ci xÞv^xÆe®ÿjv, %Ljv‡bi ˆewkó¨ i xÞv, KÅ‡bvU K‡Rmn kxÿ©bxq Õ›zmg‡Ri ci xÞv%‡s gGyi/ ˆU‡Ýi cÉ‡v
cÿ‡Z mgvab AaÅvqwfwËK ˆ¨ I qvnG‡Gi %à‡vAbkxj b Ki ‡Z Zvg %‰AaÅvqwU ^^ ‡K ˆh‡K‡vmRbkxj i Pbvg¨jK
cÉkœ mgvab ÿvLGz cvi ‡e mnGRB|

প্রশ্ন ▶ ১ $x^{\frac{1}{p}} = y^{\frac{1}{q}} = z^{\frac{1}{r}}$, m = 2, n = 3 এবং $g^2 = h^3$

◀*সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [ঢাকা বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ২]*

ক. $3 + 7x - 5x^2 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$ ৪

গ. xyz = 1 হলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^q + a^{-r} + 1} + \frac{1}{a^r + a^{-p} + 1} + \frac{1}{a^p + a^{-q} + 1} = 1$$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3 + 7x - 5x^2 = 0$ অর্থাৎ, $-5x^2 + 7x + 3 = 0$

সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$

সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = -5, b = 7, c = 3$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = 7^2 - 4(-5) . 3 = 49 + 60$

$= 109 > 0$ কিন্তু পূর্ণ বর্গ নয়।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

খ দেওয়া আছে, m = 2

n = 3

এবং $g^2 = h^3$

এখন,

$$\text{বামপক্ষ} = \left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$= \left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ [m ও n এর মান বসিয়ে]}$$

$$= \left(\frac{g^3}{h^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{h^2}{g^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{g^3}{g^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{h^2}{h^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= g^{\frac{1}{2}} + (h^{-1})^{\frac{1}{3}} = \sqrt{g} + h^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{g} + \left(h^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt[3]{h}} \text{ (প্রমাণিত)}$$

[বি.দ্রঃ প্রশ্নে ভুল আছে, বামপক্ষে $\left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{n}{m}}$ এর স্থলে $\left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{n}{m}}$ হবে]

গ দেওয়া আছে, $x^{\frac{1}{p}} = y^{\frac{1}{q}} = z^{\frac{1}{r}}$

ধরি, $x^{\frac{1}{p}} = y^{\frac{1}{q}} = z^{\frac{1}{r}} = k$

তাহলে, $x^{\frac{1}{p}} = k$

$\therefore \quad x = k^p$

একইভাবে, $y = k^q$, $z = k^r$

আবার, xyz = 1

$\therefore \quad k^p . k^q . k^r = 1$

বা, $k^{p+q+r} = k^0$

$\therefore \quad p + q + r = 0$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{a^q + a^{-r} + 1} + \frac{1}{a^r + a^{-p} + 1} + \frac{1}{a^p + a^{-q} + 1}$$

$$= \frac{1}{a^q + \frac{1}{a^r} + 1} + \frac{1}{a^r + a^{-p} + 1} + \frac{1}{a^p + a^{-q} + 1}$$

$$= \frac{a^r}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{1}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{1}{a^p + \frac{1}{a^q} + 1}$$

$[\because p + q + r = 0 \therefore q + r = -p]$

$$= \frac{a^r}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{1}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{a^q}{a^{p+q} + a^q + 1}$$

$$= \frac{a^r}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{1}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{a^q}{a^{-r} + a^q + 1}$$

$$= \frac{a^r}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{1}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{a^q}{\frac{1}{a^r} + a^q + 1}$$

$$= \frac{a^r}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{1}{1 + a^r + a^{q+r}} + \frac{a^q.a^r}{1 + a^r + a^{q+r}}$$

$$= \frac{a^r + 1 + a^{q+r}}{1 + a^r + a^{q+r}} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{1}{a^q + a^{-r} + 1} + \frac{1}{a^r + a^{-p} + 1} + \frac{1}{a^p + a^{-q} + 1} = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ২ $A = \frac{1}{y^q + y^{-r} + 1} + \frac{1}{y^r + y^{-p} + 1} + \frac{1}{y^p + y^{-q} + 1}$

এবং $\log_e(3 + x) = 2 \log_e x$. *[রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ২]*

ক. $\log_{\sqrt{27}} m = 3\frac{1}{3}$ হলে, m-এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. p + q + r = 0 হলে প্রমাণ কর যে, A = 1. ৪

গ. ২য় সমীকরণ হতে প্রমাণ কর যে, $x = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$. ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\log_{\sqrt{27}} m = 3\frac{1}{3}$

বা, $\log_{\sqrt{27}} m = \frac{10}{3}$

বা, $m = (\sqrt{27})^{\frac{10}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}} = 3^5 = 243$

$\therefore \quad m = 243$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$$A = \frac{1}{y^q + y^{-r} + 1} + \frac{1}{y^r + y^{-p} + 1} + \frac{1}{y^p + y^{-q} + 1}$$

$$= \frac{1}{y^q + \frac{1}{y^r} + 1} + \frac{1}{y^r + y^{-p} + 1} + \frac{1}{y^p + y^{-q} + 1}$$

$$= \frac{y^r}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{1}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{1}{y^p + \frac{1}{y^q} + 1}$$

[∵ $p + q + r = 0$ ∴ $q + r = -p$]

$$= \frac{y^r}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{1}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{y^q}{y^{p+q} + y^q + 1}$$

$$= \frac{y^r}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{1}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{y^q}{y^{-r} + y^q + 1}$$

$$= \frac{y^r}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{1}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{y^q}{\frac{1}{y^r} + y^q + 1}$$

$$= \frac{y^r}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{1}{1 + y^r + y^{q+r}} + \frac{y^q.y^r}{1 + y^r + y^{q+r}}$$

$$= \frac{y^r + 1 + y^{q+r}}{1 + y^r + y^{q+r}} = \frac{1 + y^r + y^{q+r}}{1 + y^r + y^{q+r}} = 1$$

∴ $A = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\log_e(3 + x) = 2 \log_e x$

বা, $\log_e(3 + x) = \log_e x^2$

বা, $3 + x = x^2$

বা, $x^2 - x - 3 = 0$

বা, $x^2 - 2 . x . \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

বা, $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ [ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম অসংজ্ঞায়িত]

বা, $x = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}$

∴ $x = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩ $A = 2 \log_k x - \log_k(3 + x)$, $B = 1 + \log_p qr$, $C = 1 + \log_q rp$ এবং $D = 1 + \log_r pq$. *[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ৩]*

ক. $C = 3$ হলে, দেখাও যে, $\frac{p}{q} = \frac{q}{r}$. ২

খ. $A = 0$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $B^{-1} + C^{-1} + D^{-1} = 1$. ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $C = 3$ হলে, $1 + \log_q rp = 3$

বা, $\log_q rp = 2$

বা, $rp = q^2$

বা, $rp = q.q$

∴ $\frac{p}{q} = \frac{q}{r}$ **(দেখানো হলো)**

খ $A = 0$ হলে, $2 \log_k x - \log_k(3 + x) = 0$

বা, $\log_k x^2 - \log_k (3 + x) = 0$

বা, $\log_k \frac{x^2}{3 + x} = 0$

বা, $\frac{x^2}{3 + x} = k^0 = 1$

বা, $x^2 = 3 + x$

বা, $x^2 - x - 3 = 0$

বা, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-3)}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2}$

$= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$

যেহেতু ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম সংজ্ঞায়িত নয়।

∴ $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $B = 1 + \log_p qr$

বা, $B = \log_p p + \log_p qr$

বা, $B = \log_p pqr$

বা, $p^B = pqr$

বা, $p = (pqr)^{\frac{1}{B}}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $q = (pqr)^{\frac{1}{C}}$ ... ... (ii)

এবং $r = (pqr)^{\frac{1}{D}}$ ... ... (iii)

(i) × (ii) × (iii) থেকে পাই,

$pqr = (pqr)^{\frac{1}{B}} .(pqr)^{\frac{1}{C}} .(pqr)^{\frac{1}{D}}$

বা, $(pqr)^1 = (pqr)^{\frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}}$

বা, $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} = 1$

∴ $B^{-1} + C^{-1} + D^{-1} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪ $A = 36y^2 - 8y - 5$, $B = 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$ এবং $C = \log_4 \left(14 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right)$.

◀সমন্বিত অধ্যায় ২, ৫ ও ৯ [বরিশাল বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ২]

ক. $A = 0$ হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে B কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $C = 2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $A = 0$ হলে,

$36y^2 - 8y - 5 = 0$

∴ নিশ্চায়ক $= (-8)^2 - 4.36(-5)$

$= 64 + 720$

$= 784$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$

ধরি, $f(a) = 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$

$f(-5) = 2(-5)^3 + 3(-5)^2 - 32(-5) + 15 = 0$

∴ $(a + 5)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

প্রদত্ত রাশি $= 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$

$= 2a^3 + 10a^2 - 7a^2 - 35a + 3a + 15$

$= 2a^2(a + 5) - 7a\,(a + 5) + 3(a + 5)$
$= (a + 5)\,(2a^2 - 7a + 3)$
$= (a + 5)\,(2a^2 - 6a - a + 3)$
$= (a + 5)\,\{2a(a - 3) - 1\,(a - 3)\}$
$= (a + 5)\,(a - 3)\,(2a - 1)$ **(Ans.)**

গ $C = 2$ হলে, $2 = \log_4\left(14 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right)$
বা, $4^2 = 14 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}$
বা, $16 - 14 = \sqrt{x^2 - 12x + 36}$
বা, $2 = \sqrt{x^2 - 12x + 36}$
বা, $4 = x^2 - 12x + 36$
বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$
বা, $x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$
বা, $x(x - 8) - 4\,(x - 8) = 0$
বা, $(x - 8)\,(x - 4) = 0$
হয় $x - 8 = 0$ অথবা, $x - 4 = 0$
বা, $x = 8$ বা, $x = 4$
$\therefore$ $x = 4, 8$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫ $p = 1 + \log_a(bc),\ q = 1 + \log_b(ca),\ r = 1 + \log_c(ab)$ এবং $x^2 + y^2 = 7xy$ *[সকল বোর্ড-২০১৮ □প্রশ্ন নং ২]*

ক. p^{-1} এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log\left(\frac{x + y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p = 1 + \log_a bc$
বা, $p = \log_a a + \log_a bc$
বা, $p = \log_a abc$
বা, $\frac{1}{p} = \frac{1}{\log_a abc}$
$\therefore$ $p^{-1} = \log_{abc} a$ [$\because \log_b a \times \log_a b = 1$] **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p = 1 + \log_a bc$
বা, $p = \log_a a + \log_a bc$
বা, $p = \log_a abc$
বা, $a^p = abc$
বা, $a = (abc)^{\frac{1}{p}}$ ... ... (i)
অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{q}}$ ... ... (ii)
এবং $c = (abc)^{\frac{1}{r}}$ ... ... (iii)
(i) × (ii) × (iii) থেকে পাই,
$abc = (abc)^{\frac{1}{p}}.(abc)^{\frac{1}{q}}.(abc)^{\frac{1}{r}}$
বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}$
$\therefore$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 = 7xy$
বা, $x^2 + y^2 + 2xy = 7xy + 2xy$ [উভয় পক্ষে 2xy যোগ করে]
বা, $(x + y)^2 = 9xy$
বা, $\frac{(x + y)^2}{9} = xy$
বা, $\left(\frac{x + y}{3}\right)^2 = xy$
বা, $\log\left(\frac{x + y}{3}\right)^2 = \log(xy)$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]
বা, $2\log\left(\frac{x + y}{3}\right) = \log(xy)$
বা, $\log\left(\frac{x + y}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(xy) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$
[□ $\log(M \times N) = \log M + \log N$]
$\therefore \log\left(\frac{x + y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬ $P = x^{a-b},\ Q = x^{b-c},\ R = x^{c-a}$ *[ঢাকা বোর্ড-২০১৭ □প্রশ্ন নং ২]*

ক. $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$ হলে, দেখাও যে, $b + c = 2a.$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1 + Q + P^{-1}} + \frac{1}{1 + R + Q^{-1}} + \frac{1}{1 + P + R^{-1}} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(c + a)\log(PQ) + (a + b)\log(QR) + (b + c)\log(PR) = 0$ ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = x^{a-b},\ Q = x^{b-c},\ R = x^{c-a}$
প্রশ্নমতে, $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$
বা, $\log\left(\frac{x^{a-b}}{x^{c-a}}\right) = 0$
বা, $\log x^{a-b-c+a} = \log 1$ [□ $\log 1 = 0$]
বা, $x^{2a-b-c} = 1$
বা, $x^{2a-b-c} = x^0$ [□$x^0 = 1$]
বা, $2a - b - c = 0$
$\therefore$ $b + c = 2a$ **(দেখানো হলো)**

খ বামপক্ষ $= \frac{1}{1 + Q + P^{-1}} + \frac{1}{1 + R + Q^{-1}} + \frac{1}{1 + P + R^{-1}}$
$= \frac{1}{1 + x^{b-c} + (x^{a-b})^{-1}} + \frac{1}{1 + x^{c-a} + (x^{b-c})^{-1}} + \frac{1}{1 + x^{a-b} + (x^{c-a})^{-1}}$ [মান বসিয়ে]
$= \frac{x^{-b}}{x^{-b}(1 + x^{b-c} + x^{b-a})} + \frac{x^{-c}}{x^{-c}(1 + x^{c-a} + x^{c-b})} + \frac{x^{-a}}{x^{-a}(1 + x^{a-b} + x^{a-c})}$
$= \frac{x^{-b}}{x^{-b} + x^{-c} + x^{-a}} + \frac{x^{-c}}{x^{-c} + x^{-a} + x^{-b}} + \frac{x^{-a}}{x^{-a} + x^{-b} + x^{-c}}$
$= \frac{x^{-b} + x^{-c} + x^{-a}}{x^{-a} + x^{-b} + x^{-c}}$
$= 1 =$ ডানপক্ষ
$\therefore \frac{1}{1 + Q + P^{-1}} + \frac{1}{1 + R + Q^{-1}} + \frac{1}{1 + P + R^{-1}} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ বামপক্ষ $= (c + a)\log(PQ) + (a + b)\log(QR) + (b + c)\log(PR)$
$= (c + a)\log(x^{a-b}.x^{b-c}) + (a + b)\log(x^{b-c}.x^{c-a}) + (b + c)\log(x^{a-b}.x^{c-a})$
$= (c + a)\log(x^{a-b+b-c}) + (a + b)\log(x^{b-c+c-a}) + (b + c)\log(x^{a-b+c-a})$
$= \log x^{(a-c)(a+c)} + \log x^{(b-a)(b+a)} + \log x^{(c-b)(c+b)}$
$= \log(x^{a^2-c^2}.x^{b^2-a^2}.x^{c^2-b^2})$
$= \log(x^{a^2-c^2+b^2-a^2+c^2-b^2})$

$= \log x^0$
$= \log 1$ [□ $x^0 = 1$]
$= 0$ [□ $\log 1 = 0$]
= ডানপক্ষ
$\therefore (c + a)\log(PQ) + (a + b)\log(QR) + (b + c)\log(PR) = 0$
(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৭ $a = \log_p(qr),\ b = \log_q(rp),\ c = \log_r(pq)$ এবং $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

◀সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৯ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $c = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{pq}$. ২

খ. $F(x)$ কে $x - u$ এবং $x - v$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে, $u \neq v$, তবে দেখাও যে, $u^2 + v^2 + uv + 6u + 6v + 11 = 0$.৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$. ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $c = \log_r(pq)$
প্রশ্নমতে, $c = 2$
বা, $\log_r(pq) = 2$
বা, $r^2 = pq$ [□ $\log_a x = y$ হলে, $a^y = x$]
$\therefore$ $r = \sqrt{pq}$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
এখন, $F(x)$ কে $(x - u)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে
$F(u) = u^3 + 6u^2 + 11u + 6$
এবং $(x - v)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে
$F(v) = v^3 + 6v^2 + 11v + 6$
প্রশ্নমতে, $F(u) = F(v)$
বা, $u^3 + 6u^2 + 11u + 6 = v^3 + 6v^2 + 11v + 6$
বা, $u^3 - v^3 + 6u^2 - 6v^2 + 11u - 11v = 0$
বা, $(u - v)(u^2 + uv + v^2) + 6(u + v)(u - v) + 11(u - v) = 0$
বা, $(u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6u + 6v + 11) = 0$
$\therefore$ $u^2 + v^2 + uv + 6u + 6v + 11 = 0$ [□ $u \neq v$ তাই $u - v \neq 0$]
(দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $a = \log_p(qr)$, $b = \log_q(rp)$ এবং $c = \log_r(pq)$
এখন, $a + 1 = \log_p(qr) + 1 = \log_p(qr) + \log_p p = \log_p(pqr)$
একইভাবে,
$b + 1 = \log_q(pqr)$
$c + 1 = \log_r(pqr)$
বামপক্ষ $= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$
$= \frac{1}{\log_p(pqr)} + \frac{1}{\log_q(pqr)} + \frac{1}{\log_r(pqr)}$
$= \log_{(pqr)}p + \log_{(pqr)}q + \log_{(pqr)}r = \log_{(pqr)}(pqr) = 1$
= ডানপক্ষ
$\therefore$ $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $A = p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2$ এবং $f(x) = \ln(1 + x);\ x \geq 0$.

