ci xÞv^xEe®jyv, %‰LvB ˆeWÆEi xÞv, KÅ©GW KGRmn kx Ã‡bxq Õ›zmgvaæi ci xÞv%‡es gØÿ ˆUĞi cÉ‡Gvi
cÿ¨‡E mgvab AaÅqwfwËK ¨ I qvnGG%à‡GvAbkxj b Ki G Zxg%‰AaÅqwU ^ ^GK ˆhGKvGvmiRbkxj i PbvgjfK
cÉkœ mgvab wjLGZ cvi Gmm GRB|

প্রশ্ন ▶১ $A = 1.\dot{1}0\dot{3}$, $B = (1 - 2x)^5$ এবং $C = \left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^7$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[ঢাকা বোর্ড-২০১৯ ◻ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে B কে বিস্ড়ৃত কর। ২

খ. অসীম গুণোত্তর ধারার সূত্র প্রয়োগ করে A কে মূলদ্বীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. C কে পঞ্চম পদ পর্যন্ড় বিস্ড়ৃত করে তার সাহায্যে $(2.99)^7$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $B = (1 - 2x)^5$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (1 - 2x)^5 = 1 + 5(-2x) + 10(-2x)^2 + 10(-2x)^3 + 5(-2x)^4 + 1(-2x)^5$

$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = 1.\dot{1}0\dot{3}$

এখন, $1.\dot{1}0\dot{3} = 1.103103103 \ldots \ldots$

$= 1 + (0.103 + 0.000103 + 0.000000103 + \ldots)$

এখানে, বন্ধনীর ভিতরের অংশটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

সেই গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ, $a = 0.103$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.000103}{0.103} = 0.001$

$\therefore 1.\dot{1}0\dot{3} = 1 + \frac{a}{1 - r}$

$= 1 + \frac{0.103}{1 - 0.001}$

$= 1 + \frac{0.103}{.999}$

$= 1 + \frac{103}{999}$

$= \frac{999 + 103}{999}$

$= \frac{1102}{999}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$C = \left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^7$

$= 3^7 + {}^7C_1 (3)^{7-1} . \left(-\frac{x^2}{4}\right)^1 + {}^7C_2(3)^{7-2} . \left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + {}^7C_3(3)^{7-3} . \left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + {}^7C_4(3)^{7-4} . \left(-\frac{x^2}{4}\right)^4 + \ldots$

$= 2187 + 7.729 . \left(-\frac{x^2}{4}\right) + 21.243 . \frac{x^4}{16} + 35.81 \left(-\frac{x^6}{64}\right) + 35.27 . \frac{x^8}{256} - \ldots$

$= 2187 - \frac{5103x^2}{4} + \frac{5103x^4}{16} - \frac{2835x^6}{64} + \frac{945x^8}{256} - \ldots$

প্রশ্নমতে, $\left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^7 = 2.99^7$

বা, $3 - \frac{x^2}{4} = 2.99$

বা, $3 - 2.99 = \frac{x^2}{4}$

বা, $\frac{x^2}{4} = 0.01$

বা, $x^2 = 0.04$

$\therefore x = 0.2$

এখন, উক্ত বিস্ড়ৃতিতে x এর মান বসিয়ে পাই,

$\left\{3 - \frac{(0.2)^2}{4}\right\}^7 = 2187 - \frac{5103\,(0.2)^2}{4} + \frac{5103.(0.2)^4}{16} - \frac{2835\,(0.2)^6}{64} + \frac{945(0.2)^8}{256} - \ldots$

বা, $(2.99)^7 = 2187 - \frac{5103 \times 0.04}{4} + \frac{5103 \times 0.0016}{16} - \frac{2835 \times 0.000064}{64} + 0.00000945 - \ldots \ldots$

$= 2187 - 51.03 + 0.5103 - 0.002835 + 0.00000945 - \ldots$

$= 2136.477474$

$= 2136.4775$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ড়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২ $A = \left(a - \frac{1}{3}x\right)^7$ এবং $B = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^6$ দুটি দ্বিপদী রাশি।

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ ◻ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $(1 - 3x^2)^4$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্ড়ৃত কর। ২

খ. A এর বিস্ড়ৃতিতে x^2 এর সহগ x^4 এর সহগের 135 গুণ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. B কে বিস্ড়ৃতি করে উহার সাহায্যে $(2.995)^6$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (1 - 3x^2)^4 = 1 + 4(-3x^2) + 6(-3x^2)^2 + 4(-3x^2)^3 + (-3x^2)^4$

$= 1 - 12x^2 + 6.9x^4 + 4.(-27x^6) + 81x^8$

$= 1 - 12x^2 + 54x^4 - 108x^6 + 81x^8$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \left(a - \frac{1}{3}x\right)^7 = \left(a - \frac{x}{3}\right)^7$

$= a^7 + \binom{7}{1} . a^6 . \left(-\frac{x}{3}\right) + \binom{7}{2} . a^5 . \left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \binom{7}{3} . a^4 . \left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \binom{7}{4} . a^3 . \left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \ldots\ldots.$

$= a^7 - \frac{7}{3}a^6x + 21a^5 . \frac{x^2}{9} + 35.a^4 . \left(-\frac{x^3}{27}\right) + 35 . a^3 . \frac{x^4}{81} + \ldots\ldots$

DœPZi MwYZ

$= a^7 - \frac{7}{3}a^6x + \frac{7}{3}a^5x^2 - \frac{35}{27}a^4x^3 + \frac{35}{81}a^3x^4 + ...$

প্রশ্নমতে, $\frac{7}{3}a^5 = \frac{35}{81}a^3 \times 135$

বা, $\frac{a^5}{a^3} = \frac{35 \times 135 \times 3}{81 \times 7}$

বা, $a^2 = 25$

$\therefore$ $a = \pm 5$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^6$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(3-\frac{1}{2}x\right)^6 = 3^6 + \binom{6}{1}.3^5 . \left(-\frac{x}{2}\right) + \binom{6}{2}.3^4 . \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{6}{3}.3^3 . \left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \binom{6}{4}.3^2 . \left(-\frac{x}{2}\right)^4 + \binom{6}{5}.3 . \left(-\frac{x}{2}\right)^5 + \binom{6}{6} . \left(-\frac{x}{2}\right)^6$

$= 729 + 6.243 . \left(-\frac{x}{2}\right) + 15.81 . \frac{x^2}{4} + 20.27. \left(-\frac{x^3}{8}\right) + 15.9 . \frac{x^4}{16} + 6.3 . \left(-\frac{x^5}{32}\right) + \frac{x^6}{64}$

$= 729 - 729x + \frac{1215}{4}x^2 - \frac{135}{2}x^3 + \frac{135}{16}x^4 - \frac{9}{16}x^5 + \frac{x^6}{64}$

এখানে, $3 - \frac{x}{2} = 2.995$

বা, $\frac{x}{2} = 3 - 2.995$

বা, $x = 0.01$

এখন, $x = 0.01$ বসিয়ে পাই,

$\left(3-\frac{1}{2}x\right)^6 = \left(3-\frac{0.01}{2}\right)^6$

$= 729 - 729(0.01) + \frac{1215}{4}(0.01)^2 - \frac{135}{2}(0.01)^3 + ...$

বা, $(2.995)^6 = 729 - 7.29 + \frac{0.1215}{4} - \frac{0.000135}{2} + ...$

$= 721.7403075$

$\therefore$ $(2.995)^6 = 721.7403$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩ (i) $(5x + 1)^{-1} + (5x + 1)^{-2} + (5x + 1)^{-3} + ...$

(ii) $p - 3 = 3^{\frac{5}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$ ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৭, ৯ ও ১০*

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $(1 - 3x)^5$ এর বিস্তৃতির ৩য় পদের সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (i) নং এ বর্ণিত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং উদ্দীপক থেকে দেখাও যে, $9p^3 - 81p^2 + 162p - 2188 = 0$ ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে−

$(1 - 3x)^5 = \binom{5}{0}(-3x)^0 + \binom{5}{1}(-3x)^1 + \binom{5}{2}(-3x)^2 + \binom{5}{3}(-3x)^3 + \binom{5}{4}(-3x)^4 + \binom{5}{5}(-3x)^5$

$= 1 + \frac{5}{1}(-3x) + \frac{5.4}{1.2}(-3x)^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}(-3x)^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}(-3x)^4 + 1.(-3x)^5$

$= 1 - 15x + 90x^2 - 270x^3 + 405x^4 - 243x^5$

$\therefore$ তৃতীয় পদের সহগ = 90 **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারা: $\frac{1}{5x+1} + \frac{1}{(5x+1)^2} + \frac{1}{(5x+1)^3} + ...$

এখানে ১ম পদ, $a = \frac{1}{5x+1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(5x+1)^2} \div \frac{1}{5x+1} = \frac{1}{5x+1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি, $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{5x+1}\right| < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{5x+1} < 1$

এখন, $\frac{1}{5x+1} > -1$ অথবা, $\frac{1}{5x+1} < 1$

$\Rightarrow$ $5x + 1 < -1$ $\Rightarrow$ $5x + 1 > 1$

$\therefore$ $x < \frac{-2}{5}$ $\therefore$ $x > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > 0$ অথবা $x < -\frac{2}{5}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $p - 3 = 3^{\frac{5}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$

বা, $(p - 3)^3 = \left(3^{\frac{5}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 - 3p^2. 3 + 3p.3^2 - 3^3 = \left(3^{\frac{5}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{-2}{3}}\right)^3 + 3\, 3^{\frac{5}{3}}. 3^{\frac{-2}{3}}\left(3^{\frac{5}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}\right)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 3^5 + 3^{-2} + 3. 3^{\frac{3}{3}}(p - 3)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = 243 + \frac{1}{9} + 9(p - 3)$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p - 27 = \frac{2187 + 1}{9} + 9p - 27$

বা, $p^3 - 9p^2 + 27p = \frac{2188}{9} + 9p$

বা, $p^3 - 9p^2 + 18p = \frac{2188}{9}$

বা, $9p^3 - 81p^2 + 162p = 2188$

$\therefore$ $9p^3 - 81p^2 + 162p - 2188 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৪ $K = y^2 - y - 1$, $L = \frac{2m}{m-1}$, $M = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$, যেখানে n ধন্মক পূর্ণ সংখ্যা। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ১০*

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $K = 0$ হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. M এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ $\frac{6}{8}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $2\sqrt{L} - \frac{6}{\sqrt{L}} = 1$ হলে, m এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $K = y^2 - y - 1$

$\therefore$ $K = 0$ হলে, $y^2 - y - 1 = 0$

$\therefore$ $y^2 - y - 1 = 0$ সমীকরণকে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ay^2 + by + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = -1$ এবং $c = -1$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1\,(-1)$

$= 1 + 4 = 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $M = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(-\frac{x}{2}\right) + \binom{n}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$= 1 - n.\frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{x^2}{4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{x^3}{8} + \ldots.$$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{4} = \frac{6}{8}$

বা, $n(n-1) = 6$

বা, $n^2 - n - 6 = 0$

বা, $n^2 - 3n + 2n - 6 = 0$

বা, $n(n-3) + 2(n-3) = 0$

বা, $(n-3)(n+2) = 0$

বা, $n - 3 = 0$ [$n \neq -2$, কারণ n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা]

$\therefore$ $n = 3$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $L = \frac{2m}{m-1}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $2\sqrt{L} - \frac{6}{\sqrt{L}} = 1$

বা, $\frac{2\sqrt{L}.\sqrt{L} - 6}{\sqrt{L}} = 1$

বা, $2L - 6 = \sqrt{L}$

বা, $2x^2 - 6 = x$ [$\sqrt{L} = x$ ধরে]

বা, $2x^2 - x - 6 = 0$

বা, $2x^2 - 4x + 3x - 6 = 0$

বা, $2x(x-2) + 3(x-2) = 0$

বা, $(x-2)(2x+3) = 0$

বা, $x - 2 = 0$ অথবা, $2x + 3 = 0$

বা, $x = 2$ বা, $x = -\frac{3}{2}$

বা, $\sqrt{L} = 2$ বা, $\sqrt{L} = -\frac{3}{2}$ যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ কোনো রাশির বর্গমূল অঋণাত্মক

বা, $\sqrt{\frac{2m}{m-1}} = 2$

বা, $\frac{2m}{m-1} = 4$

বা, $2m = 4m - 4$

বা, $2m - 4m = -4$

বা, $-2m = -4$

$\therefore$ $m = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫ $P = (1 - y - 2y^2)^6$, $Q = x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}}$, $x > 0$.

◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০

[সিলেট বোর্ড-২০১৯ ⎕ প্রশ্ন নং ২]

ক. $\sqrt[x]{p} = \sqrt[y]{q} = \sqrt[z]{r}$ এবং $pqr = 1$ হলে দেখাও যে, $x + y + z = 0$. ২

খ. $Q = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + 3 = \frac{48}{7x}$. ৪

গ. P কে y^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করে তা থেকে $(0.9 \times 1.05)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\sqrt[x]{p} = \sqrt[y]{q} = \sqrt[z]{r} = k$

$\sqrt[x]{p} = k$	$\sqrt[y]{q} = k$	$\sqrt[z]{r} = k$
বা, $p^{\frac{1}{x}} = k$	বা, $q^{\frac{1}{y}} = k$	বা, $r^{\frac{1}{z}} = k$
$\therefore p = k^x$	$\therefore q = k^y$	$\therefore r = k^z$

প্রশ্নমতে, $pqr = 1$

বা, $k^x k^y k^z = 1$

বা, $k^{x+y+z} = k^0$

$\therefore$ $x + y + z = 0$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $Q = x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}}$

$Q = 0$ হলে,

$x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}} = 0$

বা, $x^2 = 7^{\frac{2}{3}} + 7^{-\frac{2}{3}} - 2$

বা, $x^2 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.\,7^{\frac{1}{3}}.\,7^{-\frac{1}{3}}$

$= \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $x = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}$ ... ... (i)

বা, $x^3 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$= \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)$

$= 7 - 7^{-1} - 3(x)$ [(i) নং হতে]

$= 7 - \frac{1}{7} - 3x$

বা, $x^3 + 3x = \frac{49 - 1}{7}$

বা, $x(x^2 + 3) = \frac{48}{7}$

$\therefore$ $x^2 + 3 = \frac{48}{7x}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$P = (1 - y - 2y^2)^6$

$= (1 - 2y + y - 2y^2)^6$

$= \{(1 + y)(1 - 2y)\}^6$

$= (1 + y)^6(1 - 2y)^6$

এখন, $(1 + y)^6 = 1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + \ldots\ldots..$

এবং $(1 - 2y)^6 = 1 + 6(-2y) + 15(-2y)^2 + 20(-2y)^3 + \ldots.$

$= 1 - 12y + 60y^2 - 160y^3 + \ldots\ldots.$

এখন, $(1 + y)^6\,(1 - 2y)^6$

$= (1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + \ldots.)(1 - 12y + 60y^2 - 160y^3 + \ldots.)$

$= 1 + (6y - 12y) + (60y^2 - 72y^2 + 15y^2) + (20y^3 - 180y^3 + 360y^3 - 160y^3) + \ldots$

$= 1 - 6y + 3y^2 + 40y^3 + \ldots\ldots.$

এখানে,

$1 - 2y = 0.9$

বা, $2y = 0.1$

$\therefore y = 0.05$

আবার,

$1 + y = 1.05$

$\therefore y = 0.05$

এখন, $y = 0.05$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 0.05)^6(1 - 0.05 \times 2)^6$
$= 1 - 6 \times (0.05) + 3 \times (0.05)^2 + 40 \times (0.05)^3 + ...$

বা, $(1.05 \times 0.9)^6 = 1 - 0.3 + 0.0075 + 0.005 + ...$
$= 0.7125$

$\therefore$ $(1.05 \times 0.9)^6 = 0.7125$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ যদি $P = (1 - 2x + x^2)^2$, $Q = \left(2y^2 - \frac{1}{2y}\right)^8$ এবং $R = \left(y + \frac{k}{y}\right)^5$ *[যশোর বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ২]*

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে P এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. Q এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. R এর বিস্তৃতিতে k^4 এর সহগ 135 হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = (1 - 2x + x^2)^2$
$= (x - 1)^4$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\therefore$ $P = (x - 1)^4 = x^4 + 4.x^3(-1) + 6.x^2(-1)^2 + 4.x(-1)^3 + (-1)^4$
$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = \left(2y^2 - \frac{1}{2y}\right)^8$

বিস্তৃতিতে n = 8 জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ বিস্তৃতির মধ্যপদ 1টি এবং তা $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ = 5 তম পদ।

$\therefore$ $T_{4+1} = {}^8C_4\,(2y^2)^{8-4}\left(-\frac{1}{2y}\right)^4$
$= {}^8C_4 . 16y^8 . \frac{1}{16y^4}$
$= 70.y^4$
$= 70y^4$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $R = \left(y + \frac{k}{y}\right)^5$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(y + \frac{k}{y}\right)^5 = y^5 + {}^5C_1y^4.\left(\frac{k}{y}\right) + {}^5C_2y^3.\frac{k^2}{y^2} + {}^5C_3y^2.\frac{k^3}{y^3} + {}^5C_4 . y . \frac{k^4}{y^4} + \frac{k^5}{y^5}$
$= y^5 + 5ky^3 + 10k^2y + 10k^3\frac{1}{y} + 5k^4\frac{1}{y^3} + \frac{k^5}{y^5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{5}{y^3} = 135$

