টেস্ট পেপার-২০২০
অধ্যায় ৮: ত্রিকোণমিতি

প্রশ্ন ▶১ $\tan\theta = a$, $\sec\theta = b$ এবং $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = c$

[ঢাকা বোর্ড-২০১৯ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 5 : 6 : 7 হলে ক্ষুদ্রতম কোণটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{a+b-1}{a-b+1} = c$ ৪

গ. $c = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যখন $0 < \theta \le 2\pi$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোণ তিনটি 5x, 6x ও 7x রেডিয়ান।
আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° বা π রেডিয়ান।

$\therefore \quad 5x + 6x + 7x = \pi$

বা, $18x = \pi$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{18}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণ $= 5x = 5 \times \frac{\pi}{18}$ রেডিয়ান

$= \frac{5\pi}{18}$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta = a$

$\sec\theta = b$,

এবং $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = c$

বামপক্ষ $= \frac{a+b-1}{a-b+1}$

$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan\theta - \sec\theta}$

$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) - (\sec\theta - \tan\theta)}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta - 1)}{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta - 1)}$

$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$= c$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{a+b-1}{a-b+1} = c$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $c = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

আবার, $c = \sqrt{3}$

$\therefore \quad \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 3$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta = 3(1-\sin\theta)^2$

বা, $1 - \sin^2\theta = 3(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta)$

বা, $1 - \sin^2\theta = 3 - 6\sin\theta + 3\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore \quad (\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta - 1 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 1$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{2}$ বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{5\pi}{6}$ এর জন্য $c = \sqrt{3}$ সিদ্ধ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২ $x = a\cos\theta$ এবং $y = b\sin\theta$ *[রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ ।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $\frac{x}{y} = 1$ হলে $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x - y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ হলে প্রমাণ কর যে,
$a\sin\theta + b\cos\theta - c = 0$. ৪

গ. $a = 3$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে $x + y^2 = 3$ সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x = a\cos\theta$

$y = b\sin\theta$

এখন, $\frac{x}{y} = 1$

বা, $\frac{a\cos\theta}{b\sin\theta} = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{b\sin\theta}{a}$

এখন, $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$

$= \frac{a\sin\theta + b \cdot \frac{b\sin\theta}{a}}{a\sin\theta - b \cdot \frac{b\sin\theta}{a}}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{a}(a^2 + b^2)}{\frac{\sin\theta}{a}(a^2 - b^2)}$

$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x - y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2\cos^2\theta - 2ab \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + b^2\sin^2\theta = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2(1 - \sin^2\theta) - 2ab \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + b^2(1 - \cos^2\theta)$
$= a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2 + b^2 - a^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta \cdot \sin\theta - b^2\cos^2\theta$
$= a^2 + b^2 - c^2$

বা, $-(a^2\sin^2\theta + 2.a\sin\theta.b\cos\theta + b^2\cos^2\theta) = -c^2$

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = c^2$

বা, $a\sin\theta + b\cos\theta = c$

$\therefore$ $a\sin\theta + b\cos\theta - c = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$

$a = 3$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে,

$x = 3\cos\theta$

$y = \sqrt{2}\sin\theta$

এখন, $x + y^2 = 3$

বা, $3\cos\theta + (\sqrt{2}\sin\theta)^2 = 3$

বা, $3\cos\theta + 2(1 - \cos^2\theta) = 3$

বা, $3\cos\theta + 2 - 2\cos^2\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore$ $\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \cos 0 = \cos 2\pi$

$\therefore$ $\theta = 0, 2\pi$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

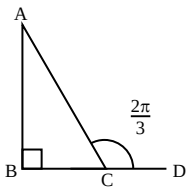
বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$= \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩ (i)



(ii) $2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 2\cos\alpha + \sin\alpha$ *[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ ।।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $0 < \theta < \pi$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cot(A + C) = \frac{\cot A\cot C - 1}{\cot C + \cot A} + \cot B$. ৪

গ. $0 \le \alpha < 2\pi$ সীমার মধ্যে (ii) এ বর্ণিত সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\therefore$ $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$

$= \frac{3}{5}$ [$\because 0 < \theta < \pi$]

$\therefore$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

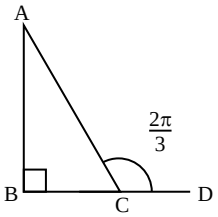
খ এখানে, $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ $\angle ACB = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

এবং $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\angle BAC = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{6}$



এখন, $\cot A = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\cot C = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot B = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

L. H. S $= \cot(A + C) = \cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

R. H. S $= \frac{\cot A\cot C - 1}{\cot C + \cot A} + \cot B = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} + 0$

$= \frac{1 - 1}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0$

$\therefore$ $\cot(A + C) = \frac{\cot A\cot C - 1}{\cot C + \cot A} + \cot B$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 2\cos\alpha + \sin\alpha$

বা, $2\cos\alpha(\sin\alpha - 1) = \sin\alpha - 1$

বা, $2\cos\alpha(\sin\alpha - 1) - (\sin\alpha - 1) = 0$

বা, $(\sin\alpha - 1)(2\cos\alpha - 1) = 0$

হয়, $\sin\alpha = 1$ অথবা, $2\cos\alpha - 1 = 0$

বা, $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2}$ বা, $\cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪ $X = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$ এবং $Y = \cot A - \operatorname{cosec} A$.

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ ।।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $A = \frac{2\pi}{3}$ হলে Y এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $XY = -1$ ৪

গ. $Y = (\sqrt{3})^{-1}$ এবং $0 \le A \le 2\pi$ হলে A এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $A = \frac{2\pi}{3}$ হলে,

$Y = \cot A - \operatorname{cosec} A$

$= \cot\frac{2\pi}{3} - \operatorname{cosec}\frac{2\pi}{3}$

$= \cot 120° - \operatorname{cosec} 120°$

$= \cot(90° + 30°) - \operatorname{cosec}(90° + 30°)$

$= -\tan 30° - \sec 30°$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{-1 - 2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{-3}{\sqrt{3}}$

$= -\sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ $X = \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1}$

$= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A)(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}{(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}$

$= \cot A + \operatorname{cosec} A$

$\therefore$ $XY = (\cot A + \operatorname{cosec} A)(\cot A - \operatorname{cosec} A)$

$= \cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A$

$= -(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)$

$= -1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Y = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\cot A - \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos A - 1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{(\cos A - 1)^2}{\sin^2 A} = \frac{1}{3}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(\cos A - 1)^2}{(1 - \cos^2 A)} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{(1 - \cos A)^2}{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{1}{3}$

বা, $3 - 3\cos A = 1 + \cos A$

বা, $3 - 1 = \cos A + 3\cos A$

বা, $4\cos A = 2$

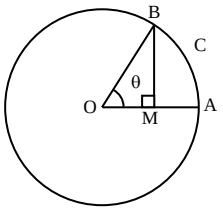
বা, $\cos A = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}, \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

∴ $A = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

কিন্তু $A = \frac{\pi}{3}$, $\cot A - \operatorname{cosec} A = (\sqrt{3})^{-1}$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

∴ নির্ণেয় মান: $A = \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫



চিত্রে OA = 10 সে.মি. *[চ. বো ১৯ ।ৎ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $\theta°$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. যদি $\theta = 60°$ হয়, এবং একজন দৌড়বিদ A বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে B বিন্দুতে পৌঁছাতে 5 সেকেন্ড সময় নেয় তবে তার গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. $2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$ হয় তবে θ এর মান নির্ণয় কর।
[যেখানে $0° < \theta < 2\pi$] ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, $180° = \pi^c$

বা, $1° = \frac{\pi^c}{180}$

∴ $\theta° = \left(\frac{\pi\theta}{180}\right)^c$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OA = 10 সে.মি.
কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60°$ সে.মি.

$= 60 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$= \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান

এখন, চাপ, $S = AB = r\theta$

$= 10 \times \frac{\pi}{3}$

= 10.4719 সে.মি.

দৌড়বিদ 5 সেকেন্ডে অতিক্রম করে 10.4719 সে.মি.

∴ " 1 " " " $\frac{10.4719}{5}$ "

= 2.094 সে.মি.

∴ গতিবেগ 2.094 সে.মি./সেকেন্ড **(Ans.)**

গ উদ্দীপক থেকে পাই,

$\cos\theta = \frac{OM}{OB}$

এবং $\sin\theta = \frac{BM}{OB}$

দেওয়া আছে, $2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$

বা, $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$

বা, $2(1 - \sin^2\theta) = 1 + 2\sin^2\theta$

বা, $2 - 2\sin^2\theta - 1 - 2\sin^2\theta = 0$

বা, $-4\sin^2\theta = -1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

এখন, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

∴ $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

অথবা, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

∴ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৬ M = tanθ, N = secθ এবং P = sinθ.

[সিলেট বোর্ড-২০১৯ ।ৎ প্রশ্ন নং ৭]

ক. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি. মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে 7°কোণ উৎপন্ন করে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1 - M - N}{N - M - 1} = \sqrt{\frac{1 + P}{1 - P}}$ ৪

গ. $P^2N - \frac{1}{N} = 1$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর; যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, r = 6440 কি. মি.

কোণ $\theta = 7° = \frac{7 \times \pi}{180}$ রেডিয়ান

আমরা জানি, $S = r\theta$

$= 6440 \times \frac{7 \times \pi}{180}$ কি. মি.

= 786.794 কি. মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, M = tanθ, N = secθ এবং P = sinθ

এখন, বামপক্ষ $= \frac{1 - M - N}{N - M - 1}$

$= \frac{1 - \tan\theta - \sec\theta}{\sec\theta - \tan\theta - 1}$

$= \frac{(\sec^2\theta - \tan^2\theta) - \tan\theta - \sec\theta}{\sec\theta - \tan\theta - 1}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) - (\tan\theta + \sec\theta)}{\sec\theta - \tan\theta - 1}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta - 1)}{(\sec\theta - \tan\theta - 1)}$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$$
$$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$$
= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1-M-N}{N-M-1} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$ **(প্রমাণিত)**

গ $P^2N - \frac{1}{N} = 1$

বা, $(\sin\theta)^2.\sec\theta - \frac{1}{\sec\theta} = 1$

বা, $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \cos\theta = 1$

বা, $\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\cos\theta} = 1$

বা, $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - 2\cos^2\theta - \cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$

অর্থাৎ, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ বা, $\cos\theta = -1$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$ বা, $\cos\theta = \cos\pi$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ $\therefore \theta = \pi$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $P = 10\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$ এবং $Q = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

[যশোর বোর্ড-২০১৯ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; যেখানে $0 < A < \frac{3\pi}{2}$ হলে A এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P = 7$ হলে $\cot\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। যখন $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $Q = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ যেখানে, $0 < A < \frac{3\pi}{2}$

বা, $\sin A = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$\therefore A = \frac{5\pi}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$P = 10\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$

এবং $P = 7$

$\therefore 10\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha = 7$

বা, $10\sin^2\alpha + 6(1 - \sin^2\alpha) = 7$

বা, $10\sin^2\alpha + 6 - 6\sin^2\alpha = 7$

বা, $4\sin^2\alpha = 7 - 6$

বা, $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$

বা, $\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$

বা, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\left[\because \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right]$

বা, $\sin\alpha = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\therefore \alpha = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \cot\alpha = \cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = -\sqrt{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$$Q = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$$
$$= \frac{\cos\theta(\tan\theta - 1 + \sec\theta)}{\cos\theta(\tan\theta + 1 - \sec\theta)}$$
$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$
$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$
$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$
$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$
$$= \sec\theta + \tan\theta$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $A = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$B = 3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta$. *[বরিশাল বোর্ড-২০১৯ ।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. প্রমাণ কর যে, রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ। ২

খ. $A = 7$ হলে, $\cot\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $B = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী- ৮.১ এর প্রতিজ্ঞা- ৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৫২

খ $A = 7$ হলে

$15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$

বা, $15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha - 7 = 0$

বা, $15 - 15\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 7 = 0$

বা, $-15\sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 8 = 0$

বা, $15\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 8 = 0$

বা, $15\sin^2\alpha - 12\sin\alpha + 10\sin\alpha - 8 = 0$

বা, $3\sin\alpha(5\sin\alpha - 4) + 2(5\sin\alpha - 4) = 0$

বা, $(5\sin\alpha - 4)(3\sin\alpha + 2) = 0$

$\therefore 5\sin\alpha - 4 = 0$ অথবা, $3\sin\alpha + 2 = 0$

বা, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ বা, $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$

বা, $\sin^2\alpha = \frac{16}{25}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ব্যবধিতে $\sin\alpha$ ধনাত্মক।

বা, $1 - \cos^2\alpha = \frac{16}{25}$ $\therefore \sin\alpha = -\frac{2}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

বা, $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

বা, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ এর মধ্যে $\cos\alpha$ ঋণাত্মক এবং $\sin\alpha$ ধনাত্মক

$\therefore \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

গ B = 4 হলে, $3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta = 4$

বা, $3\sin^2\theta + 5 - 5\sin^2\theta = 4$

বা, $5 - 2\sin^2\theta = 4$

বা, $2\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

'+' চিহ্ন নিয়ে,

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

'–' চিহ্ন নিয়ে,

$$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore \quad \theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯ $P = \tan\theta + \sec\theta$ এবং $Q = \cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$.

[সকল বোর্ড-২০১৮ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\cos\theta = \frac{2P}{P^2+1}$ ৪

গ. Q = 3 হলে, প্রদত্ত সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = \tan\theta + \sec\theta$

এখন, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $P(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{P}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \tan\theta + \sec\theta$

বা, $P = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

বা, $P = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

বা, $P^2 = \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = P^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = P^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = P^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$ বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$

বা, $\sin\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{(P^2-1)^2}{(P^2+1)^2}$

বা, $1 - \cos^2\theta = \frac{(P^2-1)^2}{(P^2+1)^2}$

বা, $1 - \frac{(P^2-1)^2}{(P^2+1)^2} = \cos^2\theta$

বা, $\frac{(P^2+1)^2 - (P^2-1)^2}{(P^2+1)^2} = \cos^2\theta$

বা, $\cos^2\theta = \frac{4P^2}{(P^2+1)^2}$

$\therefore \cos\theta = \frac{2P}{P^2+1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q = \cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$ এবং Q = 3

সুতরাং, $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

বা, $\cot\theta = \pm 1$

$\cot\theta = 1$ নিয়ে পাই,

$$\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে।

আবার, $\cot\theta = -1$ থেকে পাই,

$$\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$$

বা, $\cot\theta = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{3\pi}{4} = \cot\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

(Ans.)

প্রশ্ন ▶১০ $\sin A + \cos A = P$ এবং $Q = \sec\theta - \tan\theta$.

[ঢাকা বোর্ড-২০১৭ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $32'4''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. P = 1 হলে প্রমাণ কর যে, $\sin A - \cos A = \pm 1$. ৪

গ. $Q = (\sqrt{3})^{-1}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $32'4'' = \left(32\frac{4}{60}\right)'$ [$\because 60'' = 1'$]

$= \left(32\frac{1}{15}\right)' = \left(\frac{481}{15}\right)'$

$= \left(\frac{481}{15\times 60}\right)^\circ$ [$\because 60' = 1^\circ$]

$= \left(\frac{481}{900}\right)^\circ = \left(\frac{481}{900}\times\frac{\pi}{180}\right)^c$ $\left[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= \left(\frac{481\pi}{162000}\right)^c$

$= .0093^c$ (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sin A + \cos A = P$

প্রশ্নমতে, P = 1

বা, $\sin A + \cos A = 1$

বা, $(\sin A + \cos A)^2 = 1^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A = 1$

বা, $1 + 2\sin A\cos A = 1$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

বা, $2\sin A\cos A = 1 - 1$

$\therefore 2\sin A\cos A = 0$

এখন, $(\sin A - \cos A)^2 = (\sin A + \cos A)^2 - 4\sin A\cos A$

$= 1^2 - 0$ [মান বসিয়ে]

বা, $\sin A - \cos A = \pm\sqrt{1}$

$\therefore \sin A - \cos A = \pm 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q = \sec\theta - \tan\theta$

প্রশ্নমতে, $Q = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3} - \sqrt{3}\ \sin\theta = \cos\theta$

বা, $(\sqrt{3} - \sqrt{3}\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $3 + 3\sin^2\theta - 6\sin\theta = \cos^2\theta$

বা, $3 + 3\sin^2\theta - 6\sin\theta = 1 - \sin^2\theta$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

বা, $3\sin^2\theta + \sin^2\theta - 6\sin\theta + 3 - 1 = 0$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2(2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1) = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore (\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\sin\theta - 1 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 1$ বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin 90°$ বা, $\sin\theta = \sin 30°$

$\therefore \theta = 90°$ $\therefore \theta = 30°$

কিন্তু $\theta = 90°$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ θ সূক্ষ্মকোণ।

$\therefore \theta$ এর মান $30°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ মুসা ইব্রাহিম দেখল যে, 540 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $7'$ কোণ উৎপন্ন করে এবং তিনি একটি সমীকরণ লিখলেন: $x = \tan\theta + \sec\theta$. *[রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ ।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর। ২

খ. সমীকরণটি হতে প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. ৪

গ. $x = 1$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0° \le \theta < 90°$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৮

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$ বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$ বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x = 1$

'খ' থেকে পাই, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

বা, $\sin\theta = \frac{1^2-1}{1^2+1}$ [x এর মান বসিয়ে]

বা, $\sin\theta = \frac{0}{2}$

বা, $\sin\theta = 0$

বা, $\sin\theta = \sin 0°$ [$\because \sin 0° = 0$]

$\therefore \theta = 0°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১২ একটি গাড়ি ঢাকা থেকে খুলনায় যাওয়ার সময় গাড়ির চাকা প্রতি মিনিটে 720 বার ঘুরে। চাকার ব্যাসার্ধ 0.25 মিটার। *[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ ।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. চাকার পরিধি নির্ণয় কর। ২

খ. গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. ঢাকা থেকে খুলনার দূরত্ব পৃথিবীর কেন্দ্রে $2°$ কোণ উৎপন্ন করলে ঢাকা থেকে খুলনায় পৌঁছাতে গাড়িটির কত সময় লাগবে? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.] ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, চাকার ব্যাসার্ধ, $r = 0.25$ মিটার

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r$ একক $= 2 \times 3.1416 \times 0.25$ মিটার

$= 1.5708$ মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই, চাকার পরিধি = 1.5708 মিটার (প্রায়)

আমরা জানি, চাকা একবার ঘুরে তার পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ গাড়িটি প্রতি মিনিটে ঘুরে অতিক্রম করে $= 720 \times 1.5708$ মিটার

$= 1130.976$ মিটার

$\therefore$ গাড়িটির গতিবেগ = 1130.976 মিটার/মিনিট

$= \frac{1130.976 \times 60}{1000}$ কি.মি./ঘন্টা

= 67.86 কি.মি./ঘন্টা **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ, R = 6440 কি.মি.

পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 2° = 2 \times \frac{\pi}{180}^{c} = 0.034907^{c}$

$\therefore$ ঢাকা ও খুলনার মধ্যবর্তী দূরত্ব = চাপের দৈর্ঘ্য = $r\theta$

$= 6440 \times 0.034907$

= 224.801 কি.মি.

'খ' থেকে পাই, গাড়ীর গতিবেগ = 67.86 কি.মি./ঘন্টা

$\therefore$ ঢাকা থেকে খুলনায় পৌঁছাতে সময় লাগবে

= (224.801 ÷ 67.86) ঘন্টা

= 3.31 ঘন্টা (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ $A = \sec\theta + \tan\theta$ এবং $B = \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$ *[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ ।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. B এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $A = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ৪

গ. θ এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় কর যখন $A = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$B = \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\frac{25\pi}{6}$ [$\because \cos(-\theta) = \cos\theta$]

$= \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \sec\theta + \tan\theta$

প্রশ্নমতে, $A = x$

অতঃপর সৃজনশীল **১১**(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $A = \sec\theta + \tan\theta$

শর্তমতে, $A = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta = \sqrt{3} - \tan\theta$

বা, $\sec^2\theta = (\sqrt{3} - \tan\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\tan\theta + \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 3 + \tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 2$

বা, $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ [$\because 0 < \theta < 2\pi$]

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ কিন্তু $\theta = \frac{7\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\theta = \frac{\pi}{6}$

প্রশ্ন ▶১৪ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$. *[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ ।। প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $m = 2$ হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$. ৪

গ. $m = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = m$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $m(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{m}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = 2$ [$\because m = 2$]

বা, $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = 2$ বা, $\frac{(\cos\theta + 1)^2}{\sin^2\theta} = 4$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = 4$ বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = 4$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = 4$

বা, $\frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{4 + 1}{4 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{5}{3}$ $\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5} + 1}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - 1} = \frac{\frac{4 - 3 + 5}{5}}{\frac{4 + 3 - 5}{5}} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{2} = 3$

ডানপক্ষ $= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{5 + 4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{5} \times \frac{5}{3} = 3$

$\therefore \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = m$

বা, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ [$\because m = \sqrt{3}$]

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3} - \cot\theta$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\cot\theta + \cot^2\theta$

বা, $1 + \cot^2\theta - 3 + 2\sqrt{3}\cot\theta - \cot^2\theta = 0$

বা, $2\sqrt{3}\cot\theta - 2 = 0$

বা, $\cot\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$ বা, $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

কিন্তু $\theta = \frac{4\pi}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৫ $f(x) = \sin x$ *[সিলেট বোর্ড-২০১৭ ।। প্রশ্ন নং ৭]*

ক. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপ কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,

$af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. ৪

গ. সমাধান কর: $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$, যখন $0 \le x \le 2\pi$. ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ, $r = 5$ সে.মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60° = 60 \times \frac{\pi^c}{180} = \frac{\pi^c}{3}$

আমরা জানি, চাপ, $S = r\theta = 5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5 \times 3.1416}{3}$

$\therefore$ চাপের দৈর্ঘ্য $= 5.236$ সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

প্রশ্নমতে, $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$

বা, $a\sin\theta + b\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$

বা, $a\sin\theta + b\cos\theta = c$

বা, $a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta = c^2$ [বর্গ করে]

বা, $a^2(1 - \cos^2\theta) + b^2(1 - \sin^2\theta) + 2ab\sin\theta.\cos\theta = c^2$

বা, $a^2 - a^2\cos^2\theta + b^2 - b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta.\cos\theta = c^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta.\cos\theta$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = (a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 - 2a\cos\theta.b\sin\theta$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = (a\cos\theta - b\sin\theta)^2$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

$\therefore af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$, যখন $0 \le x \le 2\pi$

বা, $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$

বা, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

বা, $\cos^2 x = (\sqrt{2} - \sin x)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\sin x + \sin^2 x$

বা, $1 - \sin^2 x = 2 - 2\sqrt{2}\sin x + \sin^2 x$

বা, $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin x)^2 - 2\sqrt{2}\sin x.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

বা, $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$ $\therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

কিন্তু, $x = \frac{3\pi}{4}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৬ $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = P$. *[যশোর বোর্ড-২০১৭ ।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P = 4 হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \pm\sqrt{3}$. ৪

গ. P = 6 এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$

$= 7\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + 3\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 \quad \left[\because \theta = \frac{\pi}{4}\right]$

$= 7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7+3}{2}$

$\therefore P = 5$ **(Ans.)**

খ প্রশ্নমতে, P = 4

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = 3$

$\therefore \cot\theta = \pm\sqrt{3}$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রশ্নমতে, P = 6

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 6$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 6$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 6$

বা, $4\sin^2\theta = 3$ বা, $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

'+' নিয়ে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

'–' নিয়ে, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মানসমূহ: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৭ $A = x\cos\theta$ এবং $B = y\sin\theta$, যেখানে $0 < \theta < 2\pi$.

