণিত)

গ. চিত্রে PM $\perp$ OM

$\therefore$ POM একটি সমকোণী ত্রিভুজ। OP উহার অতিভুজ।

দেওয়া আছে, $\frac{OP^2}{OM^2} + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$ [চিত্র থেকে]

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$ [$\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$]

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5}{3} - 1$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5-3}{3}$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

হয়, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ অথবা, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \tan\frac{\pi^c}{6}$ $= -\tan\frac{\pi^c}{6} = \tan\left(2\pi^c - \frac{\pi^c}{6}\right)$

$= \tan\left(2\pi^c + \frac{\pi^c}{6}\right) = \tan\frac{11\pi^c}{6}$

$= \tan\frac{13\pi^c}{6}$ $\therefore \theta = \frac{11\pi^c}{6}$

$\therefore \theta = \frac{13\pi^c}{6}$

θ এর মান $\frac{3\pi^c}{2} \le \theta \le \frac{5\pi^c}{2}$ শর্ত সিদ্ধ করে।

নির্ণেয় θ এর মান $\frac{11\pi^c}{6}$ ও $\frac{13\pi^c}{6}$

প্রশ্ন–১০ ▶ নিচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো লক্ষ কর :

$\sec\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\text{cosec}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{11\pi}{2} \pm \theta\right)$, $\cot(18\pi \pm \theta)$, $\cos(11\pi \pm \theta)$

ক. প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির মান নির্ণয় কর।

২

খ. ১ম ও ৩য় রাশির গুণফলকে $3 + \tan^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ দ্বারা ভাগ কর।

৪

গ. প্রমাণ কর, $\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{2} \pm \theta\right)}{\cos(11\pi \pm \theta)} = \frac{\tan\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right)}{\cot(18\pi - \theta)}$

৪

▶◀ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. প্রথম রাশি $= \sec\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\text{cosec}\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

দ্বিতীয় রাশি $= \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

নির্ণেয় মান : $-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$

খ. $\sec\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \text{cosec}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$= \sec\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \times \text{cosec}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(-\text{cosec}\frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\sec\frac{\pi}{4}\right)$

$= (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) = 2$

শর্তানুসারে, $\frac{\sec\left(\frac{3\pi}{4}\right) . \operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{(-\sqrt{2}) . (-\sqrt{2})}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{2}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

নির্ণেয় মান $\frac{3}{2}$

গ. এখানে, $\tan\left(17 \cdot \frac{\pi}{2} + \theta\right)$ এক্ষেত্রে n = 17 বিজোড় সংখ্যা।

তাই tan পরিবর্তিত হয়ে cot হবে।

$\left(17 \cdot \frac{\pi}{2} + \theta\right)$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকে। ফলে tan ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \tan\left(17 \cdot \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$

আবার, $\cot(18\pi - \theta)$

এক্ষেত্রে n = 18 যা জোড় সংখ্যা। তাই cot অপরিবর্তিত থাকবে।

$\left(36 \cdot \frac{\pi}{2} - \theta\right)$ চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে বলে cot ঋণাত্মক হবে।

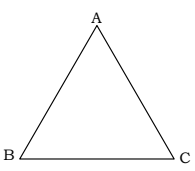
$\therefore \cot(18\pi - \theta) = -\cot\theta$

বামপক্ষ $= \frac{\sin\left(\frac{11\pi}{2} \pm \theta\right)}{\cos(11\pi \pm \theta)} = \frac{-\cos\theta}{-\cos\theta} = 1$

ডানপক্ষ $= \frac{\tan\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right)}{\cot(18\pi - \theta)} = \frac{-\cot\theta}{-\cot\theta} = 1$

$\therefore \frac{\sin\left(\frac{11\pi}{2} \pm \theta\right)}{\cos(11\pi \pm \theta)} = \frac{\tan\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right)}{\cot(18\pi - \theta)}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১১ ▶



ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

ক. প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = -\frac{1}{2}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos 2B = \cos^2 A - \sin^2 B = 2\cos^2 C - 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর, $2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 B = \frac{1 - \tan^2 C}{1 + \tan^2 C}$ ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. যেহেতু ABC সমবাহু ত্রিভুজ,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$$

বামপক্ষ $= \cos 2A = \cos \frac{2\pi}{3}$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{1}{2} = \text{ডানপক্ষ}$$ **(প্রমাণিত)**

খ. দেওয়া আছে,

$$\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$$

প্রথম অংশ $= \cos 2B = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

দ্বিতীয় অংশ $= \cos^2 A - \sin^2 B$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