বা, $y^3 = \frac{5}{135}$

বা, $y^3 = \frac{1}{27}$

$\therefore$ $y = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $f(x) = \frac{3 - x}{3 + x}$ এবং $p(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১, ৬ ও ১০

[বরিশাল বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x < \frac{x}{3} + 5$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর। ২

খ. p(x) এর বিস্তৃতির ৩য় ও ৪র্থ পদের অনুপাত $\frac{4}{15}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা নির্ধারণ কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x < \frac{x}{3} + 5$

বা, $3x < x + 15$

বা, $3x - x < 15$

বা, $2x < 15$

বা, $x < \frac{15}{2}$

$\therefore$ সমাধান সেট = $\left\{ x : x \in R\right.$ %oi $\left. x < \frac{15}{2}\right\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7$

বিস্তৃতির সাধারণ পদ = ${}^7C_r\,(2x^2)^{7-r}\left(\frac{1}{2x^2}\right)^r$
$= {}^7C_r . 2^{7-r-r}\,(x^2)^{7-r-r}$
$= {}^7C_r . 2^{7-2r} . x^{14-4r}$

$\therefore$ ৩য় বা, (2 + 1) তম পদ = ${}^7C_2 . 2^{7-2.2} . x^{14-4.2}$
$= 21. 8. x^6$
$= 168x^6$

$\therefore$ ৪র্থ বা, (3 + 1) তম পদ = ${}^7C_3 . 2^{7-2.3}.x^{14-4.3}$
$= 35.2.x^2$
$= 70x^2$

প্রশ্নমতে, $\frac{168x^6}{70x^2} = \frac{4}{15}$

বা, $\frac{12}{5}x^4 = \frac{4}{15}$

বা, $x^4 = \frac{4 \times 5}{12 \times 15}$

বা, $x^4 = \frac{1}{9}$

বা, $x^4 = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

$\therefore$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans)**

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3 - x}{3 + x}$

বা, $y = \frac{3 - x}{3 + x}$ [y = f(x) ধরে]

বা, $3y + xy = 3 - x$

বা, $xy + x = 3 - 3y$

বা, $x(y + 1) = 3 - 3y$

বা, $x = \frac{3 - 3y}{y + 1}$

$\therefore$ $f^{-1}(x) = \frac{3 - 3x}{x + 1}$

মনে করি. $x_1, x_2 \in$ ডোম f^{-1}

এবং $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\dfrac{3 - 3x_1}{x_1 + 1} = \dfrac{3 - 3x_2}{x_2 + 1}$

বা, $3x_2 + 3 - 3x_1x_2 - 3x_1 = 3x_1 + 3 - 3x_1x_2 - 3x_2$

বা, $-6x_1 = -6x_2$

বা, $x_1 = x_2$

$\therefore$ $f^{-1}(x)$ এক এক ফাংশন। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮ (i) $\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{(2x+1)^2} + \dfrac{1}{(2x+1)^3} + \dots \dots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা। *◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০*

[সকল বোর্ড-২০১৮ ◻ প্রশ্ন নং ৩]

(ii) $\left(2 + \dfrac{x}{4}\right)^6$ ও $\left(k - \dfrac{y}{3}\right)^7$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

ক. ১ম দ্বিপদী রাশিকে x^3 পর্যন্ড় বিস্তৃত কর। ২

খ. যদি k^3 এর সহগ 560 হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে প্রদত্ত অসীম ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ১ম দ্বিপদী রাশি: $\left(2 + \dfrac{x}{4}\right)^6$

$\therefore \left(2+\dfrac{x}{4}\right)^6 = 2^6 + \dbinom{6}{1} 2^5 . \dfrac{x}{4} + \dbinom{6}{2} . 2^4 . \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \dbinom{6}{3} 2^3 \left(\dfrac{x}{4}\right)^3 + \dots$

$= 64 + 6 \times 32 \times \dfrac{x}{4} + 15 \times 16 \times \dfrac{x^2}{16} + 20 \times 8 \times \dfrac{x^3}{64} + \dots \dots$

$= 64 + 48x + 15x^2 + \dfrac{5}{2}x^3 + \dots \dots \dots$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(k - \dfrac{y}{3}\right)^7 = k^7 + \dbinom{7}{1}k^6\left(-\dfrac{y}{3}\right) + \dbinom{7}{2}k^5\left(-\dfrac{y}{3}\right)^2 + \dbinom{7}{3}k^4 \left(-\dfrac{y}{3}\right)^3 + \dbinom{7}{4}k^3\left(-\dfrac{y}{3}\right)^4 + \dots \dots \dots$

এখানে, বিস্তৃতিটির k^3 এর সহগ $= \dbinom{7}{4}\left(-\dfrac{y}{3}\right)^4 = \dfrac{7.6.5.4}{1.2.3.4} . \dfrac{y^4}{3^4} = \dfrac{35}{81} y^4$

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{35}{81}y^4 = 560$

বা, $y^4 = 560 \times \dfrac{81}{35}$

বা, $y^4 = 1296$

বা, $y^4 = (\pm 6)^4$

$\therefore$ $y = \pm 6$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৭ এর উদাহরণ-৪(গ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৪১

প্রশ্ন ▶৯ $A = \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^8$ এবং $B = \left(a + \dfrac{x}{3}\right)^7$; $a \neq 0$.

[ঢাকা বোর্ড-২০১৭ ◻ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে A কে প্রথম চার পদ পর্যন্ড় বিস্তৃতি কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে a^2 এর সহগ 672 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2 - x)A$-কে x^3 পর্যন্ড় বিস্তৃতি কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1.9 \times (1.05)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^8$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

$\therefore A = \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^8 = 1 + 8\left(\dfrac{x}{2}\right) + 28\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 56\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \dots \dots \dots$

$= 1 + 4x + 28\left(\dfrac{x^2}{4}\right) + 56\left(\dfrac{x^3}{8}\right) + \dots\dots\dots\dots$

$= 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \left(a + \dfrac{x}{3}\right)^7$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$B = \left(a + \dfrac{x}{3}\right)^7 = a^7 + {}^7C_1a^6\left(\dfrac{x}{3}\right) + {}^7C_2a^5\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3\,a^4\left(\dfrac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4\,a^3\left(\dfrac{x}{3}\right)^4 + {}^7C_5\,a^2\left(\dfrac{x}{3}\right)^5 + \dots\dots\dots$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে a^2 এর সহগ $= {}^7C_5\left(\dfrac{x}{3}\right)^5 = \dfrac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} \dfrac{x^5}{3^5}$

$= \dfrac{21}{243}x^5 = \dfrac{7}{81}x^5$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{7}{81}x^5 = 672$

বা, $x^5 = \dfrac{672 \times 81}{7}$

বা, $x^5 = 7776$

বা, $x^5 = 6^5$

$\therefore$ $x = 6$ **(Ans.)**

গ 'ক' থেকে পাই,

$A = \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^8 = 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \dots\dots\dots\dots$

$\therefore$ $(2 - x)A = (2 - x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \dots\dots\dots)$

বা, $(2 - x)\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^8 = 2 + 8x + 14x^2 + 14x^3 - x - 4x^2 - 7x^3 - 7x^4 + \dots\dots\dots)$

$\therefore$ $(2 - x)\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^8 = 2 + 7x + 10x^2 + 7x^3 + \dots\dots$ **(Ans.)**

শর্তমতে, $2 - x = 1.9$

বা, $2 - 1.9 = x$

$\therefore$ $x = 0.1$

এখন, $x = 0.1$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে বসিয়ে পাই,

$(2 - 0.1)\left(1 + \dfrac{0.1}{2}\right)^8 = 2 + 7 \times (0.1) + 10 \times (0.1)^2 + 7 \times (0.1)^3 + \dots\dots\dots$

বা, $1.9 \times (1.05)^8 = 2 + 0.7 + 0.1 + 0.007 + \dots\dots\dots\dots$

$\therefore$ $1.9 \times (1.05)^8 = 2.807$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১০ $\left(2x^2 - \dfrac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এবং $\left(x^2 + \dfrac{y}{x}\right)^6$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ ◻ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্রথম দ্বিপদীটির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রথম দ্বিপদীর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদ এবং তার মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দ্বিতীয় দ্বিপদী রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3-এর সহগ 540 হলে y-এর মান নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রথম দ্বিপদী রাশিটি $\left(2x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$

দ্বিপদী রাশিটির ঘাত 10, যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{10}{2} + 1\right)$ বা, 6 তম পদ

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির দ্বিপদী বিস্তৃতির 6 বা, (5 + 1) তম পদ

$= {}^{10}C_5\,(2x^2)^{10-5}.\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^5$

$= -252 \times 32 \times x^{10} \times \frac{1}{32x^{15}} = -\frac{252}{x^5}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, (r + 1) তম পদ x বর্জিত।

$\therefore$ (r + 1) তম পদ $= {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r$

$= {}^{10}C_r\,2^{10-r}.\,x^{20-2r}.\,\frac{1}{2^r x^{3r}}.\,(-1)^r$

$= {}^{10}C_r\,2^{10-2r}.\,x^{20-5r}\,(-1)^r$

প্রশ্নমতে, $20 - 5r = 0$

বা, $5r = 20$

$\therefore$ $r = 4$

$\therefore$ x বর্জিত পদ = r + 1 = 4 + 1 = 5-তম পদ। **(Ans.)**

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $= {}^{10}C_4 \times 2^{10-2.4}\,(-1)^4$

$= 210 \times 4 = 840$ **(Ans.)**

গ দ্বিতীয় দ্বিপদী রাশি $\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)^6$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + \binom{6}{1}(x^2)^{6-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \binom{6}{2}(x^2)^{6-2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}(x^2)^{6-3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$= x^{12} + 6x^9y + 15x^6y^2 + 20x^3y^3 + \ldots\ldots\ldots$

এখানে, x^3 এর সহগ $= 20y^3$

প্রশ্নমতে, $20y^3 = 540$

বা, $y^3 = \frac{540}{20}$ বা, $y^3 = 27$

বা, $y^3 = 3^3$

$\therefore$ $y = 3$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ►১১ $P = \left(x + \frac{3}{x}\right)^5$ এবং $Q = (1 + ax)^6$ দুইটি দ্বিপদী রাশি, যেখানে $a \neq 0$. *[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৭ ▯ প্রশ্ন নং ৩]*

ক. Q এর মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে P এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. Q এর বিস্তৃতিতে x^2 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি, $Q = (1 + ax)^6$

দ্বিপদী রাশিটির ঘাত 6, যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{6}{2} + 1\right)$ বা 4 তম পদের মান।

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতির 4 বা (3 + 1) তম পদ $= {}^6C_3\,(1)^{6-3}(ax)^3$

$= \frac{6.5.4}{1.2.3}\,a^3x^3 = 20a^3x^3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \left(x + \frac{3}{x}\right)^5$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে পাই,

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\therefore\ P = \left(x + \frac{3}{x}\right)^5 = x^5 + 5.(x)^{5-1}.\left(\frac{3}{x}\right)^1 + 10.(x)^{5-2}.\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 10.(x)^{5-3}.\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 5.(x)^{5-4}.\left(\frac{3}{x}\right)^4 + \left(\frac{3}{x}\right)^5$$

$= x^5 + 5.x^4.\frac{3}{x} + 10.x^3.\frac{9}{x^2} + 10.x^2.\frac{27}{x^3} + 5x.\frac{81}{x^4} + \frac{243}{x^5}$

$= x^5 + 15x^3 + 90x + \frac{270}{x} + \frac{405}{x^3} + \frac{243}{x^5}$ **(Ans.)**

গ দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$Q = (1 + ax)^6$

$$= 1 + \binom{6}{1}ax + \binom{6}{2}(ax)^2 + \binom{6}{3}(ax)^3 + \binom{6}{4}(ax)^4 + \binom{6}{5}(ax)^5 + (ax)^6$$

$= 1 + 6ax + 15a^2x^2 + 20a^3x^3 + 15a^4x^4 + 6a^5x^5 + a^6x^6$

এখানে, x^2 এবং x^4 এর সহগ যথাক্রমে $15a^2$ এবং $15a^4$.

প্রশ্নমতে, $15a^2 = 15a^4$

বা, $1 = a^2$

$\therefore$ $a = \pm 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ►১২ $A = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^4$, $B = (p + qx)^6$ এবং $C = (q - px)^7$

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬ ▯ প্রশ্ন নং ২]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. p = 1, q = 2 হলে, BC এর বিস্তৃতিতে x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. x-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমানুসারে $A\left(1 + \frac{x}{3}\right)^5$ কে x^5 পর্যন্ত বিস্তৃত করে $1.01 \times (0.9999)^5$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^4$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে—

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\therefore$ $A = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^4$

$= 1 + 4.\left(-\frac{x}{3}\right) + 6.\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + 4.\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \left(-\frac{x}{3}\right)^4$

$= 1 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{27}x^3 + \frac{x^4}{81}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, p = 1, q = 2

$B = (p + qx)^6 = (1 + 2x)^6$

এবং $C = (q - px)^7 = (2 - x)^7$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে পাই–

$$B = (1 + 2x)^6 = 1 + \binom{6}{1}.2x + \binom{6}{2}.(2x)^2 + \binom{6}{3}.(2x)^3 + \binom{6}{4}(2x)^4 + \binom{6}{5}(2x)^5 + (2x)^6$$

$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$$

আবার, $C = (2 - x)^7 = 2^7 + \binom{7}{1}.2^6.(-x)^1 + \binom{7}{2}.2^5.(-x)^2 + \binom{7}{3}.2^4.(-x)^3 + \binom{7}{4}2^3(-x)^4 + \binom{7}{5}2^2(-x)^5 + \binom{7}{6}.2(-x)^6 + (-x)^7$

$$= 128 - 448x + 672x^2 - 560x^3 + 280x^4 - 84x^5 + 14x^6 - x^7$$

$\therefore\ BC = (1 + 2x)^6(2 - x)^7$

$= (1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6)(128 - 448x + 672x^2 - 560x^3 + 280x^4 - 84x^5 + 14x^6 - x^7)$

$= 128 + 1088x + 2976x^2 + 1104x^3 - 7080x^4 - 5748x^5 + 9662x^6 + 5879x^7 - 9924x^8 - 60x^9 + 4992x^{10} - 2928x^{11} + 704x^{12} - 64x^{13}$

$\therefore$ x^6 এর সহগ 9662 **(Ans.)**

গ [বি. দ্র. প্রশ্নানুসারে A = 1.01 বা, $\left(1 - \frac{x}{3}\right)^4 = 1.01$ এর ক্ষেত্রে x এর মান পাওয়া যায় –0.00747 এবং $\left(1 + \frac{x}{3}\right)^5 = (0.9999)^5$ এর ক্ষেত্রে x এর মান পাওয়া যায় – 0.0003। দুই ক্ষেত্রে x এর মান ভিন্ন হওয়ায় $A\left(1 + \frac{x}{3}\right)^5 = 1.01 \times (0.9999)^5$ হতে পারে না। x এর সঙ্গতিপূর্ণ মান পাওয়ার ক্ষেত্রে $1.01 \times (0.9999)^5$ এর পরিবর্তে $1.01 \times (0.9999)^4$ ধরে সমাধান করা হলো]

$$A\left(1 + \frac{x}{3}\right)^5 = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^4\left(1 + \frac{x}{3}\right)^4\left(1 + \frac{x}{3}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^4\left(1 + \frac{x}{3}\right) = \left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^4$$

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^4 = \left(1 + \frac{x}{3}\right)\left[1 + \binom{4}{1}\left(\frac{-x^2}{9}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{-x^2}{9}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{-x^2}{9}\right)^3 + \left(\frac{-x^2}{9}\right)^4\right]$$

$$= \left(1 + \frac{x}{3}\right)\left[1 - \frac{4}{9}x^2 + 6.\frac{x^4}{81} - 4.\frac{x^6}{729} + \frac{x^8}{6561}\right]$$

$$= \left(1 + \frac{x}{3}\right)\left[1 - \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{27}x^4 - \frac{4}{729}x^6 + \frac{x^8}{6561}\right]$$

$$= 1 - \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{27}x^4 - \frac{4}{729}x^6 + \frac{x^8}{6561} + \frac{x}{3} - \frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{81}x^5 + \ldots.$$

$$\therefore \left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^4 = 1 + \frac{x}{3} - \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{27}x^4 + \frac{2}{81}x^5 + \ldots\ldots$$

এখানে, $1 + \frac{x}{3} = 1.01$

বা, $\frac{x}{3} = 1.01 - 1 \quad \therefore x = 0.03$

এখন, উক্ত বিস্তৃতিতে x = 0.03 বসিয়ে পাই,

$$\left(1 + \frac{0.03}{3}\right)\left\{1 - \frac{(0.03)^2}{9}\right\}^4 = 1 + \frac{0.03}{3} - \frac{4}{9}(0.03)^2 - \frac{4}{27}(0.03)^3 + \frac{2}{27}(0.03)^4 + \frac{2}{81}(0.03)^5 + \ldots\ldots$$