[বরিশাল বোর্ড-২০১৭ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. A + B = z হলে, প্রমাণ কর যে,
$x\sin\theta - y\cos\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$. ৪

গ. $x^2 = 3$, $y^2 = 7$ এবং $A^2 + B^2 = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = x\cos\theta$ এবং $B = y\sin\theta$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} = \frac{(x\cos\theta)^2}{x^2} + \frac{(y\sin\theta)^2}{y^2}$

$= \frac{x^2\cos^2\theta}{x^2} + \frac{y^2\sin^2\theta}{y^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A + B = z

বা, $x\cos\theta + y\sin\theta = z$

বা, $(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 = z^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta.\cos\theta = z^2$

বা, $x^2(1 - \sin^2\theta) + y^2(1 - \cos^2\theta) + 2xy\sin\theta\cos\theta = z^2$

বা, $x^2 - x^2\sin^2\theta + y^2 - y^2\cos^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta = z^2$

বা, $x^2 + y^2 - z^2 = x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta$

বা, $x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta = x^2 + y^2 - z^2$

বা, $(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = x^2 + y^2 - z^2$

$\therefore x\sin\theta - y\cos\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $A = x\cos\theta$ এবং $B = y\sin\theta$

এখানে, $A^2 + B^2 = 4$

বা, $(x\cos\theta)^2 + (y\sin\theta)^2 = 4$

বা, $x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta = 4$

এখন, $x^2 = 3$, $y^2 = 7$ হলে, আমরা পাই, $3\cos^2\theta + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3(1 - \sin^2\theta) + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3 - 3\sin^2\theta + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3 + 4\sin^2\theta = 4$ বা, $4\sin^2\theta = 4 - 3$

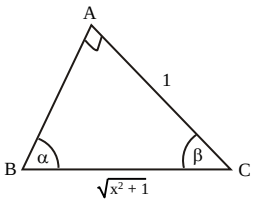
বা, $4\sin^2\theta = 1$ বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{1}{2}$ [বর্গমূল করে]

'+' নিয়ে, $\sin\theta = \frac{1}{2}$	'–' নিয়ে, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$
বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$	বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$
$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
	বা, $\sin\theta = \sin\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6}$
	$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৮



[ঢাকা বোর্ড-২০১৬ ।/ প্রশ্ন নং ৫]

ক. $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)$ এর মান কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha$. ৪

গ. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ হলে, α এর মান কত? ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্র থেকে পাই, ΔABC এর $\angle A = 90°$

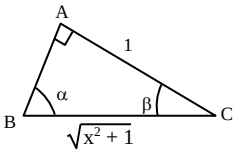
আমরা জানি,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\alpha + \beta = 180° - \angle A$

বা, $\alpha + \beta = 180° - 90°$

$\therefore \alpha + \beta = 90°$



প্রদত্ত রাশি $= \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta)$

$= \sin 90° + \cos 90°$

$= 1 + 0$

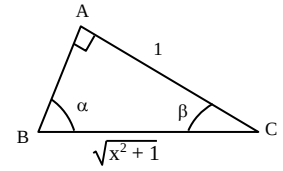
$= 1$ **(Ans.)**

খ চিত্রানুসারে পাই,

$AC = 1$

$BC = \sqrt{x^2 + 1}$

যেহেতু $\angle BAC = 90°$



$\therefore$ $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2}$

$= \sqrt{x^2 + 1 - 1}$

$= \sqrt{x^2}$

$= x$

এখন, $\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

বামপক্ষ $= (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$

$= \left(\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$

$= \frac{(1-x)^2}{x^2+1}$

ডানপক্ষ $= 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$= 1 - 2.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= 1 - \frac{2x}{x^2+1}$

$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$

$= \frac{1-2x+x^2}{x^2+1}$

$= \frac{(1-x)^2}{x^2+1}$

$\therefore$ $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্র থেকে পাই, $\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{x}$

বা, $\tan^2\alpha = \frac{1}{x^2}$

এখানে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

বা, $\frac{1}{\tan^2\alpha} + \tan^2\alpha = 2$

বা, $\frac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha} = 2$

বা, $\tan^4\alpha + 1 = 2\tan^2\alpha$

বা, $\tan^4\alpha - 2\tan^2\alpha + 1 = 0$

বা, $(\tan^2\alpha)^2 - 2.\tan^2\alpha.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\tan^2\alpha - 1)^2 = 0$

বা, $\tan^2\alpha - 1 = 0$

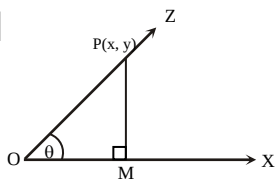
বা, $\tan^2\alpha = 1$

বা, $\tan\alpha = 1$ [$\because$ α সূক্ষ্মকোণ, তাই $\tan\alpha$ এর মান ধনাত্মক নিয়ে]

বা, $\tan\alpha = \tan45°$

$\therefore$ $\alpha = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯



[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬ ।/ প্রশ্ন নং ৫]

ক. $\sec\theta$- এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 1, y = \sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$. ৪

গ. $\sqrt{x^2+y^2} + x = \sqrt{3}y$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্র থেকে পাই,

OM = x এবং PM = y [$\because$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)]

ΔOPM এ $\angle OMP = 90°$

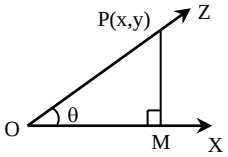
পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$OP^2 = OM^2 + PM^2$

বা, $OP^2 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $OP = \sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore$ $\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ **(Ans.)**



খ চিত্র থেকে পাই, $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

বা, $\sec\theta = \frac{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}{1}$ [$\because$ $x = 1, y = \sqrt{3}$]

বা, $\sec\theta = \sqrt{4}$ বা, $\sec\theta = 2$

বা, $\sec\theta = \sec60°$ [$\square$ $\sec60° = 2$]

$\therefore$ $\theta = 60°$

বামপক্ষ $= \sin3\theta = \sin(3 \times 60°) = \sin180°$

$= \sin(2 \times 90° + 0°) = -\sin0° = 0$

ডানপক্ষ $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3\sin60° - 4\sin^360°$

$= 3.\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4.\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore$ $\sin3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ **(প্রমাণিত)**

গ 'ক' থেকে পাই, OM = x, PM = y এবং $OP = \sqrt{x^2+y^2}$

আমরা জানি, $\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PM} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}$

দেওয়া আছে, $\sqrt{x^2+y^2} + x = \sqrt{3}y$

বা, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y} = \frac{\sqrt{3}y}{y}$ [y দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + \frac{x}{y} = \sqrt{3}$

বা, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $(1+\cos\theta)^2 = (\sqrt{3}\sin\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta = 3\sin^2\theta$

বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 3(1 - \cos^2\theta) = 0$

বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta - 3 + 3\cos^2\theta = 0$

বা, $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 1 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -1$ বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

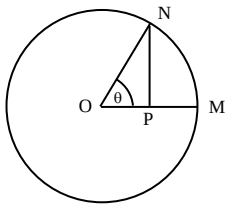
বা, $\cos\theta = \cos180°$ বা, $\cos\theta = \cos60°$ $\therefore$ $\theta = 60°$

$\therefore$ $\theta = 180°$, যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ θ সূক্ষ্মকোণ।

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $\theta = 60°$

প্রশ্ন ▶ ২০

চিত্রে O বৃত্তটির কেন্দ্র এবং OM = চাপ MN



[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬ ।/ প্রশ্ন নং ৫]

ক. θ কে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, θ একটি ধ্রুব কোণ। ৪

গ. θ এর কোন মানের জন্য $\frac{PN}{ON}+\frac{OP}{ON}=\sqrt{2}$ হবে, যেখানে $0<\theta<2\pi$ তা নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

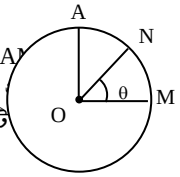
ক প্রদত্ত চিত্রে θ একটি রেডিয়ান কোণ

আমরা জানি, $\pi^c = 180°$

$$1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$$

$$\therefore \theta^c = \left(\frac{180\,\theta}{\pi}\right)° \textbf{ (Ans.)}$$

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে,



OM = চাপ MN। সুতরাং O কেন্দ্রবিশিষ্ট A বৃত্তে $\angle MON$ একটি রেডিয়ান কোণ। করতে হবে যে $\angle MON$ অর্থাৎ θ একটি কোণ।

অঙ্কন: OM রেখাংশের উপর OA লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: OA লম্ব বৃত্তের পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে চাপ AM= পরিধির এক-চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4}\times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$

এবং চাপ MN = OM = ব্যাসার্ধ r

$$\frac{\angle MON}{\angle AOM}=\frac{\text{Pvc MN}}{\text{Pvc AM}}$$

বা, $\angle MON = \frac{\text{Pvc MN}}{\text{Pvc AM}}\times\angle AOM = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}}\times$ এক সমকোণ

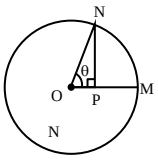
[OA ব্যাসার্ধ এবং OM এর উপর লম্ব]

$\therefore \theta = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

যেহেতু সমকোণ ও π ধ্রুবক সেহেতু θ একটি ধ্রুবক কোণ।

(প্রমাণিত)

গ চিত্রে ΔOPN–এ $PN \perp OP$



$\therefore \angle OPN = 1$ সমকোণ

এখন OPN সমকোণী ত্রিভুজে

$\sin\theta = \frac{PN}{ON}$ এবং $\cos\theta = \frac{OP}{ON}$

দেওয়া আছে, $\frac{PN}{ON}+\frac{OP}{ON}=\sqrt{2}$

বা, $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

বা, $\sin\theta-\sqrt{2}=-\cos\theta$

বা, $(\sin\theta-\sqrt{2})^2=(-\cos\theta)^2$

বা, $\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+2=\cos^2\theta$

বা, $\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+2=1-\sin^2\theta$

বা, $2\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+1=0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta-1)^2=0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta-1=0$

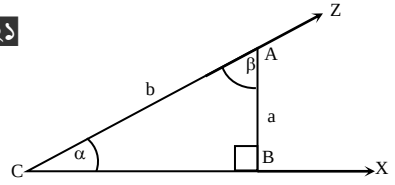
বা, $\sqrt{2}\sin\theta=1$

বা, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin\theta=\sin45°$

$\therefore \theta = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২১



[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬ ৺ প্রশ্ন নং ৫]

ক. $\sec\alpha$-এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a = 1$ এবং $b = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ ৪

গ. $a+\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2}b$ হলে, β এর মান নির্ণয় কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, AB = a,

AC = b

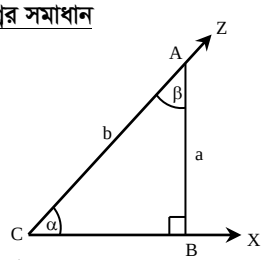
ABC সমকোণী ত্রিভুজে

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2$

$\therefore BC = \sqrt{b^2-a^2}$

$\therefore \sec\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$ **(Ans.)**



খ দেওয়া আছে, $a = 1$ এবং $b = 2$

ΔABC-এ $\cos\beta = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ [$\because$ AB = a, AC = b]

বা, $\cos\beta = \cos\frac{\pi}{3}$ $\therefore \beta = \frac{\pi}{3}$

বামপক্ষ $= \cos3\beta = \cos3.\frac{\pi}{3} = \cos\pi = -1$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3\beta - 3\cos\beta = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\frac{1}{2}$

$= 4.\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$

$\therefore \cos3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ **(প্রমাণিত)**

গ 'ক' থেকে পাই, $BC = \sqrt{b^2-a^2}$

ΔABC- এ $\sin\beta = \frac{BC}{AC}$

$\therefore \sin\beta = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ [$\because$ AC = b] এবং $\cos\beta = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b}$ [$\because$ AB = a]

দেওয়া আছে, $a+\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2}b$

বা, $\frac{a}{b}+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\frac{\sqrt{2}b}{b}$

বা, $\cos\beta+\sin\beta=\sqrt{2}$

$\therefore \cos\beta=\sqrt{2}-\sin\beta$

বা, $\cos^2\beta = 2-2\sqrt{2}\sin\beta+\sin^2\beta$

বা, $1-\sin^2\beta = 2-2\sqrt{2}\sin\beta+\sin^2\beta$

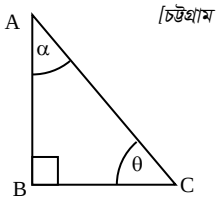
বা, $2\sin^2\beta-2\sqrt{2}\sin\beta+1=0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\beta-1)^2=0$

বা, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ বা, $\sin\beta=\sin45°$

$\therefore \beta = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ *[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬ ৺ প্রশ্ন নং ৫]*



ক. $-700°$ এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে আছে, চিত্রসহ নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\frac{5}{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,

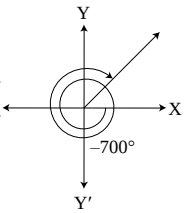
$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$ ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-700° = -630° - 70°$

$= -7\times90° - 70°$

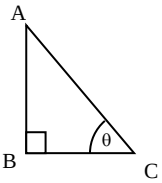
$-700°$ কোণটি ঋণাত্মক কোণ হওয়ায় ঘড়ির কাঁটার দিকে 7 সমকোণ ঘুরার পর



একই দিকে আরও 70° কোণ ঘুরতে হয়েছে।

∴ – 700° কোণটির অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে। **(Ans.)**

খ উদ্দীপক থেকে পাই, $\sec\theta = \frac{AC}{BC}$



$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC}$

দেওয়া আছে, $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $3 + 6\tan^2\theta = 5$

বা, $6\tan^2\theta = 2$ বা, $\tan^2\theta = \frac{2}{6}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$ বা, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

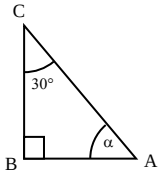
$\tan\theta$ এর ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই,

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$ [□ θ সূক্ষ্মকোণ]

∴ $\theta = 30°$ **(Ans.)**

গ ΔABC-এ $\angle B = 90°$

এবং $\angle C = \theta = 30°$ [‘খ’ থেকে প্রাপ্ত]



∴ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\alpha + 90° + 30° = 180°$

বা, $\alpha = 180° - (90° + 30°)$

∴ $\alpha = 60°$

∴ $\sin 2\alpha = \sin(2 \times 60°) = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

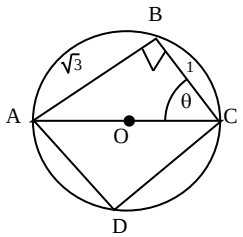
আবার, $2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin 60°.\cos 60° = 2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{2\tan 60°}{1 + \tan^2 60°} = \frac{2.\sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3})^2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{1+3} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২৩



O কেন্দ্রিক বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ।

[সিলেট বোর্ড-২০১৬ ।ৎ প্রশ্ন নং ৫]

ক. θ এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। ২

খ. ΔABC এর ক্ষেত্রে দেখাও যে, $\cos(B + C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C$. ৪

গ. ABCD যদি একটি বৃত্তাকার চাকা হয় এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 10 বার আবর্তিত হয়, তাহলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে? ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপকের চিত্র থেকে পাই, $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$ বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan 60°$ ∴ $\theta = 60°$

আমরা জানি, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

∴ $60° = \frac{\pi \times 60}{180} = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ উদ্দীপক এর চিত্র থেকে পাই,

ΔABC-এর, $\angle B$ = এক সমকোণ = 90°

এবং $\angle C = 60°$ [‘ক’ থেকে প্রাপ্ত]

বামপক্ষ = $\cos(B + C)$

$= \cos(90° + 60°)$

$= -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ = $\cos B\cos C - \sin B\sin C$

$= \cos 90°.\cos 60° - \sin 90°.\sin 60°$

$= 0.\cos 60° - 1.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\cos(B + C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C$. **(দেখানো হলো)**

গ উদ্দীপক থেকে পাই, AB = $\sqrt{3}$ একক এবং BC = 1 একক

∴ AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

সুতরাং বৃত্তাকার চাকার ব্যাস = AC = 2 একক

∴ ” ” ব্যাসার্ধ, $r = \frac{2}{2}$ একক = 1 একক

∴ বৃত্তাকার চাকাটির পরিধি = $2\pi r$ একক = $2 \times 3.1416 \times 1$

= 6.2832 একক

আমরা জানি,

বৃত্তাকার চাকা 1 বার ঘুরে তার পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

∴ চাকাটি 1 সেকেন্ডে অতিক্রম করে 10×6.2832 একক দূরত্ব

∴ চাকাটি 1 ঘন্টা বা 3600 সেকেন্ডে অতিক্রম করে $(10 \times 6.2832 \times 3600)$ ”

= 226195.2 ”

সুতরাং চাকাটির গতিবেগ ঘন্টায় 226195.2 একক। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৪ P = a cosθ এবং Q = bsinθ. *[যশোর বোর্ড-২০১৬ ।ৎ প্রশ্ন নং ৫]*

ক. $\frac{P^2}{a^2} + \frac{Q^2}{b^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P – Q = c হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. ৪

গ. $a^2 = 3$, $b^2 = 7$ এবং $Q^2 + P^2 = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, P = a cosθ এবং Q = b sinθ

প্রদত্ত রাশি = $\frac{P^2}{a^2} + \frac{Q^2}{b^2}$

$= \frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\sin\theta)^2}{b^2}$

$= \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2}$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

= 1 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, P – Q = c

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$ [বর্গ করে]

বা, $a^2\cos^2\theta - 2.a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\sin^2\theta = c^2$

বা, $a^2(1 - \sin^2\theta) - 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2(1 - \cos^2\theta) = c^2$

বা, $a^2 - a^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta = c^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = a^2\sin^2\theta + 2.a\sin\theta.b\cos\theta + b^2\cos^2\theta$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

∴ $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a^2 = 3$

$b^2 = 7$

এবং $Q^2 + P^2 = 4$

এখন, $Q^2 + P^2 = 4$

বা, $b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = 4$ [দেওয়া আছে]

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ [a^2 ও b^2 এর মান বসিয়ে]

বা, $7(1 - \cos^2\theta) + 3\cos^2\theta = 4$ বা, $7 - 7\cos^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $4\cos^2\theta = 3$ বা, $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ বা, $\frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{3}{4}$ বা, $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta = \frac{4}{3}$ বা, $\tan^2\theta = \frac{4}{3} - 1$ বা, $\tan^2\theta = \frac{4-3}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৫ মনে কর, $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$ এবং $Q = \sec\theta + \tan\theta$

[বরিশাল বোর্ড-২০১৬ ।প্র প্রশ্ন নং ৫]

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, P = Q ৪

গ. যদি $Q = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan 10x = \cot 5x$

বা, $\tan 10x = \tan(90° - 5x)$

বা, $10x = 90° - 5x$

বা, $10x + 5x = 90°$

বা, $15x = 90°$

$\therefore x = 6°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$$= \frac{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$= Q$ [দেওয়া আছে, $Q = \sec\theta + \tan\theta$]

$\therefore P = Q$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q = \sec\theta + \tan\theta$

শর্তমতে, $Q = \sqrt{3}$

অতঃপর **১৩**(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶২৬ $A = \cot\theta$, $B = \operatorname{cosec}\theta$ ও $C = \tan\theta + \cot\theta$.