[সিলেট বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $(25)^x = (125)^y$ হলে $x : y$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A = 0$ হলে দেখাও যে, $3p^3 + 9p = 8$ ৪

গ. $f(x)$ এর বর্ণনাসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

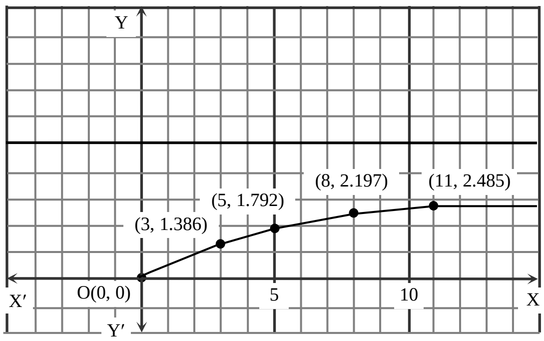
ক দেওয়া আছে, $(25)^x = (125)^y$
বা, $(5^2)^x = (5^3)^y$ বা, $5^{2x} = 5^{3y}$ বা, $2x = 3y$ বা, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$
$\therefore$ $x : y = 3 : 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2$
প্রশ্নমতে, $A = 0$
বা, $p^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2 = 0$ বা, $p^2 = 3^{\frac{2}{3}} - 2 + 3^{\frac{-2}{3}}$
বা, $p^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}} + \left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^2$
বা, $p^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)^2$
বা, $p = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}$
বা, $p^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]
বা, $p^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)$
বা, $p^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}.p$ $\left[□\ 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}} = p\right]$
বা, $p^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3.3^0.p$
বা, $p^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3p$ [□ $3^0 = 1$]
বা, $p^3 = \frac{9 - 1 - 9p}{3}$
বা, $3p^3 = 8 - 9p$
$\therefore$ $3p^3 + 9p = 8$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ln(1 + x);\ x \geq 0$
x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো:

x	0	3	5	8	11
y	0	1.386	1.792	2.197	2.485

এখন, ছক কাগজে x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক ধরে ছকে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করি। তাহলে প্রাপ্ত বক্ররেখাই $y = f(x) = \ln(1 + x)$ এর লেখ।



প্রশ্ন ▶ ৯ $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ *[বরিশাল বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ৩]*

ক. $a = c$ হলে, দেখাও যে, $x = z$. ২

খ. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$. ৪

গ. abc = 1 হলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{p^{-y} + p^z + 1} + \frac{1}{p^{-z} + p^x + 1} = 1.$$ ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

$\therefore \sqrt[x]{a} = \sqrt[z]{c}$ বা, $a^{\frac{1}{x}} = c^{\frac{1}{z}}$

বা, $c^{\frac{1}{x}} = c^{\frac{1}{z}}$ [□ a = c]

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{z}$

$\therefore x = z$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ বা, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b}$

$\therefore a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}}$

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ হলে আমরা পাই, $a^2 = b^3$

$\therefore a = b^{\frac{3}{2}}$

আবার, $a^2 = b^3$ বা, $b^3 = a^2$

$\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}} + \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}}$

$= \frac{a^{3/2}}{a} + \frac{b^{2/3}}{b} \quad \left[\because a = b^{3/2}, b = a^{2/3}\right]$

$= a^{\frac{3}{2}-1} + b^{\frac{2}{3}-1}$

$= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

$\therefore \sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b}$ এবং $\sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

বা, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}}$ বা, $b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$

বা, $a = b^{\frac{x}{y}}$ $\therefore b = c^{\frac{y}{z}}$

বা, $a = \left(c^{\frac{y}{z}}\right)^{\frac{x}{y}}$

$\therefore a = c^{\frac{x}{z}}$

প্রশ্নমতে, abc = 1

$c^{\frac{x}{z}}.c^{\frac{y}{z}}.c = 1$

বা, $c^{\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1} = c^0$ বা, $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 = 0$

বা, $\frac{x+y+z}{z} = 0$ বা, $x + y + z = 0$

$\therefore y + z = -x$ এবং $x + z = -y$

বামপক্ষ $= \frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{p^{-y} + p^z + 1} + \frac{1}{p^{-z} + p^x + 1}$

$= \frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{\frac{1}{p^y} + p^z + 1} + \frac{1}{\frac{1}{p^z} + p^x + 1}$

$= \frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{p^y}{1 + p^y.p^z + p^y} + \frac{p^z}{1 + p^x.p^z + p^z}$

$= \frac{1}{p^{y+z} + p^y + 1} + \frac{p^y}{1 + p^{y+z} + p^y} + \frac{p^z}{1 + p^{x+z} + p^z}$

$= \frac{1}{p^{y+z}+p^y+1} + \frac{p^y}{1+p^{y+z}+p^y} + \frac{p^z}{1+p^{-y}+p^z}$ [∵ x + z = − y]

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^z}{1 + \frac{1}{p^y} + p^z}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y.p^z}{p^y + 1 + p^y.p^z}$

$= \frac{1}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^y}{1 + p^y + p^{y+z}} + \frac{p^{y+z}}{1 + p^y + p^{y+z}}$

$= \frac{1 + p^y + p^{y+z}}{1 + p^y + p^{y+z}} = 1$ = ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{p^{-x}+p^y+1} + \frac{1}{p^{-y}+p^z+1} + \frac{1}{p^{-z}+p^x+1} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১০ $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$

[সিলেট বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $(16)^{2x} = 4^{x+1}$ হলে, x = কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে,

$(q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c = 0.$ ৪

গ. $f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(16)^{2x} = 4^{x+1}$

বা, $(4^2)^{2x} = 4^{x+1}$

বা, $4^{4x} = 4^{x+1}$

বা, $4x = x + 1$

বা, $3x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$

বামপক্ষ $= (q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c$

$= \log_k a^{q-r} + \log_k b^{r-p} + \log_k c^{p-q}$

$= \log_k(xy^{p-1})^{q-r} + \log_k(xy^{q-1})^{r-p} + \log_k(xy^{r-1})^{p-q}$

$= \log_k x^{q-r} + \log_k y^{(p-1)(q-r)} + \log_k x^{r-p} + \log_k y^{(q-1)(r-p)} + \log_k x^{p-q} + \log_k y^{(r-1)(p-q)}$

$= \log_k(x^{q-r}.x^{r-p}.x^{p-q}) + \log_k\{y^{(p-1)(q-r)}.y^{(q-1)(r-p)}.y^{(r-1)(p-q)}\}$

$= \log_k(x^{q-r+r-p+p-q}) + \log_k(y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q})$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0 = \log_k 1 + \log_k 1 = 0$ = ডানপক্ষ

$\therefore (q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ ধরি, $y = f(x) = \ell n\frac{4+x}{4-x}$

DœPZi MwYZ

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়, সেহেতু, $\frac{4+x}{4-x} > 0$ যদি (i) $4 + x > 0$ এবং $4 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $4 + x < 0$ এবং $4 - x < 0$ হয়

শর্ত (i) হতে পাই, $x > -4$ এবং $-x > -4$

$\therefore x < 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -4 < x\} \cap \{x : x < 4\}$

$= (-4, \infty) \cap (-\infty, 4)$

$= (-4, 4)$

শর্ত (ii) হতে পাই, $x < -4$ এবং $-x < -4$

$\therefore x > 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -4\} \cap \{x : x > 4\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = শর্ত (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-4, 4) \cup \varnothing$

$= (-4, 4)$

রেঞ্জ : $y = f(x) = \ell n \frac{4+x}{4-x}$

বা, $e^y = \frac{4+x}{4-x}$

বা, $4 + x = 4e^y - xe^y$

বা, $x + xe^y = 4e^y - 4$

বা, $x(1 + e^y) = 4(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{4(e^y-1)}{e^y+1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_f = (-4, 4)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$

প্রশ্ন ▶১১ $P = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$ এবং $r = xy^{c-1}$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হলে দেখাও যে, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$ ২

খ. প্রমাণ কর যে,

$(a + b) \log \frac{p}{q} + (b + c) \log \frac{q}{r} + (c + a) \log \frac{r}{p} = 0$ ৪

গ. $(b - c) \log p + (c - a) \log q + (a - b) \log r$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.১ এর উদাহরণ ১৬ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০৪

খ দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $r = xy^{c-1}$

বামপক্ষ $= (b + a)\log \frac{p}{q} + (c + b)\log \frac{q}{r} + (a + c)\log \frac{r}{p}$

$= (b + a)\log \frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}} + (c + b)\log \frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}} + (a + c)\log \frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}$

$= (b + a)\log y^{a-b} + (c + b)\log y^{b-c} + (a + c)\log y^{c-a}$

$= (a + b)(a - b)\log y + (b + c)(b - c)\log y + (a + c)(c - a)\log y$

$= (a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2)\log y$

$= 0 \times \log y$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore (b + a) \log \frac{p}{q} + (c + b)\log \frac{q}{r} + (a + c) \log \frac{r}{p} = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ $(b - c) \log p + (c - a)\log q + (a - b)\log r$

$= \log p^{b-c} + \log q^{c-a} + \log r^{a-b}$

$= \log(xy^{a-1})^{b-c} + \log(xy^{b-1})^{c-a} + \log(xy^{c-1})^{a-b}$

$= \log x^{b-c} + \log y^{ab-ac-b+c} + \log x^{c-a} + \log y^{bc-ab-c+a} + \log x^{a-b} + \log y^{ac-bc-a+b}$

$= \log x^{b-c} + \log x^{c-a} + \log x^{a-b} + \log y^{ab-ac-b+c} + \log y^{bc-ab-c+a} + \log y^{ac-bc-a+b}$

$= \log(x^{b-c}.x^{c-a}.x^{a-b}) + \log(y^{ab-ac-b+c}.y^{bc-ab-c+a}.y^{ac-bc-a+b})$

$= \log x^{b-c+c-a+a-b} + \log y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ac-bc-a+b}$

$= \log x^0 + \log y^0$

$= \log 1 + \log 1$

$= 0 + 0 = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১২ (i) $A = \frac{3^{3y-1}}{9^{x+y}}$, $B = \frac{4^{x+3y}}{16^{2x+\frac{5}{2}}}$

(ii) একটি আয়তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল অন্য একটি বর্গাকার বাগানের সমান। আয়তাকার বাগানটির পরিসীমা ও কর্ণ যথাক্রমে 56 মিটার ও 20 মিটার।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৬ ও ৯ [কুমিল্লা ক্যাডেট কলেজ, কুমিল্লা প্রশ্ন নং ২]

ক. সমাধান কর : $a(x + b) < c$ যখন $x, a \neq 0$ ২

খ. (x, y) নির্ণয় কর যখন $A = 1$ এবং $B = 4$ ৪

গ. বর্গাকার বাগানটির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য কত? ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a(x + b) < c$

$\Rightarrow x + b < \frac{c}{a}$

$\Rightarrow x < \frac{c}{a} - b$ যেখানে $x, a \neq 0$ **(Ans.)**

খ $A = \frac{3^{3y-1}}{9^{x+y}} = 1$

বা, $\frac{3^{3y-1}}{3^{2(x+y)}} = 1$

বা, $3^{3y-1-2x-2y} = 1$

বা, $3^{y-1-2x} = 3^0$

বা, $y - 1 - 2x = 0$ ... ... (i)

এখন, $B = \frac{4^{x+3y}}{16^{2x+\frac{5}{2}}} = 4$

বা, $\frac{4^{x+3y}}{4^{2(2x+5/2)}} = 4$

বা, $\frac{4^{x+3y}}{4^{4x+5}} = 4$

বা, $4^{x+3y-4x-5} = 4$

বা, $4^{3y-3x-5} = 4^1$

বা, $3y - 3x - 5 = 1$

বা, $3y - 3x - 6 = 0$ ... ... (ii)

(i) থেকে পাই, $y = 2x + 1$

(ii) থেকে পাই, $3(2x + 1) - 3x - 6 = 0$

বা, $6x + 3 - 3x - 6 = 0$

বা, $3x - 3 = 0$

বা, $3x = 3$

বা, $x = 1$

$\therefore y = 2 \times 1 + 1 = 3.$

$\therefore$ $(x, y) = (1, 3)$ **(Ans.)**

গ ধরি, আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য = x মিটার

এবং প্রস্থ = y মিটার

$\therefore$ আয়তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = xy বর্গমিটার।

এবং বাগানের পরিসীমা = $2(x + y)$ মিটার।

প্রশ্নমতে, $2(x + y) = 56$

বা, $x + y = \frac{56}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $x + y = 28$ ... ... (i)

আমরা জানি, আয়তাকার বাগানের,

(কর্ণের দৈর্ঘ্য)^2 = (দৈর্ঘ্য)^2 + (প্রস্থ)^2

বা, $(20)^2 = x^2 + y^2$

বা, $400 = x^2 + y^2$

$\therefore$ $x^2 + y^2 = 400$ ... ... (ii)

আবার, আমরা জানি, $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

বা, $(28)^2 = 400 + 2xy$

বা, $784 = 400 + 2xy$

বা, $2xy = 784 - 400$

বা, $2xy = 384$

বা, $xy = \frac{384}{2}$

$\therefore$ $xy = 192$ ... ... (iii)

আয়তাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = 192 বর্গ মিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 192 বর্গ মিটার

ধরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ মি.

প্রশ্নমতে, $x^2 = 192$

বা, $(x)^2 = (8\sqrt{3})^2$

$\therefore$ $x = 8\sqrt{3}$

অর্থাৎ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $8\sqrt{3}$ মিটার। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ দৃশ্যকল্প: $f(x) = x^2 - 6x$, $P = a + b + c$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ২]

ক. $f(x) = e^{\frac{-|x|}{2}}$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর যখন $-1 < x < 0$। ২

খ. $\sqrt{f(x) + 15} - \sqrt{f(x) + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$ সমীকরণটির বীজ নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প অনুসারে যদি $\frac{ab \log_k(ab)}{p - c} = \frac{bc \log_k(bc)}{p - a} = \frac{ca \log_k(ca)}{p - b}$ হয় তবে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$ ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = e^{\frac{-|x|}{2}}$

$\therefore$ $f(-1) = e^{\frac{-|-1|}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

এবং $f(0) = e^{\frac{-|0|}{2}} = e^0 = 1$

$\therefore$ $-1 < x < 0$ ব্যবধিতে ফাংশনটির রেঞ্জ = $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 1\right)$

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১০১

গ দেওয়া আছে, $P = a + b + c$

এবং $\frac{ab \log_k(ab)}{p - c} = \frac{bc \log_k(bc)}{p - a} = \frac{ca \log_k(ca)}{p - b}$

বা, $\frac{ab \log_k(ab)}{a + b + c - c} = \frac{bc \log_k(bc)}{a + b + c - a} = \frac{ca \log_k(ca)}{a + b + c - b}$

বা, $\frac{ab \log_k(ab)}{a + b} = \frac{bc \log_k(bc)}{b + c} = \frac{ca \log_k(ca)}{c + a}$

ধরি, $\frac{ab \log_k ab}{a + b} = \frac{bc \log_k bc}{b + c} = \frac{ca \log_k ca}{c + a} = m$

তাহলে, $\log_k ab = \frac{m(a + b)}{ab}$

বা, $\log_k a + \log_k b = m\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $\log_k b + \log_k c = m\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)$ ... ... (ii)

এবং $\log_k c + \log_k a = m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ ... ... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই,

$2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = 2m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$\therefore$ $\log_k a + \log_k b + \log_k c = m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ... ... (iv)

আবার, (iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k c = m\left(\frac{1}{c}\right)$

বা, $c \log_k c = m$

$\therefore$ $\log_k c^c = m$

(iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k a = m\left(\frac{1}{a}\right)$

বা, $a \log_k a = m$

$\therefore$ $\log_k a^a = m$ [$\because r \log_k m = \log_k m^r$]

(iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k b = m\left(\frac{1}{b}\right)$

বা, $b \log_k b = m$

$\therefore$ $\log_k b^b = m$

সুতরাং, $\log_k a^a = \log_k b^b = \log_k c^c$

$\therefore$ $a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ $P = \sqrt[n]{m^2} + \sqrt[n]{m}$ একটি বীজগাণিতিক রাশি

এবং $\frac{1}{3x + 4} + \frac{1}{(3x + 4)^2} + \frac{1}{(3x + 4)^3}$ একটি ধারা।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৭ ও ৯ [সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট প্রশ্ন নং ৩]

ক. $3x^2 - 4x + 9 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $P = b - 1$ এবং $m = n = 3$ হলে দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ ৪

গ. $x = 1$ হলে ধারাটির ৭ম পদ এবং প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3x^2 - 4x + 9 = 0$ সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 3, b = -4$ এবং $c = 9$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times 3 \times 9$

$= 16 - 108 = -92 < 0$

সমীকরণটির মূলগুলো অবাস্ড়ব।

খ দেওয়া আছে, $P = b - 1$ এবং $m = n = 3$

তাহলে, $b - 1 = \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}$

বা, $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $b - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(b-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 3^2 + 3 + 3 . 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(b-1)$

$\left[\because 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} = b - 1\right]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 9 + 3 + 3.3^1(b-1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 - 12 - 9b + 9 = 0$