বা, $(1 + 0.01)(1 - 0.0001)^4 = 1 + 0.01 - 0.0004 - 0.000004 + 0.0000000006 + \ldots.$

বা, $1.01 \times (0.9999)^4 = 1.009596001$

$\therefore$ $1.01 \times (0.9999)^4 = 1.0096$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৩ $K = y^2 - y - 1$, $L = \frac{2m}{m - 1}$, $M = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। *◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ১০*

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬ ▯ প্রশ্ন নং ২]

ক. K = 0 হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় কর। ২

খ. M এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ $\frac{6}{8}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $6\sqrt{L} + \frac{5}{\sqrt{L}} - 13 = 0$ হলে, m এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৪(ক)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ সৃজনশীল ৪(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $L = \frac{2m}{m - 1}$

প্রদত্ত সমীকরণ, $6\sqrt{L} + \frac{5}{\sqrt{L}} - 13 = 0$

বা, $6\sqrt{\frac{2m}{m - 1}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{2m}{m - 1}}} - 13 = 0$ .... (i)

বা, $6a + \frac{5}{a} - 13 = 0$ [ধরি $\sqrt{\frac{2m}{m - 1}} = a$]

বা, $6a + \frac{5}{a} = 13$

বা, $6a^2 + 5 = 13a$

বা, $6a^2 - 13a + 5 = 0$

বা, $6a^2 - 10a - 3a + 5 = 0$

বা, $2a(3a - 5) - 1(3a - 5) = 0$

$\therefore$ $(3a - 5)(2a - 1) = 0$

হয়, $3a - 5 = 0$

বা, $3a = 5$

বা, $a = \frac{5}{3}$

বা, $\sqrt{\frac{2m}{m - 1}} = \frac{5}{3}$

বা, $\frac{2m}{m - 1} = \frac{25}{9}$

বা, $25m - 25 = 18m$

বা, $25m - 18m = 25$

বা, $7m = 25$

$\therefore$ $m = \frac{25}{7}$

অথবা, $2a - 1 = 0$

বা, $2a = 1$

বা, $a = \frac{1}{2}$

বা, $\sqrt{\frac{2m}{m - 1}} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{2m}{m - 1} = \frac{1}{4}$

বা, $8m = m - 1$

বা, $7m = -1$

$\therefore$ $m = -\frac{1}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা :

$m = \frac{25}{7}$ হলে সমীকরণ (i) এর

$$\text{বামপক্ষ} = 6\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}}} - 13$$

$$= 6\sqrt{\frac{50}{18}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{50}{18}}} - 13$$

$$= 6\sqrt{\frac{25}{9}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{25}{9}}} - 13$$

$$= \frac{6.5}{3} + \frac{5.3}{5} - 13$$

$= 10 + 3 - 13$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad m = \frac{25}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

আবার, $m = -\frac{1}{7}$ হলে, সমীকরণ (i) এর

$$\text{বামপক্ষ} = 6\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}}} - 13$$

$$= 6\sqrt{\frac{-\frac{2}{7}}{\frac{-8}{7}}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{\frac{-2}{7}}{\frac{-8}{7}}}} - 13$$

$$= 6\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{1}{4}}} - 13 = 6.\frac{1}{2} + 5.2 - 13$$

$= 3 + 10 - 13$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore m = -\frac{1}{7}$, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $m = \frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$

প্রশ্ন ▶ ১৪ $A = (1 - x)(1 + px)^6$ এবং $B = (3 - x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ দুইটি দ্বিপদী রাশি। *[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ২]*

ক. $p = -3$ হলে, $(1 + px)^6$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. $A = 1 + qx^2 + ...$ হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমানুসারে B কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করে $2.9 \times (1.05)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে–

n = 0;	1						
n = 1;	1	1					
n = 2;	1	2	1				
n = 3;	1	3	3	1			
n = 4;	1	4	6	4	1		
n = 5;	1	5	10	10	5	1	
n = 6;	1	6	15	20	15	6	1

$\therefore (1 + px)^6 = (1 - 3x)^6 \quad [\because p = -3]$

$= 1 + 6(-3x) + 15(-3x)^2 + 20(-3x)^3 + 15(-3x)^4 + 6(-3x)^5 + 1(-3x)^6$

$= 1 - 18x + 135x^2 - 540x^3 + 1215x^4 - 1458x^5 + 729x^6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = (1 - x)(1 + px)^6$

$$= (1-x)\left[\binom{6}{0}(px)^0 + \binom{6}{1}(px)^1 + \binom{6}{2}(px)^2 + \binom{6}{3}(px)^3 + ...\right]$$

$$= (1-x)\left[1 + \frac{6}{1}.px + \frac{6.5}{1.2}p^2x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}p^3x^3 + ...\right]$$

$= (1-x)(1 + 6px + 15p^2x^2 + 20p^3x^3 + ...)$

$= (1 + 6px + 15p^2x^2 + 20p^3x^3 + ...) + (-x - 6px^2 - 15p^2x^3 - 20p^3x^4 - ....)$

$\therefore A = 1 + (6p - 1)x + (15p^2 - 6p)x^2 + (20p^3 - 15p^2)x^3 + ...$

প্রশ্নমতে, $A = 1 + qx^2 + ...$

$\therefore \quad 1 + (6p - 1)x + (15p^2 - 6p)x^2 + (20p^3 - 15p^2)x^3 + ... = 1 + 0.x + qx^2 + ...$

উভয়পাশের x ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$6p - 1 = 0$

$\therefore \quad p = \frac{1}{6}$ **(Ans.)**

এবং $q = 15p^2 - 6p = 15.\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 6.\frac{1}{6}$

$= 15.\frac{1}{36} - 1 = \frac{5}{12} - 1 = \frac{-7}{12}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = (3 - x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$

$$= (3-x)\left[\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + ...\right]$$

$$= (3-x)\left[1.1 + \frac{8}{1}.\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}.\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}.\frac{x^3}{8} + ...\right]$$

$= (3 - x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + ...)$

$= (3 + 12x + 21x^2 + 21x^3 + ...) + (-x - 4x^2 - 7x^3 - 7x^4 - ......)$

$= 3 + 11x + 17x^2 + 14x^3 + ...$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $(3 - x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8 = 3 + 11x + 17x^2 + 14x^3 + ..$

এখানে,

$3 - x = 2.9$

$\therefore x = 0.1$

এখন উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$(3 - 0.1)\left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^8 = 3 + 11 \times 0.1 + 17 \times (0.1)^2 + 14 \ (0.1)^3 + ...$

বা, $2.9 \times (1.05)^8 = 3 + 1.1 + 17 \times 0.01 + 14 \times 0.001 + ...$

$= 3 + 1.1 + 0.17 + 0.014 + ...$

$= 4.284$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$\therefore \quad 2.9 \times (1.05)^8 = 4.284$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ কোনো ধারার n-তম পদ $U_n = (1 + x)^{n-2}$

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ২]

◂সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

DœPZi MwYZ

খ. x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক পদের সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর। উক্ত পদের বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 540 হলে, x এর মান কত হবে? ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

n-তম পদ, $U_n = (1 + x)^{n-2}$

n = 1 হলে, প্রথম পদ, $U_1 = (1 + x)^{1-2} = (1 + x)^{-1} = \dfrac{1}{(1 + x)}$

n = 2 হলে, দ্বিতীয় পদ, $U_2 = (1 + x)^{2-2} = (1 + x)^0 = 1$

n = 3 হলে, তৃতীয় পদ, $U_3 = (1 + x)^{3-2} = (1 + x)^1 = (1 + x)$

n = 4 হলে, চতুর্থ পদ, $U_4 = (1 + x)^{4-2} = (1 + x)^2$

$\therefore$ ধারাটি হলোঃ $\dfrac{1}{(1+x)} + 1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + ...$ **(Ans.)**

খ ধারাটির প্রথম পদ, $a = \dfrac{1}{1 + x}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{1}{\frac{1}{1+x}} = (1 + x)$

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $|1 + x| < 1$

বা, $-1 < 1 + x < 1$

বা, $-1 - 1 < 1 + x - 1 < 1 - 1$ [(– 1) যোগ করে]

$\therefore$ $-2 < x < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্তঃ $-2 < x < 0$.

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1-(1+x)}$

$= \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1-1-x} = \dfrac{1}{1+x} \times \dfrac{1}{-x}$

$= \dfrac{1}{-x(1+x)}$, $x \neq -1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

n তম পদ, $U_n = (1 + x)^{n-2}$

$\therefore$ অষ্টম (n = 8) পদ, $U_8 = (1 + x)^{8-2} = (1 + x)^6$ **(Ans.)**

এখন, $(1 + x)^6$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা হবে = 7টি।

যেহেতু পদসংখ্যা = 7, তাই মধ্যপদটি হবে $\left(\dfrac{6}{2} + 1\right)$ বা, 4 তম পদ

$\therefore$ $(1 + x)^6$ এর বিস্তৃতিতে 4 বা, (3 + 1) তম পদ

$= {}^6C_3(1)^{6-3}(x)^3 = 20x^3$

প্রশ্নানুসারে, $20x^3 = 540$

বা, $x^3 = \dfrac{540}{20}$

বা, $x^3 = 27$

$\therefore$ $x = 3$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৬ $A = (1 - x)^8$ এবং $B = (1 + x)^7$.

[যশোর বোর্ড-২০১৬ ◻ প্রশ্ন নং ২]

ক. B কে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. A কে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(0.9)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35. ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $B = (1 + x)^7$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$(1+x)^7 = 1 + \binom{7}{1}x + \binom{7}{2}x^2 + \binom{7}{3}x^3 + \binom{7}{4}x^4 + ...$

$= 1 + 7x + \dfrac{7.6}{1.2}x^2 + \dfrac{7.6.5}{1.2.3}x^3 + \dfrac{7.6.5.4}{1.2.3.4}x^4 + ...$

$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + ...$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$A = (1 - x)^8$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$(1-x)^8 = 1 + \binom{8}{1}(-x) + \binom{8}{2}(-x)^2 + \binom{8}{3}(-x)^3 + ...$

$= 1 - 8x + \dfrac{8.7}{1.2}x^2 + \dfrac{8.7.6}{1.2.3}(-x)^3 + ...$

$= 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + ...$ **(Ans.)**

প্রশ্নমতে, $(1 - x)^8 = (0.9)^8$

বা, $1 - x = 0.9$

বা, $1 - 0.9 = x$

$\therefore$ $x = 0.1$

উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$(1 - 0.1)^8 = 1 - 8(0.1) + 28(0.1)^2 - 56(0.1)^3 + ...$

$\therefore$ $(0.9)^8 = 1 - 0.8 + 0.28 - 0.056 + ...$

$= 0.424$ [তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = (1 - x)^8$

$B = (1 + x)^7$

$\therefore$ $AB = (1 - x)^8(1 + x)^7$

$(1 - x)^8 (1 + x)^7 = (1 - x)(1 - x)^7(1 + x)^7$

$= (1 - x)(1 - x^2)^7 = (1 - x)$

$\left[\binom{7}{0}(-x^2)^0 + \binom{7}{1}(-x^2)^1 + \binom{7}{2}(-x^2)^2 + \binom{7}{3}(-x^2)^3 + \binom{7}{4}(-x^2)^4 + ...\right]$

$\therefore$ $(1 - x)^8(1 + x)^7 = (1 - x)(1 - x^2)^7$

$= (1 - x)[1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 - ......]$

$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + ...)$

$+ (-x + 7x^3 - 21x^5 + 35x^7 - 35x^9 + ...)$

$\therefore$ $(1 - x)^8(1 + x)^7 = 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 ....$

$\therefore$ $(1 - x)^8(1 + x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35

$\therefore$ x^7 এর সহগ 35

প্রশ্ন ▶১৭ $\dfrac{1}{3x-1} + \dfrac{1}{(3x-1)^2} + \dfrac{1}{(3x-1)^3} + ...$ একটি ধারা এবং $\left(x - \dfrac{k}{x^2}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি। *◂সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০*

[বরিশাল বোর্ড-২০১৬ ◻ প্রশ্ন নং ২]

ক. $x = 1$ হলে, ধারাটি নির্ণয় করে প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত বের কর। ২

খ. "x" এর উপর যে শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা নির্ণয় করে উক্ত শর্ত সাপেক্ষে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. রাশিটির বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 252 হলে 'k' এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{(3x-1)^2}+\frac{1}{(3x-1)^3}+\dots\dots\dots$

$x = 1$ হলে ধারাটি,

$\frac{1}{3.1-1}+\frac{1}{(3.1-1)^2}+\frac{1}{(3.1-1)^3}+\dots\dots$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots\dots$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^2}\times\frac{2}{1}=\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{(3x-1)^2}+\frac{1}{(3x-1)^3}+\dots\dots\dots$

ধারাটির ১ম পদ, $a=\frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{(3x-1)^2}\div\frac{1}{3x-1}=\frac{1}{(3x-1)^2}\times\frac{3x-1}{1}$

$=\frac{1}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r|<1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x-1}\right|<1$

বা, $-1<\frac{1}{3x-1}<1$

$\therefore\ \frac{1}{3x-1}<1$

বা, $3x-1>1$

বা, $3x-1+1>1+1$

বা, $3x>2$

$\therefore\ x>\frac{2}{3}$

অথবা, $\frac{1}{3x-1}>-1$

বা, $3x-1<-1$

বা, $3x<-1+1$

বা, $3x<0$

$\therefore\ x<0$

$\therefore x>\frac{2}{3}$ অথবা $x<0$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

(Ans.)

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}$

$$=\frac{\frac{1}{3x-1}}{1-\frac{1}{3x-1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1-1}{3x-1}}$$

$$=\frac{1}{3x-2}\ \textbf{(Ans.)}$$

গ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x-\frac{k}{x^2}\right)^8=x^8+\binom{8}{1}x^7.\left(\frac{-k}{x^2}\right)+\binom{8}{2}x^6.\left(\frac{-k}{x^2}\right)^2+\binom{8}{3}x^5.\left(\frac{-k}{x^2}\right)^3+\dots\dots$$

$$=x^8-8kx^5+\frac{8.7}{1.2}x^6.\frac{k^2}{x^4}+\frac{8.7.6}{1.2.3}.x^5.\frac{-k^3}{x^6}+\dots\dots$$

$$=x^8-8kx^5+28x^2k^2-\frac{56k^3}{x}+\dots\dots$$

প্রশ্নমতে, $28k^2=252$

বা, $k^2=\frac{252}{28}$

বা, $k^2=9$

$\therefore\ k=\pm 3$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৮ $A=5.\dot{3}7\dot{8}$ এবং $B=\frac{1}{x}$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল প্রশ্ন নং ২]

ক. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots\dots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. A কে মূলদ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. $\left(k-\frac{1}{2B}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ -320 হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধারটির ১ম পদ, $a=\frac{1}{5}$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{5^2}\div\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ $[r<1]$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ $5.\dot{3}7\dot{8}=5.378378378\dots\dots\dots$

$=5+(0.378+0.000378+0.000000378+\dots\dots)$

এখানে বন্ধনীর ভিতরের অংশটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

সেই গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ, $a=0.378$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{0.000378}{0.378}=0.001$

$\therefore\ 5.\dot{3}7\dot{8}=5+\frac{a}{1-r}$

$=5+\frac{0.378}{1-0.001}$

$=5+\frac{0.378}{0.999}$

$=5+\frac{14}{37}$

$=\frac{199}{37}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B=\frac{1}{x}$

তাহলে, $\left(k-\frac{1}{2B}\right)^5$

$=\left(k-\frac{1}{2\times\frac{1}{x}}\right)^5$

$=\left(k-\frac{x}{2}\right)^5$

এখন, $\left(k-\frac{x}{2}\right)^5=k^5+\binom{5}{1}k^4.\left(-\frac{x}{2}\right)+\binom{5}{2}k^3.\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\binom{5}{3}k^2.\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\dots\dots$

$=k^5-\frac{5}{2}k^4.x+\frac{10}{4}k^3.x^2-\frac{10}{8}k^2.x^3+\dots\dots$

DœPZi MwYZ

প্রশ্নমতে, $-\frac{10}{8}k^2 = -320$

বা, $k^2 = 32 \times 8$

বা, $k = \pm\sqrt{256}$

বা, $k = \pm 16$

$\therefore k = \pm 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ $P = \left(x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ এবং $Q = \left(x^2 + \frac{y}{x}\right)^6$ দুইটি দ্বিপদী রাশি। *[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ, রাজশাহী □ প্রশ্ন নং ৩]*

ক. P এর মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. P এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদ এবং তার মান নির্ণয় কর। ৪

গ. Q এর বিস্তৃতিতে x^3-এর সহগ 540 হলে y-এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক P দ্বিপদী রাশিটি $\left(x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$

দ্বিপদী রাশিটির ঘাত 10, যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{10}{2} + 1\right)$ বা, 6 তম পদ