তৃতীয় অংশ $= 2\cos^2 C - 1$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{2}{4} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$\cos 2B = \cos^2 A - \sin^2 B = 2\cos^2 C - 1$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে,

$$\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$$

১ম অংশ $= 2\cos^2 A - 1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1$

$$= 2 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

২য় অংশ $= 1 - 2\sin^2 B = 1 - 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$

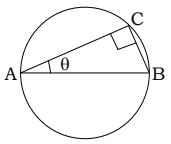
$$= 1 - 2 \times \frac{(\sqrt{3})^2}{4} = 1 - \frac{3}{2} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$$

৩য় অংশ $= \dfrac{1 - \tan^2 C}{1 + \tan^2 C} = \dfrac{1 - \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}{1 + \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}$

$$= \frac{1 - (\sqrt{3})^2}{1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 B = \dfrac{1 - \tan^2 C}{1 + \tan^2 C}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১২ ▶



ক. চিত্রে ΔABC-এ $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে

θ-এর মান কত? ২

খ. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে দেখাও যে,

$$\sin\frac{A+B}{2}+\tan\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\left(1+\operatorname{cosec}\frac{C}{2}\right)$$ ৪

গ. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\quad\left(\theta<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

হলে দেখাও যে, 'ক' থেকে প্রাপ্ত θ-এর মান অপরিবর্তিত থাকবে। ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta=\tan\dfrac{\pi}{6}$

নির্ণেয় θ এর মান $\dfrac{\pi}{6}$

খ. বামপক্ষ $=\sin\dfrac{A+B}{2}+\tan\dfrac{A+B}{2}$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)\left[\because A+B+C=\pi\right]$

$=\cos\dfrac{C}{2}+\cot\dfrac{C}{2}$

$=\cos\dfrac{C}{2}+\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\cos\dfrac{C}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$

$=\cos\dfrac{C}{2}\left(1+\operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}\right)=$ ডানপক্ষ

$\sin\dfrac{A+B}{2}+\tan\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}\left(1+\operatorname{cosec}\dfrac{C}{2}\right)$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $(1+\sin\theta)^2=(\sqrt{3}\cos\theta)^2$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - 3\cos^2\theta = 0$

বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - 3 + 3\sin^2\theta = 0$

বা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta + 2\sin\theta - \sin\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta + 1) - 1(\sin\theta + 1) = 0$

বা, $(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta + 1 = 0$

বা, $\sin\theta = -1$

কিন্তু $\theta < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর জন্য $\sin\theta = -1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

অথবা,

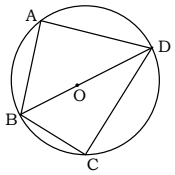
$2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ যা 'ক' হতে প্রাপ্ত θ এর সমান। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৩



ক. $\sin\frac{1}{2}(A + C)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = \tan A + \tan B + \tan C + \tan D$ ৪

গ. বৃত্তটিকে BD-এর চতুর্দিকে ঘুরালে যে ঘনবস্তুটি উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর। ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উপরিউক্ত চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং এর ব্যাস BD = 10 সে.মি.

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$ এবং $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\therefore \sin\frac{1}{2}(A + C) = \sin\frac{1}{2}(180^\circ) = \sin 90^\circ = 1$ **(Ans.)**

খ. বামপক্ষ $= \cos A + \cos B + \cos C + \cos D$

$= \cos(180^\circ - C) + \cos(180^\circ - D) + \cos C + \cos D$

$= -\cos C - \cos D + \cos C + \cos D = 0$

ডানপক্ষ $= \tan A + \tan B + \tan C + \tan D.$

$= \tan(180^\circ - C) + \tan(180^\circ - D) + \tan C + \tan D$

$= -\tan C - \tan D + \tan C + \tan D = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

গ. বৃত্তটির BD-এর চতুর্দিকে ঘুরালে একটি গোলক উৎপন্ন হবে।

এর ব্যাসার্ধ $r = \frac{BD}{2} = \frac{10}{2}$ সে.মি. = 5 সে.মি.

গোলকটির পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $4\pi r^2$

$= 4 \times 3.1416 \times 25$ বর্গ সে.মি.

= 314.16 বর্গ সে.মি.

গোলকটির আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন সে.মি.= 523.6 ঘন সে.মি.

নির্ণেয় গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 314.16 বর্গ সে.মি. ও আয়তন 523.6 ঘন সে.মি.