$\therefore$ $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত ধারাটি $\frac{1}{3x+4} + \frac{1}{(3x+4)^2} + \frac{1}{(3x+4)^3} + ...$

$x = 1$ বসিয়ে,

প্রাপ্ত ধারাটি, $\frac{1}{3 \times 1 + 4} + \frac{1}{(3 \times 1 + 4)^2} + \frac{1}{(3 \times 1 + 4)^3} + ...$

$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ $a = \frac{1}{7}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{7^2} \div \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির সপ্তম পদ $= \frac{1}{7} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{7-1}$

$= \frac{1}{7} \times \frac{1}{7^6} = \frac{1}{7^7}$ **(Ans.)**

আবার, n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[r < 1]$

প্রথম 10টি পদের সমষ্টি $S_{10} = \dfrac{\frac{1}{7}\left\{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{7}}$

$= \dfrac{\frac{1}{7^{11}}(7^{10} - 1)}{\frac{6}{7}}$

$= \frac{1}{6 \times 7^{10}}(7^{10} - 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৫ $P = a + b, Q = a - b$ এবং $R = 3x - 1$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ৯ [ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. x এর মান বের কর যখন $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ ২

খ. যদি $x = \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$ এবং $\sqrt[3]{PQ} = c$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$ ৪

গ. x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + ...$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-২৩(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০৯

খ দেওয়া আছে, $P = a + b, Q = a - b$ এবং $\sqrt[3]{PQ} = c$

এখন, $x = \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$

বা, $x = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$

বা, $x^3 = (\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b})^3$

$= (\sqrt[3]{a+b})^3 + (\sqrt[3]{a-b})^3 + 3\sqrt[3]{a+b}\sqrt[3]{a-b}$ $(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b})$

$= a + b + a - b + 3\sqrt[3]{(a+b)(a-b)} .x$

$\left[\because x = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}\right]$

$= 2a + 3\sqrt[3]{PQ}\,x$

$= 2a + 3cx$

$\therefore$ $x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $R = 3x - 1$

$\therefore$ ধারাটি $= \frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনীপাত, $r = \frac{1}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{(3x-1)^2} \times \frac{3x-1}{1}$

$= \frac{1}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x-1}\right| < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{3x-1} < 1$

$\therefore \frac{1}{3x-1} < 1$ অথবা, $\frac{1}{3x-1} > -1$

বা, $3x - 1 > 1$ বা, $3x - 1 < -1$

বা, $3x - 1 + 1 > 1 + 1$ বা, $3x < -1 + 1$

বা, $3x > 2$ বা, $3x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ $\therefore x < 0$

$\therefore$ $x > \frac{2}{3}$ অথবা $x < 0$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। **(Ans.)**

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x-1}}{1-\frac{1}{3x-1}} = \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1-1}{3x-1}} = \frac{1}{3x-2} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶১৬ $P = \frac{2x}{x-1}$ এবং $q = \log_k(1+x) - 2\log_k x$ হলে-

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [মনিপুর উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $2^P = 256$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $q = 0$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

গ. $6\sqrt{p} + 5\sqrt{\frac{1}{p}} = 13$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p = \frac{2x}{x-1}$

এখন, $2^p = 256$

বা, $2^{\left(\frac{2x}{x-1}\right)} = 2^8$

বা, $\frac{2x}{x-1} = 8$

বা, $8(x-1) = 2x$

বা, $8x - 8 = 2x$

বা, $8x - 2x = 8$

বা, $6x = 8$

বা, $x = \frac{8}{6}$

$\therefore x = \frac{4}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $q = 0 = \log_k(1+x) - 2\log_k(x)$

বা, $\log_k(1+x) = 2\log_k(x)$

বা, $\log_k(1+x) = \log_k x^2$ [$(\log_k P^r = r\log_k P)$]

বা, $1 + x = x^2$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $4x^2 - 4x - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2x-1)^2 = 5$

বা, $2x - 1 = \sqrt{5}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে]

বা, $2x = 1 + \sqrt{5}$

বা, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $p = \frac{2x}{x-1}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $6\sqrt{p} + 5\sqrt{\frac{1}{p}} = 13$

বা, $6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{2x}{x-1}}} - 13 = 0$

বা, $6a + \frac{5}{a} - 13 = 0$ [ধরি $\sqrt{\frac{2x}{x-1}} = a$]

বা, $6a + \frac{5}{a} = 13$

বা, $6a^2 + 5 = 13a$

বা, $6a^2 - 13a + 5 = 0$

বা, $6a^2 - 10a - 3a + 5 = 0$

বা, $2a(3a-5) - 1(3a-5) = 0$

$\therefore (3a-5)(2a-1) = 0$

হয়, $3a - 5 = 0$

বা, $3a = 5$

বা, $a = \frac{5}{3}$

বা, $\sqrt{\frac{2x}{x-1}} = \frac{5}{3}$

বা, $\frac{2x}{x-1} = \frac{25}{9}$

বা, $25x - 25 = 18x$

বা, $25x - 18x = 25$

বা, $7x = 25$

$\therefore x = \frac{25}{7}$

অথবা, $2a - 1 = 0$

বা, $2a = 1$

বা, $a = \frac{1}{2}$

বা, $\sqrt{\frac{2x}{x-1}} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{2x}{x-1} = \frac{1}{4}$

বা, $8x = x - 1$

বা, $7x = -1$

$\therefore x = -\frac{1}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{25}{7}$ হলে সমীকরণ (i) এর

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}}}$

$= 6\sqrt{\frac{50}{18}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{50}{18}}}$

$= 6\sqrt{\frac{25}{9}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{9}}}$

$= \frac{6.5}{3} + \frac{5.3}{5} = 10 + 3$

$= 13 =$ ডানপক্ষ

$\therefore x = \frac{25}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

আবার, $x = -\frac{1}{7}$ হলে, সমীকরণ (i) এর

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}}}$

$= 6\sqrt{\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{-8}{7}}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{\frac{-2}{7}}{\frac{-8}{7}}}}$

DœPZi MwYZ

$= 6\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 6.\frac{1}{2} + 5.2$

$= 3 + 10$

$= 13 =$ ডানপক্ষ

$\therefore x = -\frac{1}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$

প্রশ্ন ▶১৭ $A = ln\frac{7-x}{7+x}$;

$B = \frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$

[হলি ক্রস উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. দেখাও যে, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ ২

খ. A এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. B হতে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-২৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০৯

খ দেওয়া আছে,

$f(x) = \ln\frac{7-x}{7+x}$

$\therefore$ $f(x) \in \nabla$ হবে যদি $\frac{7-x}{7+x} > 0$ হয়।

এখন, $\frac{7-x}{7+x} > 0$ হবে যদি

(i) $7 - x > 0$ এবং $7 + x > 0$ হয়।

অথবা, (ii) $7 - x < 0$ এবং $7 + x < 0$ হয়।

এখন, (i) $\Rightarrow 7 > x$ এবং $x > -7$

$\Rightarrow x < 7$ এবং $x > -7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x \in \nabla : x < 7\} \cap \{x \in \nabla : x > -7\}$

$= (-\infty, 7) \cap (-7, \infty) = (-7, 7)$

আবার, (ii) $\Rightarrow 7 < x$ এবং $x < -7$

$\Rightarrow x > 7$ এবং $x < -7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x \in \nabla : x > 7\} \cap \{x \in \nabla : x < -7\}$

$= (7, \infty) \cap \{-\infty, -7) = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (-7, 7) \cup \varnothing = (-7, 7)$ **(Ans.)**

রেঞ্জ নির্ণয়:

$y = f(x) = \ln\frac{7-x}{7+x}$

বা, $e^y = \frac{7-x}{7+x}$

বা, $7e^y + xe^y = 7 - x$

বা, $xe^y + x = 7 - 7e^y$

বা, $x(1 + e^y) = 7(1 - e^y)$

$\therefore$ $x = \frac{7(1-e^y)}{1+e^y}$

y এর সকল মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $= \nabla$ **(Ans.)**

গ ধরি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = m$

$\therefore$ $\log_k x = \frac{x(y+z-x)}{m}$

আবার, $\log_k y = \frac{y(z+x-y)}{m}$

এবং $\log_k z = \frac{z(x+y-z)}{m}$

এখন, $y\log_k x + x\log_k y = \frac{xy(y+z-x)}{m} + \frac{xy(z+x-y)}{m}$

$= \frac{xy}{m}(y+z-x+z+x-y) = \frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y + \log_k y^x = \frac{2xyz}{m}$ [$\log_k p^r = r\log_k p$]

বা, $\log_k x^y y^x = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore$ $x^y y^x = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (i)

আবার, $z\log_k y + y\log_k z = \frac{yz(z+x-y)}{m} + \frac{yz(x+y-z)}{m}$

বা, $\log_k y^z + \log_k z^y = \frac{yz}{m}(z+x-y+x+y-z)$

বা, $\log_k y^z z^y = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore$ $y^z z^y = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (ii)

পুনরায়, $x\log_k z + z\log_k x = \frac{zx(x+y-z)}{m} + \frac{zx(y+z-x)}{m}$

বা, $\log_k z^x + \log_k x^z = \frac{zx}{m}(x+y-z+y+z-x)$

বা, $\log_k z^x x^z = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore$ $z^x x^z = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (iii)

সুতরাং (i), (ii) ও (iii) নং থেকে পাই,

$x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১৮ $A = \sqrt[3]{1+x}$, $B = a^2 + b^2$ এবং $C = \sqrt[3]{2}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯

[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. যদি $3.27^x = 9^{x+4}$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A + (1-x)^{\frac{1}{3}} = C$ হলে, সমীকরণের মূলসমূহ নির্ণয় কর। ৪

গ. $B = 11ab$ হলে দেখাও যে, $\log_{10}\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log_{10} a + \log_{10} b)$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৩ এর উদাহরণ-১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা: ১০৩

খ দেওয়া আছে, $A = \sqrt[3]{1+x}$, $C = \sqrt[3]{2}$

$\therefore$ $A + (1-x)^{\frac{1}{3}} = C$

বা, $(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.২ এর উদাহরণ-১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১০২

গ দেওয়া আছে, $B = 11ab$

বা, $a^2 + b^2 = 11ab$

বা, $a^2 + b^2 - 2ab = 11ab - 2ab$ [উভয়পক্ষে – 2ab যোগ করে]

বা, $(a - b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a-b)^2}{9} = ab$ [9 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log_{10}\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = \log_{10} ab$ [উভয়পক্ষে $\log_{10}$ নিয়ে]

বা, $2\log_{10}\frac{a-b}{3} = \log_{10}ab$

বা, $\log_{10}\frac{(a-b)}{3} = \frac{1}{2}[\log_{10} ab]$

বা, $\log_{10}\frac{(a-b)}{3} = \frac{1}{2}[\log_{10} a + \log_{10} b]$

$\therefore \log_{10}\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log_{10}a + \frac{1}{2}\log_{10}b$ **(ˆ`LvGbv nGjv)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ $P = \frac{2x}{x-1}$ এবং $Q = 2\log_k x - \log_k(3 + x)$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. সমাধান কর : $2x^2 + 9x + 9 = 0$ ২

খ. $6\sqrt{P} + 5\sqrt{\frac{1}{P}} = 13$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. Q = 0 হলে, দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$ ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $2x^2 + 9x + 9 = 0$ কে আদর্শরূপ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2, b = 9$ এবং $c = 9$

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয় $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.2.9}}{2.2}$

$= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4}$

$= \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-9 \pm 3}{4}$

$= \frac{-9+3}{4}, \frac{-9-3}{4}$

$= \frac{-6}{4}, \frac{-12}{4}$

$= -\frac{3}{2}, -3$

অর্থাৎ, $x_1 = -\frac{3}{2}$ এবং $x_2 = -3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $6\sqrt{P} + 5\sqrt{\frac{1}{P}} = 13$

বা, $6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\frac{1}{\frac{2x}{x-1}}} = 13$

বা, $6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\frac{x-1}{2x}} = 13$

$\frac{2x}{x-1} = a^2$ ধরা হলে প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$6\sqrt{a^2} + 5\sqrt{\frac{1}{a^2}} = 13 \left[\because \frac{2x}{x-1} = a^2 \text{ ev}, \frac{x-1}{2x} = \frac{1}{a^2}\right]$

বা, $6a + \frac{5}{a} = 13$

বা, $6a^2 + 5 = 13a$

বা, $6a^2 - 13a + 5 = 0$

বা, $6a^2 - 10a - 3a + 5 = 0$

বা, $2a(3a - 5) - 1(3a - 5) = 0$

বা, $(3a - 5)(2a - 1) = 0$

হয়, $3a - 5 = 0$ অথবা, $2a - 1 = 0$

বা, $3a = 5$ বা, $2a = 1$

$\therefore a = \frac{5}{3}$ $\therefore a = \frac{1}{2}$

$a = \frac{5}{3}$ হলে আমরা পাই, $\frac{2x}{x-1} = \frac{25}{9}$

বা, $25x - 25 = 18x$

বা, $25x - 18x = 25$

বা, $7x = 25$

$\therefore x = \frac{25}{7}$

আবার, $a = \frac{1}{2}$ হলে আমরা পাই, $\frac{2x}{x-1} = \frac{1}{4}$

বা, $8x = x - 1$

বা, $7x = -1$

$\therefore x = -\frac{1}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{25}{7}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}} + 5\sqrt{\frac{\frac{25}{7}-1}{2.\frac{25}{7}}}$

$= 6\sqrt{\frac{50}{18}} + 5\sqrt{\frac{18}{50}} = 6\sqrt{\frac{25}{9}} + 5\sqrt{\frac{9}{25}}$

$= \frac{6.5}{3} + \frac{5.3}{5} = 10 + 3$

$= 13 =$ ডানপক্ষ

$\therefore x = \frac{25}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ।

$x = -\frac{1}{7}$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}} + 5\sqrt{\frac{-\frac{1}{7}-1}{2\left(-\frac{1}{7}\right)}}$

DœPZi MwYZ

$$= 6\sqrt{\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{-8}{7}}} + 5\sqrt{\frac{\frac{-8}{7}}{\frac{-2}{7}}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{1}{4}} + 5\sqrt{4} = 6.\frac{1}{2} + 5.2 = 3 + 10$$

= 13 = ডানপক্ষ

$\therefore\ x = -\frac{1}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $x = \frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$

গ সৃজনশীল ৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶২০ $xy^{a-1} = p$, $xy^{b-1} = q$, $xy^{c-1} = r$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়কের মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $(b - c)\log_k p + (c - a)\log_k q + (a - b)\log_k r = 0$. ৪

গ. $a + b + c = 3$ হলে দেখাও যে, $\log_x p + \log_x q + \log_x r = 3$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$\therefore\ x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$$= (-5)^2 - 4.1.6$$
$$= 25 - 24$$
$$= 1 \textbf{ (Ans.)}$$

খ $(b - c)\log_k p + (c - a)\log_k q + (a - b)\log_k r$

$= \log_k p^{b-c} + \log_k q^{c-a} + \log_k r^{a-b}$

$= \log_k (xy^{a-1})^{b-c} + \log_k (xy^{b-1})^{c-a} + \log_k (xy^{c-1})^{a-b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k x^{c-a} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k x^{c-a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k (x^{b-c}.x^{c-a}.x^{a-b}) + \log_k (y^{ab-ac-b+c}.y^{bc-ab-c+a}.y^{ac-bc-a+b})$

$= \log_k x^{b-c+c-a+a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0 + 0 = 0$ **(``LvGbv nGjv)**

গ দেওয়া আছে, $xy^{a-1} = p$

বা, $\log_x (xy^{a-1}) = \log_x p$

বা, $\log_x p = \log_x x + \log_x y^{a-1}$

বা, $\log_x p = 1 + (a-1)\log_x y$

বা, $\log_x p = 1 + a\log_x y - \log_x y$

একইভাবে, $\log_x q = 1 + b\log_x y - \log_x y$

এবং $\log_x r = 1 + c\log_x y - \log_x y$

তাহলে, বামপক্ষ $= \log_x p + \log_x q + \log_x r$

$= 1 + a\log_x y - \log_x y + 1 + b\log_x y - \log_x y + 1 + c\log_x y - \log_x y$

$= 3 + (a + b + c)\log_x y - 3\log_x y$

$= 3 + 3\log_x y - 3\log_x y$ $[a + b + c = 3]$

$= 3$ **(cÉgvwYZ)**

প্রশ্ন ▶২১ (i) $a^x = b^y = c^z$, যেখানে $a \neq b \neq c$.