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির দ্বিপদী বিস্তৃতির 6 বা, (5 + 1) তম পদ

$$= {}^{10}C_5\,(x^2)^{10-5}.\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^5$$

$$= -252 \times x^{10} \times \frac{1}{32x^{15}}$$

$$= -\frac{252}{32x^5} = \frac{-63}{8x^5}\ \textbf{(Ans.)}$$

খ মনে করি, (r + 1) তম পদ x বর্জিত।

$\therefore$ (r + 1) তম পদ $= {}^{10}C_r(x^2)^{10-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r$

$$= {}^{10}C_r.\ x^{20-2r}.\frac{1}{2^r x^{3r}}.(-1)^r$$

$$= {}^{10}C_r\, 2^{-r}.\, x^{20-5r}\,(-1)^r$$

প্রশ্নমতে, $20 - 5r = 0$

বা, $5r = 20$

$\therefore\ r = 4$

$\therefore$ x বর্জিত পদ = r + 1 = 4 + 1 = 5-তম পদ। **(Ans.)**

$\therefore$ x বর্জিত পদটির মান $= {}^{10}C_4 \times 2^{-4}(-1)^4$

$$= 210 \times \frac{1}{16} = \frac{105}{8}\ \textbf{(Ans.)}$$

গ Q দ্বিপদী রাশি $\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)^6$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + \binom{6}{1}(x^2)^{6-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \binom{6}{2}(x^2)^{6-2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}(x^2)^{6-3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= x^{12} + 6x^9y + 15x^6y^2 + 20x^3y^3 + \ldots\ldots\ldots$$

এখানে, x^3 এর সহগ $= 20y^3$

প্রশ্নমতে, $20y^3 = 540$

বা, $y^3 = \frac{540}{20}$ বা, $y^3 = 27$

বা, $y^3 = 3^3$

$\therefore\ y = 3$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ $f(x) = 2\log_k(x-5)$ এবং $A = \left(x - \frac{p}{x}\right)^7$ দুটি বীজগণিতীয় রাশি। *◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৯ ও ১০*

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x^2 - 6x - 6$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x) = \log_k x$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. A এর বিস্তৃতিতে, x^3 ও x^5 এর সহগ সমান হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 - 6x - 6 = 0$

এখানে, নিশ্চায়ক, $D = (-6)^2 - 4.1(-6)$

$$= 36 + 24$$

$$= 60 > 0$$

$\therefore$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।

খ দেওয়া আছে, $f(x) = 2\log_k(x-5)$

এখন, $f(x) = \log_k x$

বা, $2\log_k(x-5) = \log_k x$

বা, $\log_k(x-5)^2 = \log_k x$

বা, $(x-5)^2 = x$

বা, $x^2 - 10x + 25 = x$

বা, $x^2 - 11x + 25 = 0$

বা, $x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 25}}{2}$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 - 100}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$\therefore x = \frac{11 \pm \sqrt{21}}{2}$ **(Ans.)**

গ এখানে, $A = \left(x - \frac{p}{x}\right)^7$

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x - \frac{p}{x}\right)^7 = x^7 + \binom{7}{1}x^6.\left(-\frac{p}{x}\right) + \binom{7}{2}x^5.\left(-\frac{p}{x}\right)^2 + \binom{7}{3}x^4\left(-\frac{p}{x}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$= x^7 + 7x^6\left(-\frac{p}{x}\right) + 21x^5.\frac{p^2}{x^2} + 35x^4\left(-\frac{p^3}{x^3}\right) + \ldots.$$

$$= x^7 - 7x^5p + 21p^2x^3 - 35p^3x + \ldots\ldots$$

সুতরাং x^3 এর সহগ $= 21p^2$

এবং x^5 এর সহগ $= -7p$

শর্তমতে, $21p^2 = -7p$

বা, $p(21p + 7) = 0$

বা, $21p = -7$ [□ $p \neq 0$]

বা, $p = -\frac{7}{21}$

$\therefore p = -\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২১ দৃশ্যকল্প-১: $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

দৃশকল্প-২: $\frac{1}{8x+1} + \frac{1}{(8x+1)^2} + \frac{1}{(8x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা প্রশ্ন নং ২]

ক. দৃশ্যকল্প-১ এ k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x^5 এর সহগের 15 গুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশকল্প-২ এ x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৮(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7 = k^7 + \binom{7}{1}k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \binom{7}{2}k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \binom{7}{3}k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \binom{7}{4}k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \binom{7}{5}k^2\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \ldots\ldots$

$= k^7 + \binom{7}{1}k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \binom{7}{2}k^5 \cdot \frac{x^2}{9} + \binom{7}{3}k^4\left(-\frac{x^3}{27}\right) + \binom{7}{4}k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \binom{7}{5}k^2\left(-\frac{x^5}{243}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $\binom{7}{3} \cdot \frac{k^4}{-27} = 15 \times \binom{7}{5} \cdot \left(-\frac{k^2}{243}\right)$

বা, $\frac{7!}{3!\,4!} \times \frac{k^4}{27} = 15 \times \frac{7!}{5!\,2!} \times \frac{k^2}{243}$

বা, $35 \times \frac{k^2}{27} = 15 \times 21 \times \frac{1}{243}$

বা, $k^2 = \frac{15 \times 21 \times 27}{243 \times 35}$

বা, $k^2 = 1$

বা, $k = \pm 1$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ধারা : $\frac{1}{8x+1} + \frac{1}{(8x+1)^2} + \frac{1}{(8x+1)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{8x+1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(8x+1)^2}}{\frac{1}{8x+1}} = \frac{1}{(8x+1)^2} \times \frac{8x+1}{1} = \frac{1}{8x+1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $|r| < 1$ হয়

$\therefore \left|\frac{1}{8x+1}\right| < 1$ হয়

এখন, $\frac{1}{8x+1} < 1$

বা, $8x + 1 > 1$

বা, $8x > 1 - 1$

বা, $8x > 0$

$\therefore x > 0$

অথবা, $-\left(\frac{1}{8x+1}\right) < 1$

বা, $\frac{1}{8x+1} > -1$

বা, $8x + 1 < -1$

বা, $8x < -2$

বা, $x < \frac{-2}{8}$

$\therefore x < -\frac{1}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x > 0$ অথবা $x < -\frac{1}{4}$ **(Ans.)**

অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{8x+1}}{1-\frac{1}{8x+1}} = \frac{\frac{1}{8x+1}}{\frac{8x+1-1}{8x+1}}$$

$$= \frac{1}{8x+1} \times \frac{8x+1}{8x} = \frac{1}{8x} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶২২ $(x - y)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর প্রশ্ন নং ২]

ক. $n = 7$ এবং $x = 1$ হলে রাশিটিকে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. $y = x^{\frac{1}{3}}$ এবং $n = 6$ হলে রাশিটিকে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃতি কর। ৪

গ. $n = 7$ এবং $y = \frac{k}{3}$ এর জন্য রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 560 হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $n = 7$ এবং $x = 1$ তাহলে প্রদত্ত রাশি, $(1 - y)^7$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

$\therefore (1 - y)^7 = 1 + 7(-y) + 21(-y)^2 + 35(-y)^3 + 35(-y)^4$

$= 1 - 7y + 21y^2 - 35y^3 + 35y^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ $y = x^{\frac{1}{3}}$ এবং $n = 6$ হলে প্রদত্ত রাশি, $(x - y)^n = \left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)^6$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$\left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)^6 = \binom{6}{0}x^6\left(-x^{\frac{1}{3}}\right)^0 + \binom{6}{1}x^5 \cdot \left(-x^{\frac{1}{3}}\right) + \binom{6}{2}x^4 \cdot \left(-x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \binom{6}{3}x^3\left(-x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= x^6 - 6x^{\frac{16}{3}} + \frac{6.5}{2.1}x^{\frac{14}{3}} - \frac{6.5.4}{3.2.1}x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= x^6 - 6x^{\frac{16}{3}} + 15x^{\frac{14}{3}} - 20x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

গ $n = 7$ এবং $y = \frac{k}{3}$ হলে

প্রদত্ত রাশি, $(x - y)^n = \left(x - \frac{k}{3}\right)^7$

$\therefore \left(x - \frac{k}{3}\right)^7 = x^7 + {}^7C_1\,x^6\left(-\frac{k}{3}\right) + {}^7C_2\,x^5\left(-\frac{k}{3}\right)^2 + {}^7C_3\,x^4\left(-\frac{k}{3}\right)^3 + {}^7C_4\,x^3\left(-\frac{k}{3}\right)^4 + \ldots\ldots$

এখানে x^3 এর সহগ, ${}^7C_4 \times \left(-\frac{k}{3}\right)^4$

শর্তমতে,

${}^7C_4\left(-\frac{k}{3}\right)^4 = 560$

বা, $\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} \times \frac{k^4}{3^4} = 560$

বা, $35 \times \frac{k^4}{81} = 560$

বা, $k^4 = 1296$

বা, $k^4 = (\pm 6)^4$

$\therefore k = \pm 6$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৩ $\left(b - \frac{1}{2}x\right)^n = a - 96x + cx^2 + ...$

[কুমিল্লা ক্যাডেট কলেজ, কুমিল্লা প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে $\left(b - \frac{1}{2}x\right)^n$ কে বিস্তৃত কর যখন $b = 1$ এবং $n = 5$. ২

খ. $n = 6$ হলে a, b এবং c এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $b = 2$ এবং $n = 4$ হলে দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে $(1.75)^4$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $b = 1$ এবং $n = 5$ হলে

$$\left(b - \frac{1}{2}x\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$\therefore \left(1 - \frac{x}{2}\right)^5$

$= 1 + 5\left(-\frac{x}{2}\right) + 10\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 10\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + 1\left(-\frac{x}{2}\right)^5$

$= 1 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x^4 - \frac{1}{32}x^5$. **(Ans.)**

খ $n = 6$ হলে,

$\left(b - \frac{x}{2}\right)^6 = b^6 + \binom{6}{1}b^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + \binom{6}{2}b^4\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + ...$

$= b^6 - 3b^5x + \frac{15}{4}b^4x^2 + ...$

কিন্তু,

$\left(b - \frac{1}{2}x\right)^6 = a - 96x + cx^2$

$\therefore b^6 - 3b^5x + \frac{15}{4}b^4x^2 = a - 96x + cx^2$ ....(i)

(i) এর উভয় পক্ষ হতে ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$b^6 = a$ ....(ii)

(ii) এর উভয় পক্ষ হতে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$3b^5 = 96$

বা, $b^5 = 32$

বা, $b = 2$

(ii) নং এ b এর মান বসিয়ে,

$a = 2^6 = 64$

(i) এর উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\frac{15}{4}b^4 = c$

বা, $c = \frac{15}{4} \times 2^4 = \frac{15}{4} \times 16$

$\therefore c = 60$

$\therefore a = 64, b = 2$ এবং $c = 60$ **(Ans.)**

গ $b = 2$ এবং $n = 4$ হলে

$\left(b - \frac{1}{2}x\right)^n = \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^4$

$\left(2 - \frac{x}{2}\right)^4 = 2^4 + \binom{4}{1}2^3 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + \binom{4}{2}2^2 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{4}{3}2^1 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \left(-\frac{x}{2}\right)^4$

$= 16 - 16x + 6x^2 - x^3 + \frac{x^4}{16}$

এখন, $2 - \frac{x}{2} = 1.75$

বা, $\frac{x}{2} = 2 - 1.75 = .25$

বা, $x = 0.5$

$x = 0.5$ বসিয়ে পাই,

$\left(2 - \frac{.5}{2}\right)^4 = 16 - 16 \times (.5) + 6 \times (.5)^2 - (.5)^3 + \frac{(.5)^4}{16}$

$= \frac{2401}{256}$

$= 9.3789$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৪ **দৃশ্যকল্প-১:** $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + ...$ একটি ধারা।

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = 1 + 3x, h(x) = 1 + x^2$ ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৭, ৯ ও ১০*

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৩]

ক. যদি $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে দেখাও যে, $\{g(x)\}^4\{h(x)\}^5$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ 660. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-১ অনুসারে কোন শর্তে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টির মান নির্ণয় কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ দেওয়া আছে,

$g(x) = 1 + 3x$ এবং $h(x) = (1 + x^2)$

$\{g(x)\}^4\{h(x)\}^5 = (1 + 3x)^4(1 + x^2)^5$

$= (1 + 12x + 54x^2 + 108x^3 + 81x^4)(1 + 5x^2 + 10x^4 + 10x^6 + 5x^8 + x^{10})$

এখন, x^5 থাকবে এমন পদগুলোর সমষ্টি

$= (12x \times 10x^4) + 108x^3 \times 5x^2$

$= 120x^5 + 540x^5 = 660x^5$

$\therefore \{g(x)\}^4\{h(x)\}^5$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এর সহগ 660 **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{(3x-1)^2} \times \frac{3x-1}{1}$

$= \frac{1}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x-1}\right| < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{3x-1} < 1$

$\therefore \frac{1}{3x-1} < 1$

বা, $3x - 1 > 1$

বা, $3x - 1 + 1 > 1 + 1$

বা, $3x > 2$

$\therefore x > \frac{2}{3}$

অথবা, $\frac{1}{3x-1} > -1$

বা, $3x - 1 < -1$

বা, $3x < -1 + 1$

বা, $3x < 0$

$\therefore x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ অথবা $x < 0$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। **(Ans.)**

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{1-\frac{1}{3x-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1-1}{3x-1}}$$

$$= \frac{1}{3x-2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶২৫ $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$ এবং $A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^6$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ১০

[সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট প্রশ্ন নং ২]

ক. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক অথবা সমমাত্রিক কি-না যাচাই কর। ২

খ. $P(x, y, z) = xyz$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(x+y+z)^5} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5}$ ৪

গ. $(2 - x)A$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং $1.9 \times (1.05)^6$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

$\therefore P(y, z, x) = (y + z + x)(yz + zx + xy)$
$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$

$\therefore P(z, x, y) = (z + x + y)(zx + xy + yz)$
$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$

সুতরাং এটি একটি চক্রক্রমিক রাশি।

আবার, $P(x, y, z)$ বীজগাণিতিক রাশিটির প্রতিটি পদের মাত্রা 3; সুতরাং এটি একটি সমমাত্রিক রাশি।

খ দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

বা, $xyz = x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x$ $[P(x, y, z) = xyz]$

বা, $x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + z^2x + yz^2 + x^2z + xyz = 0$

বা, $xy(x + y) + yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) = 0$

বা, $(x + y)(xy + yz + z^2 + xz) = 0$

বা, $(x + y)\{y(x + z) + z(z + x)\} = 0$

বা, $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$

$\therefore x + y = 0$ অথবা, $y + z = 0$ অথবা $z + x = 0$

$\therefore x = -y \quad \therefore y = -z \quad \therefore z = -x$

এখন, $\frac{1}{(x+y+z)^5} = \frac{1}{(x-z+z)^5} = \frac{1}{x^5}$ $[\because y = -z]$

আবার, $\frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5}$

$= \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(-z)^5} + \frac{1}{z^5}$ $[\because y = -z]$

$= \frac{1}{x^5}$

$\therefore \frac{1}{(x+y+z)^5} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^6$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

$\therefore A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^6 = 1 + 6\left(\frac{x}{2}\right) + 15\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 20\left(\frac{x}{2}\right)^3 + ...$

$= 1 + 3x + \frac{15x^2}{4} + \frac{5x^3}{2} + ...$

$\therefore (2 - x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^6 = (2 - x)$

$\left(1 + 3x + \frac{15}{4}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + ...\right)$

$= 2 + 6x + \frac{15}{2}x^2 + 5x^3 - x - 3x^2 - \frac{15}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + ...$

$= 2 + 5x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{5}{4}x^3 + ...$ **(Ans)**

শর্তমতে, $2 - x = 1.9$

বা, $x = 2 - 1.9$

বা, $x = 0.1$

এখন, $x = 0.1$ প্রদত্ত বিস্তৃতিতে বসিয়ে পাই,

$(2 - 0.1)\left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^6 = 2 + 5 \times (0.1) + \frac{9}{2}(0.1)^2 + \frac{5}{4}(0.1)^3$

$= 2.54625$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৬ $\left(2x + \frac{b}{x^3}\right)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\left(1 + \frac{x^3}{5}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $n = 12$ হলে রাশিটির বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. $n = 10$ হলে রাশিটির বিস্তৃতিতে যদি 5-তম পদ এবং 6-তম পদের সহগ সমান হয় তবে b এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(1 + \frac{x^3}{5}\right)^8$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতি করে পাই,

$\left(1 + \frac{x^3}{5}\right)^8 = 1 + 8 . \frac{x^3}{5} + 28\left(\frac{x^3}{5}\right)^2 + ...$

DœPZi MwYZ

$= 1 + \frac{8x^3}{5} + \frac{28}{25}x^6 + ...$

$\therefore$ x^3 এর সহগ $\frac{8}{5}$ এবং

x^6 এর সহগ $\frac{28}{25}$ **(Ans.)**

খ $n = 12$ হলে, $\left(2x + \frac{b}{x^3}\right)^n = \left(2x + \frac{b}{x^3}\right)^{12}$