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল ।প্র প্রশ্ন নং ৭]

ক. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 5 : 6 : 7 হলে বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান কত? ২

খ. A + B = p হলে দেখাও যে, $\sin\theta = \pm\frac{2p}{p^2+1}$ ৪

গ. $C = \frac{4}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর সম্ভাব্য সকল মান নির্ণয় কর। [যেখানে $0 < \theta < 2\pi$] ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $5x^c$, $6x^c$ ও $7x^c$

প্রশ্নমতে,

$5x^c + 6x^c + 7x^c = \pi$

বা, $18x^c = \pi$

বা, $x^c = \frac{\pi}{18}$

সুতরাং বৃহত্তম কোণ $= 7x^c = 7 \times \frac{\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A + B = P

বা, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = p$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = p$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = p$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = p^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta} = p^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} = p^2$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = p^2$

বা, $\frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$

বা, $\cos\theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{(p^2 - 1)^2}{(p^2 + 1)^2}$

বা, $1 - \sin^2\theta = \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{p^4 + 2p^2 + 1}$

বা, $1 - \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{p^4 + 2p^2 + 1} = \sin^2\theta$

বা, $\sin^2\theta = \frac{p^4 + 2p^2 + 1 - p^4 + 2p^2 - 1}{p^4 + 2p^2 + 1}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{4p^2}{(p^2 + 1)^2}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{2p}{p^2 + 1}$ [বর্গমূল করে] **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $C = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয় $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

আবার, $\tan\theta = \sqrt{3}$ আবার, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{4\pi}{3}$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \frac{4\pi}{3}$ $\therefore\ \theta = \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ θ এর সম্ভাব্য সকল মান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৭ $(x^2 + 3)\sin^2\theta + (x^2 - 1)\cos^2\theta = x + 2$

[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ, রাজশাহী \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta = \frac{\pi}{2}$ হলে, x এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. x = 2 হলে, প্রমাণ করো যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

গ. x = 0 এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় করো। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

তাহলে, $(x^2 + 3)\sin^2\frac{\pi}{2} + (x^2 - 1)\cos^2\frac{\pi}{2} = x + 2$

বা, $(x^2 + 3) \times 1 + (x^2 - 1) \times 0 = x + 2$

বা, $x^2 + 3 = x + 2$

বা, $x^2 - x + 1 = 0$

বা, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2 \times 1}$

বা, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ **(Ans.)**

খ x = 2 হলে প্রদত্ত সমীকরণটি দাঁড়ায়

$(2^2 + 3)\sin^2\theta + (2^2 - 1)\cos^2\theta = 2 + 2$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

$\therefore\ \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore\ \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(প্রমাণিত)**

গ x = 0 হলে, প্রদত্ত সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$(\theta + 3)\sin^2\theta + (\theta - 1)\cos^2\theta = 0 + 2$

বা, $3\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2$

বা, $3(1 - \cos^2\theta) - \cos^2\theta = 2$

বা, $3 - 3\cos^2\theta - \cos^2\theta = 2$

বা, $3 - 2 = 4\cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta = 1$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore\ \cos\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{2}$ এবং $\cos\theta = \frac{-1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$ $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ এবং $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৮ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $m = \frac{5}{4}$ হলে $\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. m = 2 হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{2\cos\theta}{1 - \cos\theta}$ ৪

গ. $m = -\sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $-\pi \le \theta \le \pi$. ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m = \frac{5}{4}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $\frac{5}{4}(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{4}{5}$

$\therefore\ \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta = -\frac{4}{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = 2$ [$\because m = 2$]

বা, $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = 2$

বা, $\frac{(\cos\theta + 1)^2}{\sin^2\theta} = 4$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = 4$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = 4$

বা, $\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = 4$

বা, $\frac{1 + \cos\theta + 1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta - 1 + \cos\theta} = \frac{4 + 1}{4 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{5}{3}$ $\therefore\ \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\therefore\ \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5} + 1}{\frac{4}{5} + \frac{3}{5} - 1} = \frac{\frac{4 - 3 + 5}{5}}{\frac{4 + 3 - 5}{5}} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{2} = 3$

ডানপক্ষ $= \frac{2\cos\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{2.\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{6}{5} \times \frac{5}{2} = 3$

$\therefore\ \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cot\theta - 1} = \frac{2\cos\theta}{1 - \cos\theta}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = m$

বা, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = -\sqrt{3}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = -\sqrt{3} - \cot\theta$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = \{-(\sqrt{3} + \cot\theta)\}^2$

বা, $1 + \cot^2\theta = 3 + 2\sqrt{3}\cot\theta + \cot^2\theta$

বা, $1 + \cot^2\theta - 3 - 2\sqrt{3}\cot\theta - \cot^2\theta = 0$

বা, $2\sqrt{3}\cot\theta = -2$

$\therefore\ \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

এখন, $\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{3}$

$= \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

কিন্তু $\theta = \frac{2\pi}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = -\frac{\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶২৯ $\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = m$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ।

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $m = \frac{3}{2}$ হলে $\cot\alpha - \operatorname{cosec}\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $m = 2$ হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$ ৪

গ. $m = \sqrt{3}$ হলে এর মান নির্ণয় কর। [যেখানে $0 \le \alpha \le 2\pi$] ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $m = \frac{3}{2}$

তাহলে, $\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{2}$

আমরা জানি,

$\operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\alpha + \cot\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha) = 1$

বা, $m(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha) = 1$

বা, $\frac{3}{2}(\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha) = 1$

বা, $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha = \frac{2}{3}$

বা, $\cot\alpha - \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৪ (খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৪ (গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩০ $f(x) = \sin x$ *[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর \|/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. ষাট মূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে D° এবং R^c হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ ২

খ. α এর মান নির্ণয় কর, যখন $f(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ৪

গ. $2f(x)\, f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f(x)$; $0 \le x \le 2\pi$ হলে x এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা ৬(ii) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫৫

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$

$\therefore f(\alpha) = \sin\alpha$

প্রশ্নমতে,

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\alpha = -\sin\frac{\pi}{3}$

বা, $\sin\alpha = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\sin\alpha = \sin\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$2f(x)\, f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f(x)$

বা, $2\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$

বা, $2\sin x \cos x = \sin x$

বা, $2\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\therefore \sin x(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\sin x = 0$

বা, $\sin x = \sin 0^\circ = \sin(\pi - 0) = \sin(2\pi - 0)$

$\therefore x = 0, \pi, 2\pi$

অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = \frac{1}{2}$

বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; যা সীমা $0 \le x \le 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মান সমূহ:

$0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩১ $\tan\theta + \cot\theta = P$ .....(i)

$\tan A + \sec A = x$ .....(ii)

[কুমিল্লা ক্যাডেট কলেজ, কুমিল্লা \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 2 : 5 : 3। বৃত্তীয় পদ্ধতিতে বৃহত্তম কোণটির মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin A = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ৪

গ. $P = \frac{4}{\sqrt{3}}$ হলে (i) নং সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, ত্রিভুজের কোণ তিনটি $2x, 5x$ এবং $3x$

$\therefore 2x + 5x + 3x = \pi^c$

বা, $10x = \pi^c$

$\therefore x = \frac{\pi}{10}^c$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণ $= 5x = 5 \cdot \frac{\pi}{10}^c = \frac{\pi}{2}^c$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan A + \sec A = x$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A} = x$

বা, $\frac{1 + \sin A}{\cos A} = x$

বা, $\frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A} = x^2$ [$\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$]

বা, $\frac{(1 + \sin A)(1 + \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} = x^2$

বা, $\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} = x^2$

বা, $\frac{1 + \sin A + 1 - \sin A}{1 + \sin A - 1 + \sin A} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin A} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore \sin A = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **(প্রমাণিত)**

গ $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\sqrt{3}\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ অথবা, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ বা, $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ প্রদত্ত $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩২ দৃশ্যকল্প: $x = \tan\theta + \sec\theta$, $p = \text{cosec}\theta$, $q = \cot\theta$

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম ⇂ প্রশ্ন নং ৭]

ক. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$ ২

খ. দৃশ্যকল্প অনুসারে দেখাও যে, $\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প অনুসারে সমাধান কর: $5p^2 - 7pq - 2 = 0$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$= \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}} \times \frac{\sqrt{1-\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}$

[হর ও লবকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sqrt{1-\sin A})^2}{\sqrt{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$

$= \frac{1-\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

$= \frac{1-\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$ [$\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$]

$= \frac{1-\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A$

$= $ ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$. **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল **১১**(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

অতঃপর:

বা, $\frac{1}{\text{cosec}\theta} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$\therefore$ $\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $p = \text{cosec}\theta$, $q = \cot\theta$

এবং $5p^2 - 7pq - 2 = 0$

$\therefore$ $5\,\text{cosec}^2\theta - 7\,\text{cosec}\theta.\cot\theta - 2 = 0$ [p ও q এর মান বসিয়ে]

বা, $\frac{5}{\sin^2\theta} - \frac{7\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2 = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2 + 2\cos^2\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 6\cos\theta - \cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 3) - 1(\cos\theta - 3) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 3 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \cos\theta = 3$; যা গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ $-1 \le \cos\theta \le 1$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3})$ [শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, এর মধ্যে $\frac{\pi}{3}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মান $\frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৩ $a = \tan\theta$ এবং $b = \cos\theta$ *[সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট ⇂ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. একটি ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 2 : 4 : 3 হলে ক্ষুদ্রতম কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ কত? ২

খ. $a + \frac{1}{b} = y$ হলে প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}\theta = \frac{y^2+1}{y^2-1}$ ৪

গ. $a + \frac{1}{b} = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $2x^c$, $4x^c$ ও $3x^c$

প্রশ্নমতে, $2x^c + 4x^c + 3x^c = \pi^c$

বা, $9x^c = \pi^c$

বা, $x = \frac{\pi}{9}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ $= 2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$ **(Ans.)**

খ $a + \frac{1}{b} = y$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} = y$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = y$

অতঃপর, সৃজনশীল **১১**(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

$\sin\theta = \frac{y^2-1}{y^2+1}$

বা, $\frac{1}{\text{cosec}\theta} = \frac{y^2-1}{y^2+1}$

বা, $\text{cosec}\theta = \frac{y^2+1}{y^2-1}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a = \tan\theta$, $b = \cos\theta$

তাহলে, $a + \frac{1}{b} = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta = \sqrt{3} - \tan\theta$

বা, $\sec^2\theta = (\sqrt{3} - \tan\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\tan\theta + \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 3 + \tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 2$

বা, $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$

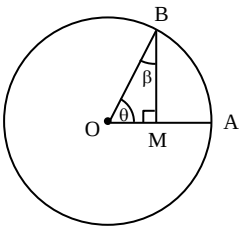
বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$ [$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{6}$

প্রশ্ন ▶৩৪



$2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$ *[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ \ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $30°12'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. কখন $\angle AOB$ রেডিয়ান কোণ হবে? তোমার উত্তরের উপর ভিত্তি করে দেখাও যে, $\angle AOB$ একটি ধ্রুব কোণ। ৪

গ. β এর মান রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৩(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৫৬

খ $\angle AOB$ রেডিয়ান কোণ হবে যদি AB চাপের দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধ OA এর সমান হয়।
অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-৪ দষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৫২

গ দেওয়া আছে,
$2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$
বা, $2(1-\cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$
বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$
বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$
বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore$ হয় $2\cos\theta - 1 = 0$
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$
$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

অথবা, $\cos\theta - 1 = 0$
বা, $\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \cos 0$
$\therefore \quad \theta = 0$
কিন্তু $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\therefore \theta \neq 0°$

ΔOMB-এ $\angle OMB$ = এক সমকোণ $= 90° = \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান
এখন, $\theta + \angle OMB + \beta = \pi$
বা, $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi$
বা, $\beta = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{6\pi - 2\pi - 3\pi}{6}$
$\therefore \quad \beta = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৫ (i) $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\tan A + \cot A = P$

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল \ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\tan A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে A এর মান নির্ণয় কর। $\left[\frac{\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{2}\right]$ ২

খ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin(-A) + \cos A}{\sec(-A) + \tan(-A)} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$,
যখন $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ৪

গ. (i) ও (ii) ব্যবহার করে P এর মান নির্ণয় কর অতঃপর সমীকরণটি সমাধান কর। $(0 < A < 2\pi)$ ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
বা, $\tan A = \tan\frac{5\pi}{6}$ $\left[\because \frac{\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{2}\right]$
$\therefore \quad A = \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$
বা, $\tan^2 A = \frac{1}{3}$
বা, $\sec^2 A - 1 = \frac{1}{3}$
বা, $\sec^2 A = \frac{4}{3}$
$\therefore \quad \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\left[\because 0 < A < \frac{\pi}{2}\right]$
$\therefore \quad \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বামপক্ষ $= \frac{\sin(-A) + \cos A}{\sec(-A) + \tan(-A)}$
$= \frac{\cos A - \sin A}{\sec A - \tan A}$
$= \frac{\cos A(1 - \tan A)}{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$
$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{2-1}{\sqrt{3}}}$
$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$
$= \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{1}$
$= \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ = ডানপক্ষ
$\therefore \frac{\sin(-A) + \cos A}{\sec(-A) + \tan(-A)} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$
এবং $\tan A + \cot A = P$
বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\tan A} = P$
বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = P$
বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = P$
$\therefore \quad P = \frac{1+3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**
তাহলে, $\tan A + \cot A = \frac{4}{\sqrt{3}}$
বা, $\tan A + \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{\sqrt{3}}$
বা, $\frac{\tan^2 A + 1}{\tan A} = \frac{4}{\sqrt{3}}$
বা, $\sqrt{3}\tan^2 A + \sqrt{3} = 4\tan A$
বা, $\sqrt{3}\tan^2 A - 4\tan A + \sqrt{3} = 0$
বা, $\sqrt{3}\tan^2 A - 3\tan A - \tan A + \sqrt{3} = 0$
বা, $\sqrt{3}\tan A(\tan A - \sqrt{3}) - 1(\tan A - \sqrt{3}) = 0$
$\therefore \quad (\tan A - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan A - 1) = 0$

হয়, $\tan A - \sqrt{3} = 0$ বা, $\tan A = \sqrt{3}$	অথবা, $\sqrt{3}\tan A - 1 = 0$ বা, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{3} = \tan\frac{4\pi}{3}$	বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6}$
$\therefore A = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	$\therefore A = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $A = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৬ $f(x) = \sin x$ *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা ⟡ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্নকারী চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$af\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ৪

গ. সমাধান কর : $f(\alpha) + f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{2}$. যেখানে $0 \le \alpha \le 2\pi$ ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চাপের দৈর্ঘ্য, $S = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

$= \frac{30}{360} \times 2 \times \pi \times 5$

$= \frac{5\pi}{6} = 2.618$ cm **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
[বি. দ্র.: x এর স্থলে 'α' হবে]

প্রশ্ন ▶৩৭ $P = \sin\theta - \cos\theta + 1$
$Q = \sin\theta + \cos\theta - 1$
$R = \sec\theta + \tan\theta$
[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা ⟡ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin(-750^\circ)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\frac{P}{Q} = R$ ৪

গ. θ-এর মান নির্ণয় কর। যখন $P = 0$ এবং $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin(-750^\circ) = -\sin 750^\circ$
$= -\sin(4 \times 180^\circ + 30^\circ)$
$= -\sin(8 \times 90^\circ + 30^\circ)$
$= -\sin 30^\circ$
$= -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \sin\theta - \cos\theta + 1$
$Q = \sin\theta + \cos\theta - 1$

$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$= \frac{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)}$

$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$

$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \sec\theta + \tan\theta$
$= R$ [দেওয়া আছে, $R = \sec\theta + \tan\theta$]

$\therefore \frac{P}{Q} = R$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,
$P = 0$
বা, $\sin\theta - \cos\theta + 1 = 0$
বা, $1 = \cos\theta - \sin\theta$
$\therefore \cos\theta - \sin\theta = 1$
বা, $\cos\theta = 1 + \sin\theta$
বা, $\cos^2\theta = (1 + \sin\theta)^2$
বা, $\cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$
বা, $1 - \sin^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]
বা, $1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 0$
বা, $2\sin^2\theta + 2\sin\theta = 0$
বা, $2(\sin^2\theta + \sin\theta) = 0$
বা, $\sin^2\theta + \sin\theta = 0$
বা, $\sin\theta(\sin\theta + 1) = 0$
হয়, $\sin\theta = 0$ অথবা, $\sin\theta + 1 = 0$
বা, $\sin\theta = \sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ$ বা, $\sin\theta = -1$
$\therefore \theta = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ $= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
$= \sin\frac{3\pi}{2}$
$\therefore \theta = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

$\therefore \theta = 0^\circ, 270^\circ, 360^\circ (0^\circ \le \theta \le 360^\circ)$
কিন্তু $\theta = 180^\circ$ হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।
$\therefore \theta = 0^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৮ $f(x) = \cos x$ এবং $\angle A = 75^\circ 50' 25''$.
[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা ⟡ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\angle A$ এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। ২

খ. $af(\theta) - bf(90^\circ - \theta) = c$ হলে দেখাও যে, $af(90^\circ - \theta) + bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. ৪

গ. $f(\theta) + f(90^\circ - \theta) = \sqrt{2}$ সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে $0^\circ < \theta < 360^\circ$. ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $75^\circ 50' 25'' = 75^\circ\left(50\frac{25}{60}\right)'$

$= 75^\circ\left(\frac{605}{12}\right)'$

$= \left(75 \times \frac{605}{12 \times 60}\right)^\circ$

$= \left(\frac{10921}{144}\right)^\circ$

$= \frac{10921}{144} \times \frac{\pi}{180}$

$= 1.3237$ (প্রায়)

খ দেওয়া আছে,
$af(\theta) - bf(90^\circ - \theta) = c$
বা, $a\cos\theta - b\cos(90^\circ - \theta) = c$
$\therefore a\cos\theta - b\sin\theta = c$ … … (i)
ধরি, $a\sin\theta + b\cos\theta = x$ ... ... (ii)
সমীকরণ (i) ও (ii) বর্গ করে যোগ করে পাই,
$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta = c^2 + x^2$
বা, $a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = c^2 + x^2$
বা, $c^2 + x^2 = a^2 + b^2$
বা, $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$
বা, $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$
বা, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$
বা, $a\cos(90^\circ - \theta) + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$
$\therefore af(90^\circ - \theta) + bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$f(\theta) + f(90° - \theta) = \sqrt{2}$

বা, $\cos\theta + \cos(90° - \theta) = \sqrt{2}$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$

$= \cos(360° - 45°)$

$= \cos 315°$

$\therefore \theta = 45°, 315°$

কিন্তু $\theta = 315°$ হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \theta = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৯ যদি $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ হয়

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা ।ৎ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\cos\theta - \sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর। $\left(\text{যেখানে, } \theta = \frac{৫\pi}{৬}\right)$ ২

খ. দেখাও যে, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ ৪

গ. দেখাও যে, $\text{cosec}\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$ ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \cos\theta - \sin\theta = \cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{6}$

$= \cos\left(2\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

বা, $\cos\theta = (\sqrt{2}+1)\sin\theta$

বা, $(\sqrt{2}-1)\cos\theta = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sin\theta$

$[(\sqrt{2}-1)$ দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

বা, $(\sqrt{2}-1)\cos\theta = (2-1)\sin\theta$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta = \sin\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $\cot\theta - 1 = \sqrt{2}$ [উভয়পক্ষকে $\sin\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cot\theta = 1 + \sqrt{2}$ ... ... (i)

বা, $\cot^2\theta = (1+\sqrt{2})^2$

বা, $\text{cosec}^2\theta - 1 = 1 + 2 + 2\sqrt{2}$

$\therefore \text{cosec}^2\theta = 4 + 2\sqrt{2}$ ... ... (ii)

আবার, (i) নং হতে,

$\cot\theta = 1 + \sqrt{2}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

বা, $\tan\theta = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$

বা, $\tan\theta = \frac{1-\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2}$

বা, $\tan\theta = \sqrt{2} - 1$

বা, $\tan^2\theta = (\sqrt{2}-1)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\tan^2\theta = 2 - 2\sqrt{2} + 1$

বা, $\tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{2}$

বা, $\sec^2\theta - 1 = 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore \sec^2\theta = 4 - 2\sqrt{2}$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) নং গুণ করি,

$\text{cosec}^2\theta.\sec^2\theta = (4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})$

বা, $\text{cosec}^2\theta.\text{sce}^2\theta = 16 - (2\sqrt{2})^2$

বা, $\text{cosec}^2\theta.\sec^2\theta = 8$

বা, $\text{cosec}^2\theta = 4 \times 2 \times \cos^2\theta$

বা, $\text{cosec}^2\theta = (2\sqrt{2}\cos\theta)^2$

$\therefore \text{cosec}\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪০ $P = \sec\theta + \tan\theta$ এবং $Q = \cos\left(\frac{-25\pi}{6}\right)$

[মনিপুর উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, ঢাকা ।ৎ প্রশ্ন নং ৭]

ক. Q এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P = x$ হলে দেখাও যে, $\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ৪

গ. $P = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যখন $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ সৃজনশীল ১১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

অতঃপর,

$\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪১ $P = x\cos\theta - y\sin\theta$

এবং $Q = 5\,\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\,\text{cosec}\theta - 2$

[হলি ক্রস উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়, ঢাকা ।ৎ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $55° 54' 53''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $P = z$ হলে প্রমাণ কর যে, $x\sin\theta + y\cos\theta = \pm\sqrt{x^2+y^2-z^2}$ ৪

গ. $Q = 0$ হলে 'θ' এর মান নির্ণয় কর যখন, $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $55° 54' 53''$

$= 55°\left(54\frac{53}{60}\right)' = 55°\left(\frac{3293}{60}\right)'$

$= \left(55\frac{3293}{60\times60}\right)^\circ = \left(\frac{201293}{3600}\right)^\circ$

$= \left(\frac{201293}{3600}\times\frac{\pi}{180}\right)^C$

$= 0.9759$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$x\cos\theta - y\sin\theta = z$

বা, $(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 = z^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2\cos^2\theta - 2x\cos\theta.y\sin\theta + y^2\sin^2\theta = z^2$

বা, $x^2(1-\sin^2\theta) - 2xy\cos\theta.\sin\theta + y^2(1-\cos^2\theta) = z^2$

বা, $x^2 - x^2\sin^2\theta - 2xy\cos\theta.\sin\theta + y^2 - y^2\cos^2\theta = z^2$

বা, $x^2 + y^2 - z^2 = x^2\sin^2\theta + 2xy\cos\theta.\sin\theta + y^2\cos^2\theta$

বা, $x^2 + y^2 - z^2 = (x\sin\theta)^2 + 2.x\sin\theta.y\cos\theta + (y\cos\theta)^2$

বা, $x^2 + y^2 - z^2 = (x\sin\theta + y\cos\theta)^2$

$\therefore y\cos\theta + x\sin\theta = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $Q = 5\,\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\,\text{cosec}\theta - 2$

এখন, $Q = 0$

বা, $5\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\,\text{cosec}\theta - 2 = 0$

বা, $\frac{5}{\sin^2\theta} - 7 \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta} - 2 = 0$

বা, $\frac{5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 6\cos\theta - \cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 3) - 1(\cos\theta - 3) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$

বা, $2\cos\theta - 1 = 0$ [$\because \cos\theta - 3 \neq 0$]

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪২ (i) $\cos A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$