প্রশ্ন–১৪ ▶ নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

(i) $3\,\text{cosec}\,\theta - 4\sec\theta = 0$

(ii) $\sec x + \tan x = \sqrt{3}$; $0 \le x \le 2\pi$

ক. $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{7}{10}$ ৪

গ. x এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় কর। ৪

▶◀ ১৪নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $3\text{cosec}\theta - 4\sec\theta = 0$

বা, $3\,\text{cosec}\,\theta = 4\sec\theta$

বা, $\frac{3}{\sin\theta} = \frac{4}{\cos\theta}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' অংশ হতে প্রাপ্ত, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।

অর্থাৎ $\tan\theta = \frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} = \frac{y}{x}$

$\therefore x = -4, y = -3$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore \sin\theta = \frac{-y}{r} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{-x}{r} = \frac{4}{5}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{4}$

বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta, \sec(-\theta) = \sec\theta]$

$= \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3+4}{5}}{\frac{5+3}{4}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{8}{4}} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{8} = \frac{7}{10}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\sec x + \tan x = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$

বা, $1 + \sin x = \sqrt{3}\cos x$

বা, $(1 + \sin x)^2 = (\sqrt{3}\cos x)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \sin^2 x + 2\sin x = 3\cos^2 x$

বা, $1 + \sin^2 x + 2\sin x = 3(1 - \sin^2 x)$

বা, $1 + \sin^2 x + 2\sin x - 3 + 3\sin^2 x = 0$

বা, $4\sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

বা, $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $2\sin^2 x + 2\sin x - \sin x - 1 = 0$

বা, $2\sin x(\sin x + 1) - 1(\sin x + 1) = 0$

বা, $(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\therefore$ হয়, $\sin x + 1 = 0$ অথবা $2\sin x - 1 = 0$

বা, $\sin x = -1$ বা, $2\sin x = 1$

কিন্তু ইহা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ বা, $\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x$ এর মান 0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর

এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। বা, $\sin x = \sin 30°$

$\therefore x = 30°$

নির্ণেয় মান $30°$

প্রশ্ন–১৫ ▶ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মাধ্যমে বর্ণিত সমীকরণ : $\tan\theta = \frac{5}{12}$

ক. $\sec\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\sin\theta$ এর $\cos\theta$ এর মানসমূহ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{-\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan(-\theta)} = \frac{34}{39}$ ৪

◀◀ ১৫নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left[\because \tan\theta = \frac{5}{12}\right]$

$= 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$

$\therefore \sec\theta = \pm\sqrt{\frac{169}{144}} = \pm\frac{13}{12}$ **(Ans.)**

খ. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ হলে, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{12}{13}$

দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{12}$

বা, $\sin\theta = \frac{5}{12}\cdot\cos\theta = \frac{5}{12}\cdot\frac{12}{13} = \frac{5}{13}$

আবার, $\sec\theta = -\frac{13}{12}$ হলে, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = -\frac{12}{13}$

দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{12}$

বা, $\sin\theta = \frac{5}{12}\cos\theta = \frac{5}{12}\left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{-5}{13}$

$\therefore$ $\sin\theta$ এর সম্ভাব্য মানসমূহ হল $\frac{5}{13}$ ও $\frac{-5}{13}$

এবং $\cos\theta$ এর সম্ভাব্য মান $\frac{12}{13}$ ও $\frac{-12}{13}$ **(Ans.)**

গ. প্রশ্নমতে, $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।

$\therefore$ $\cos\theta$ ও $\sec\theta$ ঋণাত্মক হবে।

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)} = \frac{-(-\sin\theta) + \cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = \frac{-\frac{5}{13} + \frac{-12}{13}}{-\frac{13}{12} - \frac{5}{12}} = \frac{\frac{-5-12}{13}}{\frac{-13-5}{12}}$$

$$= \frac{\frac{-17}{13}}{\frac{-18}{12}} = -\frac{17}{13} \times \left(-\frac{12}{18}\right) = \frac{34}{39} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{-\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan(-\theta)} = \frac{34}{39} \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন–১৬ **$X = a - b\operatorname{cosec}\theta$ যেখানে $a > b > 0$, $A = \frac{x\sin\theta + y^2\cos\theta}{x^2\sin\theta - y\cos\theta}$ এবং $B = 2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) - (\sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta)$ হলো তিনটি রাশি।**

ক. $X = 0$ হলে $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x\cos\theta - y\sin\theta = 0$ হলে A রাশির মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $B = 0$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। এখানে $0° < \theta < 2\pi$ ৪

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $X = a - b\operatorname{cosec}\theta$ এবং $X = 0$

সুতরাং $a - b\operatorname{cosec}\theta = 0$

বা, $b\operatorname{cosec}\theta = a$

বা, $\text{cosec}\theta = \frac{a}{b}$

$\therefore \sin\theta = \frac{b}{a}$ .....(i)

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ .....(ii)

এখন, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$\therefore \tan\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $x\cos\theta - y\sin\theta = 0$

বা, $x\cos\theta = y\sin\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{y}{x}\sin\theta$