$(r + 1)$ তম পদ, $T_{r+1} = {}^{12}C_r\,(2x)^{12-r} . \left(\frac{b}{x^3}\right)^r$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r} . x^{12-r} . \frac{b^r}{x^{3r}}$

$= {}^{12}C_r\, 2^{12-r} . b^r . x^{12-4r}$

ধ্র"বক পদে, $x^{12-4r} = x^0$

বা, $12 - 4r = 0$

বা, $12 = 4r$

$\therefore$ $r = 3$

$\therefore$ ধ্র"বক পদ $= {}^{12}C_3\, 2^{12-3} . b^3 . x^0$

$= 220 \times 2^9\, b^3$

$= 112640b^3$ **(Ans.)**

গ $n = 10$ হলে,

$\left(2x + \frac{b}{x^3}\right)^n = \left(2x + \frac{b}{x^3}\right)^{10}$

$(r + 1)$ তম পদ, $T_{r+1} = {}^{10}C_r\,(2x)^{10-r} . \frac{b^r}{x^{3r}}$

$= {}^{10}C_r\, 2^{10-r} . x^{10-4r} . b^r$

$\therefore$ $(r + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^{10}C_r\, 2^{10-r} . b^r$

$\therefore$ 5 তম পদ বা $(4 + 1)$ তম পদের সহগ $= {}^{10}C_4 . 2^{10-4} . b^4$

$= 210 \times 64 . b^4$

$= 13440b^4$

এবং 6 তম পদ বা $(5 + 1)$ তম পদের সহগ

$= {}^{10}C_5 . 2^{10-5} . b^5$

$= 252 \times 32.b^5 = 8064b^5$

শর্তানুযায়ী, $8064b^5 = 13440b^4$

$\therefore$ $b = \frac{13440}{8064} = \frac{5}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২৭ $A = (1 - x)(1 + mx)^6$ এবং $B = \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^8$

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল প্রশ্ন নং ২]

ক. যদি $m = -3$ হয় তবে $(1 + mx)^6$ রাশিটি প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. $A = 1 + nx^2 + ...$ হলে m ও n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2 - x)B$ কে x^3 পর্যন্ড় বিস্তৃতি কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1.9 \times (1.05)^8$ এর মান নির্ণয় কর।8

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৪(ক) নং সমাধানের অনুরূপ।

p এর স্থলে m বসবে।

খ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

p ও q এর স্থলে যথাক্রমে m ও n বসবে।

গ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধানের অনুরূপ।

A এর স্থলে B বসবে।

প্রশ্ন ▶২৮ $A = (1 - x)^8$, $B = (1 + x)^7$ এবং $F(x) = ln\frac{2 - x}{2 + x}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ১০

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. B কে x^4 পর্যন্ড় বিস্তৃত কর। ২

খ. $F(x)$ ফাংশনটির ডোমেন বের কর এবং দেখাও যে, এটি এক-এক ফাংশন। ৪

গ. দেখাও যে, AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35. ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৬(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ দেওয়া আছে, $F(x) = ln\frac{2 - x}{2 + x}$

ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে $\frac{2 - x}{2 + x} > 0$ যদি

(i) $2 - x >$ এবং $2 + x > 0$ অথবা

(ii) $2 - x < 0$ এবং $2 + x < 0$ হয়

(i) থেকে,

$\Rightarrow x < 2$ এবং $x > -2$ হয়

$\therefore$ ˆডামেন $= x < 2$ এবং $x > -2$

$= \{x : x < 2\} \cap \{x : x > -2\}$

$= (-\infty, 2) \cap (-2, \infty) = (-2, 2)$

(ii) থেকে,

$\Rightarrow x > 2$ এবং $x < -2$

$\therefore$ ˆডামেন $= (2, \infty) \cap (-2, -\infty)$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন D_f = (i) ও (ii) থেকে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $(-2, 2) \cup \varnothing = (-2, 2)$ **(Ans.)**

ধরি, $a, b \in$ ডোমেন F.

ফাংশনটি এক-এক হবে যদি $F(a) = F(b)$ হলে $a = b$ হয়।

এখন, $F(a) = F(b)$

$\therefore$ $ln\frac{2 - a}{2 + a} = ln\frac{2 - b}{2 + b}$

$\Rightarrow$ $\frac{2 - a}{2 + a} = \frac{2 - b}{2 + b}$

$\Rightarrow$ $4 - 2b + 2a - ab = 4 - 2a + 2b - ab$

$\Rightarrow$ $4a = 4b$

$\therefore$ $a = b$

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶২৯ $A = \left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right)^7$; $B = \left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^{10}$

[ভিকার"ননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\left(2 + \frac{a}{4}\right)^6$ কে a-এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে a^3 পর্যন্ড় বিস্তৃত কর।২

খ. A এর বিস্তৃতির y মুক্ত পদটি নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতির x^5 এর সহগ 8064 হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(2 + \frac{a}{4}\right)^6 = 2^6 + \binom{6}{1}.2^5.\left(\frac{a}{4}\right) + \binom{6}{2}.2^4.\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \binom{6}{3}.2^3.\left(\frac{a}{4}\right)^3 + ...$

$= 64 + 6.32.\frac{a}{4} + \frac{6.5}{1.2}.16.\frac{a^2}{16} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.8.\frac{a^3}{64} + ...$

$= 64 + 48a + 15a^2 + \frac{5}{2}a^3 + ...$ **(Ans.)**

DœPZi MwYZ

খ দেওয়া আছে, $A = \left(y^2 - 2 + \frac{1}{y^2}\right)^7$

$= \left\{(y)^2 - 2.y.\frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2\right\}^7$

$= \left\{\left(y - \frac{1}{y}\right)^2\right\}^7$

$= \left(y - \frac{1}{y}\right)^{14}$

ধরি, দ্বিপদীর $(r + 1)$ তম পদ y মুক্ত।

$\therefore T_{r+1} = {}^{14}C_r \cdot y^{14-r} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right)^r$

$= {}^{14}C_r \cdot (-1)^r \cdot y^{14-r} \cdot y^{-r}$

$= {}^{14}C_r(-1)^r \cdot y^{14-2r}$

পদটি y মুক্ত হলে,

$14 - 2r = 0$

$\therefore r = 7$

$\therefore (7 + 1)$ বা 8 তম পদ y মুক্ত।

$\therefore T_{7+1} = {}^{14}C_7(-1)^7 y^0$

$= \frac{14.13.12.11.10.9.8}{7.6.5.4.3.2.1}(-1)$

$= -3432$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = \left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^{10}$

ধরি, ধারাটির $(r + 1)$ তম পদে x^5 বিদ্যমান।

$\therefore T_{r+1} = {}^{10}C_r \cdot (x^2)^{10-r} \cdot \left(\frac{k}{x}\right)^r$

$= {}^{10}C_r \cdot x^{20-2r} \cdot k^r \cdot x^{-r}$

$= {}^{10}C_r \cdot k^r \cdot x^{20-3r}$

শর্তমতে, $x^{20-3r} = x^5$

বা, $20 - 3r = 5$

বা, $3r = 15$

$\therefore r = 5$

$\therefore T_{5+1} = {}^{10}C_5\, k^5 \cdot x^5$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_5\, k^5 = 8064$

বা, $\frac{10.9.8.7.6\, k^5}{5.4.3.2.1} = 8064$

বা, $252\, k^5 = 8064$

বা, $k^5 = 32 = 2^5$

$\therefore k = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩০ $\log_a bc = p$, $\log_b ca = q$, $\log_c ab = r$ এবং $E = \left(M - \frac{x}{3}\right)^7$ একটি দ্বিপদী রাশি। *◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০*

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. $(a\sqrt{a})^a - a^{a\sqrt{a}} = 0$, সম্পর্ক হতে a এর মান নির্ণয় কর। যেখানে $a \neq 0$. ২

খ. উদ্দীপকের প্রেক্ষিতে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1.8$

গ. প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি E এর বিস্তৃতিতে M^2 এর সহগ -672 হলে x^2 এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.১ উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২ এর উদাহরণ-২৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২১০

গ দেওয়া আছে, $E = \left(M - \frac{x}{3}\right)^7$

$= M^7 + {}^7C_1M^6\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2\, M^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3\, M^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3$

$+ {}^7C_4\, M^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + {}^7C_5\, M^2\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \ldots \ldots$

$= M^7 - \frac{7x}{3}M^6 + \frac{7x^2}{3}M^5 - \frac{35x^3}{27}M^4 + \frac{35x^4}{81}M^3 - \frac{7x^5}{81}M^2 + \ldots$

দেওয়া আছে, M^2 এর সহগ -672

শর্তমতে, $-672 = \frac{-7x^5}{81}$

বা, $x^5 = 7776$

বা, $x = 6$

$\therefore x^2 = 36$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩১ $\left(k - \frac{y}{3}\right)^7$ কে বিস্তৃতি করলে k^3 এর সহগ 560 হয়।

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $(1 + 5y)^4$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে বিস্তৃতি কর। ২

খ. উদ্দীপক হতে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\left(2 - \frac{y}{2}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে চতুর্থ পদ পর্যন্ত নির্ণয় কর এবং উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1.995)^7$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1 + 5y)^4$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ অনুসারে পাই,

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$\therefore (1 + 5y)^4 = 1 + 4.5y + 6(5y)^2 + 4.(5y)^3 + 1.(5y)^4$

$= 1 + 20y + 150y^2 + 500y^3 + 625y^4$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৮(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২ এর উদাহরণ-৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩১

প্রশ্ন ▶৩২ $Q(x) = \frac{1}{5x+3} + \frac{1}{(5x+3)^2} + \frac{1}{(5x+3)^3} + \ldots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা এবং $R(x) = \left(k - \frac{x}{3}\right)^7$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[হলি ক্রস উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. "x" এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে Q(x) এর অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. R(x) এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n-তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$

এখন,

$U_n < 10^{-4}$

বা, $\frac{1}{n} < 10^{-4}$

বা, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^4}$

$\therefore n > 10^4$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটির,

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(5x+3)^2} \div \frac{1}{5x+3}$

$= \frac{1}{5x+3}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি

$|r| < 1$ হয়

বা, $\left|\frac{1}{5x+3}\right| < 1$

অর্থাৎ $-1 < \frac{1}{5x+3} < 1$

এখন, $\frac{1}{5x+3} < 1$

বা, $5x + 3 > 1$

বা, $5x + 3 - 3 > 1 - 3$

বা, $x > -\frac{2}{5}$

আবার, $\frac{1}{5x+3} > -1$

বা, $5x + 3 < -1$

বা, $5x < -4$

$\therefore$ $x < -\frac{4}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > -\frac{2}{5}$ অথবা $x < \frac{-4}{5}$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২ এর উদাহরণ-১০(খ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৫

প্রশ্ন ▶৩৩ (i) $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ।

(ii) $xy^{a-1} = p, xy^{b-1} = q, xy^{c-1} = r.$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০

[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. যদি $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রদত্ত বিস্তৃতির n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক (ii) এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $(b - c) \log_k p + (c - a) \log_k q + (a - b) \log_k r = 0.$ ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ দ্বিপদী রাশিতে দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots\ldots$$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2\binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$

বা, $\frac{n(n-1)}{1.2} = 2.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{n-2}{12}$

বা, $2n - 4 = 12$

বা, $2n = 16$

বা, $n = \frac{16}{2}$

$\therefore$ $n = 8$

যেহেতু, $n = 8$

$\therefore$ বিস্তৃতির পদসংখ্যা $= 8 + 1 = 9$

আবার, যেহেতু পদসংখ্যা 9

$\therefore$ $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা 5তম পদ বিস্তৃতির মধ্যপদ এবং এটি

$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^4$

$= \frac{70x^4}{256}$

$= \frac{35x^4}{128}$

Ans. n = 8, পদসংখ্যা 9 ও মধ্যপদ $\frac{35x^4}{128}$

গ $(b - c) \log_k p + (c - a) \log_k q + (a - b) \log_k r$

$= \log_k p^{b-c} + \log_k q^{c-a} + \log_k r^{a-b}$

$= \log_k (xy^{a-1})^{b-c} + \log_k (xy^{b-1})^{c-a} + \log_k (xy^{c-1})^{a-b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k x^{c-a} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k x^{c-a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k (x^{b-c}.x^{c-a}.x^{a-b}) + \log_k (y^{ab-ac-b+c}.\ y^{bc-ab-c+a}.\ y^{ac-bc-a+b})$

$= \log_k x^{b-c+c-a+a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0 + 0 = 0$ **(cÉgvwYZ)**

প্রশ্ন ▶৩৪ $A = \left(x + \frac{3}{x}\right)^5$ এবং $B = (1 + ax)^6$ দুইটি দ্বিপদী রাশি, যেখানে $a \neq 0$. *[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]*

ক. B এর মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতিতে x^2 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১১ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩৫ $M = \left(a - \frac{1}{3}x\right)^7$ এবং $a + ab + ab^2 + \ldots\ldots$ একটি গুণোত্তর ধারা। ◀সমন্বিত অধ্যায় ৬, ৭ ও ১০

[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $4x + 4 > 16$ এর সমাধান কর। ২

খ. M এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ x^4 এর সহগের 135 গুণ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $a = 1$ এবং $b = \frac{1}{2}$ হলে, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.১ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১২৪

খ সৃজনশীল ২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ $a = 1$ এবং $b = \frac{1}{2}$ হলে প্রদত্ত ধারাটি,

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$

এখানে $|r| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি,

$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৬ $\frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(3x-2)^2} + \frac{1}{(3x-2)^3} + ...$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা এবং $A = \left(k - \frac{x}{4}\right)^5$ একটি দ্বিপদ রাশি।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. $x = 2$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. A এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 160 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(3x-2)^2} + \frac{1}{(3x-2)^3} + ...$

$x = 2$ হলে ধারাটি, $\frac{1}{3.2-2} + \frac{1}{(3.2-2)^2} + \frac{1}{(3.2-2)^3} + ...$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ...$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত $= \frac{1}{4^2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটি : $\frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(3x-2)^2} + \frac{1}{(3x-2)^3} + ...$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x-2)^2} \div \frac{1}{3x-2}$

$= \frac{1}{3x-2}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{3x-2}\right| < 1$

বা, $|3x-2| > 1$

$\therefore 3x - 2 > 1$ অথবা, $-(3x-2) > 1$

বা, $3x - 2 + 2 > 1 + 2$ বা, $-3x + 2 > 1$

বা, $3x > 3$ বা, $-3x + 2 - 2 > 1 - 2$

$\therefore x > 1$ বা, $-3x > -1$

বা, $3x < 1$

$\therefore x < \frac{1}{3}$

অর্থাৎ $x > 1$ অথবা $x < \frac{1}{3}$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

গ দেওয়া আছে, $A = \left(k - \frac{x}{4}\right)^5$

$= k^5 + {}^5C_1\, k^4 . \left(-\frac{x}{4}\right) + {}^5C_2\, k^3 \left(-\frac{x}{4}\right)^2 + ...$

$= k^5 - \frac{5}{4} k^4 . x + {}^5C_2 . k^3 . \frac{x^2}{16} + ...$

এখানে, k^3 এর সহগ $= {}^5C_2 \times \frac{x^2}{16}$

প্রশ্নমতে, ${}^5C_2 \times \frac{x^2}{16} = 160$

বা, $\frac{10}{16} \times x^2 = 160$

$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{160 \times 16}{10}} = \pm 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৭ $A = \left(2k - \frac{x}{2}\right)^5, B = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^n$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $a + ab + ab^2 + ...$ গুণোত্তর ধারার সপ্তম পদ নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 720 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত গুণোত্তর ধারা: $a + ab + ab^2 + ...$

যার প্রথম পদ, $a = a$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{ab}{a} = b$

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির 7 ম পদ $= ar^{7-1}$

$= ab^6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$P = \left(2k - \frac{x}{2}\right)^5$

$= {}^5C_0\, (2k)^5 + {}^5C_1\, (2k)^4 \left(-\frac{x}{2}\right)^1 + {}^5C_2\, (2k)^3 \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + ...$

$= 1(2k)^5 + 5(2k)^4\left(-\frac{x}{2}\right)^1 + 10(2k)^3\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + ...$

$= 32k^5 - 40k^4x + 20k^3x^2 - ... ...$

প্রশ্নমতে, $20x^2 = 720$

বা, $x^2 = 36$

$\therefore x = \pm 6$ **(Ans.)**

গ দ্বিপদী রাশিতে দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(1 + \frac{x}{4}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + ...$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2\binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$

DœPZi MwYZ

বা, $\frac{n(n-1)}{1.2} = 2.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{n-2}{12}$

বা, $2n - 4 = 12$

বা, $2n = 16$

বা, $n = \frac{16}{2}$

$\therefore$ $n = 8$

যেহেতু, $n = 8$

$\therefore$ বিস্ড়্তির পদসংখ্যা $= 8 + 1 = 9$

আবার, যেহেতু পদসংখ্যা 9

$\therefore$ $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ বা 5তম পদ বিস্ড়্তির মধ্যপদ এবং এটি