(ii) $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, ঢাকা \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ হলে α এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. A ও B উভয়ই সূক্ষ্মকোণ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B.\tan A} = \frac{33}{56}$ ৪

গ. (ii) নং শর্ত ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$. ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \cos\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

খ A ও B সূক্ষ্মকোণ হলে sinA ও cosB ধনাত্মক হবে।

দেওয়া আছে, $\sin B = \frac{12}{13}$

$\cos A = \frac{4}{5}$

$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$

$\therefore \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B.\tan A} = \frac{\frac{12}{5} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{12}{5} \cdot \frac{3}{4}}$

$= \frac{\frac{48 - 15}{20}}{\frac{20 + 36}{20}}$

$= \frac{\frac{33}{20}}{\frac{56}{20}}$

$= \frac{33}{20} \times \frac{20}{56}$

$= \frac{33}{56}$

$\therefore \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B.\tan A} = \frac{33}{56}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2\sin^2\theta + 2ab \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + b^2\cos^2\theta = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2(1 - \cos^2\theta) + 2ab \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + b^2(1 - \sin^2\theta) = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $a^2 + b^2 - a^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta \cdot \cos\theta - b^2\sin^2\theta = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $-(a^2\cos^2\theta - 2.a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\sin^2\theta) = -c^2$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$

$\therefore a\cos\theta - b\sin\theta = c$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩ $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, ঢাকা \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\text{cosec}\theta + \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ৪

গ. যদি $\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \sqrt{2}$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

বা, $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)(\text{cosec}\theta + \cot\theta) = \frac{1}{x}(\text{cosec}\theta + \cot\theta)$

বা, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{x}(\text{cosec}\theta + \cot\theta)$

বা, $1 = \frac{1}{x}(\text{cosec}\theta + \cot\theta)$

$\therefore \text{cosec}\theta + \cot\theta = x$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

আমরা জানি, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\text{cosec}\theta + \cot\theta)(\text{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $\frac{1}{x}.(\text{cosec}\theta + \cot\theta) = 1$

বা, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = x$

বা, $(\text{cosec}\theta + \cot\theta)^2 = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\sec\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' হতে পাই, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\cos\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

আবার, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= \sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}$

$= \sqrt{1-\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \frac{2x}{x^2+1}$

তাহলে, $\frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ ... ... (i)

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2.\sqrt{2}\cos\theta.1 + (1)^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

আবার, $\cos\theta = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ [$\because 0 < \theta < 2\pi$]

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{4}$

কিন্তু $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (i) সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

সুতরাং $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে নির্ণেয় সমাধান $\theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪৪ $f(x) = \sin x$ এর $2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 2\cos\alpha + \sin\alpha$

[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা ⍭ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $af(\theta) + bf\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = m$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $af\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2+b^2-m^2}$ ৪

গ. α এর মান নির্ণয় কর। যখন $0 \le \alpha < 2\pi$ ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right) = \sin\left\{8\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$= \cos\theta$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৫(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ সৃজনশীল ৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪৫ $P = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ ও $f(x) = \sin x$

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা ⍭ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ যেখানে $0 < A < \frac{3\pi}{2}$ হলে, A = কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = P$ ৪

গ. যদি $a f(\theta) + b f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = c$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $af\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - bf(\theta) = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ দেওয়া আছে, $P = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

বা, $P = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

বা, $P = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

বা, $P^2 = \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$

বা, $P^2 = \frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$

বা, $P^2 = \frac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

বা, $P^2 = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$\therefore \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = P$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪৬ $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

[এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা ⍭ প্রশ্ন নং ৭]

ক. একটি কোণকে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D° ও R^c দ্বারা প্রকাশ করা হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

গ. $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি,

$180^\circ = \pi^c$

বা, $1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$

বা, $D^\circ = \frac{D-\pi^c}{180}$

প্রশ্নমতে, $\frac{D-\pi^c}{180} = R^c$

বা, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7(1-\cos^2\theta) + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7 - 7\cos^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $4\cos^2\theta = 3$

বা, $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $\sec^2\theta = \frac{4}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta = \frac{4}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{4}{3} - 1$

বা, $\tan^2\theta = \frac{4-3}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $3(1 - \sin^2\theta) + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3 - 3\sin^2\theta + 7\sin^2\theta = 4$

বা, $3 + 4\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 4 - 3$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{1}{2}$ [বর্গমূল করে]

'+' নিয়ে, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

'–' নিয়ে, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{7\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ $f(\theta) = \sin\theta$ এবং $g(x) = 7\sin^2x + 3\cos^2x - 4$.

[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. 0.82 মি. ব্যাস বিশিষ্ট একটি চাকা সেকেন্ডে 6 বার ঘুরলে চাকাটির গতিবেগ নির্ণয় কর। ২

খ. $g(x) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ৪

গ. $0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে $f(\theta) + f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2}$ এর সমাধান নির্ণয় কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চাকাটির ব্যাসার্ধ, $r = \frac{0.82}{2}$ মি.

$= 0.41$ মি.

$\therefore$ চাকাটির পরিধি $= 2\pi r$ একক

$= (2 \times 3.1416 \times 0.41)$ মি.

$= 2.5761$ মি.

$\therefore$ চাকাটি 6 বার ঘুরলে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= (6 \times 2.5761)$ মি.

$= 15.4567$ মি.

$\therefore$ চাকাটির গতিবেগ $= \frac{15.4567}{1}$ মি./সে.

$= \frac{15.4567 \times 3600}{1000}$ কি.মি./ঘণ্টা

$= 55.64$ কি.মি./ঘণ্টা (প্রায়) **(Ans.)**

খ প্রশ্নমতে, $g(x) = 0$

বা, $7\sin^2x + 3\cos^2x = 4$

বা, $7\sin^2x + 3(1 - \sin^2x) = 4$

বা, $7\sin^2x + 3 - 3\sin^2x = 4$

বা, $4\sin^2x = 1$

$\therefore \sin^2x = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2x = 1 - \sin^2x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \tan^2x = \frac{\sin^2x}{\cos^2x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $f(\theta) + f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2}$, যখন $0 < \theta < 2\pi$

বা, $\sin\theta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\cos^2\theta = (\sqrt{2} - \sin\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $1 - \sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta)^2 - 2\sqrt{2}\sin\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

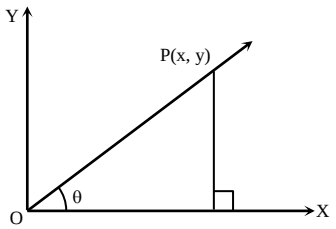
বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

কিন্তু, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮



[সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $55°54'53''$ কে রেডিয়ান প্রকাশ কর। ২

খ. $x = 1, y = \sqrt{3}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. ৪

গ. $\sqrt{x^2 + y^2} + x = \sqrt{3}y$ হলে θ নির্ণয় কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $55°54'53'' = 55° + 54' + 53''$

$= 55° + 54' + \left(\frac{53}{60}\right)'$ $\left[\because 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'\right]$

$= 55° + \left(54 + \frac{53}{60}\right)'$

$= 55° + \left(\frac{3293}{60}\right)'$

$= 55° + \left(\frac{3293}{60 \times 60}\right)°$ $\left[\because 1' = \left(\frac{1}{60}\right)°\right]$

$= \left(55 + \frac{3293}{3600}\right)^\circ$

$= \left(\frac{201293}{3600}\right)^\circ$

$= \frac{201293 \times \pi^c}{3600 \times 180}$ [□ $1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$]

$= 0.310637345 \times 3.1416$ রেডিয়ান [□ $\pi = 3.1416$]

$= 0.9759$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪৯ $P = \tan\theta + \sec\theta$ এবং $Q = \cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta$.

[জয়দেবপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, গাজীপুর ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\cos\theta = \frac{2P}{P^2 + 1}$ ৪

গ. $Q = 3$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৯ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৫০ $a\sin\theta - b\cos\theta = c$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক।

[এ ই আর ই স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $c = 0$ হলে $\sec\theta$ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. ৪

গ. $a = 1$, $b = -1$ এবং $c = \sqrt{2}$ হলে $0 < \theta < 2\pi$ শর্তে সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = 0$ [দেওয়া আছে]

বা, $a\cos\theta = b\sin\theta$

বা, $\frac{a}{b} = \tan\theta$

বা, $\tan^2\theta = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\sec^2\theta - 1 = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\sec^2\theta = \frac{a^2}{b^2} + 1$

বা, $\sec^2\theta = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$

$\therefore \sec\theta = \pm\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $a = 1$, $b = -1$ এবং $c = \sqrt{2}$

তাহলে সমীকরণটি হবে, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ ... ... (i)

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2.\sqrt{2}\cos\theta.1 + (1)^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

আবার, $\cos\theta = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ [□ $0 < \theta < 2\pi$]

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{4}$

কিন্তু $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

সুতরাং $0 < \theta < 2\pi$ এর মধ্যে নির্ণেয় সমাধান $\theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫১ $a - b = \sqrt{2}b$ এবং $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$।

[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল, ময়মনসিংহ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে প্রমাণ কর যে, ঐ বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ যেখানে π একটি আনুপাতিক ধ্রুবক। ২

খ. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে, উদ্দীপকে সংশ্লিষ্ট সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

গ. $a = \cos A$, $b = \sin A$ হলে প্রমাণ কর যে, $b = (\sqrt{2} - 1)a$. ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর অনুসিদ্ধান্ত-২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৫২

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-২৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৮৭

গ দেওয়া আছে, $b = \sin A$

$a = \cos A$

শর্তমতে, $a - b = \sqrt{2}b$

বা, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

বা, $\cos A = \sqrt{2}\sin A + \sin A$

বা, $\cos A = \sin A(\sqrt{2} + 1)$

বা, $\cos A = \sin A\frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)}$

বা, $\cos A = \sin A . \frac{(\sqrt{2})^2 - (1)^2}{\sqrt{2} - 1}$

বা, $\cos A = \sin A\frac{2 - 1}{\sqrt{2} - 1}$

বা, $\cos A = \frac{\sin A}{\sqrt{2} - 1}$

বা, $\sqrt{2}\cos A - \cos A = \sin A$

বা, $\sin A + \cos A = \sqrt{2}\cos A$

বা $\sin A = \sqrt{2}\cos A - \cos A$

বা, $\sin A = (\sqrt{2} - 1)\cos A$

$\therefore b = (\sqrt{2} - 1)a$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫২ $p = \sin\theta$ এবং $q = \cos\theta$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, মোমেনশাহী ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $p = -\frac{1}{2}$ হলে $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ এই শর্তে θ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. সমাধান করঃ $2(pq + \sqrt{3}) = \sqrt{3}q + 4p$ যখন $0 < \theta < 2\pi$ ৪

গ. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{p + q}{\frac{1}{q} + \frac{p}{q}} = \frac{51}{26}$ ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p = \sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p = \sin\theta$, $q = \cos\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $2(pq + \sqrt{3}) = \sqrt{3}q + 4p$

$\therefore \quad 2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\theta - 4\sin\theta = 0$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - 4\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta(\cos\theta - 2) - \sqrt{3}(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\cos\theta - 2 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\cos\theta = 2$ বা, $2\sin\theta = \sqrt{3}$

কিন্তু $-1 \le \cos\theta \le 1$. বা, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \cos\theta \neq 2$. বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

গ দেওয়া আছে, $p = \sin\theta$

$q = \cos\theta$

$$\therefore \frac{p+q}{\frac{1}{q} + \frac{p}{q}} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-২৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৬।

প্রশ্ন ▶৫৩ $A = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$, $B = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

[শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $A - B = 0$ ৪

গ. $B = \sqrt{3}$ হলে, θ এর সম্ভাব্য সকল মান নির্ণয় কর যেখানে $0° < \theta < 360°$ ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\tan 10x = \cot 5x$

বা, $\tan 10x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

বা, $10x = \frac{\pi}{2} - 5x$

বা, $15x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{30}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$$A = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \sec\theta + \tan\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = B$$

$\therefore A - B = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$$B = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \sec\theta + \tan\theta$$

এরপর, সৃজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৫৪ $A = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$ এবং $B = \tan\theta + \sec\theta$

[ফরিদপুর জিলা স্কুল, ফরিদপুর \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta = \frac{\pi}{6}$ হলে, B এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $A - B = 0$ ৪

গ. $B = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান সমূহ নির্ণয় কর। ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$$B = \tan\theta + \sec\theta$$

$$= \tan\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$\therefore B = \sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ $A = \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan\theta - \sec\theta} \quad [\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$$

$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) - (\sec\theta - \tan\theta)}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta - 1)}{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta - 1)}$$

$$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(1 + \sin\theta)}{1 - \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(1 + \sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$= \tan\theta + \sec\theta$

$= B$

$\therefore A - B = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৩(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৫৫ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ এবং $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$ এবং $\tan B + \cot B = 2$, B সূক্ষ্মকোণ।

[ফরিদপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফরিদপুর \\// প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin\theta + \tan\theta + \sec\theta$ এর সরল মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\sin^2 B + \sec^2 B = \frac{5}{2}$ প্রমাণ কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\cot A = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$ ৪

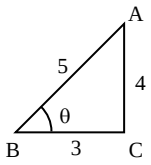
৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\cos\theta = \frac{3}{5}$

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এ

ভূমি BC = 3, অতিভুজ AB = 5

$\therefore$ লম্ব $AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$



এখন,

$\sin\theta + \tan\theta + \sec\theta$

$= \frac{AC}{AB} + \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC}$

$= \frac{4}{5} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}$ [θ সূক্ষ্মকোণ ধরে নিয়ে]

$= \frac{4}{5} + 3$

$= \frac{19}{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\tan B + \cot B = 2$

বা, $\tan B + \frac{1}{\tan B} = 2$

বা, $\frac{\tan^2 B + 1}{\tan B} = 2$

বা, $\tan^2 B + 1 = 2\tan B$

বা, $\tan^2 B - 2\tan B + 1 = 0$

বা, $(\tan B - 1)^2 = 0$

বা, $\tan B - 1 = 0$

বা, $\tan B = 1 = \tan 45°$

$\therefore$ $B = 45°$

বামপক্ষ $= \sin^2 B + \sec^2 B$

$= (\sin 45°)^2 + (\sec 45°)^2$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2$

$= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

বা, $\cos A = (\sqrt{2} + 1)\sin A$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sin A}{\cos A}$

বা, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

বা, $\frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1}$ ... ... (i)

বা, $\frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1}$

বা, $\frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} = 1 + \sqrt{2}$ .... (ii)

(i) থেকে পাই, $\frac{1}{\tan A} = \sqrt{2} + 1$

$\therefore$ $\cot A = \sqrt{2} + 1$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) হতে, $\cot A = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৫৬ O(0, 0) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r। বৃত্তের পরিধিস্থ P ও Q বিন্দুর দূরত্ব r। Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{b^2 - a^2}, a\right)$। PQ চাপ কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে। *[গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী \\// প্রশ্ন নং ৭]*

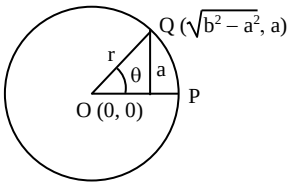
ক. r এর মান a, b এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. দেখাও যে, θ একটি ধ্রুব কোণ। ৪

গ. $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} + \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{7}{2\sqrt{3}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



$\therefore$ $r = OQ$

$= \sqrt{(\sqrt{b^2 - a^2} - 0)^2 + (a - 0)^2}$

$= \sqrt{b^2 - a^2 + a^2}$

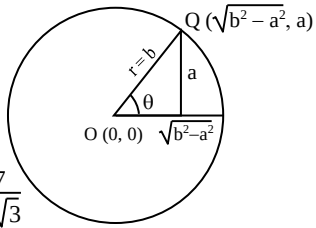
$= \sqrt{b^2}$

$\therefore$ $r = b$

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫২

গ $\cos\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

$\sec\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$



দেওয়া আছে,

$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} + \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{7}{2\sqrt{3}}$

বা, $\cos\theta + \sec\theta = \frac{7}{2\sqrt{3}}$

বা, $\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{7}{2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos^2\theta + 1}{\cos\theta} = \frac{7}{2\sqrt{3}}$

বা, $2\sqrt{3}\cos^2\theta + 2\sqrt{3} = 7\cos\theta$

বা, $2\sqrt{3}\cos^2\theta - 7\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\sqrt{3}\cos^2\theta - 3\cos\theta - 4\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\cos\theta(2\cos\theta - \sqrt{3}) - 2(2\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $\left(\sqrt{3}\cos\theta - 2\right)\left(2\cos\theta - \sqrt{3}\right) = 0$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ গ্রহণযোগ্য নয়; [$\because \cos\theta \le 1$]

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৭ $M = \cos\theta$ এবং $N = \sin\theta$

[রাজশাহী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রাজশাহী \\// প্রশ্ন নং ৭]

ক. একটি চাকা 1.75 কিলোমিটার পথ যেতে 40 বার ঘুরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত? ২

খ. $aM = bN + c$ হলে প্রমাণ কর যে, $aN + bM = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ ৪

গ. $2N^2 + 3M = 0$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৫৭

খ দেওয়া আছে, $M = \cos\theta$

$N = \sin\theta$

এবং $aM = bN + c$

বা, $aM - bN = c$

বা, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$ [বর্গ করে]

বা, $a^2\cos^2\theta - 2.a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\sin^2\theta = c^2$

বা, $a^2(1 - \sin^2\theta) - 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2(1 - \cos^2\theta) = c^2$

বা, $a^2 - a^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta = c^2$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = a^2\sin^2\theta + 2.a\sin\theta.b\cos\theta + b^2\cos^2\theta$

বা, $a^2 + b^2 - c^2 = (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

$\therefore aN + bM = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $M = \cos\theta$

$N = \sin\theta$

প্রদত্ত সমীকরণ, $2N^2 + 3M = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta + \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) + 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 2) = 0$

কিন্তু, $\cos\theta - 2 \neq 0$ কেননা $-1 \le \cos\theta \le 1$

অতএব $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$ [শর্তানুসার $0 < \theta < 2\pi$]

বা, $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, যা $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ $= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৮ $A = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha$, যেখানে $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ এবং $B = 3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta$, যেখানে $0 < \theta < 2\pi$

[নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. প্রমাণ কর যে, রেডিয়ান কোন একটি ধ্রুব কোণ। ২

খ. $A = 7$ হলে, $\tan\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $B = 4$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর 'প্রতিজ্ঞা ৪' দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৫২

খ দেওয়া আছে, $A = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha$ যেখানে $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

এবং $A = 7$

$15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$

বা, $15(1 - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha = 7$

বা, $15 - 15\sin^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$

বা, $15\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 8 = 0$

বা, $15\sin^2\alpha - 12\sin\alpha + 10\sin\alpha - 8 = 0$

বা, $(3\sin\alpha + 2)(5\sin\alpha - 4) = 0$

$\therefore \sin\alpha = \frac{-2}{3}$ বা, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \frac{-2}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়। $[\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}]$

$\therefore \sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\therefore \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ $[0 < \alpha < \frac{\pi}{2}]$

$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{25 - 16}{25}}$

$= \frac{3}{5}$

$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = 3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta$

$B = 4$

$\therefore 3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta = 4$

বা, $3(1 - \cos^2\theta) + 5\cos^2\theta = 4$

বা, $3 - 3\cos^2\theta + 5\cos^2\theta = 4$

বা, $2\cos^2\theta = 1$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}, \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৯ (i) $\tan\theta + \sec\theta = m$

(ii) $2(\sin\theta \cdot \cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$

[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\text{cosec}\theta = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}$ ৪

গ. (ii) নং সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = m$

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $m \cdot (\sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{m}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = m$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = m$ বা, $\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = m$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = m^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = m^2$ $[\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$

বা, $\frac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = m^2$ বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = m^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta}=\frac{m^2+1}{m^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta}=\frac{m^2+1}{m^2-1}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta}=\frac{m^2+1}{m^2-1}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta=\frac{m^2+1}{m^2-1}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3})=\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta-4\sin\theta=0$

বা, $2\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3}=0$

বা, $2\sin\theta(\cos\theta-2)-\sqrt{3}(\cos\theta-2)=0$

বা, $(\cos\theta-2)(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$

হয়, $\cos\theta-2=0$ অথবা, $2\sin\theta-\sqrt{3}=0$

বা, $\cos\theta=2$ বা, $2\sin\theta=\sqrt{3}$

কিন্তু $-1\le\cos\theta\le1$. বা, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $\cos\theta\neq2$. বা, $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}$

বা, $\sin\theta=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶৬০ (i) $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=p$

(ii) $\sec A+\tan A=x$

[বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta=\frac{\pi}{3}$ হলে p এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. প্রমাণ করো যে, $\sin A=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ ৪

গ. $p=6$ এবং $0<\theta<2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো। ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=p$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ হলে,

$7\sin^2\frac{\pi}{3}+3\cos^2\frac{\pi}{3}=p$

বা, $7\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2+3\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2=p$

বা, $p=7\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=7\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$

$=8\times\frac{3}{4}=6$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬১ $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=P$

[মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta=\frac{\pi}{4}$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $P=4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\theta=\pm\sqrt{3}$ ৪

গ. $P=6$ এবং $0<\theta<2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬২ $P=x\cos\theta$ এবং $Q=y\sin\theta$ যেখন $0<\theta<2\pi$

[রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $32'.4''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $P+Q=z$ হলে প্রমাণ কর যে, $x\sin\theta-y\cos\theta=\pm\sqrt{x^2+y^2-z^2}$ ৪

গ. $x^2=3$, $y^2=7$ এবং $P^2+Q^2=4$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $32'44''$

$=\left(32\frac{44}{60}\right)'$

$=\left(\frac{491}{15}\right)'$

$=\left(\frac{491}{15\times60}\right)^\circ$

$=\left(\frac{491}{900}\right)^\circ$

$=\frac{491}{900}\times\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore$ $32'44''=0.00952$ রেডিয়ান (প্রায়)

খ সৃজনশীল-১৭ এর (খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল-১৭ এর (গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬৩ (a) $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=a$ (b) $2\sin x\cos x=\sin x$

[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin\left(\frac{31\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপক (a) এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $(a^2+1)\cos\theta=a^2-1$ ৪

গ. উদ্দীপক (b) এর সমাধান নির্ণয় কর। (যখন $0\le x\le2\pi$) ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin\frac{31\pi}{6}=\sin\left(5\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(10.\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

এখানে n = 10 জোড় সংখ্যা। তাই sin অপরিবর্তিত থাকবে এবং কোণটির অবস্থান তৃতীয়-চতুর্ভাগে ফলে sin এর চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

$=-\sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\sin\left(10.\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=-\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=a$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=a$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=a$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=a^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}=a^2$ [$\because \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$]

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=a^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta}=\frac{a^2+1}{a^2-1}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos\theta}=\frac{a^2+1}{a^2-1}$

$\therefore$ $(a^2+1)\cos\theta=a^2-1$ **(প্রমাণিত)**

গ $2\sin x\cos x=\sin x$

বা, $2\sin x\cos x-\sin x=0$

$\therefore$ $\sin x(2\cos x-1)=0$

হয়, $\sin x = 0$

বা, $\sin x = \sin 0° = \sin(\pi - 0) = \sin(2\pi - 0)$

$\therefore \quad x = 0, \pi, 2\pi$

অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = \frac{1}{2}$

বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; যা সীমা $0 \le x \le 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মান সমূহ:

$0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৬৪ i. $\tan\theta = \frac{y}{x}$ যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ এবং $x \neq y$

ii. $\tan^2\beta + \cot^2\beta = 2$ যখন $0 < \beta < 2\pi$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, পার্বতীপুর, দিনাজপুর \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ২

খ. $x = 12, y = 5$ হলে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

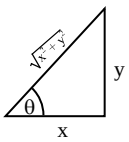
গ. ii. এর সমীকরণ থেকে β এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{y}{x}$

চিত্র থেকে, যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ

সুতরাং $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **(দেখানো হলো)**



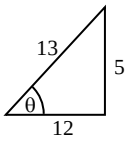
খ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\therefore \tan\theta = \frac{5}{12}$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

অতিভুজ, $r = \sqrt{5^2 + 12^2}$

$= \sqrt{169}$

$= 13$



$\therefore \sin\theta = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{12}{13}$

এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$

সুতরাং $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{\frac{5}{13} + \frac{12}{13}}{\frac{13}{12} + \frac{5}{12}}$

$= \frac{\frac{5 + 12}{13}}{\frac{13 + 5}{12}}$

$= \frac{17}{13} \times \frac{12}{18}$

$= \frac{17}{13} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{34}{39}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\tan^2\beta + \cot^2\beta = 2$

বা, $\tan^2\beta + \frac{1}{\tan^2\beta} = 2$

বা, $\tan^4\beta + 1 = 2\tan^2\beta$ [উভয় পক্ষকে $\tan^2\beta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4\beta - 2\tan^2\beta + 1 = 0$

বা, $(\tan^2\beta - 1)^2 = 0$

বা, $\tan^2\beta - 1 = 0$

বা, $\tan^2\beta = 1$

বা, $\tan\beta = \pm 1$

এখন, $\tan\beta = 1$ নিয়ে পাই;

$\tan\beta = \tan\frac{\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4})$

বা, $\tan\beta = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

আবার, $\tan\beta = -1$ নিয়ে পাই, $\tan\beta = -\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan\beta = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{4})$ (শর্তানুসারে)

বা, $\tan\beta = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \quad \beta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে β এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

(Ans.)

