নবম অধ্যায়

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ৯.১

প্রশ্ন–১ $a^x = b^y = c^z$, যেখানে $a \neq b \neq c$.

ক. যদি $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$ হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $ab = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. শর্তমতে, $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$

বা, $p^{p\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \left(p^{1+\frac{1}{2}}\right)^p$

বা, $p^{p\frac{3}{2}} = p^{\frac{3}{2}p}$

বা, $p^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}p$

বা, $\frac{p^{\frac{3}{2}}}{p} = \frac{3}{2}$

বা, $p^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}$

বা, $p^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

$\therefore p = \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

খ. যেহেতু $a^x = c^z$

বা, $a = c^{\frac{z}{x}}$

আবার, $b^y = c^z$

বা, $b = c^{\frac{z}{y}}$

এখন, $c^2 = ab = c^{\frac{z}{x}}. c^{\frac{z}{y}}$

বা, $c^2 = c^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}}.$

বা, $2 = \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$

বা, $z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$

ধরি $a^x = b^y = c^z = k$

$\therefore a^x = k$ বা, $a = k^{\frac{1}{x}}$

$a^x = k$ বা, $b = k^{\frac{1}{y}}$

$c^z = k$ বা, $c = k^{\frac{1}{z}}$

এখন, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}}, k^{\frac{1}{y}}, k^{\frac{1}{z}} = k^\circ$

বা, $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = k^\circ$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3 = 0$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = 0$

$\therefore \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২ **$a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$**

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ২

খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$ ৪

গ. $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$ হলে, দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$ ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $m \in \mathbf{N}$ কে নির্দিষ্ট করে এবং n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $(a^m)^n = a^{mn}$ .... (i) বিবেচনা করি।

(i) এ $n = 1$ বসিয়ে দেখা যায়,

বামপক্ষ $= (a^m)^1 = a^m$

ডানপক্ষ $= a^{m \cdot 1} = a^m$

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য।

খ. $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য। ['ক' হতে পাই]

ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) সত্য

অর্থাৎ $(a^m)^k = a^{mk}$........................(ii)

এখন, $(a^m)^{k+1} = (a^m)^k . (a^m)$[$\because a^{n+1} = a^n . a$]

$= a^{mk}.a^m$ [(ii) নং হতে]

$= a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$

$\therefore$ $n = k + 1$ এর জন্যও (i) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in N$ এর জন্য (i) সত্য। **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $(a^m)^n = a^{mn}$ .... (i)

এখানে, $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$

প্রথমে মনে করি, $n > 0$ এক্ষেত্রে খ থেকে (i) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

এখন মনে করি, $n = 0$ এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^\circ = a^\circ = 1$ এবং $a^{mn} = a^0 = 1$

$\therefore$ (i) নং সত্য।

আবার মনে করি, $n < 0$ এবং $n = -k$ যেখানে $k \in \mathbf{N}$

এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{m(-k)} = a^{mn}$

$\therefore a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$ এর জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩ $a \neq 0$ এবং $m, n \in Z$ এর জন্য $a^m . a^n = a^{m+n}$

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ২

খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $m, n \in N$ এর জন্য বাক্যটি সত্য। ৪

গ. (i) $m > 0$ এবং $n < 0$ (ii) $m < 0$ এবং $n < 0$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $n = 1$ হলে,

বামপক্ষ $= a^m.a^n = a^m.a^1 = a^m.a = a^{m+1}$

ডানপক্ষ $= a^{m+n} = a^{m+1}$

সুতরাং $n = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

খ. ‘ক’ হতে $m = n = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

সুতরাং $m = n = k$ এর জন্য সত্য হবে

$\therefore a^k.a^k = a^{k+k}$

$= a^{2k}$ .... (i)

$m = n = k + 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য হবে যদি ও কেবল যদি

$a^{k+1}. a^{k+1} = a^{k+1+k+1}$

$= a^{2k+2}$

$= a^{2(k+1)}$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে দেখা যায় k এর জন্য বাক্যটি সত্য হলে $k + 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

সুতরাং $m, n \in \mathbf{N}$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য

এখন ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) সত্য।

অর্থাৎ $a^m. a^k = a^{m+k}$ .... (ii)

তাহলে, $a^m.a^{k+1} = a^m(a^k . a)$ [সূত্র ১]

$= (a^m . a^k)\ a$ [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k}.a$ [আরোহ কল্পনা]

$= a^{m+k+1}$ [১নং সূত্র]

অর্থাৎ $n = k + 1$, এর জন্য (i) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য (i) সত্য।

$\therefore$ যেকোনো $m, n \in \mathbf{N}$ এর জন্য $a^m . a^n = a^{m+n}$

(দেখানো হলো)

গ. (i) $m > 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $n = -k$ যেখানে $k \in N$

এবং $m \in N$

$a^m . a^n = a^m . a^{-k}$ [প্রতিস্থাপন]

$= a^m . \frac{1}{a^k}$ [$\because a^{-n} = \frac{1}{a^n}$]

$= \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$

কিন্তু, $\frac{1}{a^{k-m}} = a^{-(k-m)} = a^{m-k}$ [$\because a^{-n} = \frac{1}{a^n}$]

$\therefore$ সকল ক্ষেত্রেই $a^m . a^n = a^{m-k} = a^{m+(-k)}$

$= a^{m+n}$ [মান বসিয়ে]

(সত্যতা যাচাই করা হলো)

ii) $m < 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $m = -p, n = -q$ যেখানে $p, q \in N$

$a^m . a^n = a^{-p} . a^{-q}$

$= \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q}$ [$\because a^{-n} = \frac{1}{a^n}$]

$= \frac{1}{a^{p+q}}$ [$\because a^m \times a^n = a^{m+n}$]

$= a^{-(p+q)} = a^{-p-q} = a^{-p+(-q)}$

$= a^{m+n}$ [মান বসিয়ে] (সত্যতা যাচাই করা হলো)

প্রশ্ন–৪ কতিপয় সূচক সমন্বিত রাশি $ay^{1-p}, by^{1-q}, cy^{1-r}$ এবং $ay^{1-p} = by^{1-q} = cy^{1-r} = x$।

ক. a, b ও c এর মান x, y এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\left(\frac{p^a}{p^b}\right) a^2 + ab + b^2 \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right) b^2 + bc + c^2 \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right) c^2 + ca + a^2 = a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $ay^{1-p} = by^{1-q} = cy^{1-r} = x$

$\therefore ay^{1-p} = x$

বা, $a = \frac{x}{y^{1-p}}$

$\therefore a = xy^{p-1}$

আবার, $by^{1-q} = x$

বা, $b = \frac{x}{y^{1-q}} = xy^{q-1}$

এবং $cy^{1-r} = x$

বা, $c = \frac{x}{y^{1-r}} = xy^{r-1}$

$\therefore a = xy^{p-1}, \; b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$

খ. 'ক' থেকে পাই, $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$

$\therefore a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q} = (xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r}y^{(p-1)(q-r)}.x^{r-p}y^{(q-1)(r-p)}.x^{p-q}y^{(r-1)(p-q)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}.y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q}$

$= x^0.y^0$

$= 1 \times 1 = 1$ **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে পাই, ডানপক্ষ $= a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q} = 1$

বামপক্ষ $= \left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= p^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \times p^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} \times p^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$= p^{a^3-b^3} \times p^{b^3-c^3} \times p^{c^3-a^3}$

$= p^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= p^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৫ $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}}$, $[1-1\{1-(1-x^3)^{-1}\}]^{-1}$ **দুইটি রাশি।**

ক. প্রথম রাশির সরল মান কত? ২

খ. দেখাও যে, ১ম রাশি × ২য় রাশি = ax^3 ৪

গ. ১ রাশি × ২য় রাশি ÷ $[x-\{x^{-1}+(a^{-1}-x)^{-1}\}^{-1}]$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6.a^2}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^8}}$

$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^4)^2}} = \sqrt[12]{a^8.a^4} = \sqrt[12]{a^{8+4}}$

$= \sqrt[12]{a^{12}} = (a^{12})^{\frac{1}{12}} = a$

নির্ণেয় সরল মান a

খ. 'ক' থেকে পাই, $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}} = a$

তাহলে বামপক্ষ = ১ম রাশি × ২য় রাশি

$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}} \times [1-1\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$

$= a \times [1-1\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$

$$= a \times \left[1 - 1\left\{1 - \frac{1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$$

$$= a \times \left[1 - 1\left\{\frac{1-x^3-1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$$

$$= a \times \left[1 - 1\left\{\frac{-x^3}{1-x^3}\right\}\right]^{-1}$$

$$= a \times \left[1 - \left(\frac{1-x^3}{-x^3}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= a \times \left[1 + \frac{1-x^3}{x^3}\right]^{-1} = a \times \left[\frac{x^3+1-x^3}{x^3}\right]^{-1}$$

$$= a \times \left[\frac{1}{x^3}\right]^{-1} = ax^3 = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore$ ১ম রামি $\times$ ২য় রাশি $= ax^3$ **(দেখানো হলো)**

গ. এখানে, ১ম রাশি $\times$ ২য় রাশি $\div [x - \{x^{-1} + (a^{-1} - x)^{-1}\}^{-1}]$

$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{a} - x\right)^{-1}\right\}^{-1}\right] \quad \text{['খ' থেকে]}$$

$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x} + \left(\frac{1-ax}{a}\right)^{-1}\right\}^{-1}\right]$$

$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x} + \frac{a}{1-ax}\right\}^{-1}\right]$$

$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1-ax+ax}{x(1-ax)}\right\}^{-1}\right]$$

$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x-ax^2}\right\}^{-1}\right]$$

$$= ax^3 \div [x - \{x - ax^2\}]$$

$$= ax^3 \div [x - x + ax^2]$$

$$= ax^3 \div ax^2$$

$$= \frac{ax^3}{ax^2} = x \ \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন–৬ ▸ $\mathbf{\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1}}$, $\mathbf{\frac{1}{x^c + x^{-a} + 1}}$ এবং $\mathbf{\frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}}$ তিনটি সূচকীয় রাশি।

ক. তৃতীয় রাশিটির সরল কর। ২

খ. রাশি তিনটির যোগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(a + b + c) = 0$ হলে রাশি তিনটির যোগফল 1. ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $$\frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = \frac{1}{x^a\frac{1}{x^b} + 1} = \frac{1}{\frac{x^a.x^b + 1 + x^b}{x^b}} = \frac{x^b}{1 + x^b + x^{a+b}} \textbf{ (Ans.)}$$

খ. রাশি তিনটির যোগফল

$$= \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^c + \frac{1}{x^a} + 1} + \frac{1}{x^a\frac{1}{x^b} + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{\frac{x^a.x^c + 1 + x^a}{x^a}} + \frac{1}{\frac{x^a.x^b + 1 + x^b}{x^b}}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^a}{1 + x^a + x^{a+c}} + \frac{x^b}{1 + x^b + x^{a+b}} \textbf{ (Ans.)}$$

গ. যেহেতু, $a + b + c = 0$

বা, $b + c = -a$

$\therefore$ রাশি তিনটির যোগফল

$$= \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^c + \frac{1}{x^a} + 1} + \frac{1}{x^a\frac{1}{x^b} + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{\frac{x^a.x^c + 1 + x^a}{x^a}} + \frac{1}{\frac{x^a.x^b + 1 + x^b}{x^b}}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^a}{1 + x^a + x^{a+c}} + \frac{x^b}{1 + x^b + x^{a+b}}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{1+ x^b + x^{-c}}$$

$[\because a + b + c = 0, \because a + b = - c]$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{1 + x^b + \frac{1}{x^c}}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}}$$

$$= \frac{1 + x^c + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}}$$

$= 1$

$\therefore$ $a + b + c = 0$ হলে প্রদত্ত রাশি তিনটির যোগফল 1. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৭ ▸ a, b ∈ N এবং a^n, n∈ N হলে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে,

ক. $(a^m)^n = a^{mn}$ ২

খ. $(a.b)^n = a^n b^n$ ৪

গ. $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ যেখানে, $a > 0$ ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, $(a^m)^n = a^{mn}$

প্রথম ধাপ : (i) নং এ $n = 1$ বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ = $(a^m)^1 = a^m$

ডানপক্ষ = $a^{m.1} = a^m$

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (i) নং বাক্যটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ : ধরি, $n = k$ এর জন্য (i)নং বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ $(a^m)^k = a^{mk}$

এখন, $(a^m)^{k+1} = (a^m)^k a^m$

$a^{m(k+1)} = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$

$\therefore$ $n = k + 1$ এর জন্য (i) নং বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ **(দেখানো হলো)**

খ. এখানে, $(a.b)^n = a^n.b^n$ .... (i)

প্রথম ধাপ : $n = 1$ হলে (i) বাক্যের বামপক্ষ = $(a.b)^1 = a.b$

ডানপক্ষ = $a^1.b^1 = a.b$

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ : ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

অর্থাৎ, $(a.b)^k = a^k.b^k$ .... (ii)

এখন, $(a.b)^{k+1} = (a.b)^k.(a.b)^1$

$= a^k.b^k.a^1.b^1$

$= a^{k+1}.b^{k+1}$

$\therefore$ $n = k + 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ বিধি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $(a.b)^n = a^n.b^n$ **(দেখানো হলো)**

গ. এখানে, $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ .... (i)

প্রথম ধাপ : $n = 1$ এর জন্য (i) এর বামপক্ষ = $\left(\frac{1}{a}\right)^1 = \frac{1}{a}$

ডানপক্ষ = $\frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ : ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

অর্থাৎ, $\left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1}{a^k}$

এখন, $n = k + 1$ হলে, $\left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{a}\right)^k \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^k.a} = \frac{1}{a^{k+1}}$

$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} = \frac{1}{a^{k+1}}$

$\therefore$ $n = k + 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য সুতরাং $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৮ $\frac{1}{1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p} + \frac{1}{1 + b^{-n}c^p + b^{-n}a^m} + \frac{1}{1 + c^{-p}a^m + c^{-p}b^n}$

ক. প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশের সরলীকরণ কর। ২

খ. প্রদত্ত রাশির সরল মান বের কর। ৪

গ. দেখাও যে, প্রদত্ত রাশির সরল মান $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$ এর সরল মানের সমান। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশ $= \frac{1}{1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p}$

$$= \frac{a^m}{a^m(1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p)}$$

$$= \frac{a^m}{a^m + a^m.a^{-m}b^n + a^m.a^{-m}.c^p}$$

$$= \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p} \textbf{ (Ans.)}$$

খ. ‘ক’ হতে পাই,

প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশের সরল মান $= \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p}$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশের সরল মান $= \frac{b^n}{a^m + b^n + c^p}$

এবং তৃতীয় অংশের সরল মান $= \frac{c^p}{a^m + b^n + c^p}$

প্রদত্ত রাশি,

$$\frac{1}{1+ a^{-m}b^n + a^{-m}c^p} + \frac{1}{1+ b^{-n}c^p + b^{-n}a^m} + \frac{1}{1+c^{-p}a^m + c^{-p}b^n}$$

$$= \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p} + \frac{b^n}{a^m + b^n + c^p} + \frac{c^p}{a^m + b^n + c^p}$$

$$= \frac{a^m + b^n + c^p}{a^m + b^n + c^p} = 1 \textbf{ (Ans.)}$$

গ. ‘খ’ হতে পাই প্রদত্ত রাশির সরল মান 1.