এখন $A = \frac{x\sin\theta + y^2\cos\theta}{x^2\sin\theta - y\cos\theta} = \frac{x\sin\theta + y^2 \cdot \frac{y}{x}\sin\theta}{x^2\sin\theta - y \cdot \frac{y}{x}\sin\theta}$

$= \frac{\sin\theta\left(x + \frac{y^3}{x}\right)}{\sin\theta\left(x^2 - \frac{y^2}{x}\right)} = \frac{\frac{x^2 + y^3}{x}}{\frac{x^3 - y^2}{x}} = \frac{x^2 + y^2}{x^3 - y^2}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $B = 2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) - (\sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta)$

যেহেতু $B = 0$

বা, $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) - (\sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta) = 0$

বা, $2\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\theta - 4\sin\theta = 0$

বা, $\cos\theta(2\sin\theta - \sqrt{3}) - 2(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

কিন্তু $\cos\theta - 2 \neq 0$

$\therefore 2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

নির্ণেয় θ এর মান $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

প্রশ্ন–১৭ **a) $\cot\theta = \sqrt{2} + 1$**

b) $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ (θ সূক্ষ্মকোণ)

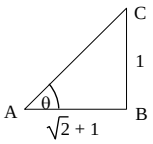
ক. (a) নং সমীকরণ থেকে $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. (a) নং সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ ৪

গ. (b) নং সমীকরণের সমাধান কর। ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\cot\theta = \sqrt{2} + 1$



যেহেতু $\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$

$\therefore AB = \sqrt{2} + 1$

এবং $BC = 1$

অতিভুজ $AC = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1}$

$= \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

$\therefore \sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$\cot\theta = \sqrt{2} + 1$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{2} + 1$

বা, $\cos\theta = (\sqrt{2} + 1)\sin\theta$

বা, $(\sqrt{2} - 1)\cos\theta = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)\sin\theta$

[$(\sqrt{2} - 1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $(\sqrt{2} - 1)\cos\theta = \{(\sqrt{2})^2 - 1\}\sin\theta$

বা, $(\sqrt{2} - 1)\cos\theta = (2 - 1)\sin\theta$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta = \sin\theta$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ **(দেখানো হলো)**

গ. পাঠ্য বই পৃষ্ঠা–১৭১ এর অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান দেখ।

প্রশ্ন–১৮ **$\tan\theta + \sec\theta = X$**

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান বের কর। ২

খ. দেখাও যে, $\text{cosec}\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ৪

গ. যদি $x = \sqrt{3}$ এবং $0° \le \theta \le 180°$ হয় তবে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = x(\sec\theta - \tan\theta)$

বা, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = x(\sec\theta - \tan\theta)$

বা, $1 = x(\sec\theta - \tan\theta)$

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{x}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} = x$

বা, $\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = x^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' হতে পাই,

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1}$ [$\because x = \sqrt{3}$]

$= \frac{3 + 1}{3 - 1} = \frac{4}{2}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = 2$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}30°$

$\therefore \theta = 30°$

আবার, $\operatorname{cosec}\theta = 2$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}(90° + 60°)$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}150°$

$\therefore \theta = 150°$

নির্ণেয় θ এর মান $30°, 150°$

প্রশ্ন–১৯ ▶ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$ এবং $\cot^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = 3$

?

ক. $\cos\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যখন $0° < \alpha < 2\pi$ তখন α এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = \sqrt{3}(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \sqrt{3}(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$

বা, $1 = \sqrt{3}(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ .....(i)

'ক' থেকে পাই, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $2\operatorname{cosec}\theta = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{\sqrt{3}}$

বা, $2\operatorname{cosec}\theta = \frac{3 + 1}{\sqrt{3}}$

বা, $2\operatorname{cosec}\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \cos^2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \frac{3}{4}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{4-3}{4}$

বা, $\cos^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore \cos\theta = \pm\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $\cot^2\alpha + \text{cosec}^2\alpha = 3$

বা, $\cot^2\alpha + \cot^2\alpha + 1 = 3$

বা, $2\cot^2\alpha = 3 - 1$

বা, $2\cot^2\alpha = 2$

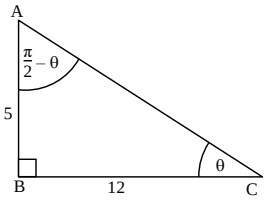
বা, $\cot^2\alpha = 1$

$\therefore \cot\alpha = \pm 1$

$\therefore \alpha = 45°, 135°, 225°, 315°$ **(Ans.)**

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২০



ক. $2{\cdot}0071^C$ কে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। ২

খ. সকল অনুপাতের মানকে ধনাত্মক বিবেচনায় নিয়ে উদ্দীপকের ভিত্তিতে $\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. নিজস্ব চিত্র ব্যবহার করে এর A চিহ্নিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর। ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