প্রশ্ন ▶৬৫ $P = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta + 1}$, $Q = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin\left(\frac{-25\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $P = Q$ ৪

গ. যদি $Q^{-1} = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয় তবে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

$= -\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

$= -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= P = \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta + 1}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}}$ [লব ও হরকে $\cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{\tan\theta + 1 - \sec\theta}{\tan\theta - 1 + \sec\theta} = \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}$

$= \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}$

$= \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$= \frac{1}{\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = Q = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore P = Q$ **(দেখানো হলো)**

গ প্রশ্নমতে, $Q^{-1} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{Q} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

অতঃপর সৃজনশীল **১৩**(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৬৬ $\cot\alpha = -1$ যেখানে $\pi < \alpha < 2\pi$ এবং $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ যেখানে $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. *[বর্ডার গার্ড পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, রংপুর ।// প্রশ্ন নং ৭]*

ক. α এবং θ কোণ চতুর্ভাগে অবস্থিত– ব্যাখ্যা কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$ সমীকরণ হতে θ এর মান বের কর। ৪

গ. এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে যে বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে $(\alpha - \theta)$ কোণ উৎপন্ন করলে বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর। ৪

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\cot\alpha = -1$

বা, $\cot\alpha = \cot\frac{7\pi}{4}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{4}$

এবং $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore \alpha$ কোণ ৪র্থ চতুর্ভাগে এবং θ কোণ ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

খ $\cot^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

বা, $\cot\theta = \pm 1$

$\cot\theta = 1$ নিয়ে পাই,

$\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4} = \cot(\pi + \frac{\pi}{4})$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

আবার, $\cot\theta = -1$ থেকে পাই,

$\cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$

$= \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cot(2\pi - \frac{\pi}{4})$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ সীমার মধ্যে নির্ণেয় মান: $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

গ 'ক' হতে, $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ এবং $\theta = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore \alpha - \theta = \frac{7\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = \frac{21\pi - 16\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

$\therefore$ উৎপন্ন কোণ, $\theta = \frac{5\pi}{12}$

ব্যক্তির বেগ $= \frac{5 \times 1000}{3600} = \frac{25}{18}$ মিটার/সেকেন্ড

$\therefore$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $S = \frac{25}{18} \times 36 = 50$ মিটার

আমরা জানি, $s = r\theta$

বা, $50 = r\frac{5\pi}{12}$

$\therefore r = \frac{50 \times 12}{5\pi} = \frac{120}{\pi}$

$\therefore$ উক্ত বৃত্তের ব্যাস $= 2r = 2 \times \frac{120}{\pi} = 76.394$ মিটার (প্রায়)

(Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৬৭ $\cot\theta + \text{cosec}\theta = m$ একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। *[রংপুর জিলা স্কুল, রংপুর ।// প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $m = \frac{3}{2}$ হলে, $\cot\theta - \text{cosec}\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $m = 2$ হলে, দেখাও যে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ ৪

গ. $m = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$ ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = m$

আমরা জানি, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\text{cosec}\theta + \cot\theta)(\text{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $m(\text{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

$\therefore \text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{m}$

$m = \frac{3}{2}$ হলে $\text{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$\therefore \cot\theta - \text{cosec}\theta = -\frac{2}{3}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল **১৪**(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল **১৪**(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৬৮ $M = \tan\theta$, $N = \sec\theta$ এবং $P = \sin\theta$ *[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী ।// প্রশ্ন নং ৮]*

ক. $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, A এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $N - M = \sqrt{\frac{1-P}{1+P}}$ ৪

গ. যদি $P^2N - \frac{1}{N} = 1$ হয় তবে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore A = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$M = \tan\theta$, $N = \sec\theta$, $P = \sin\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি, $N - M = \sqrt{\frac{1-P}{1+P}}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

ডানপক্ষ $= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sec\theta - \tan\theta$

= বামপক্ষ

$\therefore$ $N - M = \sqrt{\frac{1-P}{1+P}}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৬৯ $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2$ এবং $\tan A + \cot A = \frac{4}{\sqrt{3}}$ দুটি সমীকরণ।

[সৈয়দপুর সরকারি কারিগরী কলেজ, নীলফামারী ।ৎ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $30°35'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রথম সমীকরণটি প্রমাণ কর। ৪

গ. দ্বিতীয় সমীকরণ হতে $0 < A < 2\pi$ ব্যবধিতে A এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $30°35'36''$

$= 30°\left(35\frac{36}{60}\right)'$

$= 30°\left(\frac{178}{5}\right)'$

$= \left(30\frac{178}{5\times 60}\right)^0$

$= \frac{4589}{150}\times\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore$ $30°35'36'' = 0.5339$ রেডিয়ান (প্রায়) **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}$

$= \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 1 + 1 = 2$

$\therefore$ $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$\tan A + \cot A = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan A + \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2 A + \sqrt{3} = 4\tan A$ [$\sqrt{3}\tan A$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\sqrt{3}\tan^2 A - 4\tan A + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2 A - 3\tan A - \tan A + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan A(\tan A - \sqrt{3}) - 1(\tan A - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan A - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan A - 1) = 0$

হয় $\tan A - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan A - 1 = 0$

বা, $\tan A = \sqrt{3}$ বা, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{3}$ বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{6}$

বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore A = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

বা, $\tan A = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore A = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $A = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭০ $x = \operatorname{cosec}\theta$, $y = \cot\theta$

[নীলফামারী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নীলফামারী ।ৎ প্রশ্ন নং ৭]

ক. ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3 : 4 : 5$ হলে, বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x-y+1}{y+x+1} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ ৪

গ. $x + y = \sqrt{2+1}$ হলে θ নির্ণয় কর, যখন $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3 : 4 : 5$

ধরি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $3x$, $4x$ ও $5x$

$\therefore$ $3x + 4x + 5x = \pi$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$ বা π^c]

বা, $12x = \pi$

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান $= 5x = \left(5\times\frac{\pi}{12}\right)^c = \frac{5\pi^c}{12}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x = \operatorname{cosec}\theta$

$y = \cot\theta$

$\therefore$ $\frac{x-y+1}{y+x+1} = \frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta + 1}{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta + (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta + (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \frac{(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)(1 + \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta + 1}$

$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$\therefore$ $\frac{x-y+1}{y+x+1} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $x = \operatorname{cosec}\theta$

$y = \cot\theta$

এখানে, $x + y = \sqrt{2+1}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3} - \cot\theta$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\cot\theta + \cot^2\theta$

বা, $1 + \cot^2\theta - 3 + 2\sqrt{3}\cot\theta - \cot^2\theta = 0$

বা, $2\sqrt{3}\cot\theta - 2 = 0$

বা, $\cot\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$ বা, $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot\theta = \cot\frac{\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{\pi}{3} = \cot\frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

কিন্তু $\theta = \frac{4\pi}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭১ $P\sin^2\theta + Q\cos^2\theta = R$ *[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা \ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $30°20'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $P = 2, Q = 15$ এবং $R = 7$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ ৪

গ. $P = 7, Q = 3, R = 6$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান বের কর। ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $30°20'36'' = 30°\left(20\frac{36}{60}\right)'$

$= 30°\left(\frac{103}{5}\right)'$

$= \left(30\frac{103}{5\times 60}\right)°$

$= \left(\frac{9103}{300}\right)°$

$= \frac{9103}{300}\times\frac{\pi}{180}\left[\because 1° = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= 0.5296^c$ (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = 2, Q = 15$ এবং $R = 7$

$\therefore 2\sin^2\theta + 15\cos^2\theta = 7$

বা, $2\sin^2\theta + 15(1 - \sin^2\theta) = 7$

বা, $2\sin^2\theta + 15 - 15\sin^2\theta = 7$

বা, $-13\sin^2\theta = -8$

বা, $\sin^2\theta = \frac{8}{13}$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$

$\therefore \cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{8}{13}} = \frac{5}{8}$

$\therefore \cot\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{8}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭২ (i) $\tan A = \frac{5}{12}$; $\tan A$ ও $\sin A$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট।

(ii) ΔPQR এ $\angle Q = 90°$, $\angle PRQ = \theta$

$\frac{PQ}{PR} = a$ এবং $\frac{QR}{PR} = b$

[নবাব ফয়জুন্নেছা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিল্লা \ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\sin B + \cos B = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin B - \cos B = \pm 1$. ২

খ. $\frac{\sin(-A) + \cot A}{\sec(-A) - \operatorname{cosec} A}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sin B + \cos B = 1$

বা, $\sin^2 B + \cos^2 B + 2\sin B\cos B = 1^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + 2\sin B\cos B = 1$

বা, $2\sin B\cos B = 1 - 1$

$\therefore \sin B\cos B = 0$

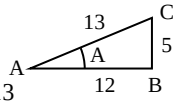
এখন, $(\sin B - \cos B)^2 = \sin^2 B + \cos^2 B - 2\sin B.\cos B$

বা, $(\sin B - \cos B)^2 = 1 - 2.0 = 1$ [মান বসিয়ে]

$\therefore \sin B - \cos B = \pm 1$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{5}{12}$ এবং $\tan A$ ও $\sin A$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হওয়ায় A কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।

অর্থাৎ, $\tan A = \frac{-5}{-12} = \frac{5}{12}$



ΔABC হতে, $AC = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$

এখন, $\sin A = \frac{-5}{13}$ $\therefore \operatorname{cosec} A = -\frac{13}{5}$

$\therefore \cos A = -\frac{12}{13}$ $\therefore \sec A = -\frac{13}{12}$

এবং $\cot A = \frac{12}{5}$

এখন, $\frac{\sin(-A) + \cot A}{\sec(-A) - \operatorname{cosec} A} = \frac{-\sin A + \cot A}{\sec A - \operatorname{cosec} A}$

$= \frac{-\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{12}{5}}{-\frac{13}{12} - \left(-\frac{13}{5}\right)}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{\frac{5}{13} + \frac{12}{5}}{\frac{13}{5} - \frac{13}{12}}$

$= \frac{\frac{181}{65}}{\frac{91}{60}}$

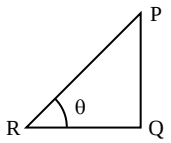
$= \frac{181}{65}\times\frac{60}{91}$

$= \frac{2172}{1183}$ **(Ans.)**

গ (ii) এর বর্ণনানুযায়ী,

এখন, $\frac{PQ}{PR} = \sin\theta = a$ এবং $\frac{QR}{PR} = \cos\theta = b$

দেওয়া আছে, $\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{3}$



বা, $\frac{b^2 + 1}{a^2} = \frac{5}{3}$

বা, $3(b^2 + 1) = 5a^2$

বা, $3(\cos^2\theta + 1) = 5\sin^2\theta$

বা, $3\cos^2\theta + 3 = 5(1 - \cos^2\theta)$

বা, $3\cos^2\theta + 3 = 5 - 5\cos^2\theta$

বা, $8\cos^2\theta = 2$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$

হয়, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ অথবা, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৩ $\tan A + \sec A = \frac{p}{q}$ এবং $R = \sec\theta + \tan\theta$

[কুমিল্লা মডার্ণ হাই স্কুল, কুমিল্লা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\tan\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\cos A = \frac{2pq}{p^2+q^2}$ ৪

গ. θ এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় কর যখন $R = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\tan\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$

$= -\tan\frac{11\pi}{6}$

$= -\tan\left(4\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\left(-\tan\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\tan A + \sec A = \frac{p}{q}$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A} = \frac{p}{q}$

বা, $\frac{\sin A + 1}{\cos A} = \frac{p}{q}$

বা, $q\sin A + q = p\cos A$

বা, $q\sin A = p\cos A - q$

বা, $\sin A = \frac{p\cos A - q}{q}$

বা, $\sin^2 A = \frac{p^2\cos^2 A - 2pq\cos A + q^2}{q^2}$

বা, $1 - \cos^2 A = \frac{p^2\cos^2 A - 2pq\cos A + q^2}{q^2}$

বা, $q^2 - q^2\cos^2 A = p^2\cos^2 A - 2pq\cos A + q^2$

বা, $q^2 - q^2 + 2pq\cos A = p^2\cos^2 A + q^2\cos^2 A$

বা, $2pq\cos A = (p^2+q^2)\cos^2 A$

বা, $\frac{\cos^2 A}{\cos A} = \frac{2pq}{p^2+q^2}$

$\therefore \cos A = \frac{2pq}{p^2+q^2}$ $[\because \cos A \neq 0]$ **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ২৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৪ $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক।

[সাবেরা সোবহান সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ব্রাহ্মণবাড়িয়া ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. প্রমাণ কর যে, "রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ" ২

খ. প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ । ৪

গ. $a = 1$, $b = -1$ এবং $c = \sqrt{2}$ হলে, সমীকরণটির সমাধান কর। যেখানে $0 < \theta < 2\pi$। ৪

৭৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর প্রতিজ্ঞা-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা ১৫২

খ সৃজনশীল ২৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $a = 1$, $b = -1$, $c = \sqrt{2}$

এখন, প্রদত্ত সমীকরণ $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ [a, b, c এর মান বসিয়ে]

বা, $\cos\theta = \sqrt{2} - \sin\theta$

বা, $\cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\sin\theta + \sin^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sin\theta = \sin\frac{\pi}{4}, \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

কিন্তু $\theta = \frac{3\pi}{4}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৫ $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta - 1 + \cos\theta}$ এবং $M = \sec\theta + \tan\theta$

[মাতৃপীঠ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে 8° কোণ উৎপন্ন করে, তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ ৪

গ. $M = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0° < \theta < 2\pi$ ৪

৭৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 8°$

$= 8\times\frac{\pi^c}{180}$

$= \frac{2\pi}{45}$ রেডিয়ান

$\therefore$ স্থান দুটির দূরত্ব, $S = r\theta$

$= 6440\times\frac{2\pi}{45}$ কি.মি.

$= 899.19$ কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$= \frac{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)}$

$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$

$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore P = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $M = \sec\theta + \tan\theta$

শর্তমতে, $M = \sqrt{3}$

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta = \sqrt{3} - \tan\theta$

বা, $\sec^2\theta = (\sqrt{3} - \tan\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\tan\theta + \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 3 + \tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 2$

বা, $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}, \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ $[\because 0 < \theta < 2\pi]$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}, \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ কিন্তু $\theta = \frac{7\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = \frac{7\pi}{6}$ এর প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\theta = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৬ $p = \sin\theta$ এবং $q = \cos\theta$

[নোয়াখালী জিলা স্কুল, নোয়াখালী \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। $(0 < x < 10°)$ ২

খ. দেখাও যে, $\frac{p+1-q}{p-1+q} = \frac{q}{1-p}$ ৪

গ. $q - p = \sqrt{2}p$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{p} = 2\sqrt{2}q$ ৪

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\tan 10x = \cot 5x$

বা, $\tan 10x = \tan(90° - 5x)$

বা, $10x = 90° - 5x$

বা, $10x + 5x = 90°$

বা, $15x = 90°$

$\therefore x = 6°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p = \sin\theta$ এবং $q = \cos\theta$

তাহলে, বামপক্ষ $= \frac{p+1-q}{p-1+q}$

$= \frac{\sin\theta + 1 - \cos\theta}{\sin\theta - 1 + \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$= \frac{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)}$

$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$

$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$

$= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$

$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$

$= \frac{q}{1-p}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $p = \sin\theta$ এবং $q = \cos\theta$

আবার, $q - p = \sqrt{2}p$

$\therefore \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $\cot\theta - 1 = \sqrt{2}$ [উভয়পক্ষকে $\sin\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cot\theta = 1 + \sqrt{2}$ ... ... (i)

বা, $\cot^2\theta = (1 + \sqrt{2})^2$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = 1 + 2 + 2\sqrt{2}$

$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta = 4 + 2\sqrt{2}$ ... ... (ii)

আবার, (i) নং হতে,

$\cot\theta = 1 + \sqrt{2}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

বা, $\tan\theta = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$

বা, $\tan\theta = \frac{1-\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2})^2}$

বা, $\tan\theta = \sqrt{2} - 1$

বা, $\tan^2\theta = (\sqrt{2} - 1)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\tan^2\theta = 2 - 2\sqrt{2} + 1$

বা, $\tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{2}$

বা, $\sec^2\theta - 1 = 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore \sec^2\theta = 4 - 2\sqrt{2}$ ... ... (iii)

(ii) ও (iii) নং গুণ করি,

$\operatorname{cosec}^2\theta.\sec^2\theta = (4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta.\sec^2\theta = 16 - (2\sqrt{2})^2$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta.\sec^2\theta = 8$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 4 \times 2 \times \cos^2\theta$

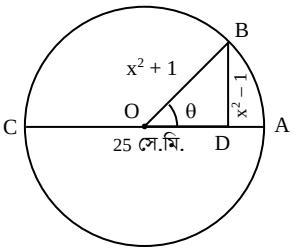
বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = (2\sqrt{2}\cos\theta)^2$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = 2\sqrt{2}\cos\theta$

বা, $\frac{1}{p} = 2\sqrt{2}q$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭৭



[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা এবং চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য 25 সে.মি. হলে θ = কত? চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে? ২

খ. ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘন্টায় কত হবে? ৪

গ. চিত্রে ΔBOD হলে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \sec\theta = x$. ৪

৭৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য, $s = 25$ সে.মি.

চিত্র হতে পাই, ব্যাসার্ধ, $r = OB = \frac{AC}{2} = \frac{25}{2}$ সে.মি.

সুতরাং আমরা জানি, $s = r\theta$ বা, $\theta = \frac{s}{r}$

$\therefore \theta = \frac{25}{\frac{25}{2}} = 2$ রেডিয়ান

চাকাটি 1 বার ঘুরে তার পরিধির সমান পথ অতিক্রম করবে।

∴ চাকার পরিধি = $2\pi r$ সে. মি.

$= 2\pi \frac{25}{2} = 25\pi$ সে.মি. **(Ans.)**

খ 1 ঘণ্টা = 60 মিনিট = 60×60 সেকেন্ড = 3600 সেকেন্ড

ABC চাকাটি 1 সেকেন্ডে আবর্তিত হয় 5 বার

∴ চাকাটি 1 ঘণ্টায় আবর্তিত হবে = (3600×5) বার

$= 18000$ বার

∴ চাকাটি 1 ঘণ্টায় দূরত্ব অতিক্রম করবে

$= 18000 \times 25\pi$ সে.মি. ['ক' হতে]

= 1413720 সে.মি.

= 14137.2 মি.