(ii) $x = a^{q+r}.b^p$, $y = a^{r+p}.b^q$, $z = a^{p+q}.b^r$

[সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর প্রশ্ন নং ২]

ক. $b^2 = ac$ হলে (i) হতে দেখাও যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ ২

খ. (i) হতে $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

গ. (ii) হতে $(q - r)\log_k x + (r - p)\log_k y + (p - q)\log_k z$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২০২

খ ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$ [k ধ্রুবক]

$\therefore\ a = k^{\frac{1}{x}}$

$b = k^{\frac{1}{y}}$

$c = k^{\frac{1}{z}}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}.k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^0$ $[\because k^0 = 1]$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$\therefore\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

ঘন করে পাই, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{-z}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{3}{xyz} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $x = a^{q+r}.b^p$

$y = a^{r+p}.b^q$

$z = a^{p+q}.b^r$

$\therefore\ (q - r)\log_k x + (r - p)\log_k y + (p - q)\log_k z$

$= (q - r)\log_k (a^{q+r}.b^p) + (r - p)\log_k (a^{r+p}.b^q) + (p - q)\log_k (a^{p+q}.b^r)$

$= (q - r)(\log_k a^{q+r} + \log_k b^p) + (r - p)(\log_k a^{r+p} + \log_k b^q) + (p - q)(\log_k a^{p+q} + \log_k b^r)$

$= \log_k a^{q^2-r^2} + \log_k b^{p(q-r)} + \log_k a^{r^2-p^2} + \log_k b^{q(r-p)} + \log_k a^{p^2-q^2} + \log_k b^{r(p-q)}$

$= \log_k (a^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}) + \log_k (b^{pq-pr+qr-pq+pr-qr})$

$= \log_k (a^0) + \log_k (b^0)$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২২ $P = x^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $Q = \log_a (1 + y) - 2\log_a (y)$.

[জয়দেবপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, গাজীপুর প্রশ্ন নং ৩]

DœPZi MwYZ

ক. সরল কর : $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a.$ ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $P = 0$ হলে দেখাও যে, $3x^3 + 9x - 8 = 0$ ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে $Q = 0$ হলে দেখাও যে, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$ ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$

$= \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{b})^2 \times \log_{\sqrt{b}} (\sqrt{c})^2 \times \log_{\sqrt{c}} (\sqrt{a})^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

[$\because \log_a P^r = r \log_a P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P$]

$= 8\log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}$ [$\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P$]

$= 8 \cdot 1$ [$\because \log_a a = 1$]

$= 8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = x^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$

প্রশ্নমতে, $P = 0$

বা, $x^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2 = 0$

বা, $x^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $x^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ $\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^0 = 1\right]$

বা, $x^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $x = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয়পক্ষে বর্গমূল এবং ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $x^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3\cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\because (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$]

বা, $x^3 = 3 - 3^{-1} - 3 . 3^0.x$

$\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0 \text{ এবং } 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = x\right]$

বা, $x^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3x$

বা, $x^3 + 3x = \frac{8}{3}$

বা, $3x^3 + 9x = 8$

$\therefore 3x^3 + 9x - 8 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $Q = O$

বা, $\log_a(1 + y) - 2\log_a y = O$

বা, $\log_a (1 + y) = \log_a y^2$

$\therefore 1 + y = y^2$

বা, $y^2 - y - 1 = 0$

বা, $4y^2 - 4y - 4 = 0$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2y)^2 - 2.2y.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2y - 1)^2 = 5$

বা, $2y - 1 = \sqrt{5}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে]

বা, $2y = 1 + \sqrt{5}$

$\therefore y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২৩ দৃশ্যকল্প: $P = x^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$

$Q = \log_a (1 + y) - 2\log_a y$

[এ ই আর ই স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. সরল কর: $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$ ২

খ. $P = 0$ হলে দেখাও যে, $3x^3 + 9x - 8 = 0$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প অনুসারে $Q = 0$ হলে, দেখাও যে, $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ২২ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶২৪ (i) $a^{3-x} . b^{7x} = a^{7+x} . b^{5x}$ (ii) $a^2 - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, মোমেনশাহী প্রশ্ন নং ৩]

ক. $a^2 + b^2 = 11ab$ হলে, দেখাও যে, $2\log_k\frac{a-b}{3} = \log_k ab$ ২

খ. i) হতে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_k a$ ৪

গ. ii) হতে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 11ab$

বা, $a^2 + b^2 - 2ab = 11ab - 2ab$ [উভয়পক্ষে 2ab বিয়োগ করে]

বা, $(a - b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a-b)^2}{9} = ab$ [9 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log_k\left(\frac{a-b}{3}\right)^2 = \log_k ab$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

$\therefore 2\log_k \frac{a-b}{3} = \log_k ab$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $a^{3-x}.b^{7x} = a^{7+x}.b^{5x}$

বা, $\frac{b^{7x}}{b^{5x}} = \frac{a^{7+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{7x-5x} = a^{7+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{4+2x}$

বা, $b^{2x} = a^4.a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^4$

বা, $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^4$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $2x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 4\log_k a$

$\therefore$ $x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \log_k a$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $a^2 - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} + 2$

বা, $a^2 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + 2.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^2 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\because (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy (x + y)$]

বা, $a^3 = 2^1 + 2^{-1} + 3 . 2^0 . a$

$\left[\because 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^0 \text{ এবং } 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$

বা, $a^3 = \frac{4+1+6a}{2}$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

$\therefore$ $2a^3 - 6a = 5$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২৫ $p = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$, $r = \log_c(ab)$ এবং $a^x = b^y = c^z$ যেখানে $a \neq b \neq c$

◀*সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর প্রশ্ন নং ২]*

ক. $3 - 4x - x^2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

গ. দেখাও যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$3 - 4x - x^2 = 0$

অর্থাৎ, $x^2 + 4x - 3 = 0$

সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$

সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 4, c = -3$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4 \times 1(-3)$

$= 16 + 12$

$= 28 > 0$ কিন্তু পূর্ণ বর্গ নয়।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্ড়ব, অসমান ও অমূলদ হবে।

খ ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$ [k ধ্রুবক]

$\therefore$ $a = k^{\frac{1}{x}}$

$b = k^{\frac{1}{y}}$

$c = k^{\frac{1}{z}}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}} . k^{\frac{1}{y}} . k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^0$ [$\because k^0 = 1$]

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$\therefore$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

ঘন করে পাই, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{-z}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{3}{xyz} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore$ $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ৭(গ) নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶২৬ (i) $\frac{\log (1 + p)}{\log p} = 2$

(ii) $\frac{\log_k a}{y - z} = \frac{\log_k b}{z - y} = \frac{\log_k c}{x - y}$ *[ফরিদপুর জিলা স্কুল, ফরিদপুর প্রশ্ন নং ২]*

ক. সরল কর : $\log_{\sqrt{p}} q \times \log_{\sqrt{q}} r \times \log_{\sqrt{r}} p$ ২

খ. (i) নং হতে দেখাও যে, $P = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ৪

গ. (ii) নং হতে প্রমাণ কর যে, $a^{y^2 + yz + z^2}\, b^{z^2 + zx + x^2}\, c^{x^2 + xy + y^2} = 1$ ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_{\sqrt{p}} q \times \log_{\sqrt{q}} r \times \log_{\sqrt{r}} p$

$= \log_{\sqrt{p}} (\sqrt{q})^2 \times \log_{\sqrt{q}} (\sqrt{r})^2 \times \log_{\sqrt{r}} (\sqrt{p})^2$

$= 2\log_{\sqrt{p}} \sqrt{q} \times 2\log_{\sqrt{q}} \sqrt{r} \times 2\log_{\sqrt{r}} \sqrt{p}$ [$\because \log_x y^z = z \log_x y$]

$= 8\log_{\sqrt{p}} \sqrt{q} \times \log_{\sqrt{q}} \sqrt{r} \times \log_{\sqrt{r}} \sqrt{p}$

$= 8\log_{\sqrt{p}} \sqrt{q} \times \log_{\sqrt{q}} \sqrt{p}$ [$\because \log_x y = \log_x k \times \log_k y$]

$= 8\log_{\sqrt{p}} \sqrt{p}$

$= 8\cdot 1$ [$\because \log_x x = 1$]

$= 8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\frac{\log (1 + p)}{\log p} = 2$

বা, $\log(1 + p) = 2 \log p$

বা, $\log(1 + p) = \log p^2$ [$(\log_a P^r = r\log_a P)$]

বা, $1 + p = p^2$

বা, $p^2 - p - 1 = 0$

বা, $4p^2 - 4p - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2p)^2 - 2.2p.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2p - 1)^2 = 5$

বা, $2p - 1 = \sqrt{5}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে]

বা, $2p = 1 + \sqrt{5}$

বা, $p = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

$\therefore$ $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, $\frac{\log_k a}{y - z} = \frac{\log_k b}{z - x} = \frac{\log_k c}{x - y} = m$

$\therefore$ $\log_k a = m(y - z)$

বা, $(y^2 + yz + z^2) \log_k a = m(y - z)(y^2 + yz + z^2)$

[উভয় পক্ষকে $(y^2 + yz + z^2)$ গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k a^{y^2 + yz + z^2} = m(y^3 - z^3)$ .... (i)

আবার, $\log_k b = m(z - x)$

বা, $(z^2 + zx + x^2) \log_k b = m(z - x)(z^2 + zx + x^2)$

$\therefore$ $\log_k b^{z^2 + zx + x^2} = m(z^3 - x^3)$ .... (ii)

এবং $\log_k c = m(x - y)$

বা, $(x^2 + xy + y^2) \log_k c = m(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$\therefore$ $\log_k c^{x^2 + xy + y^2} = m(x^3 - y^3)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\therefore$ $\log_k a^{y^2 + yz + z^2} + \log_k b^{z^2 + zx + x^2} + \log_k c^{x^2 + xy + y^2}$

$= m(y^3 - z^3) + m(z^3 - x^3) + m(x^3 - y^3)$

বা, $\log_k (a^{y^2 + yz + z^2} b^{z^2 + zx + x^2} c^{x^2 + xy + y^2}) =$

$m(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3)$ [$\because \log_k(a.b) = \log_k a + \log_k b$]

বা, $\log_k (a^{y^2 + yz + z^2} b^{z^2 + zx + x^2} c^{x^2 + xy + y^2}) = 0 = \log_k 1$

$\therefore$ $a^{y^2 + yz + z^2} b^{z^2 + zx + x^2} c^{x^2 + xy + y^2} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২৭ (i) $P^{P\sqrt{P}} = (P\sqrt{P})^P$

(ii) $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = \frac{x^a}{x^b} \times \frac{x^b}{x^c} \times \frac{x^c}{x^a}$ এবং (iii) $\frac{\log_k(3 + x)^5}{\log_k x^5} = 2$

[ফরিদপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফরিদপুর ▯ প্রশ্ন নং ২]

ক. $4P - 9 = 0$ প্রমাণ কর। ২

খ. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ প্রমাণ কর। ৪

গ. (iii) নং হতে প্রমাণ কর যে, $2x = 1 + \sqrt{13}$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$P^{P\sqrt{P}} = (P\sqrt{P})^P$

বা, $P^{p^{1 + \frac{1}{2}}} = \left(P^{1 + \frac{1}{2}}\right)^P$

বা, $P^{P^{\frac{3}{2}}} = P^{\frac{3P}{2}}$

বা, $P^{\frac{3}{2}} = \frac{3P}{2}$

বা, $P^3 = \frac{9P^2}{4}$

বা, $P = \frac{9}{4}$ [$\because P \neq 0$]

বা, $4P = 9$

$\therefore$ $4P - 9 = 0$ **(প্রমাণিত)**

খ ধরি, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c} = k$

$\sqrt[x]{a} = k$	$\sqrt[y]{b} = k$	$\sqrt[z]{c} = k$
বা, $a^{\frac{1}{x}} = k$	বা, $b^{\frac{1}{y}} = k$	বা, $c^{\frac{1}{z}} = k$
$\therefore a = k^x$	$\therefore b = k^y$	$\therefore c = k^z$

প্রশ্নমতে, $abc = \frac{x^a x^b x^c}{x^b x^c x^a} = 1$

বা, $k^x k^y k^z = 1$

বা, $k^{x + y + z} = k^0$

$\therefore$ $x + y + z = 0$

এখন,

বামপক্ষ $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= 0 . (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ (iii) থেকে পাই,

$\frac{\log_k (3 + x)^5}{\log_k x^5} = 2$

বা, $\log_k (3 + x)^5 = 2 \log_k x^5$

বা, $5 \log_k (3 + x) = 2 \times 5 \log_k x$

বা, $\log_k (3 + x) = \log_k x^2$

বা, $3 + x = x^2$

বা, $x^2 - x - 3 = 0$

বা, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

বা, $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ [ঋণাত্মক মান অগ্রহণযোগ্য]

$\therefore$ $2x = 1 + \sqrt{13}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৮ $A = \{x : x \in \nabla$ এবং $x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$

$B = \{2, a, 3\}$, $R = \frac{\log_k(1 + y)}{\log_k y}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৯ [নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ ▯ প্রশ্ন নং ১]

ক. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ ৪

গ. $R = 2$ হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$

বামপক্ষ $= \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$

$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c^3}$

$= \left(-\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c^3}$

$= -\frac{1}{c^3} + \frac{3}{abc} + \frac{1}{c^3}$

$= \frac{3}{abc}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে,

$A = \{x : x \in \nabla$ এবং $x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$

এখন,

$x^2 - (a + b)x + ab = 0$

বা, $x^2 - ax - bx + ab = 0$

বা, $x(x - a) - b(x - a) = 0$

বা, $(x - a)(x - b) = 0$

$\therefore$ $x = a, b$

$\therefore$ $A = \{a, b\}$

আবার, $B = \{2, a, 3\}$

এখন, $A \cap B = \{a\}$

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$P(B) = \{\varnothing, \{2\}, \{a\}, \{3\}, \{2, a\}, \{2, 3\}, \{a, 3\}, \{2, a, 3\}\}$

বামপক্ষ $= P(A \cap B)$

$= \{\varnothing, \{a\}\}$

ডানপক্ষ $= P(A) \cap P(B)$

$= \{\varnothing, \{a\}\}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$R = \frac{\log_k(1 + y)}{\log_k y} = 2$ $[\because R = 2]$

বা, $\log_k(1 + y) = 2\log_k y$

বা, $\log_k(1 + y) = \log_k y^2$

বা, $1 + y = y^2$ [উভয়পাশে প্রতিলগ নিয়ে]

বা, $y^2 - y - 1 = 0$

$\therefore y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-1)}}{2.1}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ [$y \leq 0$ অগ্রহণযোগ্য] **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৯ $l = a^{y-x}$, $m = a^{z-x}$, $n = a^{x-y}$

$A = a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2$ এবং

$K = \sqrt[3]{p + q} + \sqrt[3]{p - q}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $l$mn এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A = 0$ হলে, দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. $p^2 - q^2 = r^3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $k^3 - 3kr - 2p = 0$ ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\ell = a^{y-z}$

$m = a^{z-x}$

$n = a^{x-y}$

$\therefore \ell mn = a^{y-z} . a^{z-x} . a^{x-y}$

$= a^{y-z+z-x+x-y}$

$= a^0$

$= 1$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৮(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

বি.দ্র.: p এর স্থলে a হবে।

গ দেওয়া আছে,

$k = \sqrt[3]{p + q} + \sqrt[3]{p - q}$ এবং $p^2 - q^2 = r^3$

এখানে, $k = (p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}}$

বা, $k^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $k^3 = \left\{(p + q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(p - q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$

$+ 3.(p + q)^{\frac{1}{3}}(p - q)^{\frac{1}{3}}\left\{(p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}}\right\}$

$[\because (p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q)]$

বা, $k^3 = p + q + p - q + 3(p^2 - q^2)^{\frac{1}{3}} . k$

$\left[\because (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}} = k\right]$

বা, $k^3 = 2p + 3.(r^3)^{\frac{1}{3}} . k$ $[\because p^2 - q^2 = r^3]$

বা, $k^3 = 2p + 3rk$

$\therefore$ $k^3 - 3rk - 2p = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩০ (i) $\frac{\log_k(3 + x)}{\log_k x} = 2$

(ii) $x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ দুইটি সমীকরণ।

[বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. ১ম উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. ৪

গ. $a^2 - b^2 = c^3$ হলে, ২য় উদ্দীপকের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$. ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-২৩(ক) সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০৯

খ দেওয়া আছে,

$\frac{\log_k(3 + x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(3 + x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(3 + x) = \log_k x^2$

বা, $3 + x = x^2$ [উভয় পাশে প্রতি লগ নিয়ে]

বা, $x^2 - x - 3 = 0$

$\therefore x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-3)}}{2 \times 1}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$= \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$ [□ $x \leq 0$ অগ্রহণযোগ্য]

$\therefore x = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$

এখানে, $x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$

বা, $x^3 = \left\{(a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 = \left\{(a + b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(a - b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3.(a + b)^{\frac{1}{3}} (a - b)^{\frac{1}{3}} \left\{(a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}\right\}$

[$\because (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy\,(x+y)$]

বা, $x^3 = a + b + a - b + 3\,(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}.x$

$\left[□\ (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}} = x\right]$

বা, $x^3 = 2a + 3.\,(c^3)^{\frac{1}{3}}.\,x$ [$\because a^2 - b^2 = c^3$]

বা, $x^3 = 2a + 3cx$

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩১ $\sqrt{a + 15} - \sqrt{a + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

এবং $y = (p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $\log_{\sqrt{8}} b = 3\frac{1}{3}$ হলে b এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a = x^2 - 6x$ হলে সংশিশ্চষ্ট সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

গ. $p^2 - q^2 = r^3$ হলে প্রমাণ কর যে, $y^3 = 3ry + 2p$ ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_{\sqrt{8}} b = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

বা, $b = (\sqrt{8})^{\frac{10}{3}}$

$= (\sqrt{2^3})^{\frac{10}{3}}$

$= \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}}$

$= 2^{\frac{3}{2} \times \frac{10}{3}}$

$= 2^5$

$= 32$

$\therefore b = 32$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\sqrt{a + 15} - \sqrt{a + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