$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^4$

$= \frac{70x^4}{256} = \frac{35x^4}{128}$

Ans. $n = 8$, পদসংখ্যা 9 ও মধ্যপদ $\frac{35x^4}{128}$

প্রশ্ন ▶৩৮ $A = x^2 + 2x + 1$, $B = \frac{2a}{a-1}$ এবং $C = \left(p - \frac{y}{3}\right)^7$ দুইটি দ্বিপদী রাশি। ◀সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ১০

[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. $A = 0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $6\sqrt{B} + \frac{5}{\sqrt{B}} - 13 = 0$ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. C এর বিস্ড়্তিতে p^3 এর সহগ 560 হলে y এর মান নির্ণয় কর।৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = x^2 + 2x + 1 = 0$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4.1.1$

$= 4 - 4$

$= 0$

$\therefore$ $b^2 - 4ac = 0$ হওয়ায় সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্ড়ব ও পরস্পর সমান হবে। **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৩(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

বি.দ্র.: L এর স্থলে B এবং m এর স্থলে a বসবে।

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২ এর উদাহরণ ১০(খ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৫

বি.দ্র.: k এর স্থলে p এবং x এর স্থলে y বসবে।

প্রশ্ন ▶৩৯ $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ ও $\left(2 - \frac{x}{2}\right)^7$ দুটি দ্বিপদী বিস্ড়্তি এবং $\frac{1}{3x+2} + \frac{1}{(3x+2)^2} + \frac{1}{(3x+2)^3} + \ldots\ldots\ldots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা। ◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্রথম রাশির বিস্ড়্তি থেকে x মুক্ত পদ নির্ণয় কর। ২

খ. ২য় রাশির বিস্ড়্তিতে প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর এবং উক্ত বিস্ড়্তির সাহায্যে $(1.995)^7$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে ও সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ রাশিটির $(r + 1)$ তম পদটি x মুক্ত,

$(r + 1)$ তম পদ

$= {}^6C_r . (x)^{6-r} . \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$

$= {}^6C_r . x^{6-3r}$

যেহেতু পদটি x মুক্ত

$\therefore$ $6 - 3r = 0$

বা, $3r = 6$

বা, $r = 2$

$\therefore$ x মুক্ত পদটি $= {}^6C_2 = 15$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২ এর উদাহরণ-৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৩১

গ প্রদত্ত ধারার সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(3x+2)^2}}{\frac{1}{3x+2}} = \frac{1}{3x+2}$

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদিও কেবল যদি

$|r| < 1$ বা, $\left|\frac{1}{3x+2}\right| < 1$ হয় অর্থাৎ $-1 < \frac{1}{3x+2} < 1$

$\therefore$ $-1 < \frac{1}{3x+2}$	অথবা, $\frac{1}{3x+2} < 1$
বা, $-1 > 3x + 2$	বা, $3x + 2 > 1$
বা, $-1 - 2 > 3x + 2 - 2$	বা, $3x + 2 - 2 > 1 - 2$
বা, $-3 > 3x$	বা, $3x > -1$
$\therefore$ $x < -1$	$\therefore$ $x > -\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্তঃ $x < -1$ অথবা, $x > -\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

আবার, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3x+2}}{1 - \frac{1}{3x+2}}$ $\left[\because a = \frac{1}{3x+2}\right]$

$= \frac{1}{3x+2} \times \frac{3x+2}{3x+1}$

$= \frac{1}{3x+1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪০ $A = (1 - x)^8$ এবং $B = (1 + x)^7$.

SSC উচ্চতর গণিত মেইড ইজি উত্তরপত্র-৯ক

[জয়দেবপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, গাজীপুর প্রশ্ন নং ২]

ক. B কে x^4 পর্যন্ড় বিস্ড়্ত কর। ২

খ. A কে চতুর্থ পদ পর্যন্ড় বিস্ড়্ত কর এবং উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(0.9)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, AB এর বিস্ড়্তিতে x^7 এর সহগ 35. ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৬ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪১ $(A + Bx)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

[এ ই আর ই স্কুল এন্ড কলেজ, সাভার, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. $A = 1, B = 2$ এবং $n = 6$ হলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে রাশিটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $B = 3$ এবং $n = 7$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির x^4 এর সহগ 22680 হয়। A এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $A = 2$ এবং $B = 1$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সহগ সমান হয়। n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $(A + Bx)^n$

$A = 1, B = 2$ এবং $n = 6$ হলে, $(A + Bx)^n = (1 + 2x)^6$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
```

$\therefore (1 + 2x)^6 = 1 + 6.2x + 15.(2x)^2 + 20.(2x)^3 + 15.(2x)^4 + 6.(2x)^5 + (2x)^6$

$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = 3$ এবং $n = 7$

$\therefore (A + Bx)^n = (A + 3x)^7$

$= A^7 + {}^7C_1 A^{7-1} (3x)^1 + {}^7C_2 A^{7-2} (3x)^2 + {}^7C_3 A^{7-3} (3x)^3 + {}^7C_4 A^{7-4} (3x)^4 + \ldots\ldots$

$= A^7 + 7A^6 . 3x + 21A^5 . 9x^2 + 35A^4 . 27x^3 + 35A^3 . 81x^4 + \ldots\ldots$

$= A^7 + 21A^6x + 189A^5x^2 + 945A^4x^3 + 2835A^3x^4 + \ldots\ldots$

শর্তমতে, $2835A^3 = 22680$

বা, $A^3 = 8$

$\therefore A = 2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = 2$

$B = 1$

$\therefore (A + Bx)^n = (2 + 1 \times x)^n = (2 + x)^n$

$\therefore$ রাশিটির বিস্তৃতিতে পঞ্চম বা $(4 + 1)$-তম পদ $= {}^nC_4\, 2^{n-4} . x^4$

এবং ষষ্ঠ বা, $(5 + 1)$-তম পদ $= {}^nC_5\, 2^{n-5}\, x^5$

শর্তমতে, ${}^nC_4\ 2^{n-4} = {}^nC_5\, 2^{n-5}$

বা, $\dfrac{n!}{4!(n-4)!} 2^n . 2^{-4} = \dfrac{n!}{5!(n-5)!} 2^n . 2^{-5}$

বা, $\dfrac{2^{-4}}{4!(n-4)(n-5)!} = \dfrac{2^{-5}}{5 \times 4!(n-5)!}$

বা, $\dfrac{2}{n-4} = \dfrac{1}{5}$

বা, $10 = n - 4$

$\therefore n = 14$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪২ $\left(a + \dfrac{x}{2}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি।

[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল, ময়মনসিংহ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $(1 + 2y)^5$ এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি বের কর। ২

খ. উদ্দীপকের রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 224 হলে a এর মান কত? ৪

গ. $a = 2$ বসিয়ে x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে রাশিটির বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় করে উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(1.995)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
```

$\therefore (1 + 2y)^5 = 1 + 5(2y) + 10(2y)^2 + 10(2y)^3 + 5(2y)^4 + (2y)^5$

$= 1 + 10y + 40y^2 + 80y^3 + 80y^4 + 32y^5$

সুতরাং সহগগুলোর সমষ্টি $= 1 + 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 243$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(a + \frac{x}{2}\right)^8 = a^8 + \binom{8}{1} a^7 . \frac{x}{2} + \binom{8}{2} a^6 . \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3} a^5 . \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$= a^8 + 8a^7 . \dfrac{x}{2} + 28a^6 . \dfrac{x^2}{4} + 56a^5 . \dfrac{x^3}{8} + \ldots\ldots$

$= a^8 + 4a^7x + 7a^6x^2 + 7a^5x^3 + \ldots\ldots\ldots$

শর্তমতে, $7a^5 = 224$

$a^5 = 32 = (2)^5$

$\therefore a = 2$ **(Ans.)**

গ $a = 2$ বসিয়ে, দ্বিপদী রাশিটি

$\left(2 + \dfrac{x}{2}\right)^8 = 2^8 + 4.2^7x + 7.2^6 . x^2 + 7 . 2^5 . x^3 + \ldots\ldots$

$= 256 + 512x + 448x^2 + 224x^3 + \ldots\ldots$ ['খ' হতে]

শর্তমতে, $2 + \dfrac{x}{2} = 1.995$

বা, $\dfrac{x}{2} = 1.995 - 2$

$\therefore x = -0.01$

রাশিটির বিস্তৃতিতে $x = -0.01$ বসিয়ে পাই,

$(1.995)^8 = 256 + 512(-0.01) + 448(-0.01)^2 + 224(-0.01)^3 + \ldots$

$= 256 - 5.12 + 0.0448 - 0.000224 + \ldots\ldots\ldots$

$= 250.924576$

$= 250.9246$ (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪৩ $\dfrac{1}{5x+1} + \dfrac{1}{(5x+1)^2} + \dfrac{1}{(5x+1)^3} + \ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা এবং $p = (1 - y)(1 + ay)^6$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৬, ৭ ও ১০

[শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. $5(3 - 2t) \le 3(4 - 3t)$ অসমতাটি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $p = 1 + by^2 + \ldots\ldots$ হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$5(3 - 2t) \le 3(4 - 3t)$

বা, $15 - 10t \le 12 - 9t$

বা, $15 - 10t + 9t \le 12 - 9t + 9t$ [উভয়পক্ষে 9t যোগ করে]

বা, $15 - t \le 12$

বা, $15 - t - 15 \le 12 - 15$ [উভয়পক্ষে (-15) যোগ করে]

বা, $-t \le -3$

DœPZi MwYZ

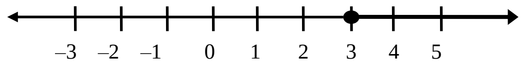
বা, $-t(-1) \geq (-3)(-1)$ [(-1) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $t \geq 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $t \geq 3$ **(Ans.)**

এবং সমাধান সেট, $S = \{t \in \nabla : t \geq 3\}$

$\therefore$ সংখ্যারেখায় সমাধান সেট :



খ সৃজনশীল ৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

এবং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{5x+1}}{1 - \frac{1}{5x+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5x+1}}{\frac{5x+1-1}{5x+1}}$$

$$= \frac{1}{5x}\ \textbf{(Ans.)}$$

গ সৃজনশীল ১৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৪৪ $p = 1 - x$ এবং $q = 1 + ax$

[ফরিদপুর জিলা স্কুল, ফরিদপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ বিধি ব্যবহার করে P^5 এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. pq^6 কে x পর্যন্ত বিস্তৃতি করলে যদি $1 + bx^2$ পাওয়া যায় তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $a = 1$ হলে, p^8q^7 এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$p = 1 - x$

$\therefore$ $p^5 = (1-x)^5$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে পাই,

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

$p^5 = (1-x)^5 = 1 + 5(-x)^1 + 10(-x)^2 + 10(-x)^3 + 5(-x)^4 + (-x)^5$

$= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$p = (1-x)$ এবং $q = (1 + ax)$

$\therefore$ $pq^6 = (1-x)(1+ax)^6$

$= (1-x)(1 + {}^6C_1\, ax + {}^6C_2\, a^2x^2 + {}^6C_3\, a^3x^3 + ...)$

প্রশ্নমতে,

$pq^6 = 1 + bx^2 + ...$

$\therefore$ $1 + bx^2 + ... = 1\ (6a - 1)x + (15a^2 - 6a)x^2 + ...$

উভয় পাশের x ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$6a - 1 = 0$

$\therefore$ $a = \frac{1}{6}$ **(Ans.)**

এবং

$15a^2 - 6a = b$

বা, $b = 15 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 6 \times \frac{1}{6}$

বা, $b = \frac{15}{36} - 1$

$\therefore$ $b = \frac{-7}{12}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$p = 1 - x$

$a = 1$ হলে,

$q = 1 + x$

$\therefore$ $p^8q^7 = (1-x)^8(1+x)^7$

$(1-x)^8(1+x)^7 = (1-x)(1-x)^7(1+x)^7$

$= (1-x)(1-x^2)^7$

$= (1-x)$

$\left[\binom{7}{0}(-x^2)^0 + \binom{7}{1}(-x^2)^1 + \binom{7}{2}(-x^2)^2 + \binom{7}{3}(-x^2)^3 + \binom{7}{4}(-x^2)^4 + ...\right]$

$\therefore$ $(1-x)^8(1+x)^7 = (1-x)(1-x^2)^7 = (1-x)[1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 - ......]$

$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + ...) + (-x + 7x^3 - 21x^5 + 35x^7 - 35x^9 + ...)$

$\therefore$ $(1-x)^8(1+x)^7 = 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 ....$

$\therefore$ $(1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35

$\therefore$ x^7 এর সহগ 35

প্রশ্ন ▶৪৫ $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + ...\ ...$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা। $\left(k - \frac{y}{4}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ (–20)

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[ফরিদপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফরিদপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x = 1$ হলে অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকার শর্ত নির্ণয় কর এবং অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধারাটি, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + ...$

$x = 1$ হলে ধারাটি, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$

যার ১ম পদ, $a = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ **(Ans.)**

SSC উচ্চতর গণিত মেইড ইজি উত্তরপত্র-৯খ
SSC উচ্চতর গণিত মেইড ইজি উত্তরপত্র-৯গ
DœPZi MwYZ

খ $\left(k-\frac{y}{4}\right)^6 = k^6 + {}^6C_1\, k^5\left(-\frac{y}{4}\right)^1 + {}^6C_2\, k^4\left(-\frac{y}{4}\right)^2 + {}^6C_3\, k^3\left(-\frac{y}{4}\right)^3 + ...$

বিস্তৃতি থেকে, k^3 এর সহগ = ${}^6C_3\left(-\frac{y}{4}\right)^3$

প্রশ্নমতে, ${}^6C_3\left(-\frac{y}{4}\right)^3 = -20$

বা, $-\frac{20}{64}y^3 = -20$

বা, $y^3 = 64 = 4^3$

$\therefore$ $y = 4$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + ...$

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(x+1)^2} \div \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{x+1}\right| < 1$ বা, $\frac{1}{|x+1|} < 1$ বা, $|x+1| > 1$

এখন, $(x+1)$ অঋণাত্মক হলে, $x+1 > 1$ বা, $x > 0$

আবার $(x+1)$ ঋণাত্মক হলে, $-(x+1) > 1$ বা, $x+1 < -1$

বা, $x < -2$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হচ্ছেঃ $x < -2$ অথবা $x > 0$

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{x+1}}{1-\frac{1}{x+1}}$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x+1}\times\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x}$$

Ans. শর্তঃ $x < -2$ অথবা $x > 0$; সমষ্টি $= \frac{1}{x}$

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $A = \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$ এবং $B = \left(\frac{x^3 + k}{x}\right)^6$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০

[রাজশাহী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রাজশাহী □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a + b + c = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $A = 1$ ৪

গ. B এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ দেওয়া আছে, $A = \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

বামপক্ষ $= \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$$= \frac{1}{x^b + \frac{1}{x^c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^a + \frac{1}{x^b} + 1}$$

$[\square\ a + b + c = 0 \therefore b + c = -a]$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{a+b} + x^b + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{-c} + x^b + 1}$$

$\left[\begin{array}{l}\square\ a + b + c = 0 \\ \therefore a + b = -c\end{array}\right]$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{\frac{1}{x^c} + x^b + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b.x^c}{1 + x^c + x^{b+c}}$$

$$= \frac{x^c + 1 + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = 1$$

$\therefore A = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $B = \left(\frac{x^3 + k}{x}\right)^6 = \left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1\,(x^2)^5.\left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2\,(x^2)^4\left(\frac{k}{x}\right)^2 + {}^6C_3.\,(x^2)^3.\left(\frac{k}{x}\right)^3 + ...$$

$$= x^{12} + {}^6C_1\, x^{10}.\frac{k}{x} + {}^6C_2\ x^8.\frac{k^2}{x^2} + {}^6C_3\ x^6.\frac{k^3}{x^3} + ...$$

$$= x^{12} + {}^6C_1\, x^9k + {}^6C_2\, x^6k^2 + {}^6C_3\, x^3k^3 + ...$$

এখানে, বিস্তৃতিটির x^3 এর সহগ,

${}^6C_3k^3 = \frac{6.5.4}{1.2.3}.\, k^3 = 20\, k^3.$

প্রশ্নানুসারে, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = \frac{160}{20}$

বা, $k^3 = 8$

বা, $k^3 = 2^3$

$\therefore$ $k = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ $f(x) = \frac{4-x}{4+x}$ এবং $P(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১, ৬ ও ১০

[নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $x < \frac{x}{6} + 5$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর। ২

খ. P(x) এর বিস্তৃতিতে ৩য় ও ৪র্থ পদের অনুপাত $\frac{4}{15}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা যাচাই কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$x < \frac{x}{6} + 5$

বা, $x - \frac{x}{6} < \frac{x}{6} + 5 - \frac{x}{6}$

বা, $\frac{6x - x}{6} < 5$

বা, $\frac{5x}{6} < 5$

বা, $\frac{x}{6} < 1$

বা, $x < 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \nabla : x < 6\}$

খ দেওয়া আছে,

$$P(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7$$

$\therefore$ তৃতীয় বা $(2 + 1)$ তম পদ $= {}^7C_2\,(2x^2)^{7-2} \cdot \left(\frac{1}{2x^2}\right)^2$

চতুর্থ বা $(3 + 1)$ তম পদ $= {}^7C_3\,(2x^2)^{7-3} \cdot \left(\frac{1}{2x^2}\right)^3$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{{}^7C_2\,(2x^2)^5\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2}{{}^7C_3\,(2x^2)^4\left(\frac{1}{2x^2}\right)^3} = \dfrac{4}{15}$

বা, $\dfrac{{}^7C_2 \times 2x^2}{{}^7C_3 \times \frac{1}{2x^2}} = \dfrac{4}{15}$

বা, $\dfrac{21 \times 2x^2 \times 2x^2}{35} = \dfrac{4}{15}$

বা, $\dfrac{21x^4}{35} = \dfrac{1}{15}$

বা, $x^4 = \dfrac{35}{15 \times 21}$

বা, $x^4 = \dfrac{1}{9}$

বা, $x^4 = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

$\therefore x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

গ ধরি, $y = f(x) = \dfrac{4 - x}{4 + x}$

$\therefore y = \dfrac{4 - x}{4 + x}$

বা, $4y + yx = 4 - x$

বা, $yx + x = 4 - 4y$

বা, $x(y + 1) = 4 - 4y$

বা, $x = \dfrac{4 - 4y}{y + 1}$

$\therefore f^{-1}(y) = \dfrac{4 - 4y}{y + 1}$ $[\because y = f(x)\ \therefore x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{4 - 4x}{x + 1}$

এখন, $f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যেকোন $a, b \in$ ডোম f^{-1} এর জন্য $f^{-1}(a) = f^{-1}(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $f^{-1}(a) = f^{-1}(b)$

$\therefore \dfrac{4 - 4a}{a + 1} = \dfrac{4 - 4b}{b + 1}$

বা, $4b - 4ab + 4 - 4a = 4a + 4 - 4ab - 4b$

বা, $8b = 8a$

বা, $a = b$

$\therefore f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

প্রশ্ন ▶ ৪৮ $3x - 2y \le 12$ একটি অসমতা এবং $A = \left(1 + \dfrac{x}{4}\right)^n$ একটি দ্বিপদী।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৬, ৭ ও ১০

[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা ▯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}$ ….. … অনুক্রমের সাধারণ পদ কত? ২

খ. অসমতাটি লেখচিত্রের সাহায্যে দেখাও। ৪

গ. A এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর ও মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত অনুক্রম : $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}$, ...