= 14.137 কি.মি. (প্রায়)

∴ চাকাটির গতিবেগ ঘন্টায় 14.137 কি.মি. (প্রায়)

গ চিত্র হতে পাই, $\sin\theta = \frac{BD}{BO}$

বা, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

বা, $\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta-1} = \frac{x^2-1+x^2+1}{x^2-1-x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta-1} = \frac{2x^2}{-2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$

বা, $\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x$

∴ $\tan\theta + \sec\theta = x$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭৮ $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$ এবং $Q = \sec\theta + \tan\theta$

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম \ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

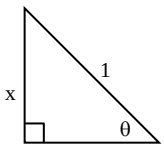
খ. দেখাও যে, $P = Q$ ৪

গ. $Q = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৭৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২৫নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৯



[ডা: খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম \ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $22°30'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $x + 1 = z\sqrt{1-x^2}$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ ৪

গ. $x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$ হলে, দেখাও যে, $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ ৪

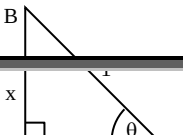
৭৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $22°30' = \left(22\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(22\frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{45}{2}\right)^\circ$

$= \frac{45}{2} \times \frac{\pi}{180} = 0.3927$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ চিত্রের ত্রিভুজ থেকে পাই,

$AC = \sqrt{1^2 - x^2}$



$= \sqrt{1-x^2}$

$\tan\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sec\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

দেওয়া আছে, $x + 1 = z\sqrt{1-x^2}$

বা, $\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = z$

বা, $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = z$

বা, $\tan\theta + \sec\theta = z$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = z$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = z$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = z^2$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = z^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = z^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{1+\sin\theta+1-\sin\theta} = \frac{z^2-1}{z^2+1}$

বা, $\frac{2\sin\theta}{2} = \frac{z^2-1}{z^2+1}$

∴ $\sin\theta = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$x + \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$

∴ $\frac{x}{1} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ ['খ' এর চিত্র হতে]

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $-2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2.\sqrt{2}\cos\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}, \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

কিন্তু $\frac{7\pi}{4}$ সমাধানটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$

এখন, LHS = $\sin 3\theta$

$= \sin\frac{3\pi}{4}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

RHS = $3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

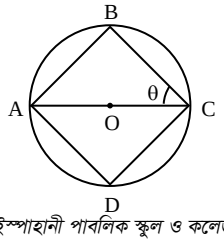
$= 3\sin\frac{\pi}{4} - 4\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^3$

$= 3.\frac{1}{\sqrt{2}} - 4.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ LHS = RHS **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৮০ চিত্রে AB = BC; AD = CD এবং ABCD বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm



[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম \\// প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\angle B$ ও $\angle D$ কোণের পরিমাপ বৃত্তীয় এককে নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, cosA + cosB + cosC + cosD = 0 ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজটি কোন ধরনের? secθ + tanθ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ

$\therefore \angle B = \frac{\pi}{2}, \angle D = \frac{\pi}{2}$

খ চিত্র থেকে পাই,

$\angle B = \frac{\pi}{2}, \angle D = \frac{\pi}{2}$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ]

আবার, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$

অর্থাৎ $\angle C = 180° - \angle A$

বামপক্ষ = cosA + cosB + cosC + cosD

$= \cos A + \cos\frac{\pi}{2} + \cos(180° - A) + \cos\frac{\pi}{2}$

$= \cos A + 0 - \cos A + 0$

$= 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ cosA + cosB + cosC + cosD = 0 **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

AB $\perp$ BC এবং AB = BC

আবার, AD $\perp$ DC এবং AD = CD

সুতরাং ABCD চতুর্ভুজটি একটি বর্গ।

এখন, ABCD বর্গের AC কর্ণ হল বৃত্তের ব্যাস।

$\therefore AC = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ [$\because$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cm]

$= \sqrt{2}$ cm

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $AB^2 + AB^2 = (\sqrt{2})^2$

বা, $2AB^2 = 2$

বা, $AB^2 = 1$

$\therefore AB = BC = 1$

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC}$

$= \frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{1}{1}$

$= \sqrt{2} + 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮১ $P = \sec\theta - \tan\theta$; $Q = \cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

[সরকারি মুসলিম উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম \\// প্রশ্ন নং ৮]

ক. Q এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P = y হলে দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$ ৪

গ. $P = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর $(O < \theta < 2\pi)$ ৪

৮১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$Q = \cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)$ [$\because \cos(-\theta) = \cos\theta$]

$= \cos\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(10 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{6}$

$= \frac{-\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, p = y

বা, $\sec\theta - \tan\theta = y$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = y$

বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = y^2$

বা, $\frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = y^2$

বা, $\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} = y^2$

বা, $\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1}{y^2}$

বা, $\frac{1 + \sin\theta - 1 + \sin\theta}{1 + \sin\theta + 1 - \sin\theta} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$ [বিয়োজন যোজন করে]

বা, $\frac{2\sin\theta}{2} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\sec\theta = \sqrt{3}\tan\theta + 1$

বা, $3\sec^2\theta = 3\tan^2\theta + 2\sqrt{3}\tan\theta + 1$

বা, $3(1 + \tan^2\theta) = 3\tan^2\theta + 2\sqrt{3}\tan\theta + 1$

বা, $3 + 3\tan^2\theta = 3\tan^2\theta + 2\sqrt{3}\tan\theta + 1$

বা, $3 - 1 = 2\sqrt{3}\tan\theta$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ [$\because 0 < \theta < 2\pi$]

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

$\therefore$ কিন্তু $\theta = \frac{7\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয় করণ, $\theta = \frac{7\pi}{6}$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮২ $1 + \cos\theta = x\sin\theta$ যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

[হাজী মুহাম্মদ মহসিন সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম \\// প্রশ্ন নং ৭]

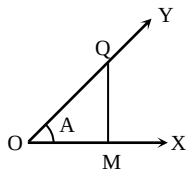
ক. প্রমাণ কর যে, sinA + cosA > 1 যেখানে A সূক্ষ্মকোণ। ২

খ. দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{2x}{1 + x^2}$ ৪

গ. $\frac{2x}{1+x^2}+\frac{x^2-1}{x^2+1}=\sqrt{2}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর যদি $2\pi < \theta < 4\pi$ হয়। ৪

৮২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



মনে করি, $\angle XOY$ একটি সূক্ষ্মকোণ।
OY বাহুতে যেকোনো বিন্দু Q নিই।
Q থেকে OX বাহু পর্যন্ত QM লম্ব টানি।
এখন, ΔOQM এ $\sin A=\frac{QM}{OQ}$ এবং $\cos A=\frac{OM}{OQ}$
আবার, ΔOMQ এ $QM + OM > OQ$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
বা, $\frac{QM}{OQ}+\frac{OM}{OQ} > 1$
বা, $\sin A + \cos A > 1$
$\therefore \sin A + \cos A > 1$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $1 + \cos\theta = x \sin\theta$
বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=x$
বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=x^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=x^2$
বা, $\frac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}=x^2$
বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=x^2$
বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]
বা, $\frac{2}{2\cos\theta}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$
বা, $\cos\theta=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
বা, $\cos^2\theta=\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$
বা, $1-\sin^2\theta=\frac{x^4-2x^2+1}{x^4+2x^2+1}$
বা, $1-\frac{x^4-2x^2+1}{x^4+2x^2+1}=\sin^2\theta$
বা, $\sin^2\theta=\frac{x^4+2x^2+1-x^4+2x^2-1}{x^4+2x^2+1}$
বা, $\sin^2\theta=\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$
$\therefore \sin\theta=\frac{2x}{x^2+1}$ [বর্গমূল করে] **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' হতে, $\frac{2x}{1+x^2}=\sin\theta$
$\frac{x^2-1}{x^2+1}=\cos\theta$
এখন, $\frac{2x}{1+x^2}+\frac{x^2-1}{x^2+1}=\sqrt{2}$
বা, $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$
বা, $\sin\theta=\sqrt{2}-\cos\theta$
বা, $\sin^2\theta=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta$
বা, $1-\cos^2\theta=2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta$
বা, $2\cos^2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta+1=0$
বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2-2.\sqrt{2}\cos\theta.1+1^2=0$
বা, $(\sqrt{2}\cos\theta-1)^2=0$
বা, $\sqrt{2}\cos\theta-1=0$
বা, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$
বা, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore \cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right),\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)$
$\therefore \theta=\frac{9\pi}{4},\frac{15\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৩ $p = \sin\theta$ এবং $q = \cos\theta$
[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম \|// প্রশ্ন নং ৭]

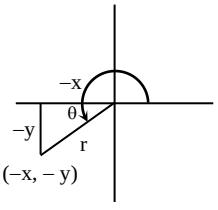
ক. $\tan 10x = \cot 5x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. সমাধান কর : $2(pq+\sqrt{3})=\sqrt{3}q+4p$, যখন $0<\theta<2\pi$ ৪
গ. $\tan\theta=\frac{5}{3}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, $\frac{\frac{p+q}{1}}{\frac{1}{q}+\frac{p}{q}}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ২৫(ক)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ দেওয়া আছে, $p = \sin\theta$, $q = \cos\theta$
প্রদত্ত সমীকরণ, $2(pq+\sqrt{3})=\sqrt{3}q+4p$
$\therefore 2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3})=\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$
বা, $2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta-4\sin\theta=0$
বা, $2\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3}=0$
বা, $2\sin\theta(\cos\theta-2)-\sqrt{3}(\cos\theta-2)=0$
বা, $(\cos\theta-2)(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$
হয়, $\cos\theta-2=0$ অথবা, $2\sin\theta-\sqrt{3}=0$
বা, $\cos\theta=2$ বা, $2\sin\theta=\sqrt{3}$
কিন্তু $-1\le\cos\theta\le 1$. বা, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore \cos\theta\neq 2$. বা, $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}$
বা, $\sin\theta=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$
$\therefore \theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$

গ দেওয়া আছে, $\tan\theta=\frac{5}{3}$
$\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।
$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{5}{3}$
$\therefore x = 3, y = 5$
$\therefore r=\sqrt{(3)^2+(5)^2}=\sqrt{34}$
$\therefore \sin\theta=-\frac{y}{r}=-\frac{5}{\sqrt{34}}$
$\cos\theta=-\frac{x}{r}=-\frac{4}{\sqrt{34}}$
$\therefore \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{34}}{3}$



এখন প্রদত্ত রাশি $=\frac{\frac{p+q}{1}}{\frac{1}{q}+\frac{p}{q}}$
$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$
$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$

$$= \frac{-\frac{5}{\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{34}}}{-\frac{\sqrt{34}}{3} + \frac{5}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{8}{\sqrt{34}}}{\frac{-\sqrt{34}+5}{3}}$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{34}} \times \frac{3}{-\sqrt{34}+5}$$

$$= -\frac{24}{-34+5\sqrt{34}}$$

$$= \frac{24}{34-5\sqrt{34}}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮৪ $P = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha$ এবং $Q = \tan\theta$

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম \|// প্রশ্ন নং ৭]

ক. একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত এবং বৃহত্তর কোণটি ক্ষুদ্রতর কোণটির তিনগুণ। বৃহত্তর কোণটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. $P = 7$ এবং $0 < \alpha < \pi$ হলে $\cot\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $Q = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$$ ৪

৮৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণ x রেডিয়ান
এবং ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ $2x$ রেডিয়ান
যেহেতু কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত,

তাই অপর কোণটি $= \frac{x+2x}{2}$ রেডিয়ান $= \frac{3x}{2}$ রেডিয়ান

আমরা জানি,
ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা $180°$ বা π রেডিয়ান।

প্রশ্নমতে, $x + \frac{3x}{2} + 2x = \pi$

বা, $\frac{2x+3x+4x}{2} = \pi$

বা, $9x = 2\pi$

$\therefore x = \frac{2\pi}{9}$ রেডিয়ান

$\therefore$ ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ, $2x = 2 \times \frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$
বা, $15(1 - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha = 7$
বা, $15 - 15\sin^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$
বা, $15\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 8 = 0$
বা, $15\sin^2\alpha - 12\sin\alpha + 10\sin\alpha - 8 = 0$
বা, $15\sin^2\alpha + 10\sin\alpha - 12\sin\alpha - 8 = 0$
বা, $5\sin\alpha(3\sin\alpha + 2) - 4(3\sin\alpha + 2) = 0$
বা, $(3\sin\alpha + 2)(5\sin\alpha - 4) = 0$
হয়, $3\sin\alpha + 2 = 0$ অথবা, $5\sin\alpha - 4 = 0$
বা, $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ বা, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$
[$\because 0 < \alpha < \pi$, তাই এটি গ্রহণযোগ্য নয়] $\therefore \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$= 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$ [$\because 0 < \alpha < \pi$]

$\therefore \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-২৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৬

প্রশ্ন ▶৮৫ দৃশ্যকল্প-১: $\tan\theta + \sec\theta = x$
দৃশ্যকল্প-২: $p\cos\theta - q\sin\theta = r$

[বান্দরবান ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বান্দরবান \|// প্রশ্ন নং ৭]

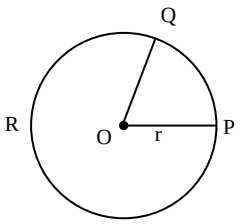
ক. চিত্রসহ রেডিয়ান কোণের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ৪

গ. $p = q = r = 1$ হলে দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে θ এর মান নির্ণয় কর। যখন $0 \le \theta \le 2\pi$ ৪

৮৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **রেডিয়ান:** কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।



চিত্রে PQR বৃত্তের কেন্দ্র O, বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP = r এবং ব্যাসার্ধের সমান চাপ PQ। PQ চাপ কেন্দ্র O তে $\angle POQ$ উৎপন্ন করেছে। উক্ত কোণের পরিমাণই এক রেডিয়ান। অর্থাৎ $\angle POQ$ এক রেডিয়ান।

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

$\therefore \text{cosec}\theta = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $p\cos\theta - q\sin\theta = r$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = 1$ [$\because p = q = r = 1$]

বা, $\cos\theta = 1 + \sin\theta$

বা, $\cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2\theta = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $0 = 2\sin\theta + 2\sin^2\theta$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta + 1) = 0$

বা, $2\sin\theta = 0$ নতুবা, $\sin\theta + 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 0$ বা, $\sin\theta = -1$

বা, $\sin\theta = \sin 0 = \sin\pi$ বা, $\sin\theta = \sin\frac{3\pi}{2}$

$= \sin 2\pi$ $\therefore\ \theta = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore\ \theta = 0, \pi, 2\pi$

কিন্তু $\theta = \pi$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore\ 0 \le \theta \le 2\pi$ সীমার মধ্যে $\theta = 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৬ $A = \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$ এবং $B = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে দেখাও যে, $B = \sqrt{3}$. ২

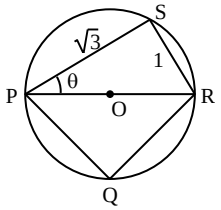
খ. প্রমাণ কর যে, $A^2 - B^2 = 0$ ৪

গ. $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $0 < \theta \le 2\pi$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৬ নং প্রশ্নের সমাধান

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩ এর উদাহরণ-২৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৮৮

প্রশ্ন ▶ ৮৭



[সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. θ কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর। ২

খ. PQRS চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে,
$\cot P + \cot Q + \cot R + \cot S = 0$ ৪

গ. $\left(\frac{PR}{PS}\right)^2 + \left(\frac{SR}{PS}\right)^2 = \frac{5}{3}$ হলে θ এর সম্ভাব্য সকল মান নির্ণয় কর যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

৮৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপকের চিত্র হতে পাই,

$\tan\angle SPR = \frac{RS}{PS} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan 30°$

$\therefore\ \theta = 30°$

আমরা জানি, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore\ 30° = \frac{\pi \times 30}{180} = \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ PQRS চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

$\therefore\ \angle P + \angle R = 180°$ [বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°]

এবং $\angle S + \angle Q = 180°$

বামপক্ষ $= \cot P + \cot Q + \cot R + \cot S$

$= \cot(180° - R) + \cot(180° - S) + \cot R + \cot S$

$= -\cot R - \cot S + \cot R + \cot S$

[২য় চতুর্ভাগে cot ঋণাত্মক]

$= 0$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \cot P + \cot Q + \cot R + \cot S = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্র হতে,

$\frac{PR}{PS} = \sec\theta$

এবং $\frac{SR}{PS} = \tan\theta$

এখন, $\left(\frac{PR}{PS}\right)^2 + \left(\frac{SR}{PS}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5}{3} - 1$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5-3}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{2}{3 \times 2}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore\ \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

'+' চিহ্ন নিয়ে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

'–' চিহ্ন নিয়ে, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৮ $\frac{1}{A} = \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta - 1}$

$B = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ *[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট \|/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. $\theta = \frac{\pi^c}{3}$ হলে B এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর, $A - B = 0$ ৪

গ. $B = \sqrt{3}$ হলে θ এর সম্ভাব্য সকল মান নির্ণয় কর।
যেখানে $0° < \theta < 360°$ ৪

৮৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $B = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে

$B = \frac{1 + \sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$= 2 + \sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\frac{1}{A} = \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta - 1}$

বা, $A = \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$

$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan\theta - \sec\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) - (\sec\theta - \tan\theta)}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta - 1)}{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta - 1)}$$

$$= \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(1 + \sin\theta)}{1 - \sin^2\theta}$$ [হর এবং লবে $(1 + \sin\theta)$ গুণ করে]

$$= \frac{\cos\theta(1 + \sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

বা, $A = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = B$

$\therefore A - B = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $B = \sqrt{3}$ এবং $B = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sec\theta = \sqrt{3} - \tan\theta$

বা, $\sec^2\theta = (\sqrt{3} - \tan\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \tan^2\theta = 3 - 2\sqrt{3}\tan\theta + \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 3 + \tan^2\theta - 1 - \tan^2\theta$

বা, $2\sqrt{3}\tan\theta = 2$

বা, $\tan\theta = \frac{2}{2\sqrt{3}}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan30° = \tan210°$ [$\because 0 < \theta < 360°$]

বা, $\tan\theta = \tan30° = \tan210°$

$\therefore \theta = 30°, 210°$

$\therefore$ কিন্তু $\theta = 210°$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\theta = 210°$ এর জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\theta = 30°$

প্রশ্ন ▶ ৮৯ $A = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$,

$B^{-1} = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$, $\operatorname{cosec}\varphi - \cot\varphi = \frac{1}{x}$.

[বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার \ প্রশ্ন নং ৭]

ক. ঋণাত্মক কোণ কাকে বলে? উদাহরণ দাও। $-720°$ এর অবস্থান চিত্র এঁকে দেখাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $A - B = 0$ ৪

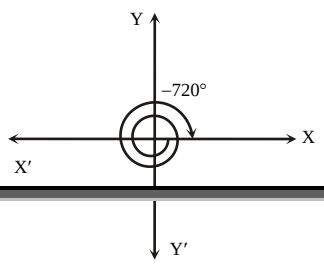
গ. $\frac{2x}{1 + x^2} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \sqrt{2}$ হলে φ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ঋণাত্মক কোণ: কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরালে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক কোণ বলে।

যেমন: $-750°$ কোণটি ঋণাত্মক কোণ।

$-720° = -8 \times 90°$এখানে, $-720°$ কোণটি ঋণাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে দুইবার সম্পূর্ণ (8 সমকোণ) ঘুরার পর আর ঘুরেনি।



সুতরাং, $-720°$ কোণটির অবস্থান x-অক্ষের উপর আদি অবস্থানে।

খ দেওয়া আছে, $A = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$

$$= \frac{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)}{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{1 - \sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \sec\theta + \tan\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$$

বা, $A = B\left[\because B^{-1} = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}\right]$

$\therefore A - B = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\varphi - \cot\varphi = \frac{1}{x}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\varphi - \cot^2\varphi = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\varphi + \cot\varphi)(\operatorname{cosec}\varphi - \cot\varphi) = 1$

বা, $\frac{1}{x}.(\operatorname{cosec}\varphi + \cot\varphi) = 1$

বা, $\operatorname{cosec}\varphi + \cot\varphi = x$

বা, $(\operatorname{cosec}\varphi + \cot\varphi)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 = x^2$

বা, $\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\varphi)^2}{\sin^2\varphi} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\varphi)^2}{1 - \cos^2\varphi} = x^2$

বা, $\frac{(1 + \cos\varphi)(1 + \cos\varphi)}{(1 - \cos\varphi)(1 + \cos\varphi)} = x^2$

বা, $\frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi} = x^2$

বা, $\frac{1 + \cos\varphi + 1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi - 1 + \cos\varphi} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

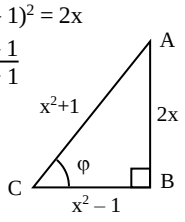
বা, $\frac{2}{2\cos\varphi} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

বা, $\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore \sec\varphi = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

ΔABC এ $AB = \sqrt{(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2} = 2x$

$\therefore \sin\varphi = \frac{2x}{1 + x^2}$ এবং $\cos\varphi = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



দেওয়া আছে,

$\frac{2x}{1 + x^2} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \sqrt{2}$

বা, $\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}$

বা, $\sin\varphi = \sqrt{2} - \cos\varphi$

বা, $\sin^2\varphi = 2 - 2\sqrt{2}\ \cos\varphi + \cos^2\varphi$

বা, $1 - \cos^2\varphi - 2 + 2\sqrt{2}\cos\varphi - \cos^2\varphi = 0$

বা, $-2\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\varphi - 2\sqrt{2}\cos\varphi + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - 2\sqrt{2}\cos\varphi.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\varphi - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\varphi - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\varphi = 1$

বা, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\varphi = \cos45°$

$\therefore \quad \varphi = 45°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯০ $x = \cot\theta$, $y = \operatorname{cosec}\theta$ এবং $z = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. একটি কোণের পরিমাণ $x°$ এবং z^c হলে, প্রমাণ করো যে, $\frac{x}{90} = \frac{2z}{\pi}$. ২

খ. প্রমাণ করো যে, $\frac{y - x + 1}{1 + y + x} = z$. ৪

গ. $x = -\frac{4}{3}$ হলে, $\frac{\tan\theta + \sec\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ এর মান নির্ণয় করো; যখন $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$. ৪

৯০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, $1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$

$\therefore x° = \left(\frac{\pi x}{180}\right)^c$

শর্তমতে, $\frac{\pi x}{180} = z$

$\therefore \frac{x}{90} = \frac{2z}{\pi}$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $x = \cot\theta$, $y = \operatorname{cosec}\theta$, $z = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