বা, $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য।
পৃষ্ঠা- ১০১

গ দেওয়া আছে,

$y = (p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}}$ এবং $p^2 - q^2 = r^3$

এখানে, $y = (p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}}$

বা, $y^3 = \left\{(p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $y^3 = \left\{(p + q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(p - q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3.(p + q)^{\frac{1}{3}} (p - q)^{\frac{1}{3}}$

$\left\{(p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}}\right\}$ [$\because (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy\,(x+y)$]

বা, $y^3 = p + q + p - q + 3\,(p^2 - q^2)^{\frac{1}{3}}.\,y$

$\left[□\ (p + q)^{\frac{1}{3}} + (p - q)^{\frac{1}{3}} = y\right]$

বা, $y^3 = 2p + 3.\,(r^3)^{\frac{1}{3}}.\,y$ [$\because p^2 - q^2 = r^3$]

বা, $y^3 = 2p + 3ry$

$\therefore y^3 = 3ry + 2p$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৩২ (a) $a^x = b^y = c^z$, যেখানে a, b ও c ধন্বক ও পরস্পর অসমান এবং x, y, z ∈ |

(b) $a^2 + b^2 = 7ab$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ৯ [দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $\frac{1}{2x + 1} + \frac{1}{(2x + 1)^2} + \frac{1}{(2x + 1)^3} + \ldots\ldots.$

x = 3 হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপক (b) এর আলোকে প্রমাণ কর যে,

$\log\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ৪

গ. abc = 1 হলে উদ্দীপক (a) এর আলোকে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ এবং $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক x = 3 হলে

প্রদত্ত ধারাটি $= \frac{1}{2 \times 3 + 1} + \frac{1}{(2 \times 3 + 1)^2} + \frac{1}{(2 \times 3 + 1)^3} + \ldots.$

$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \ldots\ldots$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত = w«¼Zxq c` / cÉ^g c` $= \dfrac{\frac{1}{49}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৫(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$ [k ধ্র—বক]

$\therefore a = k^{\frac{1}{x}}$

$b = k^{\frac{1}{y}}$

$c = k^{\frac{1}{z}}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}} . k^{\frac{1}{y}} . k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^0 \quad [\because k^0 = 1]$

বা, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

ঘন করে পাই, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3\left(\frac{1}{-z}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}-\frac{3}{xyz} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৩ $x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ এবং $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হলে− *[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর প্রশ্ন নং ৩]*

ক. $(16)^{2x} = 4^{x+1}$ হলে x = কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$ ৪

গ. দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$ ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১০(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১৬ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০৪

গ ধরি, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = m$

$\therefore \log_k(ab) = \frac{m(a+b)}{ab} = m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ ... ... (i)

আবার, $\log_k(bc) = \frac{m(b+c)}{bc} = m\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ... ... (ii)

এবং $\log_k(ca) = \frac{m(c+a)}{ca} = m\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ ... ... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k(ab) + \log_k(bc) + \log_k(ca)$

$= m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + m\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + m\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

বা, $\log_k(ab \cdot bc \cdot ca) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k(abc)^2 = 2m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$

বা, $2\log_k(abc) = 2m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$ [$\log_k p^r = r\log_k p$]

$\therefore \log_k(abc) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$ ... ... (iv)

(iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ab) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right] - m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$= m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$

বা, $\log_k\frac{abc}{ab} = \frac{m}{c}$

বা, $\log_k c = \frac{m}{c}$

বা, $c\log_k c = m$

বা, $\log_k c^c = m$

$\therefore c^c = k^m$ ... ... (v)

আবার, (iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(bc) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right] - m\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

বা, $\log_k\frac{abc}{bc} = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k a = \frac{m}{a}$

বা, $a\log_k a = m$ বা, $\log_k a^a = m$

$\therefore a^a = k^m$ ... ... (vi)

পুনরায়, (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ca) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right] - m\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

বা, $\log_k\frac{abc}{ca} = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k b = \frac{m}{b}$

বা, $b\log_k b = m$

বা, $\log_k b^b = m$ [$r\log_k p = \log_k p^r$]

$\therefore b^b = k^m$ ... ... (vii)

সুতরাং, (v), (vi) ও (vii) নং থেকে লেখা যায়,

$a^a = b^b = c^c = k^m$

$\therefore a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৩৪ $P = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ এবং $a + b + c = 0$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী প্রশ্ন নং ৩]

ক. $9^x = (27)^y$ হলে $\frac{y}{x}$ এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $P^3 - 2 = 6P^2 - 6P$ ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(9)^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

বা, $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \frac{1}{x^b + \frac{1}{x^c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

DœPZi MwYZ

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^a + \frac{1}{x^b} + 1}$$

[□ $a + b + c = 0 \therefore b + c = -a$]

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{a+b} + x^b + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{-c} + x^b + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{\frac{1}{x^c} + x^b + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b.x^c}{1 + x^c + x^{b+c}}$$

$$= \frac{x^c + 1 + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$$

(দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $P = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $P - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $(P - 2)^3 = \left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $P^3 - 3.P^2.2 + 3P.2^2 - 2^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$ [$\because (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$]

বা, $P^3 - 6P^2 + 12P - 8 = 2^2 + 2 + 3.2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}.(P - 2)$ [□ $2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = P - 2$]

বা, $P^3 - 6P^2 + 12P - 8 = 4 + 2 + 3.2^1(P - 2)$

বা, $P^3 - 6P^2 + 12P - 8 = 6 + 6P - 12$

বা, $P^3 - 6P^2 + 6P - 2 = 0$

$\therefore$ $P^3 - 2 = 6P^2 - 6P$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৫ $a^x = b^y = c^z = N$ এবং $ab = c^2$

[নীলফামারী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নীলফামারী □ প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $z(x + y) = 2xy$ ৪

গ. $\log_k a\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) + \log_k b\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right) + \log_k c\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $= \log_b a \times \log_c b \times \log_a c$

$= \log_b a \times \log_a c \times \log_c b$

$= \log_b a \times \log_a b$ [□$\log_a M = \log_a b \times \log_b M$]

$= \log_b b$

$= 1$ [□ $\log_a a = 1$]

$\therefore \log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $a^x = c^z$

$\therefore a = c^{\frac{z}{x}}$

আবার, $b^y = c^z$

$\therefore b = c^{\frac{z}{y}}$

এখন, $ab = c^2$

বা, $c^{\frac{z}{x}}.c^{\frac{z}{y}} = c^2$

বা, $c^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}} = c^2$

বা, $\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 2$

বা, $\frac{zy + zx}{xy} = 2$

$\therefore z(x + y) = 2xy$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z = N$

$\therefore a = N^{\frac{1}{x}}$

$b = N^{\frac{1}{y}}$

এবং $c = N^{\frac{1}{z}}$

$\therefore \log_k a\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) + \log_k b\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right) + \log_k c\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

$= \log_k a^{\frac{z-y}{yz}} + \log_k b^{\frac{x-z}{zx}} + \log_k c^{\frac{y-x}{xy}}$

$= \left(\frac{z-y}{zy}\right)\log_k a + \left(\frac{x-z}{zx}\right)\log_k b + \left(\frac{y-x}{xy}\right)\log_k c$

$= \left(\frac{z-y}{yz}\right)\log_k N^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{x-z}{zx}\right)\log_k N^{\frac{1}{y}} + \left(\frac{y-x}{xy}\right)\log_k N^{\frac{1}{z}}$

$= \frac{1}{x}\left(\frac{z-y}{yz}\right)\log_k N + \frac{1}{y}\left(\frac{x-z}{zx}\right)\log_k N + \frac{1}{z}\left(\frac{y-x}{xy}\right)\log_k N$

$= \left(\frac{z-y}{xyz} + \frac{x-z}{xyz} + \frac{y-x}{xyz}\right).\log_k N$

$= \left(\frac{z - y + x - z + y - x}{xyz}\right).\log_k N$

$= \frac{0}{xyz}.\log_k N$

$= 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৬ $B = a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2$ এবং $a \geq 0$

$P = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$, $r = \log_c(ab)$

[কুমিল্লা মডার্ণ হাই স্কুল, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. যদি $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. B = 0 হলে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p + 1} + \frac{1}{q + 1} + \frac{1}{r + 1} = 1$ ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ সৃজনশীল ৮(খ) নং সমাধান এর অনুরূপ।

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-২৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২১০

প্রশ্ন ▶৩৭ $F(x) = \ln\frac{3 - x}{3 + x}$ এবং $R = 3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

[মাতৃপীঠ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. যদি $y^{y\sqrt{y}} = (y\sqrt{y})^y$ হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. F ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি R = 3 হয়, তবে দেখাও যে, $9R^3 - 81R^2 + 162R = 21888$

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ ধরি, $y = f(x) = \ell n \dfrac{3-x}{3+x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধন্ত্মক বাস্ড়ব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ $\dfrac{3-x}{3+x} > 0$ যদি (i) $3 + x > 0$ এবং $3 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $3 + x < 0$ এবং $3 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই, $x > -3$ এবং $-x > -3 \therefore x < 3$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x > -3\} \cap \{x : x < 3\}$

$= (-3, \infty) \cap (-\infty, 3) = (-3, 3)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -3$ এবং $-x < -3 \therefore x > 3$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -3\} \cap \{x : x > 3\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-3, 3) \cup \varnothing = (-3, 3)$

আবার, ধরি, $y = f(x) = \ln \dfrac{3-x}{3+x}$

বা, $e^y = \dfrac{3-x}{3+x}$

বা, $3 - x = 3e^y + xe^y$

বা, $3 - 3e^y = x(1 + e^y)$

বা, $x = \dfrac{3(1-e^y)}{1+e^y}$

y এর সকল বাস্ড়ব মানের জন্য x এর মান বাস্ড়ব পাওয়া যায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = \nabla$

$\therefore$ ডোম, $D_f = (-3, 3)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$R = 3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $R^3 = \left(3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $R^3 = \left(3^{\frac{5}{3}}\right)^3 + \left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{5}{3}}.3^{-\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)$

বা, $R^3 = 3^5 + 3^{-2} + 3^{1+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}.R \left[\square\ R = 3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right]$

বা, $R^3 = 243 + \dfrac{1}{9} + 3^{\frac{3+5-2}{3}}.R$

বা, $R^3 = 243 + \dfrac{1}{9} + 3^2R$

বা, $R^3 = \dfrac{2187 + 1 + 81R}{9}$

বা, $9R^3 = 2187 + 1 + 81R$

বা, $9R^3 + 162R = 2188 + 81R + 162R$

বা, $9R^3 + 162R = 2188 + 243R$

বা, $9R^3 + 162R = 2188 + 81.R.3$

বা, $9R^3 + 162R = 2188 + 81R^2$ [□ R = 3]

$\therefore$ $9R^3 - 81R^2 + 162R = 2188$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৮ মনে কর, $\dfrac{1}{2x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ এবং $\dfrac{\log_k a}{b-c} = \dfrac{\log_k b}{c-a} = \dfrac{\log_k c}{a-b}$

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ২]

ক. দেখাও যে, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ২

খ. দেখাও যে, $\dfrac{\log_p(1+x)}{\log_p x} = 2$ ৪

গ. $a^a . b^b . c^c$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\dfrac{1}{2x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

বা, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

বা, $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$

$= \dfrac{2(1+\sqrt{5})}{4}$

$\therefore$ $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

খ 'ক' হতে পাই,

$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

বা, $2x = 1 + \sqrt{5}$

বা, $(2x - 1) = \sqrt{5}$

বা, $(2x - 1)^2 = (\sqrt{5})^2$

বা, $4x^2 - 4x + 1 - 5 = 0$

বা, $4x^2 - 4x - 4 = 0$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $x^2 = 1 + x$

বা, $\log_p x^2 = \log_p(1 + x)$ [উভয় পাশে P ভিত্তিক লগারিদম নিয়ে]

বা, $2 \log_p x = \log_p(1 + x)$

বা, $2 = \dfrac{\log_p(1+x)}{\log_p x}$

$\therefore$ $\dfrac{\log_p(1+x)}{\log_p x} = 2$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, $\dfrac{\log_k a}{b-c} = \dfrac{\log_k b}{c-a} = \dfrac{\log_k c}{a-b} = m$

$\therefore$ $\log_k a = m(b - c)$

বা, $a \log_k a = ma(b - c)$

$\therefore$ $\log_k a^a = mab - mac$ ... ... (i)

আবার, $\log_k b^b = m(c - a)$

বা, $b \log_k b = mb(c - a)$

$\therefore$ $\log_k b^b = mbc - mab$ ... ... (ii)

এবং $\log_k c = m(a - b)$

বা, $c \log_k x = mc(a - b)$

$\therefore$ $\log_k c^c = mac - mbc$ ... ... (iii) (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$\log_k a^a + \log_k b^b + \log_k c^c = mab - mac + mbc - mab + mac - mbc$

বা, $\log_k (a^a . b^b . c^c) = 0 = \log_k 1$

$\therefore$ $a^a b^b c^c = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৯ $p > 0, x = \sqrt[3]{p+q} + \sqrt[3]{p-q}$ এবং $a = \sqrt{b^3}$ ।

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ১]

ক. $\log_{10} [98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}] = 2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $p^2 - q^2 = r^3$ হয় তবে দেখাও যে, $x^3 - 3rx - 2p = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-২৩(খ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০৯

খ দেওয়া আছে,

$x = \sqrt[3]{p+q} + \sqrt[3]{p-q}$ এবং $p^2 - q^2 = r^3$

এখন, $x = (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}$

বা, $x^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 = \left\{(p+q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$

$+ 3.(p+q)^{\frac{1}{3}}(p-q)^{\frac{1}{3}}\left\{(p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}}\right\}$

$[\because (p+q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p+q)]$

বা, $x^3 = p + q + p - q + 3(p^2 - q^2)^{\frac{1}{3}} . x$

$\left[\because (p+q)^{\frac{1}{3}} + (p-q)^{\frac{1}{3}} = x\right]$

বা, $x^3 = 2p + 3.(r^3)^{\frac{1}{3}} . x$ $[\because p^2 - q^2 = r^3]$

বা, $x^3 = 2p + 3rx$

$\therefore$ $x^3 - 3rx - 2p = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$a = \sqrt{b^3}$

$\therefore a = b^{\frac{3}{2}}$

বা, $a^2 = b^3$

$\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $= \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{b}$ $\left[\because a = b^{\frac{3}{2}}, b = a^{\frac{2}{3}}\right]$

$= a^{\frac{3}{2} - 1} + b^{\frac{2}{3} - 1}$

$= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

$= \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪০ $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$

[সরকারি মুসলিম উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৩]

ক. $a = c$ হলে, দেখাও যে, $x = z$ ২

খ. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ হলে, দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{p^{-x} + p^y + 1} + \frac{1}{p^{-y} + p^z + 1} + \frac{1}{p^{-z} + p^x + 1} = 1$ ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৯নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪১ $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$ এবং $y = ln\frac{3+x}{3-x}$ দুটি ফাংশন।

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ৯

[হাজী মুহাম্মদ মহসিন সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৩]

ক. F এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে দ্বিতীয় ফাংশনটি ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. F ফাংশনটি এক এক কিনা নির্ণয় কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$

ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2x + 2 > 0$ হয়।

বা, $2x > -2$

$\therefore$ $x > -1$

$\therefore$ ডোমেন, $F = \{x \in \nabla : x > -1\}$ **(Ans.)**

খ ধরি, $y = g(x) = \ell n\frac{3+x}{3-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{3+x}{3-x} > 0$ যদি (i) $3 + x > 0$ এবং $3 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $3 + x < 0$ এবং $3 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই, $x > -3$ এবং $-x > -3$

বা, $x > -3$ এবং $x < 3$

$\therefore$ ডোমেন= $\{x : x > -3\} \cap \{x : x < 3\}$

$= (-3, \infty) \cap (-\infty, 3) = (-3, 3)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -3$ এবং $-x < -3$

বা, $x < -3$ এবং $x > 3$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -3\} \cap \{x : x > 3\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_g = (i) ও (ii) নং এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-3, 3) \cup \varnothing = (-3, 3)$

রেঞ্জ : $y = g(x) = \ell n \frac{3+x}{3-x}$

বা, $e^y = \frac{3+x}{3-x}$

বা, $3 + x = 3e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 3(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{3(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_g = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_g = (-3, 3)$ এবং রেঞ্জ $R_g = \nabla$

গ দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$

এখন, F(x) ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $x_1, x_2 \in$ ডোম F এর জন্য $F(x_1) = F(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $F(x_1) = F(x_2)$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2x_1+2}} = \frac{1}{\sqrt{2x_2+2}}$

বা, $\sqrt{2x_1+2} = \sqrt{2x_2+2}$

বা, $2x_1 + 2 = 2x_2 + 2$

বা, $2x_1 = 2x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ F(x) ফাংশনটি এক-এক।

প্রশ্ন ▶ ৪২ $x^2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} - 2$ এবং $g(x) = \ln\frac{5+x}{5-x}$

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ২]

ক. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$ হলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 0$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3x^3 + 9x = 8$ ৪

গ. g(x) দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$$

বা, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{x}{y}}$

বা, $\frac{y}{x} = -\frac{x}{y}$

বা, $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 0$

বা, $\frac{y^2 + x^2}{xy} = 0$

বা, $x^2 + y^2 = 0$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$$x^2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} - 2$$