এখন, $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$

$= (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \times (x^{a-b})^{a+b}$

$= x^{b^2-c^2} \times x^{c^2-a^2} \times x^{a^2-b^2}$

$= x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}$

$= x^0 = 1$ যা প্রদত্ত রাশির সরল মানের সমান।**(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৯ $a^x = b^y = c^z$; যেখানে $a \neq b \neq c$.

ক. $b = z$ এবং $c = y$ হলে দেখাও যে,

$\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = y^{\frac{y}{z}-1}$ ২

খ. a, b এবং c পরস্পর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে দেখাও যে,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ এবং

$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $b = z$ এবং $c = y$ হলে

প্রদত্ত শর্তমতে, $z^y = y^z$ .... (i)

তাহলে, $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = \frac{(y)^{\frac{y}{z}}}{(z)^{\frac{y}{z}}} = \frac{(y)^{\frac{y}{z}}}{(z^y)^{\frac{1}{z}}} = \frac{y^{\frac{y}{z}}}{(y^z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{y^{\frac{y}{z}}}{y^1}$

$\therefore \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = y^{\frac{y}{z}-1}$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$

মনে করি, $a^x = b^y = c^z = k$

তাহলে, $a = k^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

$b = k^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

$c = k^{\frac{1}{z}}$ .... (iii)

এখন যেহেতু a, b এবং c তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

$\therefore b^2 = ac$

বা, $\left(k^{\frac{1}{y}}\right)^2 = k^{\frac{1}{x}} . k^{\frac{1}{z}}$

বা, $k^{\frac{2}{y}} = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}$

বা, $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ **(প্রমাণিত)**

গ. প্রদত্ত শর্ত, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}.k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = k^0$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ **(প্রমাণিত)**

আবার, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 \cdot \frac{1}{xy}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - 3 \cdot \frac{1}{xyz} + \frac{1}{z^3} = 0$

$\therefore \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১০ ▸ $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$.

ক. $a \neq 0$ এবং $x + y + z = 0$ হলে দেখাও

যে, $\frac{y}{z} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}$ ২

খ. দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ ৪

গ. $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $xyz = 1$ হলে দেখাও যে, $6(by^3 + cz^3) = (2a^3 - 5)(3 - x^3)$ ৪

▸◂ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ .... (i)

এবং $x + y + z = 0$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = -(y + z)$

(i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$-(y + z)\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $-y\sqrt[3]{a} - z\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $y\sqrt[3]{b} - y\sqrt[3]{a} = z\sqrt[3]{a} - z\sqrt[3]{c}$

বা, $y(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}) = z(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c})$

$\therefore \dfrac{y}{z} = \dfrac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b}) = -z\sqrt[3]{c}$ .... (i)

বা, $(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b})^3 = (-z\sqrt[3]{c})^3$ [ঘন করে]

বা, $x^3a + y^3b + 3xy\sqrt[3]{ab}\,(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b}) = -z^3c$

বা, $x^3a + y^3b + z^3c + 3xy\sqrt[3]{ab}\,(-z\sqrt[3]{c}) = 0$ [(i) থেকে]

বা, $x^3a + y^3b + z^3c + 3xyz\,(-\sqrt[3]{abc}) = 0$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 - 3xyz\sqrt[3]{a.a^2} = 0$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 - 3xyz\sqrt[3]{a^3}$

$\therefore ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে,

$a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ .... (i)

বা, $a^3 = (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})^3$ [ঘন করে]

বা, $a^3 = (2^{\frac{1}{3}})^3 + (2^{-\frac{1}{3}})^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\,(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})$

বা, $a^3 = 2 + 2^{-1} + 3.2^0.a$ [(i) থেকে]

বা, $a^3 = 2 + \dfrac{1}{2} + 3a$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

বা, $2a^3 = 5 + 6a$

বা, $6a = 2a^3 - 5$

$\therefore\ a = \dfrac{2a^3 - 5}{6}$

'খ' নং থেকে পাই,

$ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3a.1 \quad [\because\ xyz = 1]$

বা, $by^3 + cz^3 = 3a - ax^3$

বা, $by^3 + cz^3 = a\ (3 - x^3)$

বা, $by^3 + cz^3 = \dfrac{2a^3 - 5}{6}(3 - x^3) \quad \left[\because\ a = \dfrac{2a^3 - 5}{6}\right]$

$\therefore\ 6(by^3 + cz^3) = (2a^3 - 5)(3 - x^3)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১১ ▸ $a > 0$ এবং $a \neq 0$, $x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 = b^3$

ক. দেখাও যে, $a^0 = 1$ ২

খ. যদি $a^2 - b^2 = c^3$ হয়, তবে দেখাও যে,
$x^3 - 3cx - 2a = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $a^0 = a^{1-1}$

$= a^1.a^{-1}$ [সূচকের মৌলিক সূত্র $a^{m+n} = a^m.a^n$]

$= a\cdot\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$

$\therefore\ a^0 = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ .... (i)

বা, $x^3 = \{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\}^3$ [ঘন করে]

বা, $x^3 = (a+b) + (a-b) + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\}$

বা, $x^3 = 2a + 3(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}.x$ [(i) থেকে]

বা, $x^3 = 2a + 3x(c^3)^{\frac{1}{3}}$ [$\because a^2 - b^2 = c^3$]

বা, $x^3 = 2a + 3x.c$

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= \left\{\left(\frac{a^3}{b^3}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= \left\{\left(\frac{a^3}{a^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\left(\frac{b^2}{b^3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$ [$\because a^2 = b^3$]

$= (a^{3-2})^{\frac{1}{2}} + (b^{2-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১২ ▸ একটি সূচকীয় রাশি বিবেচনা কর,

$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$; a, b > 0

ক. রাশিটির সাথে b যোগ করে সরলীকরণ কর। ২

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সরলমানটির বর্গ সমান $-2 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ হলে দেখাও যে, $3a^3 + 9a - 8 = 0$ ৪

গ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সরলমানটি $1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ এর সমান হলে দেখাও যে, $a^3 - 3a^2 - 6a - 4 = 0$ ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশিটির সাথে b যোগ করলে দাঁড়ায়,

$$(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) + b$$

$$= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2\} + b$$

$$= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3 + b$$

$$= a - b + b$$

$= a$ **(Ans.)**

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত মান a

$$\therefore a^2 = -2 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3.a$ [$\because$ $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$]

বা, $3a^3 = 9 - 1 - 9a$

$\therefore 3a^3 + 9a - 8 = 0$ (দেখানো হলো)

গ. ‘ক’ থেকে প্রাপ্ত মান a

$\therefore\ a = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a - 1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [পক্ষান্তর করার পর ঘন করে]

বা, $a^3 - 1 - 3a^2 + 3a = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}.\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 3^2 + 3^1 + 3.3^1.(a - 1)$ $\quad [\because a - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}]$

বা, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 9 + 3 + 9a - 9$

$\therefore\ a^3 - 3a^2 - 6a - 4 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৩ $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x + 7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x + 7}$ **এবং** $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$**, দুইটি সমীকরণ**

ক. ১ম সমীকরণটিকে $a^m = a^n$ আকারের প্রকাশ কর। ২

খ. ২য় সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

গ. সমীকরণদ্বয়ের কোনো সাধারণ মূল আছে কিনা তা নির্ধারণ কর। ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x + 7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x + 7}$

বা, $\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^{4x + 7} = \left\{(64)^{\frac{1}{11}}\right\}^{2x + 7}$

বা, $4^{\frac{4x + 7}{5}} = 4^{\frac{6x + 21}{11}}$

$\therefore\ a^m = a^n$ আকারে দেখানো হলো।

খ. $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$

বা, $\sqrt{y - 2} - \sqrt{y - 9} = 1$ [$2x^2 + 5x = y$ ধরে]

বা, $\sqrt{y - 2} = 1 + \sqrt{y - 9}$

বা, $(\sqrt{y - 2})^2 = (1 + \sqrt{y - 9})^2$ [বর্গ করে]

বা, $y - 2 = 1 + 2.1\sqrt{y - 9} + y - 9$

বা, $y - 2 - y + 9 - 1 = 2\sqrt{y - 9}$

বা, $6 = 2\sqrt{y - 9}$

বা, $\sqrt{y - 9} = 3$

বা, $(\sqrt{y - 9})^2 = 9$

বা, $y - 9 = 9$

$\therefore y = 18$

বা, $2x^2 + 5x = 18$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $2x^2 + 5x - 18 = 0$

বা, $2x^2 + 9x - 4x - 18 = 0$

বা, $x(2x + 9) - 2(2x + 9) = 0$

বা, $(2x + 9)(x - 2) = 0$

বা, $2x = -9$ অথবা $x - 2 = 0$

বা, $x = \frac{-9}{2}$ বা, $x = 2$

নির্ণেয় সমাধান $x = 2, \frac{-9}{2}$

গ. 'ক' হতে পাই, $4^{\frac{4x + 7}{5}} = 4^{\frac{6x + 21}{11}}$

বা, $\frac{4x + 7}{5} = \frac{6x + 21}{11}$

বা, $44x + 77 = 30x + 105$

বা, $44x - 30x = 105 - 77$

বা, $14x = 28$

$\therefore x = \frac{28}{14}$

$= 2$

নির্ণেয় সমাধান $x = 2$

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের মধ্যে একটি সাধারণ মূল আছে এবং তা হচ্ছে $x = 2$

প্রশ্ন–১৪

ক. যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে xyz = কত? ২

খ. যদি $x^x = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab+bc+ca$ = কত? ৪

গ. যদি $9^x = (27)^y$ হয়, তাহলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত? ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^x = b$ ....(1)

$b^y = b$ ....(2)

$c^z = 1$ ....(3)

(i) হতে পাই, $a^x = b$

বা, $(a^x)^y = (b)^y$

বা, $(a^x)^y = (b)^y$

বা, $a^{xy} = c$ [(2) হতে]

বা, $a^{xy} = c^z$

বা, $a^{xyz} = a^\circ$

$\therefore$ $xyz = 0$

খ. দেওয়া আছে, $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$

ধরি, $x^a = b^b = z^c = k$

$\therefore$ $x^a = k$

$x = k^{\frac{1}{a}}$ ....(1)

$y^b = k$

বা, $y = k^{\frac{1}{b}}$ ....(2)

$z^c = k$

বা, $z = k^{\frac{1}{c}}$ ....(3)

(1) × (2) × (3) হতে পাই

$xyz = k^{\frac{1}{a}} . k^{\frac{1}{b}} . k^{\frac{1}{c}}$

বা, $1 = k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$

বা, $k^{\circ} = k^{\frac{ab + bc + ca}{abc}}$

বা, $0 = \frac{ab + bc + ca}{abc}$

$\therefore ab + bc + ca = 0$

গ. দেওয়া আছে, $9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

প্রশ্ন–১৫ একটি সূচকীয় রাশি বিবেচনা করি, $\left\{\left(\frac{1}{x^a}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

ক. রাশিটিকে সরলীকরণ কর। ২

খ. প্রদত্ত রাশিটি $2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হলে তবে দেখাও যে, $2x^3 - 6x = 58.$ ৪

গ. প্রদত্ত রাশিটি $(a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ তবে দেখাও যে, $2x^3 - 6cx = 4a$ এবং a ও c এর কোন মানের জন্য খ ও গ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ একই সমীকরণ নির্দেশ করে। ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উদ্দীপকে প্রদত্ত রাশিটি হলো, $\left\{\left(\frac{1}{x^a}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$$= \left\{\frac{1}{xa} \times \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)}\right\}\frac{a}{a+b}$$

$$= \frac{1}{xa} \times (a+b) \times \frac{a}{a+b}$$

$$= x \textbf{ (Ans.)}$$

খ. প্রদত্ত রাশিটি, $x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}$; দেখাতে হবে যে, $2x^3 - 6x = 5$

অনুশীলনী ৯.১ এর ৭(গ) প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

গ. প্রদত্ত রাশি, $x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$, দেখাতে হবে যে, $2x^3 - 6cx = 4a$