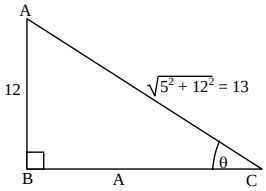
ক. $2{\cdot}0071^C$

$= 2{\cdot}0071 \times \frac{180°}{\pi}$ $\left[\text{কেননা } 1^c = \frac{180°}{\pi}\right]$

$= 114{\cdot}998° = 115°$ (প্রায়)

খ. চিত্র হতে,

$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$



$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} =$$

$$\frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$$

$$\tan\theta =$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$$

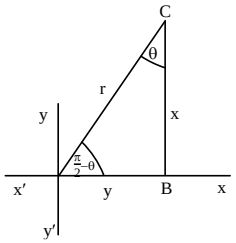
এখন, $\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$$= \frac{-\frac{5}{13} + \frac{12}{13}}{\frac{13}{12} + \frac{5}{12}} = \frac{\frac{7}{13}}{\frac{18}{12}}$$

$$= \frac{7}{13} \times \frac{2}{18} = \frac{14}{39}$$ **(Ans.)**

গ. ΔABC এর ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{r}$$



$= \cos\theta$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{r}$$

$= \cos\theta$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{y}$$

$= \cos\theta$

একইভাবে, $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$, $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$

এবং $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২১ **$A = 1 - \sin\theta$, $B = \sec\theta - \tan\theta$ এবং $C = 1 + \sin\theta$,**

ক. দেখাও যে, $B = A\sec\theta$. ২

খ. $B = (\sqrt{3})^{-1}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AC^{-1} = B^2$. ৪

২১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $A = 1 - \sin\theta$

$B = \sec\theta - \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$ $= (1 - \sin\theta) \cdot \frac{1}{\cos\theta}$

$= A \cdot \sec\theta$ [$\because$ $A = 1 - \sin\theta$]

$\therefore$ $B = A \cdot \sec\theta$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে,

$A = 1 - \sin\theta$

$B = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because$ $B = \sec\theta - \tan\theta$]

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

বা, $3(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta) = \cos^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $3 - 6\sin\theta + 3\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2\sin\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

[এটি গ্রহণযোগ্য নয় কারণ θ সূক্ষ্মকোণ] $= \sin\frac{\pi}{3}$

নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

গ. বামপক্ষ $= AC^{-1}$

$= \frac{A}{C} = \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$ [$\because$ $A = 1 - \sin\theta$ এবং $1 + \sin\theta$]

$= \frac{(1 - \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = \frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}$

$= \frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 \quad = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

$= B^2$ [$\because$ $B = \sec\theta - \tan\theta$]

= ডানপক্ষ

$\therefore AC^{-1} = B^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২২ ▶ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক।

ক. $\sec\theta$ এর মান কত? ২

খ. $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^{\frac{1}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

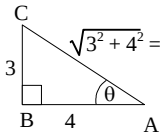
গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

২২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক

আমরা জানি, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{AB}{AC}}$ [যেহেতু, $\cos\theta$ ঋণাত্মক]

$= -\frac{AC}{AB} = \frac{-5}{4}$



$\therefore \sec\theta = \frac{-5}{4}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে, $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{-3}{5}$

[যেহেতু, $\tan\theta$ ধনাত্মক, তাই $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ উভয়েই ঋণাত্মক হবে]

আমরা জানি, $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{-3}{5}} = \frac{-5}{3}$

আবার, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

সুতরাং $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{cosec}\theta - \cot\theta}$

$$= \sqrt{\frac{-5}{3} - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{-5-4}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{-9}{3}} = \sqrt{-3}$$ **(Ans.)**

গ. 'ক' ও 'খ' হতে পাই,

$$\cos\theta = -\frac{4}{5},\ \sec\theta = -\frac{5}{4},\ \sin\theta = -\frac{3}{5} \text{ এবং } \tan = \frac{3}{4}$$

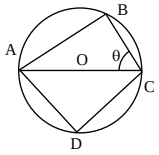
সুতরাং, $$\frac{\sin\theta + \cos\theta\,(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} \quad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta,\ \sec(-\theta) = \sec\theta]$$

$$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{\frac{-7}{5}}{\frac{-2}{4}} = \frac{7}{5} \times \frac{4}{2} = \frac{14}{3}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{14}{5}$$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২৩ ▶



চিত্রে AB = $\sqrt{3}$ এবং BC = 1

ক. চিত্রে O, বৃত্তের কেন্দ্র হলে ∠B এর বৃত্তীয়মান এবং AC নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, cosA + cosB + cosC + cosD = 0 ৪