বা, $x^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2 = 0$

অতঃপর, সৃজনশীল ৮(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ ধরি, $y = g(x) = \ell n\frac{5+x}{5-x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{5+x}{5-x} > 0$ যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$

বা, $x > -5$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\}$ এবং $(x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap (x : x > 5\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_g = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

ধরি, $y = g(x) = \ell n\frac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশেনের রেঞ্জ $R_g = \nabla$

ডোমেন $D_g = (-5, 5)$ এবং রেঞ্জ $R_g = \nabla$

প্রশ্ন ▶ ৪৩ (i) দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + 2x^0 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

(ii) দৃশ্যকল্প-২: $P = 1 + \log_a bc$, $q = 1 + \log_b ca$, $r = 1 + \log_c ab$

[বান্দরবান ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বান্দরবান প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $3x^3 + 9x = 8$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$ ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ সৃজনশীল ৮(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ সৃজনশীল ৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৪ (i) $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y}$ (ii) $g(x) = ln\frac{a-x}{a+x}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট প্রশ্ন নং ২]

ক. সমাধান কর : $\sqrt{x^2 - 8} + \sqrt{x^2 - 14} = 6$ ২

খ. g(x) এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $a^{y^2+yz+z^2} . b^{z^2+zx+x^2} . c^{x^2+xy+y^2} = 1$ ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt{x^2 - 8} + \sqrt{x^2 - 14} = 6$

বা, $\sqrt{x^2 - 8} = 6 - \sqrt{x^2 - 14}$

বা, $x^2 - 8 = 36 - 12\sqrt{x^2 - 14} + x^2 - 14$; [বর্গ করে]

বা, $12\sqrt{x^2 - 14} = 30$

বা, $2\sqrt{x^2 - 14} = 5$

বা, $4(x^2 - 14) = 25$ [পুনরায় বর্গ করে]

বা, $4x^2 - 56 = 25$

বা, $4x^2 = 81$

বা, $x^2 = \frac{81}{4}$

$\therefore\ x = \pm\frac{9}{2}$

খ ধরি, $y = g(x) = \ell n\frac{a + x}{a - x}$; $a > 0$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়, সেহেতু,

$\frac{a + x}{a - x} > 0$ যদি (i) $a + x > 0$ এবং $a - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $a + x < 0$ এবং $a - x < 0$ হয়

শর্ত (i) হতে পাই, $x > - a$ এবং $- x > - a$

$\therefore x < a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : - a < x\} \cap \{x : x < a\}$

$= (- a, \infty) \cap (- \infty, a)$

$= (- a, a)$

শর্ত (ii) হতে পাই, $x < - a$ এবং $- x < - a$

$\therefore x > a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < - a\} \cap \{x : x > a\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_g = শর্ত (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (- a, a) \cup \varnothing$

$= (-a, a)$

রেঞ্জ: $y = g(x) = \ell n\frac{a + x}{a - x}$

বা, $e^y = \frac{a + x}{a - x}$

বা, $a + x = ae^y - xe^y$

বা, $x + xe^y = ae^y - a$

বা, $x(1 + e^y) = a(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{a(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_g = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_g = (- a, a)$ এবং রেঞ্জ $R_g = \nabla$

গ ধরি, $\frac{\log_k a}{y - z} = \frac{\log_k b}{z - x} = \frac{\log_k c}{x - y} = m$

$\therefore\ \log_k a = m (y - z)$

বা, $(y^2 + yz + z^2) \log_k a = m(y - z) (y^2 + yz + z^2)$

$\therefore\ \log_k a^{y^2 + yz + z^2} = m(y^3 - z^3)$ .... (i)

আবার, $\log_k b = m (z - x)$

বা, $(z^2 + zx + x^2) \log_k b = m (z - x) (z^2 + zx + x^2)$

$\therefore\ \log_k b^{z^2 + zx + x^2} = m(z^3 - x^3)$ .... (ii)

এবং $\log_k c = m (x - y)$

বা, $(x^2 + xy + y^2) \log_k c = m(x - y) (x^2 + xy + y^2)$

$\therefore\ \log_k c^{x^2 + xy + y^2} = m(x^3 - y^3)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\therefore\ \log_k a^{y^2 + yz + z^2} + \log_k b^{z^2 + zx + x^2} + \log_k c^{x^2 + xy + y^2}$

$= m(y^3 - z^3) + m(z^3 - x^3) + m(x^3 - y^3)$

বা, $\log_k(a^{y^2 + yz + z^2}.b^{z^2 + zx + x^2}.c^{x^2 + xy + y^2}) = m(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3)$

বা $\log_k(a^{y^2 + yz + z^2}.b^{z^2 + zx + x^2}.c^{x^2 + xy + y^2}) = 0 = \log_k 1$

$\therefore\ a^{y^2 + yz + z^2}.b^{z^2 + zx + x^2}.c^{x^2 + xy + y^2} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪৫ (i) $p(x) = \ln\frac{6 + x}{6 - x}$ এবং

(ii) $\sqrt{\frac{y - 1}{3y + 2}} + 2\sqrt{\frac{3y + 2}{y - 1}} = 3$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট ▫প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x^2 - x - 4 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $y = -\frac{3}{2}$ অথবা $-\frac{9}{11}$ ৪

গ. p(x) এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমীকরণটি, $x^2 - x - 4 = 0$

যার নিশ্চায়ক, $D = (- 1)^2 - 4.1(-4)$

$= 1 + 16$

$= 17 > 0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ না।

$\therefore$ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

খ $\sqrt{\frac{y - 1}{3y + 2}} + 2\sqrt{\frac{3y + 2}{y - 1}} = 3$

$\frac{y - 1}{3y + 2} = a^2$ ধরা হলে প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়,

$\sqrt{a^2} + 2\sqrt{\frac{1}{a^2}} = 3$ $\left[\because \frac{y - 1}{3y + 2} = a^2 \text{ nGj } \frac{3y + 2}{y - 1} = \frac{1}{a^2}\right]$

বা, $a + \frac{2}{a} = 3$

বা, $a^2 + 2 = 3a$

বা, $a^2 - 3a + 2 = 0$

বা, $a^2 - 2a - a + 2 = 0$

বা, $a(a - 2) - 1(a - 2) = 0$

বা, $(a - 1) (a - 2) = 0$

হয়, $a - 1 = 0$ অথবা, $a - 2 = 0$

$\therefore\ a = 1$ $\quad \therefore a = 2$

a = 2 হলে আমরা পাই, $\frac{y - 1}{3y + 2} = 4$

বা, $y - 1 = 12y + 8$

বা, $11y = - 9$

$\therefore\ y = -\frac{9}{11}$

আবার, a = 1 হলে আমরা পাই, $\frac{y - 1}{3y + 2} = 1^2$

বা, $3y + 2 = y - 1$

বা, $3y - y = -1 - 2$

$\therefore y = -\frac{3}{2}$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $y = -\frac{9}{11}$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{-\frac{9}{11} - 1}{3\left(-\frac{9}{11}\right) + 2}} + 2\sqrt{\frac{3\left(-\frac{9}{11}\right) + 2}{-\frac{9}{11} - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{-9-11}{11}}{\frac{-27+22}{11}}} + 2\sqrt{\frac{\frac{-27+22}{11}}{\frac{-9-11}{11}}}$$

$$= \sqrt{\frac{-20}{11} \times \frac{11}{-5}} + 2\sqrt{\frac{-5}{11} \times \frac{11}{-20}}$$

$$= \sqrt{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 2 + 2.\frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$$

= ডানপক্ষ

আবার, $y = -\frac{3}{2}$ হলে,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{-\frac{3}{2} - 1}{3\left(\frac{-3}{2}\right) + 2}} + 2\sqrt{\frac{3\left(\frac{-3}{2}\right) + 2}{-\frac{3}{2} - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{-3-2}{2}}{\frac{-9+4}{2}}} + 2\sqrt{\frac{\frac{-9+4}{2}}{\frac{-3-2}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{-5}{2} \times \frac{2}{-5}} + 2\sqrt{\frac{-5}{2} \times \frac{2}{-5}}$$

$$= \sqrt{1} + 2\sqrt{1}$$

$= 3$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $y = -\frac{9}{11}, -\frac{3}{2}$

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-৩১ নং এর সমাধানের অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২১৪

[বি.দ্র.: a এর স্থলে 6 হবে]

প্রশ্ন ▶৪৬ $32y^x - y^{2x} = 256$ ... ... (i)

$4^x = y^2$ ... ... (ii)

$f(z) = \ln\frac{5+z}{5-z}$ ... ... (iii)

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^2 + y^2 = 25$ যেখানে $x > 0$, অন্বয়টি ফাংশন কিনা নির্ণয় কর। ২

খ. সমীকরণ (i) এবং (ii) ব্যবহার করে (x, y) এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(z)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 + y^2 = 25$

বা, $y^2 = 25 - x^2$

$\therefore y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

$x > 0$ হলেও x এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য y এর দুটি ভিন্ন ভিন্ন মান থাকা সম্ভব।

$\therefore x^2 + y^2 = 25$ অন্বয়টি ফাংশন নয়।

খ (i) নং থেকে পাই, $32y^x - y^{2x} = 256$

বা, $(y^x)^2 - 32y^x + 256 = 0$

বা, $(y^x)^2 - 2.\ y^x.\ 16 + 16^2 = 0$

বা, $(y^x - 16)^2 = 0$

বা, $y^x - 16 = 0$

$\therefore$ $y^x = 16$ ... ... (iii)

আবার, (ii) নং থেকে পাই,

$4^x = y^2$

বা, $(4^x)^x = (y^2)^x$ [ঘাত x নিয়ে]

বা, $4^{x^2} = (y^x)^2$

বা, $4^{x^2} = (16)^2$

বা, $4^{x^2} = 4^4$

বা, $x^2 = 4$

$\therefore$ $x = \pm 2$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$x = 2$ হলে, $y^2 = 16$ $\therefore$ $y = \pm 4$

$x = -2$ হলে, $y^{-2} = 16$ বা, $\frac{1}{y^2} = 16$

$\therefore$ $y = \pm\frac{1}{4}$

$\therefore$ $(x, y) = (2, 4)\ (2, -4)\left(-2, \frac{1}{4}\right)\left(-2, \frac{-1}{4}\right)$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(z) = \ell n\frac{5+z}{5-z}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ $\frac{5+z}{5-z} > 0$ যদি (i) $5 + z > 0$ এবং $5 - z > 0$ হয়

অথবা (ii) $5 + z < 0$ এবং $5 - z < 0$ হয়।

(i) হতে পাই, $z > -5$ এবং $-z > -5$

বা, $z > -5$ এবং $z < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{z\in\nabla : z > -5\}$ এবং $(z\in\nabla : z < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $z < -5$ এবং $-z < -5$

বা, $z < -5$ এবং $z > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{z : z < -5\} \cap (z : z > 5\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন,

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$ **(Ans.)**

ধরি, $y = f(z) = \ell n\frac{5+z}{5-z}$

বা, $e^y = \frac{5+z}{5-z}$

বা, $5 + z = 5e^y - ze^y$

বা, $z(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

বা, $z = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য z এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশেনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ $p^a = q^b = r^c$ যেখানে, $p \neq q \neq r$

[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\log_a . \log_a . \log_a(a^{a^{ab}})$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি p, q, r ক্রমিক সমানুপাতিক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ ৪

গ. যদি pqr = 1 হয় তবে দেখাও যে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right)$

$= \log_a\log_a a^{a^b} \log_a a$

$= \log_a\log_a a^{a^b} \times 1$

$= \log_a a^b \log_a a$

$= \log_a a^b \times 1$

$= b\log_a a$

$= b \times 1 = b$

$\therefore \log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right) = b$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

p, q, r ক্রমিক সমানুপাতী।

$\therefore \frac{p}{q} = \frac{q}{r}$

অর্থাৎ, $pr = q^2$

দেওয়া আছে,

$p^a = q^b = r^c$

এখন, $p^a = q^b$

$\therefore p = q^{\frac{b}{a}}$

তাব, $r^c = q^b$

$\therefore r = q^{\frac{b}{c}}$

$\therefore pr = q^{\frac{b}{a}} . q^{\frac{b}{c}}$

বা, $q^2 = q^{\frac{b}{a} + \frac{b}{c}}$

বা, $2 = \frac{b}{a} + \frac{b}{c}$

বা, $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ [উভয়পক্ষকে b দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ **(প্রমাণিত)**

গ ধরি, $p^a = q^b = r^c = k$ [k ধ্রুবক]

$\therefore \quad p = k^{\frac{1}{a}}$

$q = k^{\frac{1}{b}}$

$r = k^{\frac{1}{c}}$

দেওয়া আছে, pqr = 1

বা, $k^{\frac{1}{a}} . k^{\frac{1}{b}} . k^{\frac{1}{c}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = k^0 \quad [\because k^0 = 1]$

বা, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$

SSC উচ্চতর গণিত মেইড ইজি উত্তরপত্র-**৮ঘ**

ঘন করে পাই, $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 = \left(-\frac{1}{c}\right)^3$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{1}{a}.\frac{1}{b} = -\frac{1}{c^3}$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + 3\left(\frac{1}{-c}\right)\frac{1}{a}.\frac{1}{b} = -\frac{1}{c^3}$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{3}{abc} = -\frac{1}{c^3}$

$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x - 2}}$ এবং $g(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ৯ [বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার প্রশ্ন নং ২]

ক. P ও Q যে কোনো সসীম সেট হলে প্রমাণ কর যে, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$. ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন ও বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ৪

গ. g(x) এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.১ এর প্রতিজ্ঞা-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৪

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x - 2}}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $5x - 2 > 0$ বা, $x > \frac{2}{5}$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $= \left\{x \in \nabla : x > \frac{2}{5}\right\}$

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

ধরি, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x - 2}}$

বা, $y = \frac{1}{\sqrt{5x - 2}}$

বা, $y^2 = \frac{1}{5x - 2}$

বা, $5xy^2 - 2y^2 = 1$

বা, $5xy^2 = 1 + 2y^2$

বা, $x = \frac{1 + 2y^2}{5y^2}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1 + 2y^2}{5y^2}$ [$y = f(x)$ বলে $x = f^{-1}(y)$]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1 + 2x^2}{5x^2}$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = g(x) = \ln\frac{7 + x}{7 - x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{7+x}{7-x} > 0$ হবে যদি (i) $7 + x > 0$ এবং $7 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $7 + x < 0$ এবং $7 - x < 0$ হয়

শর্ত (i) হতে পাই, $x > -7$ এবং $-x > -7$ বা, $x < 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -7 < x\} \cap \{x : x < 7\}$

$= (-7, \infty) \cap (-\infty, 7) = (-7, 7)$

শর্ত (ii) নং হতে পাই, $x < -7$ এবং $-x < -7$ বা, $x > 7$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -7\} \cap \{x : x > 7\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_g = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-7, 7) \cup \varnothing = (-7, 7)$

আবার, $y = g(x) = ln\dfrac{7+x}{7-x}$

বা, $e^y = \dfrac{7+x}{7-x}$

বা, $7 + x = 7e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 7(e^y - 1)$

$\therefore x = \dfrac{7(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্ড়ব মানের জন্য x-এর মান বাস্ড়ব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_g = \nabla$

Ans. ডোমেন, $D_g = (-7, 7)$ এবং রেঞ্জ $R_g = \nabla$

প্রশ্ন ▶৪৯ $x = 1 + \log_a(bc)$, $y = 1 + \log_b(ca)$, $z = 1 + \log_c(ab)$

$A = \dfrac{1}{1-x^3}$ কয়েকটি বীজগাণিতিক রাশি।

◀সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৯ [বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার প্রশ্ন নং ৩]

ক. দেখাও যে, $p^{\log_a q} = q^{\log_a q}$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1$. ৪

গ. A কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $m = \log_a p$, $n = \log_a q$

সুতরাং, $a^m = p$, $a^n = q$

$\therefore (a^m)^n = p^n$

বা, $p^n = a^{mn}$ … … (i)

এবং $(a^n)^m = q^m$

বা, $q^m = a^{mn}$ … … (ii)

(i) ও (ii) হতে, $p^n = q^m$

$\therefore p^{\log_a q} = q^{\log_a p}$ **(প্রমাণিত)**

খ সৃজনশীল ৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ $A = \dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}$

ধরি, $\dfrac{1}{(1-x)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ … … (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(1-x)(x^2+x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(1 - x)$ … … (ii)

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$1 = A(1 + 1 + 1) + (Bx + C).0$

$\therefore A = \dfrac{1}{3}$

(ii) নং এ x^2 এর সহগ ও ধ্র“বক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A - B$

বা, $B = A = \dfrac{1}{3}$

এবং $1 = A + C$

বা, $C = 1 - A = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

(i) নং এ A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$\dfrac{1}{(1-x)(x^2+x+1)} = \dfrac{1}{3(1-x)} + \dfrac{\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$

$= \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)} - \dfrac{1}{3(x-1)}$ (ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ)

প্রশ্ন ▶৫০ $f(x) = \sqrt{1-3x}$, $F(x) = \log_e\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$.