অনুক্রমটির প্রতিটি পদের লব বিজোড় সংখ্যা এবং হর তার পরবর্তী জোড় সংখ্যা। সুতরাং অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $\dfrac{2n - 1}{2n}$

খ দেওয়া আছে, $3x - 2y \le 12$

বা, $3x - 2y - 12 \le 0$

প্রথমে $3x - 2y - 12 = 0$ বা, $2y = 3x - 12$

$\therefore\ y = \dfrac{3x - 12}{2}$ সমীকরণের লেখ আঁকি।

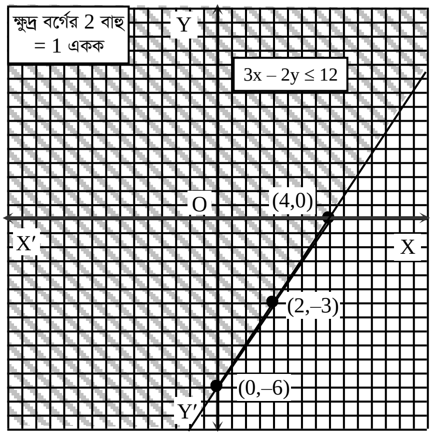
লেখস্থিত কয়েকটি বিন্দু–

x	0	2	4
y	– 6	– 3	0

ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দুইঘরকে একক ধরে $(0, -6), (2, -3), (4, 0)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে সমীকরণটির লেখ পাওয়া যায়।

এখন মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $3x - 2y - 12$ রাশির মান $- 12 < 0$.

সুতরাং লেখ-চিত্রস্থ এবং এর যে পাশের মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুই সমাধান সেটের অন্তর্ভুক্ত। নিচের লেখচিত্রে তা চিহ্নিত করে দেখানো হলো–



গ $A = \left(1 + \dfrac{x}{4}\right)^n$

$\therefore$ তৃতীয় পদ বা $(2 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_2\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$

চতুর্থ পদ বা, $(3 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_3\left(\dfrac{x}{4}\right)^3$

শর্তমতে, ${}^nC_2\,\dfrac{1}{4^2} = 2 \times {}^nC_3 \cdot \dfrac{1}{4^3}$

বা, ${}^nC_2 = 2 \times {}^nC_3 \cdot \dfrac{1}{4}$

বা, $2.\ {}^nC_2 = {}^nC_3$

বা, $2 \times \dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \dfrac{n!}{(n-3)! \times 3!}$

DœPZi MwYZ

বা, $\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 6$

বা, $\frac{(n-2)\,(n-3)!}{(n-3)!} = 6$

বা, $n - 2 = 6$

বা, $n = 8$ **(Ans.)**

∴ যেহেতু n জোড় সংখ্যা, তাই মধ্যপদ হবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ বা $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম বা $(4 + 1)$ তম পদ বা 5 তম পদ

∴ মধ্যপদ $= {}^8C_4\left(\frac{x}{4}\right)^4 = \frac{35}{128}x^4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪৯ $\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{(2x-1)^3} + \ldots\ldots$ একটি ধারা এবং $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$ একটি দ্বিপদী রাশি। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০*

[বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া ■ প্রশ্ন নং ২]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(1 + x^2)^8$ কে বিস্তৃতি করো। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় করো। ৪

গ. দ্বিতীয় রাশির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x^5 এর সহগের 15 গুণ হলে k এর মান নির্ণয় করো। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1 + x^2)^8$ প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত করে পাই,

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\therefore (1 + x^2)^8 = 1 + 8(x^2) + 28(x^2)^2 + 56(x^2)^3 + \ldots\ldots$
$= 1 + 8x^2 + 28x^4 + 56x^6 + \ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটি $\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{(2x-1)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{2x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x-1)^2} \div \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1}$

এখন ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{2x-1}\right| < 1$ হয়

অর্থাৎ, $-1 < \frac{1}{2x-1} < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{2x-1}$ অথবা, $\frac{1}{2x-1} < 1$

বা, $2x - 1 < -1$ বা, $2x - 1 > 1$

বা, $2x < 0$ বা, $2x > 2$

বা, $x < 0$ হয় বা, $x > 1$

∴ নির্ণেয় শর্ত: $x < 0$ অথবা, $x > 1$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২ এর উদাহরণ-১০(গ) সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৫

প্রশ্ন ▶৫০ $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি ধারা এবং $\left(x - \frac{k}{x^2}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০*

[মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ ■ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x = 1$ হলে, ধারাটি নির্ণয় করে প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত বের কর। ২

খ. x এর উপর যে শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা নির্ণয় করে উক্ত শর্ত সাপেক্ষে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. রাশিটির বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 252 হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ১৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{(3x-1)^2} \times \frac{3x-1}{1}$
$= \frac{1}{3x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x-1}\right| < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{3x-1} < 1$

$\therefore \frac{1}{3x-1} < 1$ অথবা, $\frac{1}{3x-1} > -1$

বা, $3x - 1 > 1$ বা, $3x - 1 < -1$

বা, $3x - 1 + 1 > 1 + 1$ বা, $3x < -1 + 1$

বা, $3x > 2$ বা, $3x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ $\therefore x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ অথবা $x < 0$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। **(Ans.)**

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{1 - \frac{1}{3x-1}}$

$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1-1}{3x-1}}$

$= \frac{1}{3x-2}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৫১ (i) $(3x + 2)^{-1} + 2(3x + 2)^{-2} + 4(3x + 2)^{-3} + 8(3x + 2)^{-4} + \ldots.$

(ii) $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০*

[রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট ■ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x = 1$ এর জন্য ধারাটির সাধারণ পদ নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং দ্বিপদী বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ হলে n এর মান এবং বিস্তৃতিটির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারাটি,

$$(3x+2)^{-1}+2(3x+2)^{-2}+4(3x+2)^{-3}+8(3x+2)^{-4}+\ldots$$

$x = 1$ হলে ধারাটি

$$\frac{1}{3.1+2}+\frac{2}{(3\times1+2)^2}+\frac{4}{(3\times1+2)^3}+\frac{8}{(3\times1+2)^4}+\ldots$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{4}{125}+\frac{8}{625}+\ldots..$$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত $=\dfrac{\frac{2}{25}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{2}{5}$

এবং ১ম পদ $=\dfrac{1}{5}$

$\therefore$ n তম পদ $= ar^{n-1}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}=\dfrac{2^{n-1}}{5^n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

$\therefore$ ধারাটির সাধারণ পদ $=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারার সাধারণ অনুপাত, $r=\dfrac{\frac{2}{(3x+2)^2}}{\frac{1}{3x+2}}$

$$=\frac{2}{(3x+2)^2}\times(3x+2)$$

$$=\frac{2}{3x+2}$$

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি

$|r|<1$ বা $\left|\dfrac{2}{3x+2}\right|<1$ হয়,

অর্থাৎ, $-1<\dfrac{2}{3x+2}<1$

$\therefore -1<\dfrac{2}{3x+2}$

বা, $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{3x+2}$

বা, $-2>3x+2$

বা, $-2-2>3x+2-2$

বা, $-4>3x$

$\therefore x<-\dfrac{4}{3}$

অথবা,

$\dfrac{2}{3x+2}<1$

বা, $\dfrac{1}{3x+2}<\dfrac{1}{2}$

বা, $3x+2>2$

বা, $3x+2-2>2-2$

বা, $3x>0$

$\therefore x>0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x<-\dfrac{4}{3}$ অথবা, $x>0$ **(Ans.)**

আবার, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$

$$=\frac{\frac{1}{3x+2}}{1-\frac{2}{3x+2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3x+2}}{\frac{3x+2-2}{3x+2}}$$

$$=\frac{1}{3x+2}\times\frac{3x+2}{3x}$$

$$=\frac{1}{3x}$$ **(Ans.)**

গ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^n=1+\binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\ldots$$

প্রশ্নানুসারে, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\binom{n}{2}=2\binom{n}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

বা, $\dfrac{n(n-1)}{1.2}=2.\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{n-2}{12}$

বা, $2n-4=12$

বা, $2n=16$

বা, $n=\dfrac{16}{2}$

$\therefore n=8$

যেহেতু, $n=8$

$\therefore$ বিস্তৃতির পদসংখ্যা $=8+1=9$

আবার, যেহেতু পদসংখ্যা 9

$\therefore\left(\dfrac{8}{2}+1\right)$ বা 5 তম পদ বিস্তৃতির মধ্যপদ এবং এটি

$$T_5=T_{4+1}=\binom{8}{4}.1^4\left(\frac{x}{4}\right)^4$$

$$={}^8C_4\left(\frac{x}{4}\right)^4=\frac{8!}{4!(8-4)!}.\left(\frac{x}{4}\right)^4$$

$$=\frac{8.7.6.5}{4.3.2.1}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}$$

$$=\frac{8.7.6.5\,x^4}{4.3.2.1.\,256}$$

$$=\frac{1680x^4}{6144}=\frac{35x^4}{128}$$

Ans. $n=8$, এবং মধ্যপদ $\dfrac{35}{128}x^4$

প্রশ্ন ▶৫২ (a) $x^2-xy=14,\ y^2+xy=60$

(b) $\left(2x^2+\dfrac{a}{x^3}\right)^{10}$

◂সমন্বিত অধ্যায় ৫ ও ১০

[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর ▫ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $0.\dot{1}\dot{2}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. উদ্দীপক (a) এর সমাধান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক (b) এর বিস্তৃতির x^{10} ও x^{-20} এর সহগ সমান হলে দেখাও যে, $a=2$ ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $0.\dot{1}\dot{2}=\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{33}$ **(Ans.)**

খ $x^2-xy=14$ ……… (i)

$y^2+xy=60$ ……… (ii)

এখন, (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $xy=x^2-14$

বা, $y=\dfrac{x^2-14}{x}$

$\therefore\ y=x-\dfrac{14}{x}$ ……… (iii)

(ii) নং সমীকরণে $y=x-\dfrac{14}{x}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(x-\frac{14}{x}\right)^2+x\left(x-\frac{14}{x}\right)=60$$

বা, $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{14}{x} + \left(\frac{14}{x}\right)^2 + x^2 - 14 = 60$

বা, $2x^2 - 28 + \frac{196}{x^2} - 14 = 60$

বা, $2x^2 - 28 + \frac{196}{x^2} - 14 - 60 = 0$

বা, $2x^2 - 102 + \frac{196}{x^2} = 0$

বা, $\frac{2x^4 - 102x^2 + 196}{x^2} = 0$

বা, $2x^4 - 102x^2 + 196 = 0$

বা, $x^4 - 51x^2 + 98 = 0$

বা, $x^4 - 49x^2 - 2x^2 + 98 = 0$

বা, $x^2(x^2 - 49) - 2(x^2 - 49) = 0$

বা, $(x^2 - 49)(x^2 - 2) = 0$

হয়, $x^2 - 49 = 0$ অথবা, $x^2 - 2 = 0$

বা, $x^2 = 49$ বা, $x^2 = 2$

$\therefore x = \pm 7$ $\therefore x = \pm\sqrt{2}$

আবার, (iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x = 7$ তখন $y = 7 - \frac{14}{7} = 7 - 2 = 5$

যখন $x = -7$ তখন $y = -7 + \frac{14}{7} = -7 + 2 = -5$

যখন $x = \sqrt{2}$ তখন $y = \sqrt{2} - \frac{14}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{2} - 7\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$

যখন $x = -\sqrt{2}$ তখন $y = -\sqrt{2} - \frac{14}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2} + \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

$= -\sqrt{2} + \frac{14\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান:

$(x, y) = (7, 5), (-7, -5), (\sqrt{2}, -6\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$ **(Ans.)**

গ $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতি $= (2x^2)^{10} + {}^{10}C_1(2x^2)^9\left(\frac{a}{x^3}\right)$

$+ {}^{10}C_2(2x^2)^8\left(\frac{a}{x^3}\right)^2 + {}^{10}C_3(2x^2)^7\left(\frac{a}{x^3}\right)^3 + {}^{10}C_4(2x^2)^6\left(\frac{a}{x^3}\right)^4$

$+ {}^{10}C_5(2x^2)^5\left(\frac{a}{x^3}\right)^5 + {}^{10}C_6(2x^2)^4\left(\frac{a}{x^3}\right)^6 + {}^{10}C_7(2x^2)^3\left(\frac{a}{x^3}\right)^7$

$+ {}^{10}C_8(2x^2)^2\left(\frac{a}{x^3}\right)^8 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= 1024x^{20} + 5120ax^{15} + 11520a^2x^{10} + 15360a^3x^5 +$

$13440a^4 + \frac{8064a^5}{x^5} + \frac{3360a^6}{x^{10}} + \frac{960a^7}{x^{15}} + \frac{180a^8}{x^{20}} + \ldots$

$\therefore x^{10}$ এর সহগ $= 11520a^2$

এবং x^{-20} এর সহগ $= 180a^8$

প্রশ্নমতে, $180a^8 = 11520a^2$

বা, $a^8 = \frac{11520a^2}{180}$

বা, $a^6 = 64 = 2^6$

$\therefore a = 2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৫৩ $\left(P - \frac{x}{2}\right)^6 = r - 96x + sx^2 + \ldots$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, পার্বতীপুর, দিনাজপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে, পঞ্চম পদ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের সাহায্যে p, r ও s এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে 5ম পদ

বা, $(4 + 1)$ তম পদ $= {}^6C_4 \cdot (x^2)^{6-4} \cdot \left(\frac{k}{x}\right)^4$

$= {}^6C_4 \cdot x^4 \cdot \frac{k^4}{x^4} = 15k^4$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(p - \frac{1}{2}x\right)^6 = p^6 + \binom{6}{1} \cdot p^5\left(-\frac{1}{2}x\right) + \binom{6}{2} \cdot p^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + \ldots$

$= p^6 + 6 \cdot p^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{6.5}{1.2} \cdot p^4 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right) + \ldots\ldots$

$= p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 + \ldots\ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 + \ldots\ldots = r - 96x + sx^2 + \ldots$

(i)

(i) নং এর উভয় পক্ষ হতে ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$p^6 = r$ .... (ii)

(i) নং এর উভয় পক্ষ হতে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$3p^5 = 96$

বা, $p^5 = 32$

বা, $p^5 = 2^5$ $\therefore p = 2$

(ii) নং এ $p = 2$ বসিয়ে পাই,

$r = 2^6 = 64$

(i) নং এর উভয়পক্ষে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\frac{15}{4}p^4 = s$

বা, $\frac{15}{4} \times 2^4 = s$ $[\because p = 2]$

বা, $\frac{15 \times 16}{4} = s$

$\therefore s = 60$

$\therefore p = 2, r = 64$ এবং $s = 60$ **(Ans.)**

গ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(k - \frac{x}{3}\right)^7 = k^7 + \binom{7}{1}k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \binom{7}{2}k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \binom{7}{3}$