এরপর : অনুশীলনী ৯.১ এর ৭(খ) প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

'খ' হতে প্রাপ্ত সমীকরণ $2x^3 - 6x = 5$ ও $2x^3 - 6cx = 4a$ সমীকরণ একই হবে যদি $c = 1$ এবং $4a = 5$

বা, $a = \frac{5}{4}$ হয়। **(Ans).**

প্রশ্ন–১৬ $\left.\begin{matrix} \mathbf{y^x = x^2} \\ \mathbf{x^{2x} = y^4} \end{matrix}\right\}$ **এবং** $\left.\begin{matrix} \mathbf{y^x = 4} \\ \mathbf{y^2 = 2^x} \end{matrix}\right\}$, $\mathbf{y \neq 1}$ **দুইটি দুই চলকবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ।**

ক. সূচক সমীকরণ কাকে বলে? ২

খ. প্রথম সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, দ্বিতীয় সমীকরণ জোটের সমাধান প্রথম সমীকরণ জোটের সমাধানের সমান। ৪

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **সূচক সমীকরণ :** সূচক ও ভিত্তি সম্বলিত সমীকরণকে সূচক সমীকরণ বলে। যেমন : $\left.\begin{matrix} y^x = 4 \\ y^2 = 2^x \end{matrix}\right\}$, $y \neq 1$

খ. দেওয়া আছে, প্রথম সমীকরণ জোট,

$y^x = x^2$ .... (i)

$x^{2x} = y^4$ .... (ii)

(ii) নং হতে পাই,

$x^{2x} = y^4$

বা, $(x^2)^x = y^4$

বা, $(y^x)^x = y^4$ [(i) নং হতে x^2 এর মান বসিয়ে]

বা, $y^{x^2} = y^4$

বা, $x^2 = 4$ $[\because a^m = a^n$ হলে $m = n]$

$\therefore x = \pm 2$

যখন, $x = 2$

তখন $y^2 = 2^2$

বা, $y^2 = 4$

$\therefore y = \pm 2$

আবার, যখন, $x = -2$

তখন, $y^{-2} = (-2)^2$

বা, $\frac{1}{y^2} = 4$ $[\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}]$

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore y = \pm \frac{1}{2}$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right) \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

গ. দেওয়া আছে, দ্বিতীয় সমীকরণ জোট,

$y^x = 4$ .... (iii)

$y^2 = 2^x$ .... (iv)

(iv) নং হতে পাই,

$y^2 = 2^x$

বা, $(y^2)^x = (2^x)^x$ [উভয়পক্ষের ঘাত x এ উন্নীত করে]

বা, $y^{2x} = 2^{x^2}$

বা, $(y^x)^2 = 2^{x^2}$

বা, $(4)^2 = 2^{x^2}$ [(iii) নং হতে y^x এর মান বসিয়ে]

বা, $16 = 2^{x^2}$

বা, $2^{x^2} = 2^4$

বা, $x^2 = 4$ $[a^m = a^n$ হলে $m = n]$

$\therefore x = \pm 2$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন, $x = 2$, তখন $y^2 = 4$

$\therefore\ y = \pm 2$

আবার যখন, $x = -2$ তখন

$y^{-2} = 4$

বা, $\frac{1}{y^2} = 4$

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore\ y = \pm\frac{1}{2}$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right)\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

সুতরাং, দ্বিতীয় সমীকরণ জোটের সমাধান প্রথম সমীকরণ জোটের সমাধানের সমান। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৭ ▸ $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}, b \geq 0.$

ক. দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}.$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3b^3 + 9b = 8$ ৪

গ. প্রথম সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5.$ ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দ্বিতীয় সমীকরণ, $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}.$

বা, $b^2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} - 2$

$= \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}} . 3^{-\frac{1}{3}}$

$= \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$\therefore\ b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

খ. ‘ক’ হতে পাই, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [$\because$ b ≥ 0 যেহেতু ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $b^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\therefore$ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$]

বা, $b^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^0.b$ [$\because (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$]

বা, $b^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3b$

বা, $b^3 + 3b = \frac{8}{3}$

$\therefore$ $3b^3 + 9b = 8$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\because$ $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\ (x + y)$]

বা, $a^3 = 2^1 + 2^{-1} + 3\cdot2^0\cdot a$

$\left[\because 2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 2^0 \text{ এবং } 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$

বা, $a^3 = \frac{4 + 1 + 6a}{2}$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

$\therefore$ $2a^3 - 6a = 5$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৮ $\mathbf{a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}}$ **এবং** $\mathbf{c = xy^{r-1}}$ **হয়, তাহলে–**

ক. $p + q + r = 3$ হলে দেখাও যে,

$\sqrt[3]{abc} = x$ ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r-1}.b^{r-p-1}.c^{p-q-1} = x^{-3}$ যখন $p + q + r = 3$ ৪

গ. $p + q + r = 3, pq + qr + rp = 3$ হলে $\left(\frac{a^{-2}b^{-2}c^{-2}}{a^{p+1}b^{q+1}c^{r+1}}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$

এবং $c = xy^{r-1}$

$\therefore abc = xy^{p-1}.xy^{q-1}.xy^{r-1}$

$= x^{1+1+1}.y^{p+q+r-1-1-1}$

$= x^3.y^{(p+q+r)-3}$

$= x^3.y^{3-3}$ $[p + q + r = 3]$

$= x^3.y^0$

$= x^3.1$

$= x^3$

বা, $abc = x^3$

$\therefore \sqrt[3]{abc} = x$ **(দেখানো হলো)**

খ. বামপক্ষ $= a^{q-r-1}.b^{r-p-1}.c^{p-q-1}$

$= (xy^{p-1})^{q-r-1}.(xy^{q-1})^{r-p-1}.(xy^{r-1})^{p-q-1}$

$= x^{q-r-1}.y^{(p-1)(q-r-1)}.x^{r-p-1}.y^{(q-1)(r-p-1)}.x^{p-q-1}.y^{(r-1)(p-q-1)}$

$= x^{q-r-1+r-p-1+p-q-1}.y^{(p-1)(q-r-1)+(q-1)(r-p-1)+(r-1)(p-q-1)}$

$= x^{-3}.y^{pq-pr-p-q+r+1+qr-pq-q-r+p+1+pr-qr-r-p+q+1}$

$= x^{-3}.y^{3-(p+q+r)}$ $[\because p + q + r = 3]$

$= x^{-3}.y^{3-3} = x^{-3}.y^0$

$= x^{-3} =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $p + q + r = 3$

$$pq + qr + rp = 3$$

প্রদত্ত রাশি = $\dfrac{a^{-2}\, b^{-2}\, c^{-2}}{a^{p+1}\, b^{q+1}\, c^{r+1}}$

$$= \frac{(xy^{p-1})^{-2} \cdot (xy^{q-1})^{-2} \cdot (xy^{r-1})^{-2}}{(xy^{p-1})^{p+1} \cdot (xy^{q-1})^{q+1} \cdot (xy^{r-1})^{r+1}}$$

$$= \frac{x^{-2}.y^{-2p+2}.x^{-2}.\, y^{-2q+2}.x^{-2}.y^{-2r+2}}{x^{p+1}.y^{p^2-1}.\, x^{q+1}\, y^{q^2-1} \cdot x^{r+1} .\, y^{r^2-1}}$$

$$= x^{-2-2-2-p-1-q-1-r-1}.y^{-2p+2-2q+2-2r+2-p^2+1-q^2+1-r^2+1}$$

$$= x^{-9-(p+q+r)} \cdot y^{9-2(p+q+r)-(p^2+q^2+r^2)}$$

$$= x^{-9-3} \cdot y^{9-2.3-\{(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)\}} \quad [\because p+q+r=3]$$

$$= x^{-12} \cdot y^{9-6-\{(3)^2-2.3\}} \quad [\because p+q+r=3 \text{ এবং } pq+r+rp=3]$$

$$= x^{-12} .\, y^{3-(9-6)}$$

$$= x^{-12}.y^0$$

$$= x^{-12}$$

$$\therefore \frac{a^{-2}.b^{-2}.c^{-2}}{a^{p+1}.b^{q+1}.c^{r+1}} = x^{-12} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন–১৯ $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2}$, $\left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$ $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}$, $\left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z}$, $\left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x}$

ক. ১ম ও ৪র্থ রাশির মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} . \left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} . \left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x} = 1$ ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

১ম রাশি = $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2 + ab + b^2}$

$= (p^{a-b})^{a^2 + ab + b^2}$

$= p^{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

$= P^{a^3 - b^3}$ **(Ans.)**

এবং ৪র্থ রাশি = $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} = \left\{\frac{p^{x^2 + 2xy + y^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}$

$= p^{(x^2 + 2xy - xy + y^2)(x-y)}$

$= p^{(x^2 + xy + y^2)(x-y)}$

$= p^{x^3 - y^3}$ **(Ans.)**

খ. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2 + ab + b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2 + bc + c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2 + ca + a^2}$

$= (p^{a-b})^{(a^2 + ab + b^2)} \times (p^{b-c})^{(b^2 + bc + c^2)} \times (p^{c-a})^{(c^2 + ca + a^2)}$

$= p^{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}\ p^{(b-c)(b^2 + bc + c^2)}\ p^{(c-a)(c^2 + ca + a^2)}$

$= p^{a^3 - b^3} \times p^{b^3 - c^3} \times p^{c^3 - a^3}$

$= p^{a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3}$

$= p^0$

$= 1$ **(Ans.)**

গ. ‘ক’ হতে পাই, $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} = p^{x^3 - y^3}$

অনুরূপভাবে, $\left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} = p^{y^3 - z^3}$

এবং $\left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x} = p^{z^3 - x^3}$

$\therefore \left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} \times \left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} \times \left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x}$

$= p^{x^3 - y^3} \times p^{y^3 - z^3} \times p^{z^3 - x^3}$

$= p^{x^3 - y^3 + y^3 - z^3 + z^3 - x^3} = p^0 = 1$

অর্থাৎ $\left\{\frac{p^{(x+y)2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}\left\{\frac{p^{(y+z)2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z}\left\{\frac{p^{(z+x)2}}{p^{zx}}\right\}^{y-z} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২০ ▸ যদি $a^x = b^y = c^2$, যেমন $a \neq b \neq c$ এবং $9^{2R} = 3^{R+1}$ হলে,

ক. R এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 2$ এবং $y = 3$ হয় তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে দেখাও যে, $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$ এবং $x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} = (3xyz)^{-1}$ ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, $9^{2R} = 3^{R+1}$

বা, $(3^2)^{2R} = 3^{R+1}$

বা, $3^{4R} = 3^{R+1}$

বা, $4R = R + 1$

বা, $3R = 1$

$\therefore R = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^x$

এখানে, $x = 2$, $y = 3$ হলে পাই, $a^2 = b^3$

$\therefore a = b^{3/2}$, $b = a^{2/3}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{a^{2/3}}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ [মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}$

$$= \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$ যেখানে, $a \neq b \neq c$

ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$

$\therefore a^x = k \qquad b^y = k \qquad c^z = k$

$\therefore a = k^{\frac{1}{x}} \qquad \therefore b = k^{\frac{1}{y}} \qquad \therefore c = k^{\frac{1}{z}}$

এখন, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}} \cdot k^{\frac{1}{y}} \cdot k^{\frac{1}{z}} = 1$ [মান বসিয়ে]

বা, $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = k^0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$ **(দেখানো হয়েছে)**

আবার, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{-1}{z^3}$ [ঘন করে]

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\frac{1}{xy}\left(\frac{-1}{z}\right) = -\frac{1}{z^3}$ $\left[\because \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}\right]$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

$\therefore x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} = 3(xyz)^{-1}$ **(দেখানো হলো)**

[[প্রশ্ন–২১ ▸ $a^x = b^x = c^z$, যেখানে, a, b ও c ধনাত্মক ও পরস্পর অসমান এবং $x, y, z \in N$.