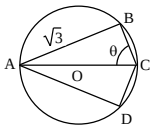
গ. $\sec\theta + \cos\theta = P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

২৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্রে $\angle B = 90°$

আমরা জানি, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore 90° = \left(\frac{\pi}{180} \times 90\right)$ রেডিয়ান



$= \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

$\therefore \angle B$ এর বৃত্তীয়মান $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান। **(Ans.)**

আবার, ΔABC-এ $\angle B = 90°$

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$

বা, $AC^2 = 3 + 1$

বা, $AC^2 = 4$

$\therefore AC = 2$ একক **(Ans.)**

খ. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$

এবং $\angle B + \angle D = 180°$

এখন, বামপক্ষ = $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$

$= \cos A + \cos(180° - D) + \cos(180° - A) + \cos D$

$= \cos A + \cos(2 \times 90° - D) + \cos(2 \times 90° - A) + \cos D$

$= \cos A - \cos D - \cos A + \cos D$ [∵ ২য় চতুর্ভাগে cos ঋণাত্মক]

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $\sec\theta + \cos\theta = P$ ..... (i)

এখানে, $\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$ [∵ $AC = 2$ এবং $BC = 1$]

আবার, $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\sec\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান (i) –এ বসিয়ে পাই,

$2 + \frac{1}{2} = P$

বা, $\frac{4+1}{2} = P$ বা, $P = \frac{5}{2}$

নির্ণেয় P এর মান $\frac{5}{2}$

এখন, (i) থেকে, $\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 2) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$ $\therefore \cos\theta = 2$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ কিন্তু $\cos\theta \neq 2$

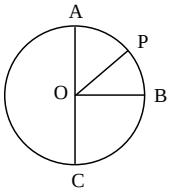
বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = \frac{\pi}{3}$

কারণ, $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

প্রশ্ন–২৪



ক. $OB = PB$ হলে প্রমাণ কর যে, $\angle POB$ একটি ধ্রুব কোণ। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PB = OB\ \angle POB$ ৪

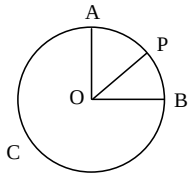
গ. যদি $\angle POB = \theta$ হয়, $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$ ৪

২৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চাপ AB = পরিধির এক–চতুর্থাংশ = $\frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$

এবং চাপ PB = ব্যাসার্ধ r [$\angle POB$ = এক রেডিয়ান]

আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।



$$\frac{\angle POB}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB}$$

$$\therefore \angle POB = \frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB} \times \angle AOB = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times \text{এক সমকোণ}$$

[OA ব্যাসার্ধ এবং OB এর উপর লম্ব $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ]

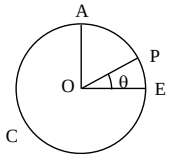
যেহেতু সমকোণ ও π ধ্রুবক সেহেতু $\angle POB$ একটি ধ্রুবক কোণ।

(প্রমাণিত)

খ. মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ OB = r একক, চাপ PB = S একক এবং PB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $POB = \theta^c$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PB = OB. \angle POB.$

অঙ্কন : B কে কেন্দ্র করে OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BA চাপ আঁকি যা পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। O, A যোগ করি। **প্রমাণ :** অঙ্কন অনুসারে $\angle AOB = 1^c$



আমরা জানি, কোনো বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$$\frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB} = \frac{\angle POB}{\angle AOB}$$

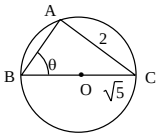
$$\text{বা, } \frac{S \text{ একক}}{r \text{ একক}} = \frac{\angle POB}{1^c}$$

বা, $\frac{PB}{OB} = \angle POB$

$\therefore$ PB = OB $\angle$POB (**প্রমাণিত**)

গ. পাঠ্যবই অনুশীলনী ৮·৩ পৃষ্ঠা– ১৭৩এর উদাহরণ–১৫ দেখ।

প্রশ্ন–২৫



ক. চিত্রে ব্যাস BC = $\sqrt{5}$ এবং AC = 2 হলে, cosB এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. ABC এর বৃহত্তম কোণ, ক্ষুদ্রতম কোণের তিনগুণ। কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত হলে, কোণগুলোকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ৪

গ. চিত্র থেকে দেখাও যে, $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$ ৪

২৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. যেহেতু O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $\angle BAC = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore$ ΔBAC সমকোণী,