এখন, $\frac{y - x + 1}{1 + y + x} = \frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta + 1}{1 + \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

$= \frac{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta + (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{1 + \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

$= \frac{(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) + (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)}{1 + \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

$= \frac{(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)(1 + \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{1 + \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

$= \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = z$

$\therefore \frac{y - x + 1}{1 + y + x} = z$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $x = \cot\theta$

এখন, $x = -\frac{4}{3}$

বা, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ $\therefore \tan\theta = -\frac{3}{4}$

বা, $\cot^2\theta = \frac{16}{9}$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \frac{16}{9}$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \frac{16}{9}$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{25}{9}$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = \pm\frac{5}{3}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = -\frac{5}{3}\left[\because \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi\right]$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = -\frac{5}{3}$

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$

এখন, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{4}{3}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{4}{3} \times \sin\theta$

$= -\frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{4}{5}$

এবং $\sec\theta = \frac{5}{4}$

এখন, $\frac{\tan\theta + \sec\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

$= \frac{-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}$

$= \frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{4} \times 5 = \frac{5}{2}$ **((Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯১ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = P$; এবং $Q = \operatorname{cosec}A \cdot \cot A$

[বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\operatorname{cosec}\left(\frac{-25\pi}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $Q = 2\sqrt{3}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0° \le A \le 2\pi$। ৪

গ. দেখাও যে, $(P^2 + 1)\cos\theta + (P^2 + 1)\sin\theta = (P + 1)^2 - 2$ ৪

৯১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\operatorname{cosec}\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$

$= -\operatorname{cosec}\left(\frac{25\pi}{2}\right)$

$= -\operatorname{cosec}\left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$= -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2}$

$= -1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = \operatorname{cosec}A.\ \cot A$

প্রশ্নমতে, $\operatorname{cosec}A\ \cot A = 2\sqrt{3}$

বা, $\frac{1}{\sin A} \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = 2\sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin^2 A} = 2\sqrt{3}$

বা, $\cos A = 2\sqrt{3}\ (1 - \cos^2 A)$

বা, $\cos A = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\ \cos^2 A$

বা, $2\sqrt{3}\cos^2 A + \cos A - 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\sqrt{3}\cos^2 A + 4\cos A - 3\cos A - 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\sqrt{3}\cos^2 A - 3\cos A + 4\cos A - 2\sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\cos A(2\cos A - \sqrt{3}) + 2(2\cos A - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(2\cos A - \sqrt{3})(\sqrt{3}\cos A + 2) = 0$

বা, $2\cos A - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\cos A + 2 = 0$

বা, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ বা, $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\cos A = \cos\frac{\pi}{6}$ [যা গ্রহণযোগ্য নয় কারণ, $-1 \le \cos\theta \le 1$]

$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \quad A = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $A = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

গ দেওয়া আছে,

$\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = P$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = P$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = P$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = P^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = P^2$

বা, $\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = P^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = P^2$

বা, $\frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta-1+\cos\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$

বা, $\frac{2}{2\cos\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$

বা, $\cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{P^2-1}{P^2+1}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{(P^2+1)^2-(P^2-1)^2}{(P^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\frac{4P^2}{(P^2+1)^2}}$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{2P}{P^2+1}$

$\therefore \quad \sin\theta + \cos\theta = \frac{2P}{P^2+1} + \frac{P^2-1}{P^2+1}$

$= \frac{P^2+2P-1}{P^2+1}$

$= \frac{P^2+2P+1-2}{P^2+1}$

বা, $(P^2+1)\sin\theta + (P^2+1)\cos\theta = (P+1)^2 - 2$

$\therefore \quad (P^2+1)\cos\theta + (P^2+1)\sin\theta = (P+1)^2 - 2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৯২ $P = \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$, $Q = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta$

[বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল ⌇ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $70°28'25''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর : $P^3 - Q^3 = 0$ ৪

গ. $Q = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর। ৪

৯২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $70°28'25'' = 70°\left(28\frac{25}{60}\right)'$

$= 70°\left(\frac{341}{12}\right)'$

$= \left(70\frac{341}{12\times60}\right)°$

$= \left(70\frac{341}{720}\right)°$

$= \left(\frac{50741}{720}\right)°$

$= \frac{50741}{720} \times \frac{\pi}{180}$

$= 1.23^c$ (প্রায়)

খ $P = \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$ [$\because \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$]

$= \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \frac{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)(1 - \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = Q$

$\therefore \quad P^3 = Q^3$

$\therefore \quad P^3 - Q^3 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ $Q = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}(\cos\theta+1) = \sin\theta$

বা, $3(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1) = \sin^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $3\cos^2\theta + 6\cos\theta + 3 = 1 - \cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta + 6\cos\theta + 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta + \cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta+1) + 1(\cos\theta+1) = 0 \Rightarrow (\cos\theta+1)(2\cos\theta+1) = 0$

$\therefore \quad \cos\theta + 1 = 0$ অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0$

অর্থাৎ, $\cos\theta = -1$ অথবা, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \cos\pi$ অথবা, $\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

অর্থাৎ, $\theta = \pi$ অথবা, $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$

$\theta = \pi, \frac{4\pi}{3}$ এ $Q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯৩ $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = m$ ৭ক

[উদয়ন মাধ্যমিক বিদ্যালয়, বরিশাল ⌇ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

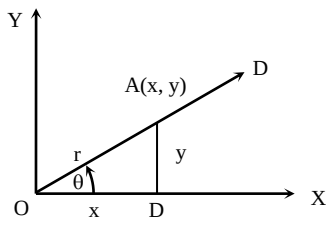
খ. $m = 2$ হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$. ৪

গ. $m = \sqrt{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. ৪

৯৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন-১৪ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৯৪



[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠী ⌇ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান x ও y মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$ ৪

গ. $\frac{\sqrt{3}y}{r} + \frac{x}{r} = 2$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0° < \theta < 360°$ ৪

৯৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{AO}{AD}$

ΔAOD এ $AO^2 = AD^2 + OD^2$

$\therefore \quad AO = \sqrt{AD^2 + OD^2}$

$= \sqrt{x^2 + y^2}$ [$\because$ OD = x, AD = y]

$\therefore \quad \text{cosec}\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.২ এর "অনুপাতসমূহের সংজ্ঞা" অনুচ্ছেদের-৪ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬৯।

অতঃপর,

$\therefore \quad -1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$ **(প্রমাণিত)**

গ ΔAOD হতে পাই,

$\frac{y}{r} = \frac{AD}{OA} = \sin\theta$

$\frac{x}{r} = \frac{OD}{OA} = \cos\theta$

দেওয়া আছে, $\frac{\sqrt{3}y}{r} + \frac{x}{r} = 2$ ... ... (i)

$\therefore \quad \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta = 2 - \cos\theta$

বা, $3\sin^2\theta = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $3 - 3\cos^2\theta = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

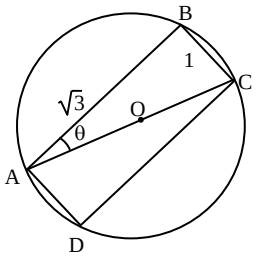
বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

কিন্তু $\theta = \frac{5\pi}{3}$ মানটি (i) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ প্রদত্ত $0° < \theta < 360°$ সীমার মধ্যে, $\theta = 60°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯৫ চিত্রটি লক্ষ্য কর:



$\angle BAC = \theta$, BC = 1

[পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী ।।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. চিত্রে ABCD একটি বৃত্ত এবং O বৃত্তের কেন্দ্র হলে ABCD বৃত্তের পরিধি নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, cotA + cotB + cotC + cotD = 0. ৪

গ. $\text{cosec}^2\theta + \cot\theta = P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

৯৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$

= 2 একক

AC = বৃত্তের ব্যাস = 2 একক

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{2}{2} = 1$ একক

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = $2\pi \times$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$= 2\pi \times 1$

$= 2\pi$ একক **(Ans.)**

খ এখন, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\angle D = \frac{\pi}{2}$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$A + C = \pi$ [বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি π]

$\therefore A = \pi - C$

বামপক্ষ = cotA + cotB + cotC + cotD

$= \cot(\pi - C) + \cot\frac{\pi}{2} + \cot C + \cot\frac{\pi}{2}$

$= -\cot C + 0 + \cot C + 0$

= 0

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

$\text{cosec}\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$

$\cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\therefore P = \text{cosec}^2\theta + \cot\theta$

$= (2)^2 + \sqrt{3} = 4 + \sqrt{3}$ **(Ans.)**

এখন, $\text{cosec}^2\theta + \cot\theta = P$

বা, $\text{cosec}^2\theta + \cot\theta = 4 + \sqrt{3}$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot\theta - 4 - \sqrt{3} = 0$

বা, $\cot^2\theta + \cot\theta - 3 - \sqrt{3} = 0$

বা, $\cot^2\theta - \sqrt{3}\cot\theta + (1 + \sqrt{3})\cot\theta - \sqrt{3} - 3 = 0$

বা, $\cot\theta(\cot\theta - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})(\cot\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\cot\theta - \sqrt{3})(\cot\theta + 1 + \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\cot\theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\cot\theta = -1 - \sqrt{3}$

বা, $\cot\theta = \sqrt{3}$ $\therefore \theta = \cot^{-1}(-1 - \sqrt{3})$; যা সম্ভব নয়

বা, $\cot\theta = \cot 30°$ কারণ, θ সূক্ষ্মকোণ হতে হবে।

$\therefore \theta = 30°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯৬ $a = \sin\theta$, $b = \cos\theta$

[মতিঝিল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা ।// প্রশ্ন নং ৭]

ক. একটি কোণের মান ষাটমূলক পদ্ধতিতে $D°$ এবং বৃত্তীয় পদ্ধতিতে R^c হলে দেখাও যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$। ২

খ. $7a^2 + 3b^2 - 4 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $b\,\text{cosec}\theta = \pm\sqrt{3}$ ৪

গ. $\sqrt{3}\,ab^{-1} + \sqrt{3}ba^{-1} - 4 = 0$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৯৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর লক্ষণীয় অংশের (ii) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৫৫

খ দেওয়া আছে, $a = \sin\theta$

$b = \cos\theta$

এবং $7a^2 + 3b^2 - 4 = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 4 = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) - 4 = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta - 4 = 0$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$\therefore \cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}$

বা, $\cot^2\theta = 3$

বা, $\cot\theta = \pm\sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ $b\,\text{cosec}\theta = \pm\sqrt{3}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a = \sin\theta$

$b = \cos\theta$

$\therefore$ $\sqrt{3}ab^{-1} + \sqrt{3}ba^{-1} - 4 = 0$

বা, $\sqrt{3}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = 4$

বা, $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয় $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$ বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ অথবা, $\frac{4\pi}{3}$ $\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{6}$ অথবা, $\frac{7\pi}{6}$

যা, $0 < \theta < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$

প্রশ্ন ▶ ৯৭ $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = p.$

[উইলস্ লিটল ফ্লাওয়ার স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $p = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \pm\sqrt{3}$. ৪

গ. $p = 6$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৯৭ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৯৮ $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = p.$

[ইউনিভার্সিটি ল্যাবরেটরি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $p = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \pm\sqrt{3}$. ৪

গ. $p = 6$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

৯৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৯৯ $F(\theta) = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 4.$

$P = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক রাশি।

[লালবাগ সরকারি মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $P = 2$ ৪

গ. $F(\theta) = 0$ হলে, θ এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় কর যেখানে $0 < \theta < 2\pi$. ৪

৯৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$F(\theta) = 7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 4$

$\therefore F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7\sin^2\frac{\pi}{4} + 3\cos^2\frac{\pi}{4} - 4$

$= 7 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4$

$= \frac{7}{2} + \frac{3}{2} - 4$

$= \frac{7 + 3 - 8}{2} = \frac{2}{2} = 1$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= P = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}$

$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}\right) = 2 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = 2$ **(দেখানো হলো)**

গ $F(\theta) = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta - 4 = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) - 4 = 0$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta - 4 = 0$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

(+) নিয়ে, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(–) নিয়ে, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধির মধ্যে সম্ভাব্য মানসমূহ: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০০ $a\sin\theta = p$ এবং $b\cos\theta = q$

[তেজগাঁও সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ এর মান a, b, p ও q এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{q}{b} - \frac{p}{a} = \sqrt{3}\ \sin\theta$ হলে প্রমাণ কর যে,

$2\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}.\cos\theta$ ৪

গ. $a = b = 1$ এবং $2(pq + \sqrt{3}) = \sqrt{3}q + 4p$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

১০০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a\sin\theta = p$

বা, $\sin\theta = \frac{p}{a}$ ... ... (i)

এবং $b\cos\theta = q$

বা, $\cos\theta = \frac{q}{b}$ ... ... (ii)

(i) ÷ (ii) হতে পাই, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{p}{a}}{\frac{q}{b}}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{bp}{aq}$

বা, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{bp + aq}{bp - aq}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{bp + aq}{bp - aq}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\frac{q}{b} - \frac{p}{a} = \sqrt{3}\sin\theta$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{3}\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta + \sin\theta$

বা, $\cos\theta = (\sqrt{3} + 1)\sin\theta$

বা, $(\sqrt{3} - 1)\cos\theta = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)\sin\theta$

বা, $(\sqrt{3} - 1)\cos\theta = (3 - 1)\sin\theta$

বা, $(\sqrt{3} - 1)\cos\theta = 2\sin\theta$

বা, $\sqrt{3}\cos\theta - \cos\theta = 2\sin\theta$

বা, $2\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$

$\therefore\ 2\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a\sin\theta = p$

বা, $\sin\theta = p$ [$\because a = 1$]

এবং $b\cos\theta = q$

বা, $\cos\theta = q$ [$\because b = 1$]

প্রদত্ত সমীকরণ, $2(pq + \sqrt{3}) = \sqrt{3}q + 4p$

$\therefore\ 2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\theta - 4\sin\theta = 0$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - 4\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta(\cos\theta - 2) - \sqrt{3}(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $\cos\theta - 2 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\cos\theta = 2$ বা, $2\sin\theta = \sqrt{3}$

কিন্তু $-1 \le \cos\theta \le 1$. বা, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

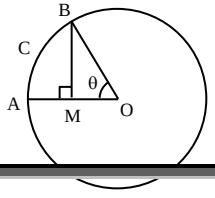
$\therefore\ \cos\theta \neq 2$. বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

প্রশ্ন ▶ ১০১



চিত্রে OA = 10 সে.মি.।

[সরকারি বিজ্ঞান কলেজ সংযুক্ত হাই স্কুল, ঢাকা ।// প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\theta°$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. যদি $\theta = 60°$ হয় এবং একজন দৌড়বিদ A বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে B বিন্দুতে পৌছাতে 5 সেকেন্ড সময় নেয় তবে তার গতিবেগ নির্ণয় কর। ৪

গ. $2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। [যেখানে $0° < \theta < 2\pi$] ৪

১০১ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ১০২ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ এবং $n = \tan\theta - \sin\theta$.

[সরকারি মোহাম্মদপুর মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা ।// প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\tan\theta$ এবং $\sin\theta$ বলতে কী বুঝ? ২

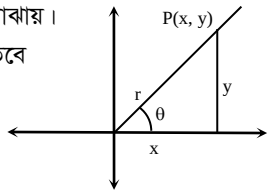
খ. $\sin\theta = \frac{3}{5}$ হলে, n এর মান বের কর। [যেখানে $\tan\theta \ge 0$] ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $m = \tan\theta + \sin\theta$ ৪

১০২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sin\theta$ ও $\tan\theta$ প্রতীক দুইটি দ্বারা যথাক্রমে θ কোণের সাইন এর ও ট্যানজেন্ট এর অনুপাতকে বোঝায়।

যদি θ একটি সূক্ষ্মকোণ হয় তবে পাশের চিত্র হতে,



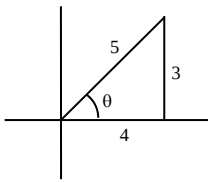
$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{y}{r}$

এবং $\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{y}{x}$

খ দেওয়া আছে, $n = \tan\theta - \sin\theta$ ... ... (i)

এবং $\sin\theta = \frac{3}{5}$

চিত্র হতে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$



(i) নং হতে পাই, $n = \tan\theta - \sin\theta$

$= \frac{3}{4} - \frac{3}{5}$

$= \frac{15 - 12}{20}$

$\therefore\ n = \frac{3}{20}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ ... ... (i)

এবং $n = \tan\theta - \sin\theta$

$\therefore\ n^2 = \tan^2\theta - 2\tan\theta.\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $n^2 = (\tan^2\theta + \sin^2\theta) - 2\tan\theta.\sin\theta$

বা, $2n^2 = 2(\tan^2\theta + \sin^2\theta) - 4\tan\theta.\sin\theta$

বা, $2n^2 = \{(\tan\theta + \sin\theta)^2 + (\tan\theta - \sin\theta)^2\} - 4\sqrt{\tan^2\theta.\sin^2\theta}$

বা, $2n^2 = \{(\tan\theta + \sin\theta)^2 + n^2\} - 4\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}(1 - \cos^2\theta)}$

বা, $2n^2 = \{(\tan\theta + \sin\theta)^2 + n^2\} - 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta}$

বা, $2n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 + n^2 - 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$

বা, $n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 - 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta).n}$

বা, $(\tan\theta + \sin\theta)^2 - n^2 = 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta).n}$

সমীকরণটিকে (i) এর সাথে তুলনা করে পাই,

$m = \tan\theta + \sin\theta$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১০৩ (i) $\tan\theta + \sec\theta = x$

(ii) $2\sin^2 A + 3\cos A = 0$. SSC উচ্চতর গণিত মেইড ইজি উত্তরপত্র-**৭ঘ**

[মোহাম্মদপুর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা \\// প্রশ্ন নং ৭]

ক. $30°12'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। ২

খ. উদ্দীপক (i) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\sin\theta + \cos\theta = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ ৪

গ. A এর সম্ভাব্য সকল মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < A < 2\pi$. ৪

১০৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.১ এর উদাহরণ-৩(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ১৫৬

খ দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$ বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$ ... ... (i)

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$ ... ... (ii)

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ... ... (iii)

(i) নং হতে পাই,

$\frac{1+\sin\theta}{x} = \cos\theta$

বা, $\frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \cos\theta$

বা, $\frac{1}{x}\left(\frac{x^2+1+x^2-1}{x^2+1}\right) = \cos\theta$

বা, $\frac{2x}{x^2+1} = \cos\theta$

এখন, বামপক্ষ $= \sin\theta + \cos\theta$

$= \frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1}$

$= \frac{x^2+2x-1}{x^2+1} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$ **(cÉgvwYZ)**

গ দেওয়া আছে,

$2\sin^2 A + 3\cos A = 0$

বা, $2(1-\cos^2 A) + 3\cos A = 0$

বা, $2 - 2\cos^2 A + 3\cos A = 0$

বা, $2\cos^2 A - 3\cos A - 2 = 0$ [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\cos^2 A - 4\cos A + \cos A - 2 = 0$

বা, $2\cos A(\cos A - 2) + 1(\cos A - 2) = 0$

বা, $(2\cos A + 1)(\cos A - 2) = 0$

কিন্তু, $\cos A - 2 \neq 0$ কেননা $-1 \le \cos A \le 1$

অতএব $2\cos A + 1 = 0$

বা, $\cos A = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos A = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos A = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$ [শর্তানুসার $0 < A < 2\pi$]

বা, $\cos A = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore A = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, যা $0 < A < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে A এর সম্ভাব্য মানসমূহ $= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৪ $P = \cos\theta + \sin\theta$

[সেন্ট ফ্রান্সিস জেভিয়ার গার্লস হাই স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা \\// প্রশ্ন নং ৮]

ক. দেখাও যে, $\sin\theta\cos\theta = \frac{(P+1)(P-1)}{2}$ ২

খ. $P = \sqrt{2}\cos\theta$ হলে, দেখাও যে, $\sqrt{2}\sin\theta = \cos\theta - \sin\theta$ ৪

গ. $P(\sin\theta - \cos\theta) = \cos\theta$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $0 < \theta < 2\pi$ ৪

১০৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = \cos\theta + \sin\theta$

বা, $P^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta.\cos\theta$

বা, $P^2 = 1 + 2\sin\theta.\cos\theta$

বা, $2\sin\theta.\cos\theta = P^2 - 1$

বা, $\sin\theta.\cos\theta = \frac{(P+1)(P-1)}{2}$

$\therefore \sin\theta.\cos\theta = \frac{(P+1)(P-1)}{2}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $P = \cos\theta + \sin\theta$

এবং $P = \sqrt{2}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

বা, $1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{2}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{2} - 1$

বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

বা, $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{1-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

বা, $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

$\therefore \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $P = \cos\theta + \sin\theta$

এবং $P(\sin\theta - \cos\theta) = \cos\theta$

$\therefore (\cos\theta + \sin\theta)(\sin\theta - \cos\theta) = \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - 2\cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 1 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -1$ বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\pi$ বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \pi$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

∴ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর মান $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১০৫ $f(x) = \sin x$

[নারায়ণগঞ্জ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নারায়ণগঞ্জ \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $f(x) = \frac{3}{5}$ হলে, tanx এর মান নির্ণয় কর। ২

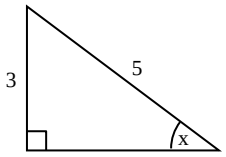
খ. $3f(y) + 4f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$3f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - 4f(y) = \pm\sqrt{25 - c^2}$ ৪

গ. সমাধান কর : $2f(x) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$ যখন $0 \le x \le 2\pi$. ৪

১০৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রশ্নমতে, $f(x) = \sin x = \frac{3}{5}$



$\sqrt{5^2 - 3^2}$
$= \sqrt{25 - 9}$
$= 4$

চিত্রানুসারে $\tan x = \frac{\text{jÁ¼}}{\text{f„wg}} = \frac{3}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x$ এবং $3f(y) + 4f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = c$

বা, $3\sin y + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = c$

বা, $3\sin y + 4\cos y = c$

বা, $(3\sin y + 4\cos y)^2 = c^2$ [বর্গ করে]