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ৯ [মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $P \times Q \subset R \times S$, যখন $P \subset R$ ও $Q \subset S$. ২

খ. $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ হলে, g(x) ফাংশনটি এক-এক কি না যাচাই কর। ৪

গ. F(x) ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $(x, y) \in P \times Q$

তাহলে, $x \in P$, $y \in Q$

বা, $x \in R$, $y \in S$ [$P \subset R$ এবং $Q \subset S$]

$\therefore (x, y) \in R \times S$

$\therefore P \times Q \subset R \times S$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{1-3x}$

$\therefore g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$

যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম g এর জন্য ফাংশনটি এক-এক হবে যদি এবং কেবল যদি $g(x_1) = g(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $g(x_1) = g(x_2)$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{1-3x_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-3x_2}}$

বা, $\sqrt{1-3x_2} = \sqrt{1-3x_1}$

বা, $1 - 3x_2 = 1 - 3x_1$

বা, $-3x_2 = -3x_1$

$\therefore x_2 = x_1$

$\therefore$ g(x) ফাংশনটি এক-এক।

গ দেওয়া আছে, $F(x) = \log_e\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্ড়ব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

$\therefore \dfrac{2+x}{2-x} > 0$ যদি (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়

(i) নং হতে পাই, $x > -2$ এবং $-x > -2$

বা, $x > -2$ এবং $x < 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -2 < x\} \cap \{x : x < 2\}$

$= (-2, \infty) \cap (-\infty, 2)$

$= (-2, 2)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -2$ এবং $-x < -2$

বা, $x < -2$ এবং $x > 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -2\} \cap \{x : x > 2\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-2, 2) \cup \varnothing = (-2, 2)$

রেঞ্জ: $F(x) = \log_e\left(\dfrac{2 - x}{2 + x}\right)$

বা, $e^z = \dfrac{2 + x}{2 - x}$ [ধরি, $F(x) = z$]

বা, $2 + x = 2e^z - xe^z$

বা, $x(1 + e^z) = 2(e^z - 1)$

$\therefore x = \dfrac{2(e^z - 1)}{e^z + 1}$

z এর সকল বাস্ড়ব মানের জন্য x-এর মান বাস্ড়ব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_f = (-2, 2)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$

প্রশ্ন ▶৫১ (i) $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. (ii) $f(x) = 2^x$

◀সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৯ [বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল প্রশ্ন নং ১]

ক. $F(p, q, r)$ নির্ণয় করে দেখাও যে, এটি একটি চক্রক্রমিক প্রতিসম রাশি। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর,

$F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$ 8

গ. (ii) নং এর লেখচিত্র আঁক এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। 8

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore F(p, q, r) = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

এখন, $F(q, r, p) = q^3 + r^3 + p^3 - 3qrp = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

এবং $F(r, p, q) = r^3 + p^3 + q^3 - 3rpq = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

আবার, $F(q, p, r) = q^3 + p^3 + r^3 - 3qpr = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

$\therefore F(p, q, r) = F(q, r, p) = F(r, p, q)$

এবং $F(p, q, r) = F(q, p, r)$

অতএব $F(p, q, r)$ একটি চক্রক্রমিক প্রতিসম রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

এরপর, পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর অনুসিদ্ধান্ড়-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫২

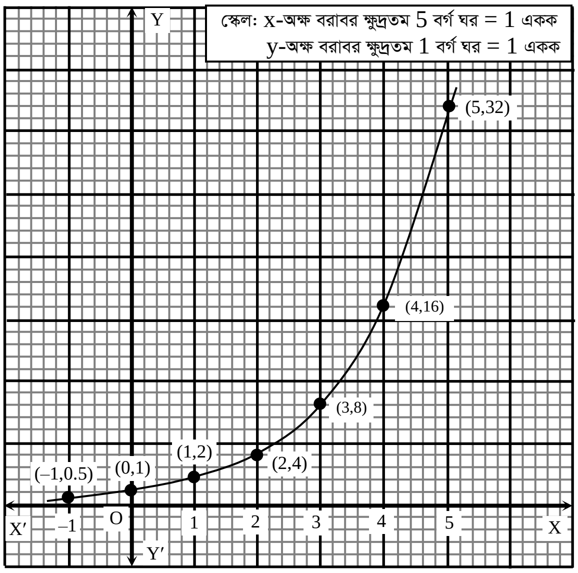
গ ধরি, $y = f(x) = 2^x$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশিণ্টষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো−

x	− 1	0	1	2	3	4	5
y	0.5	1	2	4	8	16	32

মনে করি, XOX′ ও YOY′ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ, বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্ন দেখানো হলো−



আবার, x এর সকল বাস্ড়ব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = \nabla$

এবং x যখন $-\infty$ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং x এর মান বৃদ্ধি পেলে $f(x)$ এর মান অসীমের (∞) কাছাকাছি হয়।

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = (0, \infty)$

প্রশ্ন ▶৫২ (i) $ax^2 + bx + c = A$, (ii) $a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} + 2 = B$, যেখানে $a \geq 0$ *◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৬ ও ৯*

[বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল প্রশ্ন নং ৩]

ক. $a(x + b) < c$, যেখানে $a \neq 0$ এবং $a < 0$, অসমতাটি সমাধান কর। ২

খ. $B = 0$ হলে, প্রমাণ কর, $3a^3 + 9a = 8$ 8

গ. $A = 0$ হলে, সমীকরণটির বীজগুলি নির্ণয় কর। 8

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a(x + b) < c$ [$a \neq 0$ এবং $a < 0$]

$a < 0$ হলে, $\dfrac{a(x + b)}{a} > \dfrac{c}{a}$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x + b > \dfrac{c}{a}$

বা, $x > \frac{c}{a} - b$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x > \frac{c}{a} - b$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৮(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $ax^2 + bx + c = A$

এখন, A = 0 হলে,

$ax^2 + bx + c = 0$

বা, $a^2x^2 + abx + ac = 0$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

বা, $(ax)^2 + 2(ax)\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac = 0$

বা, $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac$

বা, $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$

বা, $ax + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ [উভয় পক্ষের বর্গমূল করে]

বা, $ax = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

∴ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৩ (i) $x^2 = y^3$

(ii) $A = \frac{1}{a^z + a^{-y} + 1} + \frac{1}{a^y + a^{-z} + 1} + \frac{1}{a^z + a^{-x} + 1}$

[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠী প্রশ্ন নং ২]

ক. $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং abc = 1 হলে প্রমাণ কর যে, x + y + z = 0 ২

খ. (i) নং হতে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^3} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ ৪

গ. 'ক' এর প্রাপ্ত মান হতে প্রমাণ কর : A = 1 ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ [k ধ্রুবক]

∴ $a^{\frac{1}{x}} = k, b^{\frac{1}{y}} = k, c^{\frac{1}{z}} = k$

∴ $a = k^x, b = k^y, c = k^z$

দেওয়া আছে,

abc = 1

∴ $k^x . k^y . k^z = 1$

বা, $k^{x+y+z} = k^0$

∴ x + y + z = 0 **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $x^2 = y^3$

$\text{L.H.S.} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^3} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$

$= \sqrt{\frac{x^3}{y^3}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$

$= \sqrt{\frac{x^3}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{y^3}}$

$= \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

= R.H.S. **(প্রমাণিত)**

গ 'ক' হতে পাই,

x + y + z = 0

$A = \frac{1}{a^x + a^{-y} + 1} + \frac{1}{a^y + a^{-z} + 1} + \frac{1}{a^z + a^{-x} + 1}$

$= \frac{1}{a^x + a^{-y} + 1} + \frac{1}{a^y + \frac{1}{a^z} + 1} + \frac{1}{a^z + a^{-x} + 1}$

$= \frac{1}{a^x + \frac{1}{a^y} + 1} + \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}}$

[x + y + z = 0 ∴ y + z = – x]

$= \frac{a^y}{a^{x+y} + a^y + 1} + \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}}$

$= \frac{a^y}{a^{-z} + a^y + 1} + \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}}$

$= \frac{a^y}{\frac{1}{a^z} + a^y + 1} + \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}}$

$= \frac{a^y.a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{a^z}{1 + a^z + a^{y+z}} + \frac{1}{1 + a^z + a^{y+z}}$

$= \frac{a^z + 1 + a^{y+z}}{1 + a^z + a^{y+z}} = 1$

∴ A = 1 **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫৪ $A = \log(1 + x), B = \log x, C = \log_a(abc)$,

$D = \log_b(abc), E = \log_c(abc)$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [সরকারি এম.সি. (মোহাম্মাদ চৌধুরী) একাডেমী মডেল স্কুল ও কলেজ, সিলেট প্রশ্ন নং ২]

ক. $\frac{A}{B} = 2$ হলে একে দ্বিঘাত সমীকরণের আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{2}{C} + \frac{2}{D} + \frac{2}{E} = \log_a a^2$. ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \log(1 + x)$

$B = \log x$

প্রশ্নমতে, $\frac{A}{B} = 2$

বা, $\frac{\log(1 + x)}{\log x} = 2$

বা, $\log(1 + x) = 2 \log x$

বা, $\log(1 + x) = \log x^2$ [$\log_a p^2 = r \log_a p$]

বা, $1 + x = x^2$

∴ $x^2 - x - 1 = 0$; যা নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ। **(Ans.)**

খ এখানে, $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{A}{B} = 2$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$ ['ক' নং হতে]

বা, $4x^2 - 4x - 4 = 0$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2x)^2 - 2.2x.1 + 1 - 5 = 0$

বা, $(2x - 1)^2 = 5$

বা, $2x - 1 = \sqrt{5}$

বা, $2x = 1 + \sqrt{5}$

$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$C = \log_a(abc)$	$D = \log_b(abc)$
বা, $abc = a^C$	বা, $b^D = abc$
$\therefore a = (abc)^{\frac{1}{C}}$	$\therefore b = (abc)^{\frac{1}{D}}$

এবং $E = \log_c(abc)$

বা, $c^E = abc$

$\therefore c = (abc)^{\frac{1}{E}}$

তাহলে $abc = (abc)^{\frac{1}{C}} . (abc)^{\frac{1}{D}} . (abc)^{\frac{1}{E}}$

বা, $abc = (abc)^{\frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \frac{1}{E}}$

বা, $1 = \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \frac{1}{E}$

$\therefore \frac{2}{C} + \frac{2}{D} + \frac{2}{E} = 2.1 = 2 \log_a a$

$= \log_a a^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৫৫ (i) $\frac{ab \log_k(ab)}{a + b} = \frac{bc \log_k(bc)}{b + c} = \frac{ca \log_k(ca)}{c + a}$

(ii) $a^2 + b^2 = 7ab$. *[মোহাম্মদপুর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ৩]*

ক. সরল কর: $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$. ২

খ. উদ্দীপক (i) ব্যবহার করে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$. ৪

গ. উদ্দীপক (ii) থেকে প্রমাণ কর যে, $\log\left(\frac{a + b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab)$. ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [□ $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$]

$= a^{\frac{3}{3}} - b^{\frac{3}{3}}$

$= a^1 - b^1$

$= a - b$ **(Ans.)**

খ ধরি, $\frac{ab \log_k(ab)}{a + b} = \frac{bc \log_k(bc)}{b + c} = \frac{ca \log_k(ca)}{c + a} = m$

$\therefore \log_k(ab) = \frac{m(a + b)}{ab} = m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ... ... (i)

আবার, $\log_k(bc) = \frac{m(b + c)}{bc} = m\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ... ... (ii)

এবং $\log_k(ca) = \frac{m(c + a)}{ca} = m\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$ ... ... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k(ab) + \log_k(bc) + \log_k(ca)$

$= m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + m\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + m\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$

বা, $\log_k(ab \cdot bc \cdot ca) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k(abc)^2 = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$

বা, $2\log_k(abc) = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$ [□ $\log_k p^r = r\log_k p$]

$\therefore \log_k(abc) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$ ... ... (iv)

(iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ab) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$= m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$

বা, $\log_k\frac{abc}{ab} = \frac{m}{c}$

বা, $\log_k c = \frac{m}{c}$

বা, $c \log_k c = m$

বা, $\log_k c^c = m$

$\therefore c^c = k^m$ ... ... (v)

আবার, (iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(bc) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - m\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

বা, $\log_k\frac{abc}{bc} = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k a = \frac{m}{a}$

বা, $a \log_k a = m$ বা, $\log_k a^a = m$

$\therefore a^a = k^m$ ... ... (vi)

পুনরায়, (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ca) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - m\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$

বা, $\log_k\frac{abc}{ca} = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k b = \frac{m}{b}$

বা, $b \log_k b = m$

বা, $\log_k b^b = m$ [□ $r\log_k p = \log_k p^r$]

$\therefore b^b = k^m$ ... ... (vii)

সুতরাং, (v), (vi) ও (vii) নং থেকে লেখা যায়,

$a^a = b^b = c^c = k^m$

$\therefore a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab$ [উভয় পক্ষে 2ab যোগ করে]

বা, $(a + b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a + b)^2}{9} = ab$

বা, $\left(\frac{a + b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log (ab)$ [উভয় পাশে log নিয়ে]

বা, $2\log \left(\frac{a+b}{3}\right) = \log (ab)$

বা, $\log \left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2} \log (ab)$

$\therefore \log \left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2} \log (ab)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫৬ (i) $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$
(ii) $P = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$, $r = \log_c(ab)$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [মীরপুর বাংলা উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $16^{2y} = 4^{y+1}$ হলে y এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. (i) নং সমীকরণের সমাধান কর। ৪
গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1$ ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $16^{2y} = 4^{y+1}$

বা, $(4^2)^{2y} = 4^{y+1}$

বা, $4^{4y} = 4^{y+1}$

বা, $4y = y + 1$

বা, $3y = 1$

$\therefore y = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.২ এর উদাহরণ-১০ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১০২

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-২৮ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২১০

প্রশ্ন ▶৫৭ $A = ab^{z-1}$, $B = ab^{x-1}$, $C = ab^{y-1}$ এখানে $a > 0, b > 0$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [বিসিআইসি কলেজ, সাভার, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\log_{\sqrt{3}} (2x+3) = 2$ হলে x এর মান কত? ২
খ. $ABC = \frac{a^3}{b^3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. ৪
গ. লেখের সাহায্যে $x^2 + 8x - 5 = 0$ সমীকরণের সমাধান কর। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_{\sqrt{3}}(2x+3) = 2$

বা, $2x + 3 = (\sqrt{3})^2$

বা, $2x + 3 = 3$

বা, $2x = 0$

$\therefore x = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$A = ab^{z-1}$

$B = ab^{x-1}$

$C = ab^{y-1}$

প্রশ্নমতে,

$ABC = \frac{a^3}{b^3}$

বা, $ab^{z-1}.ab^{x-1}.ab^{y-1} = \frac{a^3}{b^3}$

বা, $a^3b^{x+y+z-3} = \frac{a^3}{b^3}$

বা, $b^{x+y+z-3} = b^{-3}$

বা, $x + y + z - 3 = -3$

$\therefore x + y + z = 0$ … … (i)

L.H.S. $= x^3 + y^3 + z^3$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$

$= 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$ [(i) নং হতে]

$= 3xyz$

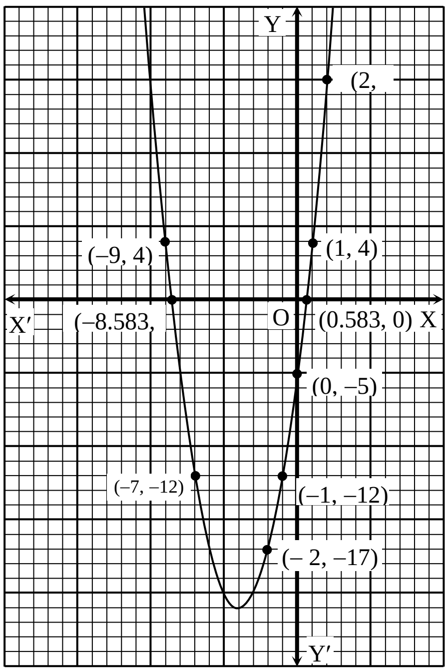
$\therefore$ L.H.S. = R.H.S **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, $y = x^2 + 8x - 5$

x-এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান বের করে প্রদত্ত সমীকরণের জন্য কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	0	1	− 1	2	− 2	− 7	− 9
y	− 5	4	− 12	15	− 17	− 12	4

সারণি হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং লেখচিত্রটি অঙ্কন করি। এখানে ছক কাগজের প্রতি ঘরকে x এবং y অক্ষ বরাবর 1 একক ধরা হয়েছে।



দেখা যায়, লেখচিত্রটি x অক্ষকে (0.58, 0) ও (− 8.58, 0) বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং সমীকরণটির সমাধান: $x = 0.58, - 8.58$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৮ (i) $a^2 + b^2 = 7ab$ (ii) $P = \frac{x-1}{3x+2}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৬ ও ৯ [এম ই এইচ আরিফ কলেজ (মাধ্যমিক শাখা), গাজীপুর ⎕প্রশ্ন নং ২]

ক. $x \le \frac{x}{3} + 4$ অসমতাটির সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও। ২

খ. (i) হতে দেখাও যে, $\text{Log}\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\text{Log } a + \text{Log } b)$. ৪

গ. $\sqrt{P} + \frac{2}{\sqrt{P}} - 3 = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x \le \frac{x}{3} + 4$

বা, $x - \frac{x}{3} \le \frac{x}{3} + 4 - \frac{x}{3}$ [উভয়পক্ষে $\left(-\frac{x}{3}\right)$ যোগ করে]