ক. $9^{2x} = 3^{x + 1}$ হলে x এর মান কত? ২

খ. $b^2 = ac$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^{-1} + z^{-1} = 2y^{-1}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ এবং $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

২১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $9^{2x} = 3^{x+1}$

বা, $(3^2)^{2x} = 3^{x+1}$

বা, $3^{4x} = 3^{x+1}$

বা, $4x = x + 1$

বা, $4x - x = 1$

বা, $3x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ. অনু–৯ এর উদাহরণ ১১ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা–১৮৪।

গ. ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$

এখানে, $a^x = k$

$\therefore a = k^{\frac{1}{x}}$ অনুরূপভাবে, $b = k^{\frac{1}{y}}$ এবং $c = k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore abc = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}}$

বা, $1 = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ $[\because abc = 1]$

বা, $k^0 = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ (দেখানো হয়েছে)

এখন, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

বা, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3 = \left(\frac{-1}{z}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3.\frac{1}{x}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{z^3}$ [(i) ব্যবহার করে]

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}-3\frac{1}{xyz} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ (দেখানো হলো)

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান ৯.২

প্রশ্ন–১ ▸ $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $z = xy^{c-1}$

ক. $a^b = b^a$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = b^{\frac{a}{b}-1}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$ ৪

গ. $(b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^b = b^a$

দেখাতে হবে যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{(b^a)^{\frac{1}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{(a^b)^{\frac{1}{b}}}$ [$\because a^b = b^a$]

$$= \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a^1} = a^{\frac{a}{b}-1} = \text{(ডানপক্ষ)}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1} = \text{(দেখানো হলো)}$$

খ. দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $r = xy^{c-1}$

বামপক্ষ $= (b + a)\log \frac{p}{q} + (c + b)\log \frac{q}{r} + (a + c)\log \frac{r}{p}$

$= (a + b)\log \frac{p}{q} + (b + c)\log \frac{q}{r} + (c + a)\log \frac{r}{q}$

$= (a + b)\log \frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}} + (b + c)\log \frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}} + (c + a)\log \frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}$

$= (a + b)\log \frac{y^{a-1}}{y^{b-1}} + (b + c)\log \frac{y^{b-1}}{y^{c-1}} + (c + a)\log \frac{y^{c-1}}{y^{a-1}}$

$= (a + b)\log y^{a-1-b+1} + (b + c)\log y^{b-1-c+1}$

$+ (c + a)\log y^{c-1-a+1}$

$= (a + b)\log y^{a-b} + (b + c) \log y^{b-c} + (c + a) \log y^{c-a}$

$= (a + b) (a - b)\log y + (b + c)(b - c)\log y + (c + a) (c - a)\log y$

$= (a^2 - b^2)\log y + (b^2 - c^2)\log y + (c^2 - a^2)\log y$

$= (a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2)\log y$

$= 0 \times \log y = 0 =$ (ডানপক্ষ)

$\therefore (b + a) \log \frac{p}{q} + (c + b) \log \frac{q}{r} + (a + c) \log \frac{r}{p} = 0$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $r = xy^{c-1}$

$(b - c)\log p + (c - a)\log q + (a - b)\log r$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত রাশি $= (b - c)\log p + (c - a)\log q + (a - b) \log r$

$= (b - c)\log (xy^{a-1}) + (c - a)\log (xy^{b-1})$

$+ (a - b) (xy^{c-1})$

$= (b - c)\log x + (b - c)\log y^{a-1} + (c - a)\log x$

$+ (c-a)\log y^{b-1} + (a - b)\log x + (a - b)\log^{c-1}$

$= (b - c)\log x + (b - c) (a - 1) \log y + (c - a)\log x + (c - a)$

$(b - 1) \log y + (a - 1) \log x + (a - b) (c - 1) \log y$

$= (b - c + c - a + a - b)\log x + \{(b - c)(a - 1)$

$+ (c - a)(b - 1) + (a - b)(c - 1)\} \log y$

$= 0 \times \log x + \{(b - c)(a - 1)$

$+ (c - a)(b - 1) + (a - b)(c - 1)\} \log y$

$= 0 + \{(ab - ca - b + c) + (bc - ab - c + a)$

$+ (ca - bc - a + b)\}\log y$

$= (ab - ca - b + c + bc - ab - c + a + ca - bc - a + b)\log y$

$= 0 \times \log y = 0$

নির্ণেয় মান 0

প্রশ্ন–২ যদি $\frac{\log a}{b - c} = \frac{\log b}{c - a} = \frac{\log c}{a - b}$ হয়, তবে–

ক. অনুপাতগুলোর মান k ধরে, $\log a^a$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a^{b^2 + bc + c^2}. b^{c^2 + ca + a^2}. c^{a^2 + ab + b^2} = a^a \cdot b^b \cdot c^c$. ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $\frac{\log a}{b - c} = \frac{\log b}{c - a} = \frac{\log c}{a - b} = k$

$\therefore \log a = k(b - c)$

বা, $a \log a = ka(b - c)$; [উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log a^a = ka(b - c)$ .... (i)

খ. এখন, $\log b = k(c - a)$

বা, $b \log a = kb(c - a)$; [উভয় পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log b^b = kb(c - a)$ .... (ii)

এবং $\log c = k(a - b)$

বা, $c \log c = kc(a - b)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log a^a + \log b^b + \log c^c = k(ab - ac + bc - ab + ac - bc)$

বা, $\log (a^a b^b c^c) = k\,0 = 0$

$\therefore\ a^a b^b c^c = 1$ **(Ans.)**

গ. ‘ক’ থেকে পাই, $\log a = k\,(b - c)$

বা, $(b^2 + bc + c^2) \log a = k\,(b - c)\,(b^2 + bc + ca)$

বা, $\log a^{b^2 + bc + c^2} = k\,(b^3 - c^3)$ .... (i)

‘খ’ থেকে পাই, $\log b = k(c - a)$

বা, $(c^2 + ca + a^2) \log b = k(c - a)\,(c^2 + ca + a^2)$

বা, $\log b^{c^2 + ca + a^2} = k(c^3 - a^3)$ .... (ii)

এবং, $\log c = k\,(a - b)$

বা, $(a^2 + ab + b^2) \log c = k\,9a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

বা, $\log c^{a^2 + ab + b^2} = k\,(a^3 - b^3)$ .... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log a^{b^2 + bc + c^2} + \log b^{c^2 + ca + a^2} + \log c^{a^2 + ab + b^2} = k\,(b^3 - c^3) + k\,(c^3 - a^3) + k(a^3 - b^3)$

বা, $\log (a^{b^2 + bc + c^2} . b^{c^2 + ca + a^2} . c^{a^2 + ab + b^2}) = 0$

বা, $\log (a^{b^2 + bc + c^2} . b^{c^2 + ca + a^2} . c^{a^2 + ab + b^2} = \log 1$

বা, $a^{b^2 + bc + c^2} . b^{c^2 + ca + a^2} . c^{a^2 + ab + b^2} = 1$

$\therefore\ a^{b^2 + bc + c^2} . b^{c^2 + ca + a^2} . c^{a^2 + ab + b^2} = a^a.b^b.c^c$ [‘খ’ হতে] (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৩ যদি $x = 1 + \log_a bc$, $y = 1 + \log_b ca$ এবং $z = 1 + \log_c ab$ হয়, তবে–

ক. দেখাও যে, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$ ৪

গ. দেখাও যে, $a^{x-3}. b^{y-3}. c^{z-3} = 1$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x = \log_a a + \log_a bc$

বা, $x = \log_a abc$

বা, $a^x = abc$

$a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ (দেখানো হলো)

খ. ‘ক’ হতে পাই, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$............ (i)

অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$............ (ii)

এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$.............. (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 1$

$\therefore$ $xyz = zy + yz + zx$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x - 1 = \log_a bc$

বা, $a^{x-1} = bc$ .... (i)

আবার, $y = 1 + \log_b ca$

বা, $y - 1 = \log_b ca$

বা, $b^{y-1} = ca$ .... (ii)

অনুরূপভাবে, $c^{z-1} = ab$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$a^{x-1}. b^{y-1}. c^{z-1} = bc. ca. ab$

বা, $a^{x-1}. b^{y-1}. c^{z-1} = a^2.b^2.c^2$

বা, $\frac{a^{x-1}}{a^2} . \frac{b^{y-1}}{b^2} . \frac{c^{z-1}}{c^2} = 1$

বা, $a^{x-1-2}. b^{y-1-2}. c^{z-1-2} = 1$

$\therefore\ a^{x-3}.\ b^{y-3}.\ c^{z-3} = 1$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৪ নিচের ছকটি লক্ষ কর :

x	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

ক. ছকটি কোন ফাংশন দ্বারা বর্ণনা করা যায়। ২

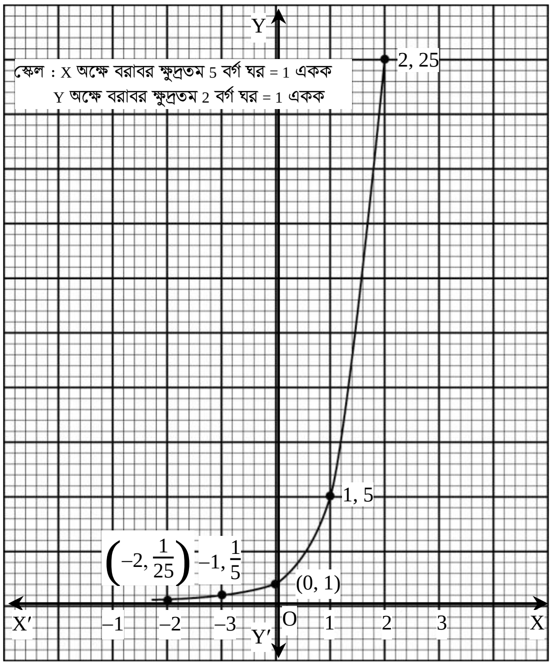
খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনটির প্রকৃতি বর্ণনা কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ছকটিতে বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 5^x$ ফাংশন দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x–বাস্তব সংখ্যা।

খ. ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ বরাবর XOX' এবং y-অক্ষ বরাবর YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর 2 বর্গ ঘর = 1 একক বিবেচনা করে (x, y) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলো সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে ফাংশনটির লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো :



গ. লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, যখন x = 0

তখন $y = 5^{\circ} = 1$ কাজেই লেখটি (0, 1) বিন্দুগামী।

আবার x এরে ঋণাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে শূন্যের খুবই কাছাকাছি পৌঁছায় কিন্তু 0 হয় না অর্থাৎ $x \to -\infty, y \to 0^{+}$.

x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য ফাংশনটির মান অসীমের কাছাকাছি অর্থাৎ $x \to \infty, y \to \infty$.

আবার, ফাংশনটি $f(x) = a^{x}$ আকারের যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 0$। সুতরাং $y = 5^{x}$ একটি সূচকীয় ফাংশন।

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট অর্থাৎ $(-\infty, \infty)$ এবং ফাংশনটির রেঞ্জ সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট অর্থাৎ $(0, \infty)$।

প্রশ্ন–৫ ▸ $y = 2^{-x}$ একটি ফাংশন যেখানে $-3 \le x \le 3$

ক. প্রদত্ত সীমার মধ্যে ফাংশনটির কয়েকটি মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশনটিও নির্ণয় কর। ৪

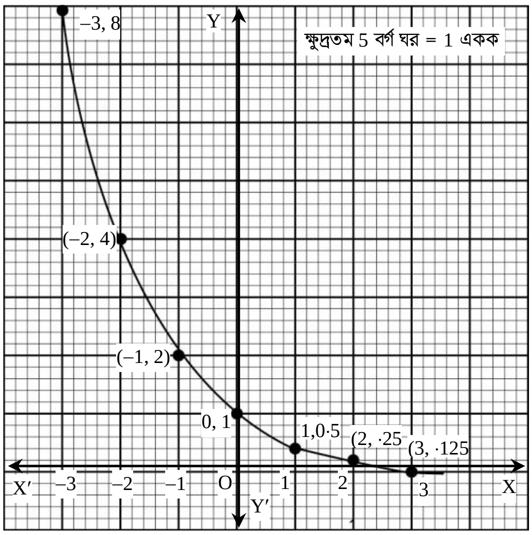
৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $y = f(x) = 2^{-x}$

x এর -3 থেকে 3 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো–

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

খ. ছক কাগজের সুবিধামত x–অক্ষ XOX' এবং YOY' আঁকি। x- অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখা পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ. লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, x এর ধনাত্মক মান বৃদ্ধির জন্য ফাংশটির মান ক্রমশ: শূন্যের কাছাকাছি পৌঁছায় কিন্তু শূন্য হয় না। x = 0 হলে ফাংশনটির মান, $y = 2^{-0} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$ কাজেই ফাংশনটি (0, 1) বিন্দুগামী। আবার, x এর উচ্চতর ঋণাত্মক মানের জন্য ফাংশনটির মান বৃদ্ধি পায়। সুতরাং প্রদত্ত সীমার মধ্যে ফাংশটির ডোমেন = [–3, 3] এবং ফাংশনটির রেঞ্জ = $\left[\frac{1}{8}, 8\right]$

বিপরীত ফাংশন নির্ণয় :

$y = f(x) = 2^{-x}$

এখন, $y = 2^{-x}$

বা, $\log_2 y = -x$

বা, $x = -\log_2 y$

বা, $x = \log_2 y^{-1}$

$\therefore x = \log_2 \frac{1}{y}$

বিপরীত ফাংশন, $f^{-1} : y \to x$ যখন $x = \log_2 \frac{1}{y}$

বা, $f^{-1} : y \to \log_2 \frac{1}{y}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1} : x \to \log_2 \frac{1}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1}{x}$

প্রশ্ন–৬ $\mathbf{y = \frac{2x + 1}{x - 1}}$ **একটি ফাংশন।**

ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্যে x ও y এর মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ৪

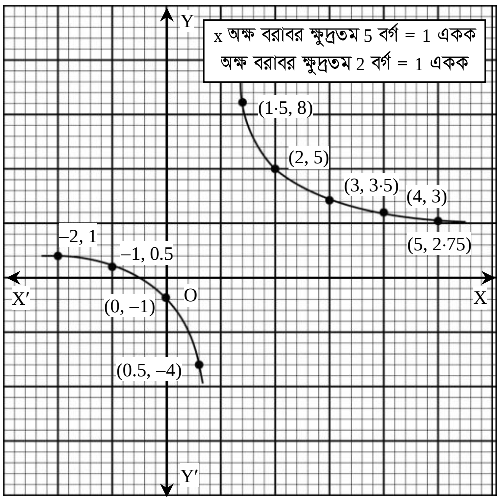
৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	–2	–1	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
y	1	0.5	–1	–4	অসংজ্ঞায়িত	8	5	3·5	3	2·75

খ. 'ক' এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x–অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।



∵ ফাংশনটি $x = 1$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত

ডোমেন $D = \mathbb{R} - \{1\}$

গ. ধরি, $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

এখন, $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

বা, $y(x - 1) = 2x + 1$

বা, $yx - 2x + y + 1$

বা, $x(y - 2) = y + 1$

$\therefore\ x = \dfrac{y + 1}{y - 2}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \rightarrow x$ যেখানে, $x = \dfrac{y + 1}{y - 2}$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow \dfrac{y + 1}{y - 2}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই, $f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{x + 1}{x - 2}$

$$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{x - 2};\ x \neq 2$$

প্রশ্ন–৭ ▸ $\mathbf{y = \ln \dfrac{5 + x}{5 - x}}$ **একটি লগারিদম ফাংশন।**

ক. ফাংশনটি যে শর্তের জন্য অসংজ্ঞায়িত সেসব শর্ত নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