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

বা, $AB^2 = BC^2 - AC^2 = (\sqrt{5})^2 - (2)^2 = 5 - 4 = 1$

$\therefore$ AB = 1 একক

$\therefore$ $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোণ = x^c

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $= 3x^c$

$\therefore$ কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত হলে অন্য কোণটি $= \frac{x^c + 3x^c}{2}$

$$= \frac{4x^c}{2} = 2x^c$$

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা π

$\therefore\ x + 2x + 3x = \pi$

বা, $6x = \pi$

বা, $x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণটি $= \frac{\pi^c}{6}$

বৃহত্তম কোণটি $= 3\cdot\frac{\pi^c}{6} = \frac{\pi^c}{2}$

এবং অন্য কোণটি $= 2\cdot\frac{\pi^c}{6} = \frac{\pi^c}{2}$

নির্ণেয় কোণগুলো যথাক্রমে $\frac{\pi^c}{6}$, $\frac{\pi^c}{2}$ এবং $\frac{\pi^c}{2}$

গ. চিত্র হতে, $\tan\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{1} = 2$

$$\sec\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

বামপক্ষ $= \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

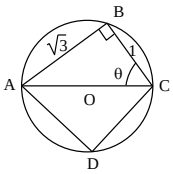
$$= \frac{2 + \sqrt{5} - 1}{2 - \sqrt{5} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{(3)^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{4(2+\sqrt{5})}{4} = 2 + \sqrt{5} = \tan\theta + \sec\theta = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন–২৬



? ক. চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে, $\angle B$ এর বৃত্তীয় মান এবং AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$ ৪

গ. $\sec\theta + \cos\theta = T$ হলে T এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

২৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উদ্দীপকের চিত্রানুসারে,

$\angle B$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

= এক সমকোণ= $\frac{\pi}{2}$ **(Ans.)**

আবার, সমকোণী ΔABC হতে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= (\sqrt{3})^2 + (1)^2$ [$\because$ $AB = \sqrt{3}$এবং $BC = 1$]

$= 3 + 1 = 4$

$\therefore$ AC = 2 একক **(Ans.)**

খ. বামপক্ষ = $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$

$= \cos A + \cos B + \cos(\pi - A) + \cos(\pi - B)$

[$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি π]

$= \cos A + \cos B + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - A\right) + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - B\right)$

$= \cos A + \cos B - \cos A - \cos B$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$ (**প্রমাণিত**)

গ. এখানে, $\sec\theta + \cos\theta = T$

বা, $\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC} = T$ [উদ্দীপকের চিত্রানুসারে]

বা, $\frac{2}{1} + \frac{1}{2} = T$ ['ক' হতে AC = 2 এবং চিত্র হতে BC = 1 বসিয়ে]

বা, $\frac{4+1}{2} = T$

$\therefore T = \frac{5}{2}$ **(Ans.)**

এখন, $\sec\theta + \cos\theta = T$

বা, $\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$ [$\because T = \frac{5}{2}$]

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2 + 2\cos^2\theta = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta - 2 = 0$

$\therefore \cos\theta = 2$ [গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\cos\theta$ এর মান -1 থেকে 1 এর মধ্যে]

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 60^\circ$

প্রশ্ন–২৭ **ত্রিকোণমিতি শব্দটি বিশ্লেষণ করলে পাওয়া যায়। ত্রিকোণ এবং মিতি। $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত।**

ক. রেডিয়ান কোণ বলতে কী বুঝ? ২

খ. $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, প্রমাণ কর

যে, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ৪

গ. সমাধান কর : $\sin\theta + \cos\theta = 1$;

$0 < \theta < 2\pi$ ৪

২৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ তৈরি করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান বলে।

খ. দেওয়া আছে,

$\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$ $[\because \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta]$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1^2$

বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta = 1$

বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\sin\theta\cos\theta = 0$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = 0$

হয় $\sin\theta = 0$ অথবা, $\cos\theta = 0$

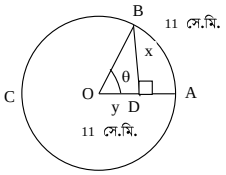
বা, $\sin\theta^\circ = \sin\pi$ বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$

$\therefore \theta = \pi$ $[\because 0 \angle \theta \angle 2\pi]$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

কিন্তু $\theta = \frac{3\pi}{2}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সত্য নয়।

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = \pi, \frac{\pi}{2}$

প্রশ্ন–২৮ ▶



? ক. চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা। চিত্র থেকে O কোণের মান ডিগ্রীতে নির্ণয় কর এবং চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে? ২

খ. ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 7 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কি.মি. নির্ণয় কর। ৪

গ. চিত্রে ΔBOD থেকে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে $\tan\theta + \sec\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্র হতে পাই, AB চাপের দৈর্ঘ্য, $s = 11$ সে.মি.