বা, $(3\sin y)^2 + 2.3\sin y \cdot 4\cos y + (4\cos y)^2 = c^2$

বা, $9\sin^2 y + 16\cos^2 y + 24\sin y\cos y = c^2$

বা, $9(1 - \cos^2 y) + 16(1 - \sin^2 y) + 24\sin y\cos y = c^2$

বা, $9 - 9\cos^2 y + 16 - 16\sin^2 y + 24\sin y\cos y = c^2$

বা, $25 - c^2 = 9\cos^2 y + 16\sin^2 y - 24\sin y\cos y$

বা, $25 - c^2 = (3\cos y)^2 + (4\sin y)^2 - 2.3\cos y \cdot 4\sin y$

বা, $25 - c^2 = (3\cos y - 4\sin y)^2$

বা, $3\cos y - 4\sin y = \pm\sqrt{25 - c^2}$

বা, $3\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - 4\sin y = \pm\sqrt{25 - c^2}$

∴ $3f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - 4f(y) = \pm\sqrt{25 - c^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রশ্নমতে, $2f(x) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$

বা, $2\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ [∵ $f(x) = \sin x$]

বা, $2\sin x\cos x - \sin x = 0$

∴ $\sin x(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\sin x = 0$

বা, $\sin x = \sin 0 = \sin(\pi - 0) = \sin(2\pi - 0)$

∴ $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$

অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $\cos x = \frac{1}{2}$

বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

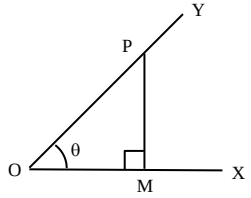
বা, $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3}$

∴ $x = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$; যা সীমা $0 \le x \le 2\pi$ এর মধ্যে অবস্থিত

∴ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মান সমূহ:

$0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১০৬ নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



চিত্রে OM = 4 একক এবং PM = 3 একক।

[ব্রাহ্মন্দী কে.কে.এম সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নরসিংদী \|/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. যদি $\theta = \frac{\pi^c}{12}$ হয়, তবে $\tan\theta\tan 5\theta\tan 7\theta\tan 11\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1 + \sin\theta)\sec\theta} = \frac{14}{5}$ ৪

গ. চিত্রে PM ⊥ OM এবং $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$ কে θ কোণের সাপেক্ষে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করে গঠিত সমীকরণ সমাধান কর। যেখানে $0 \le \theta \le \pi$. ৪

১০৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi^c}{12}$

প্রদত্ত রাশি = $\tan\theta\tan 5\theta\tan 7\theta\tan 11\theta$

$= \tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$

$= \tan 15°\tan 75°\tan 105°\tan 165°$

$= \tan 15°\tan(90° - 15°)\tan(90° + 15°)\tan(180° - 15°)$

$= \tan 15°\cot 15°(-\cot 15°)(-\tan 15°)$

$= \tan^2 15°\cot^2 15°$

$= \tan^2 15° \times \frac{1}{\tan^2 15°}$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

∴ $\tan\theta\tan 5\theta\tan 7\theta\tan 11\theta = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, OM = 4 একক

PM = 3 একক

∴ $\tan\theta = \frac{3}{4}$

এখানে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{(1 + \sin\theta)\sec\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $3\cos\theta = 4\sin\theta$

বা, $9\cos^2\theta = 16\sin^2\theta$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9(1 - \sin^2\theta) = 16\sin^2\theta$

বা, $9 - 9\sin^2\theta - 16\sin^2\theta = 0$

বা, $-25\sin^2\theta = -9$

বা, $\sin^2\theta = \frac{9}{25}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$

∴ $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ [∵ $\sin\theta$ ঋণাত্মক]

আবার, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $3\cos\theta = 4\sin\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

এখন, বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}$

$= \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{2}{4}}$

$= \frac{-7}{5} \times \frac{4}{-2}$

$= \frac{14}{5}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্র হতে, $\frac{OP}{OM} = \sec\theta$

$\frac{PM}{OM} = \tan\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ, $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5}{3} - 1$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(+) নিয়ে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

(–) নিয়ে, $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

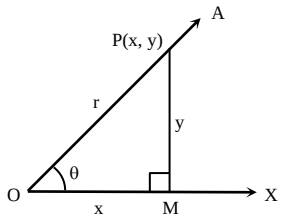
বা, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{6}$

$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধির মধ্যে সম্ভাব্য মানসমূহ: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৭



[জামালপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, জামালপুর ।// প্রশ্ন নং ৭]

ক. $x = y$ হলে, প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{2}x$। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ৪

গ. $\frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১০৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে, সমকোণী ত্রিভুজ ΔOMP-এ,

$PM = y$

$OM = x$

$OP = r$

এখন, $OP^2 = OM^2 + PM^2$

বা, $r^2 = x^2 + y^2$

বা, $r^2 = x^2 + x^2$ [$\because x = y$]

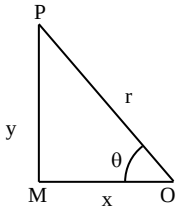
বা, $r^2 = 2x^2$

$\therefore r = \sqrt{2}x$ **(প্রমাণিত)**

খ PMO একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার ভূমি, $MO = x$ একক, লম্ব, $PM = y$ একক ও অতিভুজ, $PO = r$ একক। ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ, $\angle POM = \theta$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

চিত্র থেকে আমরা দেখি যে,



$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x}$

এবং $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = \left(\frac{r}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

$= \frac{r^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$

$= \frac{r^2 - y^2}{x^2}$

$= \frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2}$ [$\because r^2 = x^2 + y^2$]

$= \frac{x^2}{x^2} = 1.$

$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্রে, $OM = x$, $PM = y$

$\therefore OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

দেওয়া আছে, $\frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

বা, $\frac{2.PM^2}{OM^2 + PM^2} - \frac{3.OM}{\sqrt{OM^2 + PM^2}} = 0$

বা, $\frac{2PM^2}{OP^2} - \frac{3OM}{\sqrt{OP^2}} = 0$

বা, $2\left(\frac{PM}{OP}\right)^2 - 3\left(\frac{OM}{OP}\right) = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

বা, $(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 2 = 0$ অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

$\therefore \cos\theta = -2$ বা, $2\cos\theta = 1$

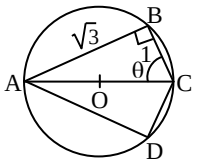
ইহা গ্রহণযোগ্য নয়। বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60°$

$\therefore\ \theta = 60°$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\theta = 60°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৮



[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা] ৷৷ প্রশ্ন নং ৭]

উল্লেখিত চিত্রের আলোকে নিম্নের প্রশ্নের উত্তর দাও:

ক. চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে AC নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$. ৪

গ. $\sec\theta + \cos\theta = x$ হলে x-এর মান নির্ণয় কর ও সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

১০৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে $\angle B$ কোণটি অর্ধবৃত্তস্থ।

আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ 1 সমকোণ। $\therefore \angle B = 90°$

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$

বা, $AC^2 = 3 + 1$

বা, $AC^2 = 4$

$\therefore$ AC = 2 একক **(Ans.)**

খ O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABCD বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$ [বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°]

এবং $\angle B + \angle D = 180°$

এখন, বামপক্ষ = $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D$

$= \tan A + \tan(180° - D) + \tan(180° - A) + \tan D$

$= \tan A - \tan D - \tan A + \tan D$ [□ ২য় চতুর্থভাগে tan ঋণাত্মক]

$= 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\sec\theta + \cos\theta = x$ ... ... (i)

এখানে, $\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$ [$\because$ AC = 2 এবং BC = 1]

আবার, $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\sec\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$2 + \frac{1}{2} = x$ বা, $\frac{4+1}{2} = x$ $\therefore x = \frac{5}{2}$

$\therefore$ x এর মান $\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

এখন, (i) নং থেকে, $\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

$\therefore (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 2) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$ $\therefore \cos\theta = 2$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ কিন্তু, $\cos\theta \neq 2$ কারণ, $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০৯ AB = 1.1 কি.মি. উচ্চতার একটি পাহাড় OA = x কি.মি. দূরে O বিন্দুতে 7′ কোণ উৎপন্ন করে এবং $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

[লক্ষ্মীপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর ৷৷ প্রশ্ন নং ৮]

ক. জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে পার্থক্য লিখ। ২

খ. x = ? ৪

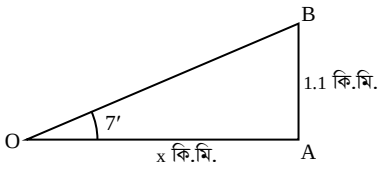
গ. θ = ? যখন $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$. ৪

১০৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে পার্থক্য:

জ্যামিতিক কোণ	ত্রিকোণমিতিক কোণ
i) দুটি ভিন্ন রশ্মি একটি বিন্দুতে মিলিত হলে যে কোণ উৎপন্ন হয় সেটা জ্যামিতিক কোণ।	i) এক্ষেত্রে একটি স্থির রশ্মির সাপেক্ষে অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মির বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন কোণ বিবেচনা করা হয়।
ii) এটি দুই সরলকোণ পর্যন্ত সীমাবদ্ধ।	ii) এক্ষেত্রে ঘূর্ণনের ফলে আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন হতে পারে।

খ



এখানে, AB = 1.1 কি.মি. পাহাড়টি OA = x কি.মি. দূরে O বিন্দুতে 7′ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, OA = x = ব্যাসার্ধ = r কি.মি.

কেন্দ্রস্থ কোণ, $\angle AOB = 7' = \left(\frac{7}{60}\right)^0$

$= \frac{7}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

পাহাড়ের উচ্চতা, AB ≈ চাপ [□ 7′ খুবই ক্ষুদ্র কোণ], S = 1.1 কি.মি.

আমরা জানি, $S = r\theta$

বা, $1.1 = x \times \frac{7\pi}{60 \times 180}$

বা, $x = \frac{1.1 \times 60 \times 180}{7\pi}$

$\therefore$ x = 540.22 কি.মি. **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

বা, $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

বা, $\tan^4\theta + 1 = 2\tan^2\theta$ [উভয় পক্ষকে $\tan^2\theta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4\theta - 2\tan^2\theta + 1 = 0$

বা, $(\tan^2\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\tan^2\theta - 1 = 0$

বা, $\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \pm 1$

এখন, $\tan\theta = 1$ নিয়ে পাই;

$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = \tan(\pi + \frac{\pi}{4})$ (শর্তানুসারে)

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

আবার, $\tan\theta = -1$ নিয়ে পাই, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan\theta = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{4})$ (শর্তানুসারে)

বা, $\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\frac{7\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ, $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

(Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১১০ $a = \tan^4\theta - \tan^2\theta$ এবং $b = 1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta$

[চট্টগ্রাম সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম ।/। প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\text{cosec}A = \frac{a}{b}$ হলে, দেখাও যে, $\cos A = \pm\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$ ২

খ. $a = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 2$. ৪

গ. $0 < \theta < 2\pi$ শর্তে θ এর কোন মানের জন্য $b = 0$ হবে? ৪

১১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\text{cosec}A = \frac{a}{b}$

$\therefore\ \sin A = \frac{b}{a}$

বা, $\sin^2 A = \frac{b^2}{a^2}$

বা, $1 - \cos^2 A = \frac{b^2}{a^2}$

বা, $\cos^2 A = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

বা, $\cos^2 A = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

$\therefore\ \cos A = \pm\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$a = \tan^4\theta - \tan^2\theta$

বা, $\tan^4\theta - \tan^2\theta = 1$ [$\because a = 1$]

বা, $\tan^4\theta = 1 + \tan^2\theta$

বা, $\tan^4\theta = \sec^2\theta$

বা, $\tan^2\theta = \sec\theta$

বা, $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore\ \sin^2\theta = \cos\theta$ ... ... (i)

আবার, $\tan^2\theta = \sec\theta$

বা, $\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sec\theta}$

বা, $\cot^2\theta = \cos\theta$

বা, $\text{cosec}^2\theta - 1 = \cos\theta$

বা, $\text{cosec}^2\theta = 1 + \sin^2\theta$ [(i) নং হতে]

বা, $\text{cosec}^2\theta + \cos^2\theta = 1 + \sin^2\theta + \cos^2\theta$

বা, $\text{cosec}^2\theta + \cos^2\theta = 1 + 1$

$\therefore\ \cos^2\theta + \text{cosec}^2\theta = 2$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$b = 1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta$

বা, $0 = 1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

বা, $\sin\theta - 2\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta = 0$

বা, $\sin\theta(1 - 2\sin\theta) + \cos\theta(1 - 2\sin\theta) = 0$

বা, $(1 - 2\sin\theta)(\sin\theta + \cos\theta) = 0$

হয়, $1 - 2\sin\theta = 0$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

অথবা, $\sin\theta + \cos\theta = 0$

বা, $\sin\theta = -\cos\theta$

বা, $\tan\theta = -1$

বা, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{4}$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

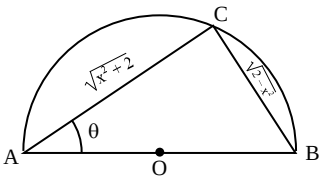
$= \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট ব্যবধির মধ্যে গ্রহণযোগ্য মানসমূহ: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

(Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১১১



O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACB অর্ধবৃত্ত।

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট বোর্ড আন্তঃ উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম ।/। প্রশ্ন নং ৭]

ক. BC চাপের দৈর্ঘ্য 1.5 একক হলে কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ ৪

গ. $(2 - x^2) - 3\sqrt{x^2 + 2} = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

যেখানে, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ৪

১১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্র হতে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (\sqrt{x^2 + 2})^2 + (\sqrt{2 - x^2})^2$

$= x^2 + 2 + 2 - x^2$

বা, $AB^2 = 4$

$\therefore\ AB = 2$

$\therefore\ OB = \frac{AB}{2} = 1$

আমরা জানি, $S = r\theta'$ [যেখানে θ' কেন্দ্রস্থ কোণ]

বা, $\theta' = \frac{S}{r}$

$= \frac{1.5}{1} = 1.5$ রেডিয়ান **(Ans.)**

খ 'ক' নং হতে, AB = 2 একক

$\angle ACB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

সুতরাং $A + B = 90°$

চিত্র হতে, $\cos A = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2}$

$\cos B = \frac{\sqrt{2 - x^2}}{2}$

$\sin A = \frac{\sqrt{2 - x^2}}{2}$

$\sin B = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2}$

বামপক্ষ = $\cos(A + B) = \cos 90° = 0$

ডানপক্ষ = $\cos A\cos B - \sin A\sin B$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{2} - \frac{\sqrt{2-x^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{(x^2+2)(2-x^2)}}{4} - \frac{\sqrt{(x^2+2)(2-x^2)}}{4}$$
$$= 0$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্র হতে, $\cos\theta = \frac{\sqrt{x^2+2}}{2}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2-x^2}}{2}$$

প্রদত্ত সমীকরণ,

$$(2-x^2) - 3\sqrt{x^2+2} = 0$$

বা, $4.\left(\frac{\sqrt{2-x^2}}{2}\right)^2 - 3.2\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{2}\right) = 0$

বা, $4\sin^2\theta - 6\cos\theta = 0$

বা, $4(1-\cos^2\theta) - 6\cos\theta = 0$

বা, $4 - 4\cos^2\theta - 6\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

বা, $(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$

বা, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta + 2 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ বা, $\cos\theta = -2$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ [এটি সম্ভব নয়]

[$-1 \le \cos\theta \le 1$]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১২ $\cot A + \operatorname{cosec} A = m$, $3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = n$, যখন, $0 < \theta < 2\pi$. *[মির্জা আহমেদ ইস্পাহানি উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম ।/ প্রশ্ন নং ৭]*

ক. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 কি.মি. হলে এর পৃষ্ঠের যে দুটি স্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে 11। কোণ তৈরি করে, তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin A = \frac{2m}{m^2+1}$ ৪

গ. $n = \frac{1}{2}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $r = 6400$ কি.মি.

$$\theta = 11' = \left(\frac{11}{60}\right)^0$$
$$= \frac{11}{60}\times\frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$\therefore$ স্থান দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব, S = বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য
$$= r\theta$$
$$= 6400\times\frac{11}{60}\times\frac{\pi}{180}$$
$$= 20.479 \text{ কি.মি.} \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $\cot A + \operatorname{cosec} A = m$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A} = m$

বা, $\frac{\cos A + 1}{\sin A} = m$

বা, $\frac{(\cos A + 1)^2}{\sin^2 A} = m^2$

বা, $\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A} = m^2$

বা, $\frac{(1+\cos A)^2}{(1+\cos A)(1-\cos A)} = m^2$

বা, $\frac{1+\cos A}{1-\cos A} = m^2$

বা, $\frac{1+\cos A + 1 - \cos A}{1+\cos A - 1 + \cos A} = \frac{m^2+1}{m^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\frac{2}{2\cos A} = \frac{m^2+1}{m^2-1}$

বা, $\cos A = \frac{m^2-1}{m^2+1}$

বা, $\cos^2 A = \frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}$

বা, $1 - \sin^2 A = \frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}$

বা, $\sin^2 A = 1 - \frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}$

বা, $\sin^2 A = \frac{(m^2+1)^2 - (m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}$

বা, $\sin^2 A = \frac{4m^2.1}{(m^2+1)^2}$

বা, $\sin A = \frac{2m}{m^2+1}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $n = 3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta$

প্রশ্নমতে,

$$3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

বা, $3\cos^2\theta - 2(1-\cos^2\theta) = \frac{1}{2}$

বা, $3\cos^2\theta - 2 + 2\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

বা, $5\cos^2\theta = 2 + \frac{1}{2}$

বা, $5\cos^2\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

এখন, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

আবার, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{4}$

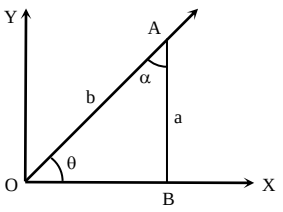
বা, $\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত $0 < \theta < 2\pi$ সীমার মধ্যে নির্ণেয় সমাধান,

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১৩



[আগ্রাবাদ সরকারি কলোনী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ হয় তবে,
$(\sec\theta - \cos\alpha)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\alpha)(\tan\theta + \cot\alpha)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $\frac{\sqrt{3}a}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = 2$ হয়, তাহলে θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

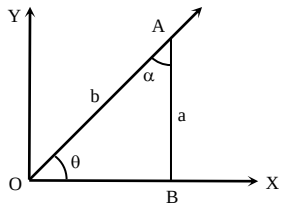
ক $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$= \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{6}$ [□ ৪র্থ চতুর্ভাগে $\tan\theta$ ঋণাত্মক]

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

খ দেওয়া আছে,



$a = 1, b = \sqrt{2}$

$\therefore OB = \sqrt{b^2 - a^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1}$

$= \sqrt{2 - 1}$

$= 1$

চিত্রে হতে, $\sec\theta = \frac{OA}{OB}$

$= \frac{b}{OB}$

$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{a}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{cosec}\theta = \frac{OA}{AB} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\sin\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{1}{1} = 1$

$\cot\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{1}{1} = 1$

প্রদত্ত রাশি $= (\sec\theta - \cos\alpha)(\text{cosec}\theta - \sin\alpha)(\tan\theta + \cot\alpha)$

$= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1 + 1)$

$= \frac{2-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2-1}{\sqrt{2}} \cdot 2$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2$

$= \frac{1}{2} \cdot 2$

$= 1$ **(Ans.)**

গ $\frac{\sqrt{3}a}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = 2$

বা, $\frac{\sqrt{3}a}{b} + \frac{\sqrt{b^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}}{b} = 2$

বা, $\sqrt{3} \cdot \frac{a}{b} + \frac{b\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}}{b} = 2$

বা, $\sqrt{3} \cdot \sin\theta + \sqrt{1 - \sin^2\theta} = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta = 2 - \cos\theta$

বা, $3\sin^2\theta = (2 - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $3(1 - \cos^2\theta) = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $3 - 3\cos^2\theta = 4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta)^2 - 2.2\cos\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১৪ $\cot A + \text{cosec}A = m$, $3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = n$, যখন $0 < \theta < 2\pi$.

[বান্দরবান সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বান্দরবান ।/ প্রশ্ন নং ৭]

ক. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 কিলোমিটার হলে, এর পৃষ্ঠের যে দুটি স্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে 11′ কোণ তৈরি করে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sin A = \frac{2m}{m^2 + 1}$ ৪

গ. $n = \frac{1}{2}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.

পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 11' = \left(\frac{11}{60}\right)^\circ$

$= \frac{11}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore$ স্থানদ্বয়ের দূরত্ব, S = চাপের দৈর্ঘ্য $= r\theta$

$= 6440 \times \frac{11}{60} \times \frac{\pi}{180}$ কি.মি.

$= 20.6066$ কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\cot A + \text{cosec}A = m$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A} = m$

বা, $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = m$

বা, $\frac{(1 + \cos A)^2}{\sin^2 A} = m^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 + \cos A)(1 + \cos A)}{1 - \cos^2 A} = m^2$

বা, $\frac{(1 + \cos A)(1 + \cos A)}{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} = m^2$

বা, $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = m^2$

বা, $\frac{1 + \cos A + 1 - \cos A}{1 + \cos A - 1 + \cos A} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\cos A} = \frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}$

বা, $\cos A = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$

বা, $\cos^2 A = \frac{(m^2 - 1)^2}{(m^2 + 1)^2}$

বা, $1 - \sin^2 A = \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{m^4 + 2m^2 + 1}$

বা, $1 - \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{m^4 + 2m^2 + 1} = \sin^2 A$

বা, $\sin^2 A = \frac{m^4 + 2m^2 + 1 - m^4 + 2m^2 - 1}{m^4 + 2m^2 + 1}$

বা, $\sin^2 A = \frac{4m^2}{(m^2 + 1)^2}$

$\therefore \sin A = \frac{2m}{m^2 + 1}$ [বর্গমূল করে] **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = n$ এবং $n = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad 3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

বা, $3\cos^2\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = \frac{1}{2}$

বা, $3\cos^2\theta - 2 + 2\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

বা, $5\cos^2\theta = \frac{1}{2} + 2$

বা, $5\cos^2\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{4}$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4}$

$\therefore \quad \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ **(Ans.)**