গ. ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় এবং বিপরীত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. x = 5 এর জন্য ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত। আবার, লগারিদম ফাংশন ঋণাত্মক মানের জন্যও অসংজ্ঞায়িত। তাই $\dfrac{5 + x}{5 - x} < 0$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত।

খ. ধরি, $y = f(x) = \ln \dfrac{5 + x}{5 - x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore\ \dfrac{5 + x}{5 - x} > 0$ যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$

বা, $x > -5$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন = $\{x : -5 < x\}$ এবং $\{x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন = $\{x : x < -5\} \cap (x : x > 5\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন,

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ = $(-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

গ. ধরি, $y = f(x) = \ln \dfrac{5 + x}{5 - x}$

বা, $e^y = \dfrac{5 + x}{5 - x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

$\therefore x = \dfrac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \dfrac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

বা, $f^{-1} : y \to \dfrac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \to \dfrac{5(e^x - 1)}{e^x + 1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{5(e^x - 1)}{e^x + 1}$

সুতরাং, বিপরীত ফাংশনের ডোমেন হবে ফাংশনটি রেঞ্জ এবং রেঞ্জ হবে ফাংশনটির ডোমেন।

$\therefore Df^{-1} = \mathbb{R}$ এবং $Rf^{-1} = (-5, 5)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ $f(x) = e^{-x}$ একটি ফাংশন।

ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য একটি সারণি তৈরি কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

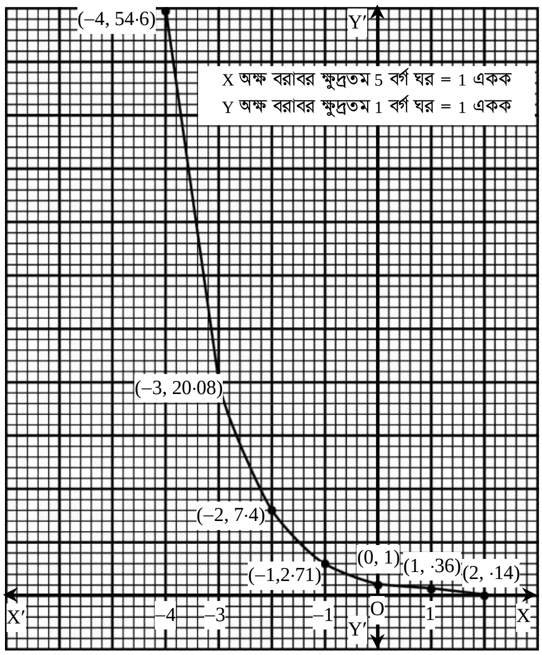
ক. ধরি, $y = f(x) = e^{-x}$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	2	1	0	–1	–2	–3	–4
y	0·14	0·36	1	2·71	7·4	20·08	54·6

খ. এখন, 'ক' এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত X–অক্ষ XOX′ এবং Y–অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সাবলীল বক্ররেখার যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ. x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

∴ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এবং x যখন + ∞ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং x এর মান হ্রাসের সাথে সাথে $f(x)$ এর মান অসীমের দিকে বৃদ্ধি পায়।

∴ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

'ক' হতে পাই, $y = e^{-x}$

বা, $\log_e y = -x$

বা, $x = -\log_e y$

বা, $x = \log_e y^{-1}$

বা, $x = \log_e \dfrac{1}{y}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \log_e \frac{1}{y}$

বা, $f^{-1} : y \to \log_e \frac{1}{y}$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \to \log_e \frac{1}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_e \frac{1}{x}$

প্রশ্ন–৯ $\frac{\log_k p}{y - z} = \frac{\log_k q}{z - x} = \frac{\log_k r}{x - y}$

ক. প্রমাণ কর যে, $pqr = 1$ ২

খ. $p^{y + z}.q^{z + x}.r^{x + y} = 1$ ৪

গ. $p^{y^2 + yz + z^2}.q^{z^2 + zx + x^2}.r^{x^2 + xy + y^2} = 1$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $\frac{\log_k p}{y - z} = \frac{\log_k q}{z - x} = \frac{\log_k r}{x - y} = c$

$\therefore \log_k p = c(y - z)$ ....(i)

$\log_k q = c(z - x)$ .... (ii)

$\log_k r = c(x - y)$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$\log_k p + \log_k q + \log_k r = c(y - z + z - x + x - y)$

বা, $\log_k pqr = c.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore pqr = 1$ (প্রমাণিত)

খ. সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) কে যথাক্রমে (y + z), (z + x) ও (x + y) দ্বারা গুণ করার পর যোগ করে পাই,

$(y + z)\log_k p + (z + x)\log_k q + (x + y)\log_k r =$

$c\{(y + z)(y - z) + (z + x)(z - x) + (x + y)(x - y)\}$

বা, $\log_k p^{(y+z)} + \log_k q^{(z+x)} + \log_k r^{(x+y)} = c\{y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2\}$

বা, $\log_k(p^{y + z}.q^{z + x}.r^{x + y}) = c.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore\ p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = 1$ (প্রমাণিত)

গ. সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) কে যথাক্রমে $(y^2 + yz + z^2)$, $(z^2 + zx + x^2)$ ও $(x^2 + xy + y^2)$ দ্বারা গুণ করার পর যোগ করে পাই,

$$(y^2 + yz + z^2)\log_k p + (z^2 + zx + x^2)\log_k q +$$
$$(x^2 + xy + y^2)\log_k r = c\ \{(y - z)(y^2 + yz + z^2) +$$
$$(z - x)(z^2 + zx + x^2) + (x - y)(x^2 + xy + y^2)\}$$

বা, $\log_k p^{(y^2 + yz + z^2)} + \log_k q^{(z^2 + zx + x^2)} + \log_k r^{(x^2 + xy + y^2)}$

$$= c\{y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3\}$$

বা, $\log_k(p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{z^2+xy+y^2}) = c.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore\ p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{z^2+xy+y^2} = 1$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১০ দেওয়া আছে, $y = 1 - 2^{-x}$

ক. প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ। ৪

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে তা এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর। ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, $y = 1 - 2^{-x}$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

রেঞ্জ : $y = 1 - 2^{-x}$

বা, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $-x = \log_2(1 - y)$

বা, $x = \log_2(1 - y)^{-1}$

$$\therefore\ x = \log_2\left(\frac{1}{1 - y}\right)$$

শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য লগারিদম সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{1}{1-y} > 0$ যদি $1 - y > 0$ হয়।

বা, $1 > y$

$\therefore y < 1$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = (-\infty, 1)$

খ. **লেখচিত্র অঙ্কন :** প্রদত্ত ফাংশন, $y = 1 - 2^{-x}$

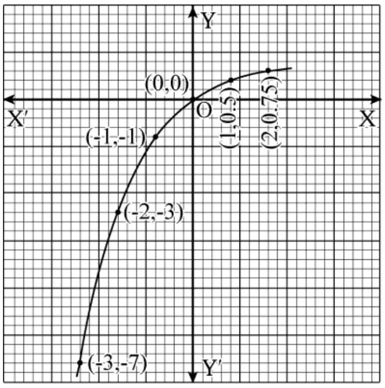
প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানের একটি তালিকা প্রস্তুত করি :

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−7	−3	−1	0	0.5	0.75

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়।

x-অক্ষ : প্রতি 4 বর্গ = 1 একক ধরে

y-অক্ষ : প্রতি 4 বর্গ = 1 একক ধরে



বৈশিষ্ট্য :

১. রেখাটি মূলবিন্দুগামী।

২. ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

৩. ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = (-\infty, 1)$

গ. **বিপরীত ফাংশন নির্ণয় :**

এখানে, $y = 1 - 2^{-x} = f(x)$ (ধরি)

বা, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $-x = \log_2(1 - y)$

বা, $x = \log_2\left(\dfrac{1}{1-y}\right)$

$y = f(x)$ হলে $f^{-1}(y) = x$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বা, $f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

নির্ণেয় বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$

$\therefore f^{-1}(x_1) = \log_2\left(\frac{1}{1-x_1}\right)$

এবং $f^{-1}(x_2) = \log_2\left(\frac{1}{1-x_2}\right)$

এখন, $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_2\left(\frac{1}{1-x_1}\right) = \log_2\left(\frac{1}{1-x_2}\right)$

বা, $\frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-x_2}$

বা, $1 - x_1 = 1 - x_2$

বা, $-x_1 = -x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

যেহেতু $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ফাংশনটি একটি এক-এক ফাংশন।

প্রশ্ন–১১ ▸ $a, b, c \in \mathbb{R}$; যেখানে $b = (1 + 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}})$ এবং $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$

ক. দেখাও যে, $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$ ২

খ. দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ ৪

গ. $a^a.b^b.c^c$ এর মান বের কর। ৪

▸◂ **১১নং প্রশ্নের সমাধান** ▸◂

ক. বামপক্ষ $= \log_a \log_a \log_a a^{a^{a^b}} = \log_a \log_a a^{a^b} \log_a a$

$= \log_a \log_a a^{a^b}.1 = \log_a a^b \log_a a$

$= \log_a a^b.1 = b\log_a a = b.1 = b =$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, $b = 1 + 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$

বা, $b - 1 = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$ .... (i)

বা, $(b - 1)^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $b^3 - 1 - 3b^2 + 3b = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)$

বা, $b^3 - 1 - 3b^2 + 3b = 3 + 3^2 + 3.3^1.(b - 1)$ [(i) থেকে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 - 12 - 9b + 9 = 0$

$\therefore\ b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ (দেখানো হলো)

গ. $\dfrac{\log_k a}{b - c} = \dfrac{\log_k b}{c - a} = \dfrac{\log_k c}{a - b} = p$ (ধরি)

তাহলে, $\log_k a = p(b - c)$ .... (i)

$\log_k b = p(c - a)$ .... (ii)

$\log_k c = p(a - b)$ .... (iii)

(i) × a + (ii) × b + (iii) × c করে পাই,

$a \log_k a + b \log_k b + c \log_k c = p\{a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)\}$

বা, $\log_k a^a + \log_k b^b + \log_k c^c = p\,(ab - ca + bc - ab + ca - bc)$

বা, $\log_k\left(a^a.b^b.c^c\right) = p.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore\ a^a.b^b.c^c = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ ▶ a, b, c > 0 এবং a, b, c ≠ 1

ক. $\log_a(abc) = x$ হলে, $a =$ কত? ২

খ. দেখাও যে, $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ ৪

গ. যদি $p = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$ এবং $r = \log_c(ab)$ হয় তবে দেখাও যে, $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r} = 1$ ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\log_a(abc) = x$

বা, $a^x = abc$

বা, $\frac{a^x}{a} = bc$

বা, $a^{x-1} = bc$

$\therefore a = (bc)^{\frac{1}{x-1}}$

খ. 'ক' হতে পাই, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$

ধরি, $\log_b(abc) = y$ এবং $\log_c(abc) = z$

বা, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$

$\therefore abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

$\therefore \frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $p = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$ এবং $r = \log_c(ab)$

$\therefore 1 + p = \log_a a + \log_a(bc) = \log_a(abc)$

$1 + q = \log_b b + \log_b(ca) = \log_b(abc)$

$1 + r = \log_c c + \log_c(ab) = \log_c(abc)$

আবার, 'খ' হতে পাই,

$$\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$$

$\therefore \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r} = 1$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৩ $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $y = ln\frac{5+x}{5-x}$ হয়, তবে ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ –এ

$x - 1 = 0$ বা, $x = 1$ বসালে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{1\}$

আবার ধরি, $y = \frac{2x+1}{x-1}$

বা, $2x + 1 = xy - y$

বা, $2x - xy = -1 - y$

বা, $x(2 - y) = -(1 + y)$

বা, $x = \frac{-(y+1)}{-(y-2)}$

$\therefore x = \frac{y+1}{y-2}$ .... (i) (i)–এ $y = 2$ বসালে x এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{2\}$

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{1\}$, রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{2\}$ **(Ans.)**

খ. সংজ্ঞানুসারে, $f(f^{-1}(x)) = x$

$f(y) = x$ .... (i) [যেহেতু $f^{-1}(x) = y$]

দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

বা, $f(y) = \dfrac{2y + 1}{y - 1}$

বা, $x = \dfrac{2y + 1}{y - 1}$

বা, $2y + 1 = xy - x$

বা, $2y - xy = -1 - x$

বা, $y(2 - x) = -(1 + x)$

বা, $y = \dfrac{-(x + 1)}{-(x - 2)}$

বা, $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

$x - 2 = 0$ বা, $x = 2$ বসালে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f^{-1} = \mathbb{R} - \{2\}$ **(Ans.)**

আবার ধরি, $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

বা, $xy - 2y = x + 1$

বা, $xy - x = 2y + 1$

বা, $x(y - 1) = 2y + 1$

$\therefore x = \dfrac{2y + 1}{y - 1}$

$y = 1$ বসালে x এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f^{-1} = \mathbb{R} - \{1\}$ **(Ans.)**

গ. যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত $\therefore \frac{5 + x}{5 - x} > 0$

যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

হতে $x > -5$ এবং $5 > x$

বা, $-5 < x$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\} \cap \{x : x < 5\}$

$= \{-5, \infty\} \cap \{\infty, 5\}$

$= \{-5, 5\}$

(ii) হতে $x < -5$ এবং $5 < x$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap \{x : x < 5\}$

$= \Phi$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন D_f = (i) ও (ii) ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= \{-5, 5\} \cup \Phi$