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $OA = r = 11$ সে.মি.

এখন, AB চাপ কেন্দ্র θ কোণ উৎপন্ন করলে,

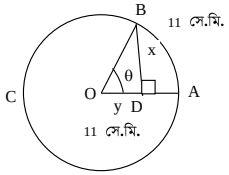
সূত্রানুসারে, $S = r\theta$ কোণ উৎপন্ন করলে,

সূত্রানুসারে, $S = r\theta$ একক

বা, $\theta = \frac{S}{r}$ একক

বা, $\theta = \left(\frac{11}{11}\right)^c$

বা, $\theta = 1^c$



বা, $\theta = \frac{180^\circ}{\pi}$ [$\because 1^c = \frac{180^\circ}{\pi}$]

বা, $\theta = \frac{180^\circ}{3{\cdot}1416}$

$\therefore \theta = 57{\cdot}2957^\circ$ (প্রায়) **(Ans.)**

আমরা জানি, বৃত্তাকার চাকা 1 বার ঘুরে তার পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

এখানে, চাকার ব্যাসার্ধ, r = 11 সে.মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি = $2\pi r$ একক = $2 \times 3{\cdot}1416 \times 11$ সে.মি.

= 69·1152 সে.মি. = 0·691152 মি.

$\therefore$ চাকাটি 1 বার ঘুরে 0·7 মি. (প্রায়) দূরত্ব অতিক্রম করবে। **(Ans.)**

খ. ABC চাকাটি 1 বার ঘুরে যায় 0·7 মি. ['ক' হতে পাই]

$\therefore$ ABC চাকাটি 7 বার ঘুরে যায় $(0{\cdot}7 \times 7)$ মি.

= 4·9 মি. = $4{\cdot}9 \times 10^{-3}$ কি.মি.

চাকাটি 1 সেকেন্ডে যায় $4{\cdot}9 \times 10^{-3}$ কি.মি.

চাকাটি 1 ঘণ্টা বা 3600 সেকেন্ডে যায় $(3600 \times 4{\cdot}9 \times 10^{-3})$ কি.মি.

= 17·64 কি.মি.

$\therefore$ ABC চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় 17·64 কি.মি. **(Ans.)**

গ. চিত্রে প্রদত্ত ΔBOD-এ OD = y এবং BD = x

এখন, পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী সমকোণী ΔOBD-এ

$OB^2 = OD^2 + BD^2$

বা, $OB^2 = y^2 + x^2$

$\therefore OB = \sqrt{x^2 + y^2}$ [ধনাত্মক মান নিয়ে]

ΔOBD-এ

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\therefore \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

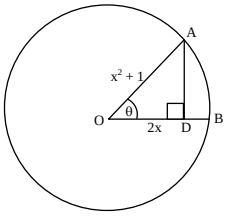
$$= \frac{1+\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \left[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2-x^2}{x^2+y^2}}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২৯ ▶



ক. ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে $30°12'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. OB = r এবং AB = S হলে দেখাও যে, $S = r\theta$. ৪

গ. চিত্র থেকে $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় করে দেখাও যে, $\tan\theta + \sec\theta = x$. ৪

◀◀ ২৯নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. অধ্যায়–৮.১ এর উদাহরণ–৩(i) পৃষ্ঠা–১৪২ এর সমাধান।

খ. অধ্যায়–৮ এর প্রতিজ্ঞা –৪ পৃষ্ঠা ১৪০নং দ্রষ্টব্য।

গ. চিত্রে থেকে, সমকোণী ΔOAD এ $OD = 2x$, $OA = x^2 + 1$.

এখন পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$OA^2 = OD^2 + AD^2$$

বা, $(x^2 + 1)^2 = (2x)^2 + AD^2$

বা, $AD^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2$

বা, $AD^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2$

বা, $AD^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

বা, $AD^2 = (x^2 - 1)^2$

$\therefore AD = x^2 - 1$

$\therefore \Delta OAD$ এ $\sin\theta = \frac{AD}{OA} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

এখন, $\tan\theta + \sec\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta + 1}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}} [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2}} = \frac{\frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{x^2 + 1}}{\sqrt{1 - \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}}}$$

$$= \frac{\frac{2x^2}{x^2 + 1}}{\sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 + 1}}}$$

$$= \frac{\frac{2x^2}{x^2 + 1}}{\sqrt{\frac{4x^4}{(x^2 + 1)^2}}} = \frac{\frac{2x^2}{x^2 + 1}}{\frac{2x}{x^2 + 1}} = \frac{2x^2}{(x^2 + 1)} \times \frac{(x^2 + 1)}{2x} = x$$

$\therefore \tan\theta + \sec\theta = x$ (দেখানো হলো)