বা, $\frac{3x - x}{3} \le 4$

বা, $\frac{2x}{3} \le 4$

বা, $\frac{2x}{3} \times 3 \le 4 \times 3$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2x \le 12$

বা, $\frac{2x}{2} \le \frac{12}{2}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $x \le 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x \le 6$ **(Ans.)**

এখানে, সমাধান সেট, $S = \{x \in \nabla : x \le 6\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট :

খ দেওয়া আছে,

$a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab$ [উভয় পক্ষে 2ab যোগ করে]

বা, $(a + b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a+b)^2}{9} = ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab)$ [উভয় পাশে log নিয়ে]

বা, $2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$

বা, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

[⎕ $\log(M \times N) = \log M + \log N$]

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$\sqrt{P} + \frac{2}{\sqrt{P}} - 3 = 0$

বা, $P + 2 - 3\sqrt{P} = 0$ [$\sqrt{P}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $P + 2 = 3\sqrt{P}$

বা, $(P + 2)^2 = 9P$ [বর্গ করে]

বা, $\left(\frac{x-1}{3x+2} + 2\right)^2 = \frac{9x-9}{3x+2}$ [P এর মান বসিয়ে]

বা, $\left(\frac{x - 1 + 6x + 4}{3x+2}\right)^2 = \frac{9x-9}{3x+2}$

বা, $\left(\frac{7x+3}{3x+2}\right)^2 = \frac{9x-9}{3x+2}$

বা, $(7x + 3)^2 \times (3x + 2) = (3x + 2)^2(9x - 9)$

বা, $(7x + 3)^2 = (3x + 2)(9x - 9)$ [(3x + 2) দ্বারা ভাগ করে]

বা, $49x^2 + 42x + 9 = 27x^2 - 27x + 18x - 18$

বা, $22x^2 + 51x + 27 = 0$

বা, $22x^2 + 18x + 33x + 27 = 0$

বা, $2x(11x + 9) + 3(11x + 9) = 0$

বা, $(11x + 9)(2x + 3) = 0$

বা, $11x + 9 = 0$ | অথবা, $2x + 3 = 0$

$\therefore x = \frac{-9}{11}$ | $\therefore x = \frac{-3}{2}$

$\therefore x = \frac{-9}{11}, \frac{-3}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫৯ $Q(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}$

$g(y) = \log(3 + y) - 2\log y$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [মর্গ্যান বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নারায়ণগঞ্জ ⎕প্রশ্ন নং ২]

ক. $3 - 4x - x^2 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. $Q(x) = 2^{\frac{1}{3}}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(y) = 0$ হলে, দেখাও যে, $y = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$. ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $3 - 4x - x^2 = 0$ সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = -1, b = -4, c = 3$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ca$

$= (-4)^2 - 4.3(-1)$

$= 16 + 12$

$= 28$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবই অনুশীলনী ৫.২ এর উদাহরণ-১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১০২

গ দেওয়া আছে,

$g(y) = 0$

$\therefore \log(3 + y) - 2\log y = 0$

বা, $\log(3 + y) = 2\log y$

বা, $\log(3 + y) = \log y^2$

বা, $3 + y = y^2$

বা, $y^2 - y - 3 = 0$

বা, $4y^2 - 4y - 12 = 0$ [4 দ্বারা গুণ]

বা, $4y^2 - 4y + 1 - 13 = 0$

বা, $(2y - 1)^2 = 13$

বা, $2y - 1 = \sqrt{13}$

বা, $2y = 1 + \sqrt{13}$

$\therefore y = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৬০ $P = 2^{2y-1} + 3.2^y$ এবং $q = (\sqrt[3]{5})^2 + (\sqrt[3]{5})^{-2} - x^2, x > 0$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৬ ও ৯ [নাটোর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর প্রশ্ন নং ১]

ক. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $z - 6 \leq 3z + 4$ ২

খ. $P = 8$ হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $q = -2$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $5x^3 - 15x - 26 = 0$ ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$z - 6 \leq 3z + 4$

বা, $z - 6 + 6 \leq 3z + 4 + 6$ [উভয়পক্ষে 6 যোগ করে]

বা, $z \leq 3z + 10$

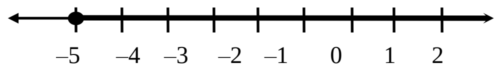
বা, $z - 3z \leq 3z + 10 - 3z$ [উভয়পক্ষে $(-3z)$ যোগ করে]

বা, $-2z \leq 10$

$\therefore$ $z \geq -5$ [উভয় পক্ষকে `-2' দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \{z : z \in \nabla$ এবং $z \geq -5\}$

সমাধান সেট সংখ্যারেখায়:



খ দেওয়া আছে, $P = 2^{2y-1} + 3.2^y$ এবং $P = 8$

$\therefore$ $2^{2y-1} + 3.2^y = 8$

বা, $2^{2y} . 2^{-1} + 3.2^y = 8$

বা, $a^2 . \frac{1}{2} + 3a = 8$ [$2^y = a$ ধরে]

বা, $a^2 + 6a = 16$

বা, $a^2 + 6a - 16 = 0$

বা, $a^2 + 8a - 2a - 16 = 0$

বা, $a(a + 8) - 2(a + 8) = 0$

$\therefore$ $(a + 8)(a - 2) = 0$

হয়, $a + 8 = 0$ অথবা, $a - 2 = 0$

বা, $2^y = -8$ বা, $2^y = 2$

ইহা গ্রহণযোগ্য নয়। বা, $2^y = 2^1$

কারণ, $2^y > 0$ $\therefore$ $y = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $y = 1$

গ দেওয়া আছে,

$q = (\sqrt[3]{5})^2 + (\sqrt[3]{5})^{-2} - x^2; x > 0$

এবং $q = -2$

$\therefore$ $-2 = (\sqrt[3]{5})^2 + (\sqrt[3]{5})^{-2} - x^2$

বা, $x^2 = (\sqrt[3]{5})^2 + (\sqrt[3]{5})^{-2} + 2$

বা, $x^2 = (\sqrt[3]{5})^2 + 2\sqrt[3]{5} . (\sqrt[3]{5})^{-1} + \{(\sqrt[3]{5})^{-1}\}^2$

বা, $x^2 = \{\sqrt[3]{5} + (\sqrt[3]{5})^{-1}\}^2$

বা, $x = \sqrt[3]{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

বা, $x^3 = \left(\sqrt[3]{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^3$

বা, $x^3 = (\sqrt[3]{5})^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 + 3. \sqrt[3]{5} . \frac{1}{\sqrt[3]{5}} . \left(\sqrt[3]{5} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$

বা, $x^3 = 5 + \frac{1}{5} + 3.x$

বা, $x^3 = \frac{25 + 1 + 15x}{5}$

বা, $5x^3 = 15x + 26$

$\therefore$ $5x^3 - 15x - 26 = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬১ $a^x = b^y = c^z$ যেখানে $a \neq b \neq c$, $M = \frac{p^{\frac{3}{2}} + pq}{pq - q^3} - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p - q}}$

[নাটোর সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর প্রশ্ন নং ২]

ক. $ab = c^2$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ ২

খ. $abc = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

গ. দেখাও যে, $M = \frac{\sqrt{p}}{q}$ ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$ [k ধ্রুবক]

$\therefore$ $a = k^{\frac{1}{x}}$

$b = k^{\frac{1}{y}}$

$c = k^{\frac{1}{z}}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}} . k^{\frac{1}{y}} . k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = k^0$ [$\because k^0 = 1$]

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$\therefore$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

ঘন করে পাই, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\left(\frac{1}{-z}\right)\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{3}{xyz} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore$ $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$$M = \frac{p^{\frac{3}{2}} + pq}{pq - q^3} - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - q}$$

$$= \frac{p(\sqrt{p} + q)}{q(p - q^2)} - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - q} \quad \left[\because p^{\frac{3}{2}} = p \,.\, p^{\frac{1}{2}} = p\sqrt{p}\right]$$

$$= \frac{p(\sqrt{p} + q)}{q\{(\sqrt{p})^2 - (q)^2\}} - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - q}$$

$$= \frac{p(\sqrt{p} + q)}{q(\sqrt{p} + q)(\sqrt{p} - q)} - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - q}$$

$$= \frac{p}{q(\sqrt{p} - q)} - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - q}$$

$$= \frac{p - q\sqrt{p}}{q(\sqrt{p} - q)}$$

$$= \frac{\sqrt{p}(\sqrt{p} - q)}{q(\sqrt{p} - q)} \quad [\because p = p^{\frac{1}{2}}.\, p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}.\sqrt{p}\,]$$

$$= \frac{\sqrt{p}}{q}$$

$\therefore M = \frac{\sqrt{p}}{q}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৬২ $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ এবং $f(x) = y = \ln \frac{2 + x}{2 - x}$

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ২]

ক. a, b এবং c তিনটি ক্রমিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে $\log(1 + ac)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. $f(x)$-এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, a, b ও c তিনটি ধনাত্মক ক্রমিক সংখ্যা।

$\therefore b = a + 1$

এবং $c = a + 1 + 1 = a + 2$

তাহলে, $1 + ac = 1 + a(a + 2) = 1 + a^2 + 2a$

$= a^2 + 2.\ a.\ 1 + 1^2$

$= (a + 1)^2$

$\therefore \log(1 + ac) = \log(a + 1)^2 = 2\log(1 + a) = 2\log b$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} \left[\because 3^{\frac{1}{3}}.\, 3^{-\frac{1}{3}} = 3^0 = 1\right]$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয় পক্ষে বর্গমূল করে এবং যেহেতু $a \geq 0$ সেহেতু ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\because (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$]

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3\,.\,3^0.a$

$\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^\circ \text{ ‰es } 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$

বা, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$

$\therefore 3a^3 + 9a = 8$ **(দেখানো হলো)**

গ ধরি, $y = f(x) = \{n \frac{2 + x}{2 - x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

$\therefore \frac{2 + x}{2 - x} > 0$ যদি (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়

(i) নং হতে পাই, $x > -2$ এবং $-x > -2$

বা, $x > -2$ এবং $x < 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -2 < x\} \cap \{x : x < 2\}$

$= (-2, \infty) \cap (-\infty, 2)$

$= (-2, 2)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -2$ এবং $-x < -2$

বা, $x < -2$ এবং $x > 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -2\} \cap \{x : x > 2\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$D_f = $ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-2, 2) \cup \varnothing = (-2, 2)$

রেঞ্জ: $y = f(x) = \{n \frac{2 + x}{2 - x}$

বা, $e^y = \frac{2 + x}{2 - x}$

বা, $2 + x = 2e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 2(e^y - 1)$

$\therefore x = \frac{2(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

ডোমেন $D_f = (-2, 2)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৬৩ $p = 32,\ q = \frac{\log_k(1 + x)}{\log_k x}$ হলে,

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ৯ [ইবনে তাইমিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $5x^2 - 4x - 2 = 0$ সমীকরণের মূল এবং মূলের প্রকৃতি ধরন কী হবে তা লিখ। ২

খ. $2^{2x} - 3.2^{x+2} + p = 0$ সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

গ. যদি $p = q^5$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $5x^2 - 4x - 2 = 0$

আমরা জানি,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.5.(-2)}}{2.5}$$

এখানে, a = 5

b = – 4

c = – 2

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{10}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{56}}{10}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{10}$$

$$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5} \textbf{ (Ans.)}$$

মুলের প্রকৃতি: বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।

খ $2^{2x} - 3.2^{x+2} + p = 0$

বা, $(2^x)^2 - 3.2^x.2^2 + 32 = 0$

বা, $a^2 - 12a + 32 = 0$ [$2^x = a$ ধরে]

বা, $a^2 - 8a - 4a + 32 = 0$

বা, $a(a - 8) - 4(a - 8) = 0$

বা, $(a - 8)(a - 4) = 0$

$\therefore$ $a - 8 = 0$ অথবা, $a - 4 = 0$

বা, $a = 8$ বা, $a = 4$

$\therefore$ $2^x = 2^3$ বা, $2^x = 2^2$

$\therefore$ $x = 3$ $\therefore$ $x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, x = 3, 2 **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$p = 32, q = \dfrac{\log_k(1 + x)}{\log_k x}$

$p = q^5$

বা, $q = p^{\frac{1}{5}}$

বা, $\dfrac{\log_k(1 + x)}{\log_k x} = 32^{\frac{1}{5}}$

বা, $\dfrac{\log_k(1 + x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1 + x) = 2 \log_k x$

বা, $\log_k(1 + x) = \log_k x^2$ [$\log_a P^r = r\log_a P$]

বা, $1 + x = x^2$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $4x^2 - 4x - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2x - 1)^2 = 5$

বা, $2x - 1 = \sqrt{5}$

বা, $2x = 1 + \sqrt{5}$

$\therefore$ $x = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

প্রশ্ন ▶ ৬৪ $32y^x - y^{2x} = 256$ … … (i)

$4^x = y^2$ … … (ii)

$f(z) = \ln \dfrac{5 + z}{5 - z}$ … … (iii)

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৬ ও ৯ [বাউফল সরকারী মডেল মাধ্যমিক বিদ্যালয়, পটুয়াখালী প্রশ্ন নং ২]

ক. $8 \geq 2 - 2x$ কে সমাধান করে সংখ্যারেখায় দেখাও। ২

খ. (i) ও (ii) থেকে (x, y) এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$8 \geq 2 - 2x$

বা, $8 + 2x \geq 2 - 2x + 2x$ [উভয়পক্ষে 2x যোগ করে]

বা, $8 + 2x - 8 \geq 2 - 8$ [উভয়পক্ষে (–8) যোগ করে]

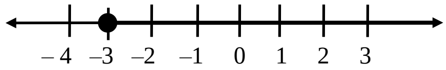
বা, $2x \geq -6$

$\therefore$ $x \geq -3$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x \geq -3$ **(Ans.)**

এখানে, সমাধান সেট, $S = \{x \in \nabla : x \geq -3\}$

সংখ্যারেখায় সমাধান সেট :



খ দেওয়া আছে, $32y^x - y^{2x} = 256$ … … (i)

$4^x = y^2$ … … (ii)

(i) নং হতে পাই,

$32y^x - y^{2x} = 256$

বা, $y^{2x} - 32y^x + 256 = 0$

বা, $(y^x)^2 - 2.y^x.16 + 16^2 = 0$

বা, $(y^x - 16)^2 = 0$

বা, $y^x - 16 = 0$

বা, $y^x = 16$

বা, $y^x = 4^2$

বা, $(y^x)^2 = (4^2)^2$

বা, $(y^2)^x = 4^4$

বা, $(4^x)^x = 4^4$

বা, $x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

x = 2 হলে (ii) নং হতে,

$y^2 = 4^2$

বা, $y^2 = 16$

$\therefore y = \pm 4$

এবং x = – 2 হলে (ii) নং হতে,

$y^2 = 4^{-2}$

বা, $y^2 = \dfrac{1}{16}$

$\therefore y = \pm \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $(x, y) = (2, 4)\ (2, -4) \left(-2, \frac{1}{4}\right)$

$\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(z) = \ell n \frac{5+z}{5-z}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{5+z}{5-z} > 0$ যদি (i) $5 + z > 0$ এবং $5 - z > 0$ হয়

অথবা (ii) $5 + z < 0$ এবং $5 - z < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $z > -5$ এবং $-z > -5 \therefore z < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{z : -5 < z\}$ এবং $\{z : z < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $z < -5$ এবং $-z < -5 \therefore z > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{z : z < -5\} \cap \{z : z > 5\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

ধরি, $y = f(z) = \ell n \frac{5+z}{5-z}$

বা, $e^y = \frac{5+z}{5-z}$

বা, $5 + z = 5e^y - ze^y$

বা, $z(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

$\therefore z = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য z এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশেনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_f = (-5, 5)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$

প্রশ্ন ▶৬৫ $(2x - 5)^{-1} + (2x - 5)^{-2} + (2x - 5)^{-3} + ...$ একটি ধারা এবং $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ৯

[সরকারি বরগুনা বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরগুনা ⎕ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $0.\dot{1}\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $0.\dot{1}\dot{2} = 0.121212 \ldots \ldots$

$= 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \ldots \ldots$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 0.12$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.0012}{0.12} = 0.01$

$\therefore 0.\dot{1}\dot{2} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.12}{1-0.01} = \frac{.12}{.99} = \frac{4}{33}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৬(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

$\therefore \frac{2+x}{2-x} > 0$ যদি (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়

(i) নং হতে পাই, $x > -2$ এবং $-x > -2$

বা, $x > -2$ এবং $x < 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -2 < x\} \cap \{x : x < 2\}$

$= (-2, \infty) \cap (-\infty, 2)$

$= (-2, 2)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -2$ এবং $-x < -2$

বা, $x < -2$ এবং $x > 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -2\} \cap \{x : x > 2\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-2, 2) \cup \varnothing = (-2, 2)$

রেঞ্জঃ ধরি, $z = f(x) = \{n \frac{2+x}{2-x}$

বা, $e^z = \frac{2+x}{2-x}$

বা, $2 + x = 2e^z - xe^z$

বা, $x(1 + e^z) = 2(e^z - 1)$

বা, $x = \frac{2(e^z - 1)}{e^z + 1}$

z এর সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

Ans. ডোমেন $D_f = (-2, 2)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$