$= \{-5, 5\}$

রেঞ্জ : $y = ln \frac{5 + x}{5 - x}$

বা, $e^y = \frac{5 + x}{5 - x}$

বা, $xe^y + x = 5e^y - 5$

$\therefore x = \frac{5 (e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

প্রশ্ন–১৪ $\frac{\log_k 1 + x}{\log_k x} = 2$

ক. প্রমাণ কর যে, $x^2 - x - 1 = 0$ ২

খ. দেখাও যে, $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ৪

গ. $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ এবং log এর ভিত্তি 2 ধরে উপরিউক্ত সমীকরণের সত্যতা যাচাই কর। ৪

▹◃ ১৪ নং প্রশ্নের সমাধান ▹◃

ক. দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1 + x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1 + x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(1 + x) = \log_k x^2$

বা, $1 + x = x^2$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

খ. 'ক' থেকে পাই, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $(x)^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

বা, $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

হয়, $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ অথবা, $x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$ বা, $x = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $\therefore x = -\frac{-\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{-(\sqrt{5} - 1)}{2}$

এখানে, $x = \frac{-(\sqrt{5} - 1)}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ x এর ঋণাত্মক মানের জন্য logx এর মান সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1 + x)}{\log_k x} = 2$

প্রশ্নমতে, $k = 2$ $[\because$ ভিত্তি $= 2]$

বামপক্ষ $= \dfrac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = \dfrac{\log_2(1+x)}{\log_2 x}$

$= \dfrac{\log_2 10 \times \log_{10}(1+x)}{\log_2 10 \times \log_{10} x} = \dfrac{\log(1+x)}{\log x}$

$= \dfrac{\log\left(1 + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \dfrac{\log 2.618}{\log 1.618} = 2.000006$

$= 2$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৫ $\mathbf{a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}}$

ক. যদি $x = 0$ হয় তবে প্রমাণ কর $2\log_k a = 0$ ২

খ. দেখাও যে, $(1+x)\log_k a = x\log_k b$ ৪

গ. দেখাও যে, $x\log_k\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log_k a$ ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

বা, $a^{3-0}b^{5.0} = a^{5+0}b^{3.0}$ $[\because x = 0]$

বা, $a^3b^0 = a^5b^0$

বা, $a^3 = a^5$

বা, $\dfrac{a^5}{a^3} = 1$

বা, $a^2 = 1$

বা, $\log_k a^2 = \log_k 1$

$\therefore 2\log_k a = 0$ **(প্রমাণিত)**

খ. দেওয়া আছে, $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

বা, $\dfrac{b^{5x}}{b^{3x}} = \dfrac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $(b^x)^2 = (a^{1+x})^2$

বা, $b^x = a^{1+x}$

বা, $\log_k b^x = \log_k a^{1+x}$

বা, $x\log_k b = (1 + x) \log_k a$

$\therefore (1 + x)\log_k a = x\log_k b$ (দেখানো হলো)

গ. ‘খ’ নং থেকে, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^{2x}.a^2$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$

বা, $\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = a^2$

বা, $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2$

বা, $2x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \log_k a$

$\therefore x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৬ ▸ $x = 1 + \log_a bc, y = 1 + \log_b ca$ এবং $z = 1 + \log_c ab$

ক. দেখাও যে, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$ ৪

গ. দেখাও যে, $a^{x-3}.b^{y-3}.c^{z-3} = 1$ ৪

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x = \log_a a + \log_a bc$

বা, $x = \log_a abc$

বা, $a^x = abc$

$\therefore a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ (দেখানো হলো)

খ. ‘ক’ হতে পাই, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$

বা, $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

বা, $1 = \frac{xy + yz + zx}{xyz}$

$\therefore xyz = xy + yz + zx$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x - 1 = \log_a bc$

বা, $a^{x-1} = bc$ .... (i)

আবার, $y = 1 + \log_b ca$

বা, $y - 1 = \log_b ca$

$\therefore b^{y-1} = ca$ .... (ii)

অনুরূপভাবে, $c^{z-1} = ab$ ...... (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$$a^{x-1}.b^{y-1}.c^{z-1} = bc.ab.ca$$

বা, $a^{x-1}.b^{y-1}.c^{z-1} = a^2b^2c^2$

বা, $\frac{a^{x-1}}{a^2} \cdot \frac{b^{y-1}}{b^2} \cdot \frac{c^{z-1}}{c^2} = 1$

$\therefore a^{x-3}.b^{y-3}.c^{z-3} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৭ ▸ $\mathbf{y = 2^{\frac{x}{2}}}$ **একটি সূচক ফাংশন এবং** $\mathbf{-3 \le x \le 3}$

? ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২
খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪
গ. ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

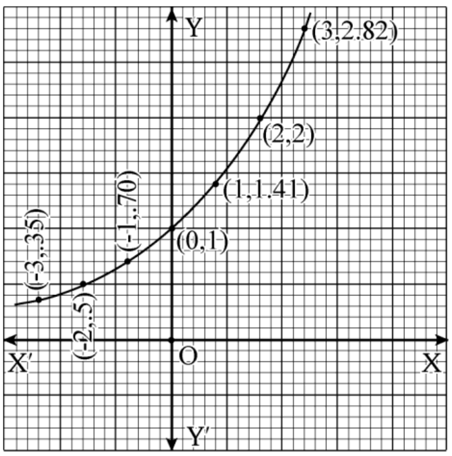
ক. ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

x এর কয়েকটি নির্দিষ্ট মানের জন্য y-এর আসন্ন অনুসঙ্গী মান নির্ণয় করি এবং ছকে লিখি :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0·35	0·5	0·70	1	1·41	2	2·82

খ. 'ক' এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামতো x অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর 4 ক্ষুদ্রতম বর্গ = 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিচে দেখানো হলো –



গ. দেওয়া আছে, $y = 2^{\frac{x}{2}}$

ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ এর মান সংজ্ঞায়িত হয়।

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এখন,

$f(x) = y$

বা, $f^{-1}(y) = x$ .... (i)

এবং $y = 2^{\frac{x}{2}}$

বা, $\log_2 y = \frac{x}{2}$

বা, $x = 2\log_2 y$ .... (ii)

শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার লগারিদম সংজ্ঞায়িত হয়।

সুতরাং y-এর ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য x-এর বাস্তব মান আছে।

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = \{x \in R : x > 0\}$

প্রশ্ন–১৮ $p^2 + q^2 = 9pq$

ক. দেখাও যে, $\log(p^2 + q^2) = 2\log3 + \log p + \log q$. ২

খ. দেখাও যে, $\log(p^4 + q^4) = \log 79 + 2(\log p + \log q)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $2\log(p - q) = \log7 + \log p + \log q$ ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 = 9pq$

সমীকরণের উভয় পার্শ্বে log নিয়ে পাই,

$$\log(p^2 + q^2) = \log 9pq$$
$$= \log9 + \log p + \log q$$
$$= \log3^2 + \log p + \log q$$

$\therefore \log(p^2 + q^2) = 2\log3 + \log p + \log q$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 = 9pq$

বা, $(p^2 + q^2)^2 = (9pq)^2$ [বর্গ করে]

বা, $p^4 + q^4 + 2p^2q^2 = 81p^2q^2$

বা, $p^4 + q^4 = 79p^2q^2$

বা, $\log(p^4 + q^4) = \log(79p^2q^2)$ [উভয় দিকে log নিয়ে]

$$= \log 79 + \log(pq)^2$$
$$= \log79 + 2\log(pq)$$

$\therefore \log(p^4 + q^4) = \log79 + 2(\log p + \log q)$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 = 9pq$

বা, $p^2 - 2pq + q^2 = 9pq - 2pq$

বা, $(p - q)^2 = 7pq$

বা, $\log(p - q)^2 = \log7pq$ [উভয় দিকে log নিয়ে]

বা, $2\log(p - q) = \log7 + \log pq$

বা, $2\log(p - q) = \log7 + \log p + \log q$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৯ $\dfrac{\log k^p}{y - z} = \dfrac{\log k^q}{z - x} = \dfrac{\log k^r}{x - y}$

ক. প্রমাণ কর যে, $pqr = 1$ ২

খ. $p^{y+z}.\ q^{z+x}.\ y^{x+y} = 1$ ৪

গ. $p^{y^2+yz+z^2} \times q^{z^2+zx+x^2} \times r^{x^2+xy+y^2} = 1$ ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $\dfrac{\log k^p}{y-z} = \dfrac{\log k^q}{z-x} = \dfrac{\log k^r}{x-y} = T$

$\therefore \log_k p = T(y-z)$ .... (i)

$\log_k q = T(z-x)$ .... (ii)

$\log_k r = T(x-y)$ .... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log_k p + \log_k q + \log_k r = T(y-z+z-x+x-y)$

বা, $\log_k (pqr) = T \times 0$

বা, $\log_k (pqr) = 0$

বা, $\log_k (pqr) = \log_k 1$

$\therefore pqr = 1$ (প্রমাণিত)

খ. 'ক' অংশ হতে প্রাপ্ত, $\log_k p = T(y-z)$

বা, $p = k^{T(y-z)}$

বা, $p^{y+z} = k^{T(y-z)(y+z)}$

$\therefore p^{y+z} = k^{T(y^2-z^2)}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $q^{z+x} = k^{T(z^2-x^2)}$ ....(ii)

এবং $r^{x+y} = k^{T(x^2-y^2)}$ .... (iii)

$\therefore p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = k^{T(y^2-z^2+z^2-x^2+x^2-y^2)}$

$= k^{T.O} = k^0 = 1$

$\therefore p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = 1$ (প্রমাণিত)

গ. 'ক' অংশ হতে পাই, $\log_k p = T(y-z)$

বা, $p = k^{T(y-z)}$ [লগের সংজ্ঞা হতে]

বা, $p^{y^2+yz+z^2} = k^{T(y-z)(y^2+yz+z^2)}$

$\therefore p^{y^2+yz+z^2} = k^{T(y^3-z^3)}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $q^{z^2 + zx + x^2} = k^{T(z^3 - x^3)}$ .... (ii)

এবং $r^{x^2 + xy + y^2} = k^{T(z^3 - x^3)}$ .... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$$p^{y^2 + yz + z^2}.q^{z^2 + zx + x^2}.\ r^{x^2 + xy + y^2} = k^{T(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3)}$$

$$= k^{T.0} = k^0 = 1$$

$\therefore\ p^{y^2 + yz + z^2}.q^{z^2 + zx + x^2}.\ r^{x^2 + xy + y^2} = 1$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২০ ▸ $p = x^a, q = x^b, r = x^c$ এবং $a + b + c = 0$

ক. $(pqr)^2$ এর মান বের কর। ২

খ. দেখাও যে, $\left(\frac{p}{q^{-1}}\right)^{a^2 + ab + b^2} \times \left(\frac{q}{r^{-1}}\right)^{b^2 + bc + c^2} \times \left(\frac{r}{q^{-1}}\right)^{c^2 + ca + a^2} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে,

উৎৎড়ৎ! $= 1$ ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $p = x^a$, $q = x^b$, $r = x^c$ এবং $a + b + c = 0$

$\therefore\ (pqr)^2 = (x^a.x^b.x^c)^2 = (x^{a+b+c})^2 = (x^0)^2 = (1)^2 = 1$

$\therefore\ (pqr)^2 = 1$ **(Ans.)**

খ. বামপক্ষ $= \left(\frac{p}{q^{-1}}\right)^{a^2 + ab + b^2} \times \left(\frac{q}{r^{-1}}\right)^{b^2 + bc + c^2} \times \left(\frac{r}{q^{-1}}\right)^{c^2 + ca + a^2}$

$$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2 + ab + b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2 + bc + c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2 + ca + a^2}$$

$$= (x^{a-b})^{a^2 + ab + b^2} \times (x^{b-c})^{b^2 + bc + c^2} \times (x^{c-a})^{c^2 + ca + a^2}$$

$$= x^{(a^3 - b^3)} \times x^{(b^3 - c^3)} \times x^{(c^3 - a^3)}$$

$$= x^{a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3}$$

$= x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \left(\frac{p}{q^{-1}}\right)^{a^2 + ab + b^2} \times \left(\frac{q}{r^{-1}}\right)^{b^2 + bc + c^2} \times \left(\frac{r}{q^{-1}}\right)^{c^2 + ca + a^2} = 1$ (দেখানো হলো)

গ. $\frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$

$= \frac{1}{1+x^a+x^{-b}} + \frac{1}{1+x^b+x^{-c}} + \frac{1}{1+x^c+x^{-a}}$

$= \frac{1}{x^b+x^{-c}+1} + \frac{1}{x^c+x^{-a}+1} + \frac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$= \frac{1}{x^b+\frac{1}{x^c}+1} + \frac{1}{x^c+x^{-a}+1} + \frac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{1}{x^a+\frac{1}{x^b}+1}$ $[\because a+b+c=0$

$\therefore b+c=-a]$

$= \frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{a+b}+x^b+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{-c}+x^b+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{x^b}{\frac{1}{x^c}+x^b+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{x^b.x^c}{1+x^c+b^{b+c}}$

$= \frac{x^c+1+x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}} = \frac{1+x^c+x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}} = 1$

$\therefore \frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২১ ▸ $\boldsymbol{f(x) = \log(1+x) - 2\log(x)}$

ক. দেখাও যে, $\log_a x^m = m\log_a x$ ২

খ. $f(x) = 0$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

গ. D_f এবং R_f নির্ণয় কর। ৪

২১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $\log_a x = p$

বা, $x = a^p$

বা, $x^m = a^{mp}$

বা, $\log_a x^m = \log_a a^{mp}$

বা, $\log_a x^m = mp \times \log_a a$

বা, $\log_a x^m = mp$

$\therefore \log_a x^m = m\log_a x$ **[দেখানো হলো]**

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \log(1 + x) - 2\log(x)$

$= \log (1 + x) - \log x^2$

$= \log \dfrac{1 + x}{x^2}$

এখন $f(x) = 0$ হলে,

বা, $\log \left(\dfrac{1 + x}{x^2}\right) = 0 = \log 1$

বা, $\dfrac{1 + x}{x^2} = 1$

বা, $x^2 = 1 + x$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $x^2 - 2x.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - 1 - \dfrac{1}{4} = 0$

বা, $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

বা, $x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে]

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ. $f(x) = \log(1 + x) - 2 \log(x)$

$\log (1 + x)$ ফাংশনটি $1 + x > 0$ বা, $x > -1$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত।

আবার, $\log x$ ফাংশনটি $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত

$\therefore f(x) = \log (1 + x) - 2\log(x)$ ফাংশনটি $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ **(Ans.)**

$\therefore f(x) = \log \frac{1+x}{x^2}$ এর রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২২ **দেওয়া আছে, $y = 3^x$ এবং $\frac{\log(1+y)}{\log y} = 2$**

ক. $y = 3^x$ এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. $y = 3^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে দেখাও যে, y এর কেবল একটি মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। ৪

২২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $y = 3^x$

x -এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য y বাস্তব হবে।

সুতরাং ডোমেন = $\mathbb{R}$ **(Ans.)**

আবার, $y = 3^x$

বা, $\log y = \log 3^x$

বা, $\log y = x \log 3$

$\therefore x = \frac{\log y}{\log 3}$

এখানে y- এর মান অঋণাত্মক হলেই কেবল x এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে।

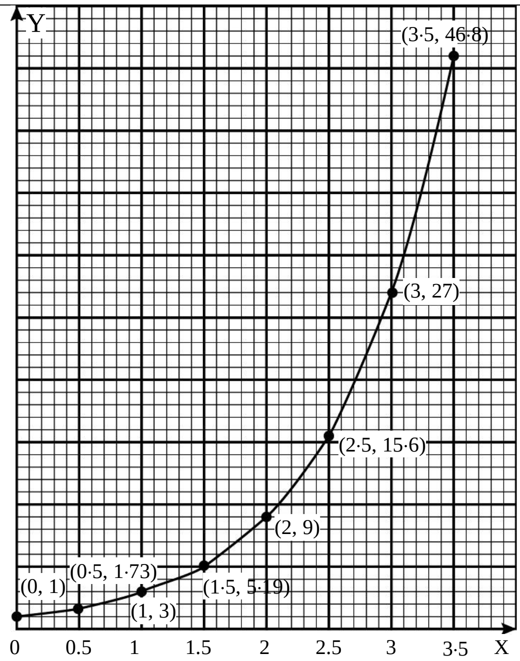
$\therefore$ রেঞ্জ = $\{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x > 0\}$ **(Ans.)**

খ. ধরি, $x = (x) = 3x$

0 থেকে 3.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ YOY′ এবং Y অক্ষ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^x$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



গ. দেওয়া আছে, $\frac{\log (1 + y)}{\log y} = 2$

বা, $\log (1 + y) = 2 \log y$

বা, $\log (1 + y) = \log y^2$

বা, $1 + y = y^2$

বা, $y^2 - y - 1 = 0$

বা, $4y^2 - 4y + 1 - 5 = 0$

বা, $(2y - 1)^2 = 5$

বা, $2y - 1 = \pm \sqrt{5}$

$\therefore\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু y ঋণাত্মক হলে logy অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ y এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ y এর কেবল একটি মান সমীকরণকে সিদ্ধ করে **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২৩ $f(x) = -5^{-x} + 1,\ x \in \mathbb{R}$ হলে,

ক. দেখাও $\frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^{b-a}}$ যখন a, b $\in \mathbb{N}$, a < b ২

খ. f(x) এর বিপরীত ফাংশনকে $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. লেখচিত্রের মাধ্যমে ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

২৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেখাতে হবে, $\frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^{b-a}}$

বামপক্ষ $= \frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^b . 3^{-a}} = \frac{1}{3^{b-a}}$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = -5^{-x} + 1$

বা, $y = f(x) = -5^{-x} + 1$

বা, $5^{-x} = 1 - y$

বা, $\log 5^{-x} = \log(1 - y)$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

বা, $-x\log 5 = \log(1 - y)$

বা, $-1 = \frac{\log(1-y)}{\log 5}$

বা, $x = -\frac{\log(1-y)}{\log 5}$

$\therefore f^{-1}(y) = -\frac{\log(1-y)}{\log 5}$

$\therefore$ y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে,

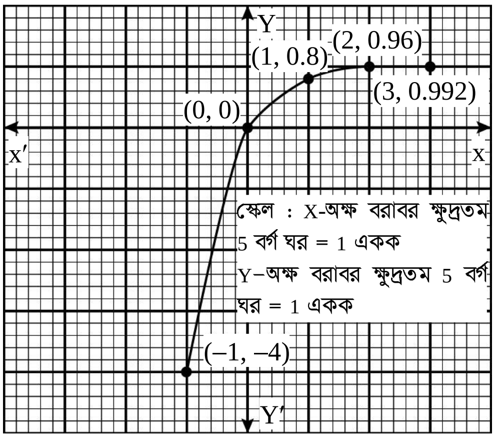
$f^{-1}(x) = -\frac{\log(1-x)}{\log 5}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = -5^{-x} + 1$

ধরি, $y = f(x) = -5^{-x} + 1$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর প্রতিরূপী মান নিচের ছকে দেওয়া হলো :

x	–1	0	1	2	3
y	–4	0	0.8	0.96	0·992



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, x এর মান যত বৃদ্ধি পায়, y এর মান ততই 1 এর কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু 1 হয় না। অর্থাৎ $x \to \infty$, $y \to \infty$ তখন $y \to 1$। x এর মান যতই ঋণাত্মক দিকে বৃদ্ধি পায়, y এর মান ততই হ্রাস পেতে থাকে এবং ক্রমান্বয়ে $-\propto$ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $x \to -\propto$, $y \to -\propto$

ডোমেন $D_r = (-\propto, \propto)$; রেঞ্জ $R_r = (-\propto, 1)$ **(Ans.)**

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–৩০ $\mathbf{P = \frac{x^a}{x^b}}$, $\mathbf{Q = \frac{x^b}{x^c}}$ **এবং** $\mathbf{R = \frac{x^c}{x^a}}$.

ক. $Q = 1$ হলে, দেখাও যে, $b = c$. ২

খ. দেখাও যে,

$P^{a+b-c} . Q^{b+c-a} . R^{c+a-b} = 1$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে,

$(a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0$. ৪

৩০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $Q = \frac{x^b}{x^c} = x^{b-c}$

যদি $Q = 1$ হয়,

$1 = x^{b-c}$

বা, $x^\circ = x^{b-c}$

বা, $0 = b - c$

$\therefore\ b = c$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, $p^{a+b-c} \cdot Q^{b+c-a} \cdot R^{c+a-b}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b}$

$= (x^{a-b})^{a+b-c} \cdot (x^{b-c})^{b+c-a} \cdot (x^{c-a})^{c+a-b}$

$= x^{a^2+ab-ac-ab-b^2+bc} \cdot x^{b^2+bc-ab-bc-c^2+ac} \cdot x^{c^2+ac-bc-ac-a^2+ab}$

$= x^{a^2-ac-b^2+bc} \cdot x^{b^2-ab-c^2+ac} \cdot x^{c^2-bc-a^2+ab}$

$= x^\circ = 1$

$\therefore\ p^{a+b-c} \cdot Q^{b+c-a} \cdot R^{c+a-b} = 1$ (দেখানো হলো)

গ. $(a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R$

$= (a^2 + ab + b^2) \log_k \frac{x^a}{x^b} + (b^2 + bc + c^2) \log_k \frac{x^b}{x^c} + (c^2 + ca + a^2) \log_k \frac{x^c}{x^a}$

$= (a^2 + ab + b^2) \log_k x^{a-b} + (b^2 + bc + c^2) \log_k x^{b-c} + (c^2 + ca + a^2) \log_k x^{c-a}$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \log_k x + (b^2 + bc + c^2)(b - c) \log_k x + (c^2 + ca + a^2)(c - a) \log_k x$

$= (a^3 - b^3) \log_k x + (b^3 - c^3) \log_k x + (c^3 - a^3) \log_k x$

$= (a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3) \log_k x$

$= 0.\log_k x$

$= 0$

$\therefore\ (a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৩১ ▶ $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $C = xy^{r-1}$

ক. a^{q-r} এর সরল মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$ ৪

গ. সরল কর : $(q - r) \log a + (r - p) \log b + (p - q) \log c$ ৪

৩১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a = xy^{p-1}$

$\therefore\ a^{q-r} = (xy^{p-1})^{q-r} = x^{q-r}.y^{pq-q-pr+r}$ **(Ans.)**

খ. বামপক্ষ $= a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}$

$= (xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}$ .... (i)

$= x^{q-r}.(y^{p-1})^{q-r}.x^{r-p}.(y^{q-1})^{r-p}.(x^{p-q})(y^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}.y^{pq-q-rp+r}.y^{qr-r-pq+p}.y^{rp-p-qr+q}$

$= x^{0}.y^{pq-q-rp+r+qr-r-pq+p+rp-p-qr+q}$

$= x^{0}.y^{0} = 1.1 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ x^{a-r}b^{r-p}C^{p-q} = 1$ (দেখানো হলো)

গ. $(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c$

$= (q-r)\log xy^{p-1} + (r-p)\log xy^{q-1} + (p-q)\log xy^{r-1}$

$= \log(xy^{p-1})^{q-r} + \log(xy^{q-1})^{r-p} + \log(xy^{r-1})^{p-q}$

$= \log\{(xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}\}$

$= \log 1$ [(i) এর সাহায্যে]

$= 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩২ $x = \log_a y$ যেখানে $a > 0, a \neq 1$

ক. $\left\{\left(\frac{1}{2x}\right)\frac{x^2-y^2}{x+y}\right\}\frac{x}{x-y}$ এর মান কত? ২

খ. $y = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হলে, দেখাও যে, $2y^3 - 6y - 5 = 0$ ৪

গ. x এর কোন মানের জন্য $\frac{\log_{10}(1+x)}{\log_{10}x} = 2$ হবে? ৪

৩২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left\{\left(\frac{1}{2x}\right)\frac{x^2-y^2}{x+y}\right\}\frac{x}{x-y} = \left\{\left(\frac{1}{2x}\right)\frac{(x-y)\,(x+y)}{(x+y)}\right\}\frac{x}{x-y}$

$= \left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{(x-y)x}{x-y}} = \left(\frac{1}{2x}\right)^{x} = 2^1 = 2$ **(Ans.)**

খ. $y = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ .... (i)

বা, $y^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $y^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $y^3 = 2 + 2^{-1} + 3.2^0.y$ [(i) থেকে]

বা, $y^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3y$

বা, $2y^3 = 4 + 1 + 6y$

$\therefore\ 2y^3 - 6y - 5 = 0$ (দেখানো হলো)

গ. $\frac{\log_{10}(1 + x)}{\log_{10}x} = 2$

বা, $2\log_{10}x = \log_{10}(1 + x)$

বা, $\log_{10}x^2 = \log_{10}(1 + x)$

বা, $x^2 = 1 + x$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\log_{10}x > 0$

$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩৩ ▸ **$a \neq 0$, এবং $m, n \in Z$ এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটি সত্য।**

ক. দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $m < 0$ এবং $n < 0$ ২

খ. $\sqrt[bc]{\dfrac{\frac{b}{xc}}{\frac{c}{xb}}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{\frac{c}{xa}}{\frac{a}{xc}}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{\frac{a}{xb}}{\frac{b}{xa}}}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log_k \dfrac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 2\log_k(x - \sqrt{x^2-1})$ ৪

৩৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $m < 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $m = -q$ এবং $n = -r$, যেখানে, $q, r \in \mathbb{N}$

এক্ষেত্রে বামপক্ষ $= (a^m)^n = (a^{-q})^{-r}$

$$= \frac{1}{(a^{-q})^r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^q}\right)^r} = \frac{1}{\frac{1}{aqr}}$$

$$= a^{qr} = a^{(-q)(-r)} = a^{mn} = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore (a^m)^n = a^{mn}$ **(দেখানো হলো)**

খ. প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[bc]{\dfrac{\frac{b}{xc}}{\frac{c}{xb}}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{\frac{c}{xa}}{\frac{a}{xc}}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{\frac{a}{xb}}{\frac{b}{xa}}}$

$$= \frac{\left(\frac{b}{xc}\right)^{\frac{1}{bc}}}{\left(\frac{c}{xb}\right)^{\frac{1}{bc}}} \times \frac{\left(\frac{c}{xa}\right)^{\frac{1}{ca}}}{\left(\frac{a}{xc}\right)^{\frac{1}{ca}}} \times \frac{\left(\frac{a}{xb}\right)^{\frac{1}{ab}}}{\left(\frac{b}{xa}\right)^{\frac{1}{ab}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{xc^2}}{\frac{1}{xb^2}} \times \frac{\frac{1}{xa^2}}{\frac{1}{xc^2}} \times \frac{\frac{1}{xb^2}}{\frac{1}{xa^2}} = 1 \textbf{ (Ans.)}$$

গ. বামপক্ষ $= \log_k \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

$$= \log_k \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}$$

$$= \log_k \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2} = \log_k \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{x^2 - x^2 + 1}$$

$$= \log_k (x - \sqrt{x^2 - 1})^2 = 2\log_k (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

= ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৩৪ $\boldsymbol{f(x) = ln(x - 4)}$

ক. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন বের কর। ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৩৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = ln\,(x - 4)$

ধরি, $y = f(x) = ln\,(x - 4)$

$\therefore\ y = f(x)$ এবং $y = ln\,(x - 4)$

বা, $x = f^{-1}(y)$ বা, $e^y = x - 4$ .... (i)

$\therefore\ x = e^y + 4$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে $f^{-1}(y) = e^y + 4$

$\therefore\ f^{-1}(x) = e^x + 4$

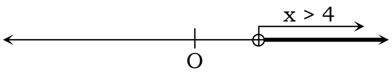
খ. যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore\ x - 4 > 0$

বা, $x > 4$

বা, $\{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$

$= (4, \infty)$

সংখ্যারেখা : 

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (4, \infty)$

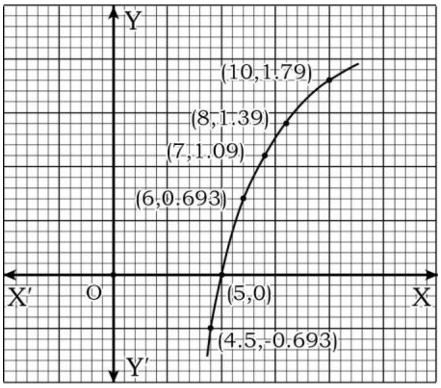
আবার 'ক' হতে পাই, $x = e^y + 4$ যা $y \in \mathbb{R}$ এর জন্য $x \in$ বা, হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $= \mathbb{R}$.

গ. প্রদত্ত ফাংশন, $y = f(x) = ln(x - 4)$

ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	4	4.5	5	6	7	8	10
y	$-\infty$	-0.693	0	0.693	1.09	1.39	1.79



মনে করি, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ, YOY' বরাবর y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। x-অক্ষে প্রতি ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ = 1 একক এবং y অক্ষে প্রতি ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ = 1 একক ধরে ছকে প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যুক্ত করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

প্রশ্ন–৩৫ $A = \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$

$B = a^2 - 3\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3} + 2$ **এবং** $a \geq 0$

$P = \log_a(bc), q = \log_b(ca), r = \log_c(ab)$ **হলে,**

ক. দেখাও যে, $A = 1$ ২

খ. $B = 0$ হলে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1$ ৪

৩৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অনুশীলনী–৯.১ এর পৃষ্ঠা–১৮৪, উদাহরণ–১২ দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে, $B = a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $B = 0$

অর্থাৎ $a^2 + 2 + 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} = 0$

বা, $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ $\left[3^{\frac{1}{3}}.\, 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\circ} = 1\right]$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয়পক্ষে বর্গমূল এবং
$\because$ $a \geq 0$ ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $a^3 \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)]$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^0.a$

$[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 3^{\circ}$ এবং $3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = a]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$

বা, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$

$\therefore 3a^3 + 9a = 8$ **(দেখানো হলো)**

গ. অনুশীলনী– ৯.২ পৃষ্ঠা–১৯২, উদাহরণ–১০ নং দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন–৩৬ যদি $\mathbf{a > 0}$ এবং $\mathbf{x = \sqrt[3]{a + b} + \sqrt[3]{a - b}}$ এবং $\mathbf{a = \sqrt{b^3}}$ হয় তবে,

ক. সমাধান কর : $\log_{10}\left[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right] = 2$ ২

খ. যদি $a^2 - b^2 = c^3$ তাহলে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর : $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

৩৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\log_{10}\left[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right] = 2$

বা, $\left[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right] = 10^2$ [$\because \log_a x = b$ হলে $x = a^b$]

বা, $98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 100$

বা, $\sqrt{x^2 - 12x + 36} = 2$

বা, $x^2 - 12x + 36 = 4$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$

বা, $x(x - 8) - 4(x - 8) = 0$

$\therefore$ $(x - 4)(x - 8) = 0$

$\therefore$ $x = 4$ অথবা 8

নির্ণেয় সমাধান, $x = 4$ অথবা 8

খ. দেওয়া আছে, $a^2 - b^2 = c^3$ এবং $x = \sqrt[3]{a + b} + \sqrt[3]{a - b}$

বামপক্ষ $= x^3 - 3cx - 2a$

$= \left(\sqrt[3]{a + b} + \sqrt[3]{a - b}\right)^3 + 3.c\left(\sqrt[3]{a + b} + \sqrt[3]{a - b}\right) - 2a$

$\left[\because x = \sqrt[3]{a + b} + \sqrt[3]{(a - b)}\right]$

$= \left(\sqrt[3]{a + b}\right)^3 + 3.\sqrt[3]{a + b}.\sqrt[3]{a - b}\left(\sqrt[3]{a + b} + \sqrt[3]{a - b}\right)$

$$+\left(\sqrt[3]{a-b}\right)^3 - 3.c\left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}\right) - 2a$$

$$= a + b + 3.\sqrt[3]{a^2 - b^2}.\, x + a - b - 3cx - 2a$$

$$= 2a + 3\sqrt[3]{c^3}.x - 3cx - 2a \;\; = 3cx - 3cx = 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore\ x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. প্রমাণ করতে হবে, $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} \qquad = \sqrt{a^3}.\frac{1}{\sqrt{b^3}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{b^3}} \qquad \left[\begin{array}{l} \because\ a = \sqrt{b^3} \\ \therefore a^2 = b^3 \end{array}\right]$$

$$= \frac{a\sqrt{a}}{a} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} \ \textbf{(প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন–৩৭ ▸ $\dfrac{\log_e(1+x)}{\log_e x} = 2$ **একটি লগারিদমিক সমীকরণ।**

ক. প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলক সংবলিত একটি বীজগাণিতিক দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপে প্রকাশ কর। ২

খ. ‘ক’ হতে প্রাপ্ত দ্বিঘাত সমীকরনটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর। ৪

গ. যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$ হয় তবে দেখাও যে,

$x\log_e\left(\frac{b}{a}\right) = \log_e a$ ৪

৩৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\frac{\log_e(1 + x)}{\log_e x} = 2$

বা, $2\log_e x = \log_c(1 + x)$[আড় গুনন করে]

বা, $\log_e x^2 = \log_e (1 + x)$

বা, $x^2 = 1 + x$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$

ইহাই নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ।

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত সমীকরণ,

$x^2 - x - 1 = 0$ যেখানে, $a = 1, b = -1$ এবং $c = -1$।

এখানে নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = (-1) - \{4.1.(-1)\}$

$= 1 + 4 = 5 > 0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়।

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় :

ধরি, $y = x^2 - x - 1$.................... (i)

(i) নং সমীকরণে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান নিচের ছকে নির্ণয় করি।

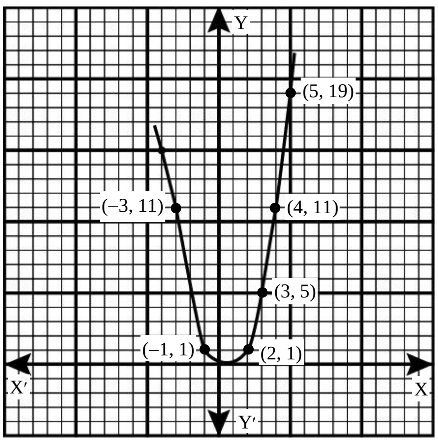
x	–3	(1	2	3	4	5
y	11	1	1	5	11	19

এখানে, লেখের কয়েকটি বিন্দু হলো–

(–3, 11), (–1, 1), 2, 1), (3, 5), (4, 11) ও (6, 29)

এখন, ছক কাগজের XOX′ বরাবর X- অক্ষ, YOY′ বরাবর Y–অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে বিন্দুগুলো স্থাপন করি এবং যোগ করি।



অঙ্কিত লেখটি X- অক্ষকে x = 1·6 এবং

$x = -0{\cdot}6$ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

নির্ণেয় সমাধান : $x = -0{\cdot}6, 1{\cdot}6$

গ. দেওয়া আছে, $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$ [উভয়পক্ষকে $a^{3-x}. b^{3x}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2.a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$[উভয়পক্ষকে a^{2x} দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\log_e\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = \log_e a^2$ [উভয়পক্ষে $\log_e$ নিয়ে]

বা, $\log_e\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_e a^2$

বা, $2x \log_e\left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_e{}^a$

$\therefore x \log_e\left(\frac{b}{a}\right) = \log_e a$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩৮ **নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:**

(i) $a^m.a^n = (a^m)^n$ একটি সূচকীয় সমীকরণ।

(ii) $A = \left(x + \frac{k}{x^2}\right)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি এবং উক্ত রাশির বিস্তৃতিতে চতুর্থ পদ x মুক্ত বিবেচনা করা হলো।

ক. প্রমাণ কর যে, $m(n-2) + n(m-2) = 0$ ২

খ. উদ্দীপকের বিস্তৃতি থেকে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x^3 এর সহগ 144 হলে, দেখাও যে, $k = \pm 2$ ৪

৩৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^m \cdot a^n = (a^m)^n$

বা, $a^{m+n} = a^{mn}$

$\therefore$ m + n = mn

বামপক্ষ = m(n – 2) + n(m – 2)

= mn – 2m + mn – 2n

= 2mn – 2 (m + n)

= 2mn – 2mn [$\because$ m + n = mn]

= 0 = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, m(n – 2) + n(m – 2) = 0 (প্রমাণিত)

খ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\left(\frac{k}{x^2}\right) + {}^nC_2\, x^{n-2}\left(\frac{k}{x^2}\right)^2 + {}^nC_3\, x^{n-3}\left(\frac{k}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^n + nx^{n-1}\cdot\frac{k}{x^2} + {}^nC_2\, x^{n-2}\cdot\frac{k^2}{x^4} + {}^nC_3\, x^{n-3}\cdot\frac{k^3}{x^6} + \ldots\ldots$$

$$= x^n + nx^{n-3}\,k + {}^nC_2\, x^{n-6}\,k^2 + {}^nC_3\, x^{n-9}\,k^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

বিস্তৃতিটির ৪র্থ পদ ${}^nC_3\, x^{n-9}\, k^3$

রাশিটি x মুক্ত বলে

$x^{n-9} = x^0$

বা, n – 9 = 0

$\therefore$ n = 9 **(Ans.)**

গ. 'খ' অংশ হতে প্রাপ্ত, n = 9, বিস্তৃতিটিতে বসিয়ে পাই,

$$\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^9 = x^9 + {}^9c_1x^{9-3}\,k + {}^9c_2x^{9-6}\,k^2 + {}^9c_3x^{9-9}\,k^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^9 + {}^9c_1x^6\,k + {}^9c_2x^3\,k^2 + {}^9c_3\,k^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

প্রশ্নমতে, ${}^9c_2k^2 = 144$

বা, $\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}k^2 = 144$

বা, $\frac{72}{2}k^2 = 144$

বা, $36\,k^2 = 144$

বা, $k^2 = \frac{144}{36}$

বা, $k^2 = 4$

$\therefore$ k = ± 2 (দেখানো হলো)

প্রশ্ন–৩৯ $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$ এবং $g(y) = 2^{2y} - 3.2^{y+2} + 32.$

ক. $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. g(y) = 0 হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{27} + \frac{2}{9} + 1}{\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3} = \frac{\frac{-1 + 6 + 27}{27}}{\frac{1 + 6 - 27}{9}}$$

$$= \frac{\frac{32}{27}}{\frac{-20}{9}} = \frac{32}{27} \times \frac{9}{-20}$$

$$= -\frac{8}{15} \textbf{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে,

$g(y) = 2^{2y} - 3 \cdot 2^{y+2} + 32$

এখন, $g(y) = 0$

বা, $2^{2y} - 3 \cdot 2^{y+2} + 32 = 0$

বা, $2^{2y} - 3 \cdot 2^y . 2^2 + 32 = 0$

বা, $2^{2y} - 3 \cdot 2^y \cdot 4 + 32 = 0$

বা, $(2^y)^2 - 12 \cdot 2^y + 32 = 0$

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$ [$2^y = x$ ধরে]

বা, $x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$

বা, $x(x - 8) - 4(x - 8) = 0$

বা, $(x - 8)(x - 4) = 0$

হয়, $x - 8 = 0$ অথবা, $x - 4 = 0$

বা, $x = 8$ বা, $x = 4$

বা, $2^y = 2^3$ বা, $2^y = 2^2$

$\therefore y = 3$ $\therefore y = 2$

$\therefore$ y এর মান 2, 3 **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$$= \frac{x(x^2 - 2x - 3) + 4x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + \frac{4x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + \frac{4(x^2 - 2x - 3) + 11x + 13}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + 4 + \frac{11x + 13}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + 4 + \frac{11x + 13}{(x + 1)(x - 3)}$$

এখানে, $\dfrac{11x + 13}{(x + 1)(x - 3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\dfrac{11x + 13}{(x + 1)(x - 3)} \equiv \dfrac{A}{(x + 1)} + \dfrac{B}{(x - 3)}$ ....(i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$11x + 13 \equiv A(x - 3) + B(x + 1)$ ....(ii)

(ii) নং সমীকরণে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$33 + 13 = 4B$

বা, $4B = 46$

$\therefore B = \dfrac{23}{2}$

আবার, (ii) নং সমীকরণ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$-11 + 13 = -4A$$

বা, $-4A = 2$

$$\therefore A = -\frac{1}{2}$$

A ও B এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{11x + 13}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{23}{2(x - 3)} - \frac{1}{2(x + 1)}$$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ,

$$f(x) = x + 4 + \frac{23}{2(x - 3)} - \frac{1}{2(x + 1)}$$ **(Ans.)**