$k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \binom{7}{4}k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots$

এখানে, বিস্তৃতিটির k^3 এর সহগ $= \binom{7}{4}\left(-\frac{x}{3}\right)^4$

$= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} \cdot \frac{x^4}{3^4} = \frac{35}{81}x^4$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = 560 \times \frac{81}{35}$

বা, $x^4 = 1296$

বা, $x^4 = (\pm 6)^4$

$\therefore$ $x = \pm 6$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫৪ $A = (1 + x)^7, B = (1 - x)^8$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর প্রশ্ন নং ২]

ক. $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^8$ কে চতুর্থ পদ পর্যন্ড় বিস্ড়ৃত কর। ২

খ. B এর বিস্ড়্রৃতির চার পদ পর্যন্ড় নির্ণয় করে উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(0.99)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, AB এর বিস্ড়্রৃতির x^7 এর সহগ 35। ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^8$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{2}{x}\right)^8 = 1 + 8\left(\frac{2}{x}\right) + 28\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 56\left(\frac{2}{x}\right)^3 + ...$$

$$= 1 + \frac{16}{x} + \frac{112}{x^2} + \frac{448}{x^3} + ... \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $B = (1 - x)^8$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$(1 - x)^8 = 1 + \binom{8}{1}(-x) + \binom{8}{2}(-x)^2 + \binom{8}{3}(-x)^3 + ...$$

$$= 1 - 8x + \frac{8.7}{1.2}x^2 + \frac{8.7.6}{1.2.3}(-x)^3 + \dots \dots$$

$$= 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + \dots \dots \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমতে, $(1 - x)^8 = (0.99)^8$

বা, $1 - x = 0.99$

বা, $1 - 0.99 = x$

বা, $x = 0.01$

উক্ত বিস্ড়্রৃতিতে $x = 0.01$ বসিয়ে পাই,

$(1 - 0.01)^8 = 1 - 8(0.01) + 28(0.01)^2 - 56(0.01)^3 + \dots \dots$

$= 1 - 0.08 + 0.0028 - 0.000056 + ...$

$= 0.9227$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ড়) **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৫৫ $Q = (4 + x)_c4^{-1}$ একটি দ্বিপদী রাশি,

$\frac{xy \log_k xy}{x + y} = \frac{yz \log_k yz}{y + z} = \frac{zx \log_k zx}{z + x}$ এবং $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০

[বর্ডার গার্ড পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, রংপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. $h(x) = 2^{\frac{1}{3}}$ হলে দেখাও যে, $x = 1$ ২

খ. Q^n এর বিস্ড়্রৃতিতে তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ হলে n এর মান এবং মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $x^x = y^y = z^z$ ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}$

এবং $h(x) = 2^{\frac{1}{3}}$

তাহলে, $(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $\{(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}\}^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $\left\{(1+x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(1-x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3.(1+x)^{\frac{1}{3}}.(1-x)^{\frac{1}{3}}$
$\left\{(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}\right\} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $1 + x + 1 - x + 3.(1 - x^2)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2$

বা, $2 + 3(1 - x^2)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2$

বা, $3(1 - x^2)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $(1 - x^2)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $1 - x^2 = 0$

বা, $x^2 = 1$

$\therefore$ $x = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $Q = (4 + x)_c4^{-1} = \frac{4 + x}{4} = 1 + \frac{x}{4}$

তাহলে, $Q^n = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^n$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1 + \frac{x}{4}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + ...$$

প্রশ্নানুসারে, $\binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2\binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$

বা, $\frac{n(n-1)}{1.2} = 2.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{n-2}{12}$

বা, $2n - 4 = 12$

বা, $2n = 16$

বা, $n = \frac{16}{2}$

$\therefore$ $n = 8$ **(Ans.)**

এখানে n = 8 যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{8}{2} + 1\right)$ বা 5 তম পদের মান।

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্ড়্রৃতির 5 বা (4 + 1) তম পদ $= {}^8C_4\,(1)^{8-4}\left(\frac{x}{4}\right)^4$

$= \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{4}\right)^4 = 70\,\frac{x^4}{256} = \frac{35x^4}{128}$ **(Ans.)**

গ ধরি, $\frac{xy \log_k xy}{x + y} = \frac{yz \log_k yz}{y + z} = \frac{zx \log_k zx}{z + x} = p$

তাহলে, $\log_k xy = \frac{p(x+y)}{xy}$

বা, $\log_k x + \log_k y = p\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $\log_k y + \log_k z = p\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)$ ... ... (ii)

এবং $\log_k z + \log_k x = p\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ ... ... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই,

$2(\log_k x + \log_k y + \log_k z) = 2p\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$\therefore \quad \log_k x + \log_k y + \log_k z = p\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ ... ... (iv)

আবার, (iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k z = p\left(\frac{1}{z}\right)$

বা, $z \log_k z = p$

$\therefore \quad \log_k z^z = p$

(iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k x = p\left(\frac{1}{x}\right)$

বা, $x \log_k x = p$

$\therefore \quad \log_k x^x = p$ [□ $r \log_k p = \log_k p^r$]

(iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k y = p\left(\frac{1}{y}\right)$

বা, $y \log_k y = p$

$\therefore \quad \log_k y^y = p$

সুতরাং, $\log_k x^x = \log_k y^y = \log_k z^z$

$\therefore \quad x^x = y^y = z^z$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৫৬ $A = (1+x)^{44}$ এবং $B = (a+3x)^n$ দুইটি দ্বিপদী রাশি এবং $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ *◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ১০*

[রংপুর জিলা স্কুল, রংপুর □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে 21 তম পদ ও 22 তম পদ সমান হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $B = b + \frac{21}{2}bx + \frac{189}{4}bx^2 + \ldots\ldots\ldots$ হলে, a, b এবং n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

ফাংশন সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $x^2 - 1 > 0$ হয়।

অর্থাৎ, $x^2 > 1$ হয়

এখন, $x^2 > 1$ হবে যখন, $x < -1$ অথবা $x > 1$

$\therefore$ ডোমেন, $f = \{x : x \in \nabla$ এবং $x < -1$ অথবা, $x > 1\}$ **(Ans.)**

খ $(1+x)^{44}$-এর বিস্তৃতিতে 21তম পদ $= {}^{44}C_{20}.1^{44-20}.x^{20} = {}^{44}C_{20}x^{20}$

$(1+x)^{44}$এর বিস্তৃতিতে 22তম পদ $= {}^{44}C_{21}.1^{44-21}.x^{21} = {}^{44}C_{21}x^{21}$

শর্তমতে, ${}^{44}C_{20}.x^{20} = {}^{44}C_{21}.x^{21}$

বা, $\frac{44!}{(44-20)!\,20!}x^{20} = \frac{44!}{(44-21)!\,21!}x^{21}$

বা, $\frac{23!\,21!}{24!\,20!} = x$

বা, $\frac{23!\,21 \times 20!}{24 \times 23!20!} = x$ [□ $n! = n(n-1)!$]

বা, $x = \frac{21}{24}$

$\therefore \quad x = \frac{7}{8}$ **(Ans.)**

গ এখানে, প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $(a+3x)^n$ এর বিস্তৃতি,

$(a+3x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}(3x) + {}^nC_2a^{n-2}(3x)^2 + \equiv\equiv + (3x)^n$

সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $a^n = b$ $\equiv\equiv\equiv$ (i)

${}^nC_1a^{n-1}(3x) = \frac{21}{2}bx$ $\equiv\equiv\equiv$ (ii)

এবং ${}^nC_2\,a^{n-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}bx^2$ $\equiv\equiv\equiv$ (iii)

এখন, (ii) নং হতে পাই, $n.\frac{a^n}{a}.3x = \frac{21}{2}bx$ [$\because {}^nC_1 = n$]

বা, $n.\frac{b}{a} = \frac{7}{2}b$ [(i) হতে]

$\therefore \quad n = \frac{7a}{2}$ $\equiv\equiv\equiv$ (iv)

আবার (iii) নং হতে পাই, ${}^nC_2\,a^{n-2}(3x)^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{a^n}{a^2}.9x^2 = \frac{189}{4}bx^2$

বা, $\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b}{a^2} = \frac{21}{4}b$ [(i) নং হতে $a^n = b$]

বা, $n(n-1).\,\frac{1}{a^2} = \frac{21}{2}$

বা, $2n(n-1) = 21a^2$

বা, $2.\frac{7a}{2}\left(\frac{7a}{2} - 1\right) = 21a^2$ [(iv) নং হতে]

বা, $\frac{7a-2}{2} = 3a$ [উভয়পক্ষকে 7a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $7a - 2 = 6a$ $\therefore a = 2$

(iv) নং এ $a = 2$ বসিয়ে, $n = \frac{7}{2} \times 2 = 7$

(i) নং এ $a = 2, n = 7$ বসিয়ে, $b = 2^7 = 128$

অতএব a, b ও n এর নির্ণেয় মান যথাক্রমে 2, 128 ও 7।

প্রশ্ন ▶৫৭ $\left(2x - \frac{1}{3x^2}\right)^6$ ও $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

[নীলফামারী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নীলফামারী □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্রথম দ্বিপদীর মধ্যপদ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রথম দ্বিপদীর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ এবং তার মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দ্বিতীয় দ্বিপদী রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রথম দ্বিপদী রাশিটি $\left(2x - \frac{1}{3x^2}\right)^6$

দ্বিপদী রাশিটির ঘাত 6 যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{6}{2}+1\right)$ বা 4-তম পদ

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির দ্বিপদী বিস্তৃতির 4 বা (3 + 1) তম পদ

$$= {}^6C_3(2x)^{6-3}\left(-\frac{1}{3x^2}\right)^3$$
$$= -20 \times 2^3 \times x^3 \times \frac{1}{27x^6}$$
$$= -\frac{160}{27x^3} \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $\left(2x - \frac{1}{3x^2}\right)^6$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

১ম দ্বিপদী বিস্তৃতি $= (2x)^6 + \binom{6}{1}(2x)^5\left(\frac{-1}{3x^2}\right) + \binom{6}{2}(2x)^4\left(\frac{-1}{3x^2}\right)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3\left(\frac{-1}{3x^2}\right)^3 + \dots\dots$

$= 64x^6 + 6.32x^5 . \frac{-1}{3x^2} + 15.16x^4 . \frac{1}{9x^4} + 20 . 8x^3 . \frac{-1}{27x^6} + \dots$

$= 64x^6 - 64x^3 + \frac{80}{3} - \frac{160}{27x^3} + \dots\dots$

বিস্তৃতিটি থেকে দেখা যায় যে, তৃতীয় পদ x বর্জিত এবং উক্ত পদের মান $\frac{80}{3}$ । **(Ans.)**

গ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1 (x^2)^5.\left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2 (x^2)^4\left(\frac{k}{x}\right)^2 + {}^6C_3.(x^2)^3.\left(\frac{k}{x}\right)^3 + \dots\dots$$
$$= x^{12} + {}^6C_1 x^{10}.\frac{k}{x} + {}^6C_2\ x^8.\frac{k^2}{x^2} + {}^6C_3\ x^6.\frac{k^3}{x^3} + \dots\dots$$
$$= x^{12} + {}^6C_1 x^9k + {}^6C_2 x^6k^2 + {}^6C_3 x^3k^3 + \dots\dots\dots$$

এখানে, বিস্তৃতিটির x^3 এর সহগ,

${}^6C_3k^3 = \frac{6.5.4}{1.2.3}.k^3 = 20\ k^3.$

প্রশ্নানুসারে, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = \frac{160}{20}$

বা, $k^3 = 8$

বা, $k^3 = 2^3$

$\therefore$ $k = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫৮ (i) $\left(2 - \frac{x}{4}\right)^8$ ও (ii) $\left(2x - \frac{k}{2}\right)^5$ দুটি দ্বিপদী রাশি।

[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা ␣ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(1 + 5x)^5$ এর বিস্তৃতি বের কর। ২

খ. (i) নং রাশিটি x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1.9975)^8$ এর আসন্ন মান চারটি দশমিক স্থান পর্যন্ত বের কর। ৪

গ. (ii) নং এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 720 হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$\therefore (1 + 5x)^5 = 1 + 5.5x + 10(5x)^2 + 10(5x)^3 + 5(5x)^4 + 1.(5x)^5$
$= 1 + 25x + 250x^2 + 1250x^3 + 3125x^4 + 3125x^5$

খ $\left(2 - \frac{x}{4}\right)^8 = 2^8 + {}^8C_1 2^7\left(-\frac{x}{4}\right)^1 + {}^8C_2\ 2^6\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + {}^8C_3\ 2^5\left(-\frac{x}{4}\right)^3 + \dots\dots$

$= 256 - 256x + 112x^2 - 28x^3 + \dots\dots$

প্রশ্নমতে, $2 - \frac{x}{4} = 1.9975$

বা, $\frac{x}{4} = 0.0025$

$\therefore x = 0.01$

$\therefore \left(2 - \frac{0.01}{4}\right)^8 = 256 - 256 \times 0.01 + 112 \times (0.01)^2 - 28(0.01)^3 + \dots\dots$

$= 253.4512$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **(Ans.)**

গ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(2x - \frac{k}{2}\right)^5 = (2x)^5 + {}^5C_1 (2x)^4.\left(-\frac{k}{2}\right) + {}^5C_2 (2x)^3\left(-\frac{k}{2}\right)^2 + {}^5C_3 (2x)^2\left(-\frac{k}{2}\right)^3 + \dots\dots$$
$$= 32x^5 + 5.16x^4\left(-\frac{k}{2}\right) + 10.8x^3\left(-\frac{k}{2}\right)^2 + 10.4x^2\left(-\frac{k}{2}\right)^3 + ..$$

এখানে, বিস্তৃতিটির x^3 এর সহগ $= 10.8.\left(-\frac{k}{2}\right)^2$
$= 80.\frac{k^2}{4} = 20k^2$

প্রশ্নানুসারে, $20k^2 = 720$

বা, $k^2 = \frac{720}{20}$

বা, $k^2 = 36$

$\therefore$ $k = \pm 6$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫৯ (i) $(2x + 1)^{-1} + (2x + 1)^{-2} + (2x + 1)^{-3} + \dots\dots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

(ii) $\left(2 + \frac{x}{6}\right)^6$ ও $\left(2K - \frac{y}{6}\right)^5$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[কুমিল্লা মডার্ণ হাই স্কুল, কুমিল্লা ␣ প্রশ্ন নং ২]

ক. ১ম দ্বিপদী রাশিকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ২

খ. যদি k^3 এর সহগ 720 হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ১ম দ্বিপদী রাশি: $\left(2 + \frac{x}{6}\right)^6$

$\therefore \left(2 + \frac{x}{6}\right)^6 = 2^6 + \binom{6}{1}2^5.\frac{x}{6} + \binom{6}{2}2^4.\frac{x^2}{36} + \binom{6}{3}2^3.\frac{x^3}{216} + ..$

$= 64 + 6.32 \cdot \frac{x}{6} + 15.16.\frac{x^2}{36} + 20.8.\frac{x^3}{216} + ...$

$= 64 + 32x + \frac{20}{3}x^2 + \frac{20}{27}x^3 + ...$ **(Ans.)**

খ $\left(2K - \frac{y}{6}\right)^5$

$= (2K)^5 + \binom{5}{1}(2K)^4.\left(\frac{-y}{6}\right) + \binom{5}{2}(2K)^3.\left(\frac{-y}{6}\right)^2 + ...$

$= 32K^5 + 5.2^4.K^4.\left(\frac{-y}{6}\right) + 10.2^3.K^3.\frac{y^2}{36} + ...$

$= 32K^5 - \frac{40}{3}K^4.y + \frac{20}{9}K^3y^2 + ...$

$\therefore K^3$ এর সহগ $= \frac{20}{9}y^2$

শর্তমতে, $\frac{20}{9}y^2 = 720$

বা, $y^2 = \frac{720 \times 9}{20}$

বা, $y = 324$

$\therefore y = \pm 18$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৭ এর উদাহরণ ৪(গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৪১

প্রশ্ন ▶৬০ $A = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^n$ এবং $B = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ দুইটি দ্বিপদী রাশি

[সাবেরা সোবহান সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ব্রাহ্মণবাড়িয়া প্রশ্ন নং ৩]

ক. যদি $n = 4$ হয় তাহলে A- কে প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে বিস্তৃত কর। ২

খ. B-এর x-বর্জিত পদ এবং ৪র্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪

গ. A এর বিস্তৃতিতে তৃতীয় পদের সহগ যদি ৪র্থ পদের সহগের দ্বিগুণ হয় তবে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $A = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^4$ [n = 4]

প্যাসকেলের ত্রিভুজ হতে পাই,

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

$\therefore \left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 = 1 + 4.\frac{x}{4} + 6\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 4.\left(\frac{x}{4}\right)^3 + 1.\left(\frac{x}{4}\right)^4$

$= 1 + x + \frac{6x^2}{16} + \frac{4x^3}{64} + \frac{x^4}{256}$

$= 1 + x + \frac{3x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{256}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২ এর উদাহরণ-৬ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা ২৩১

গ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(1 + \frac{x}{4}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + ...$

প্রশ্নানুসারে, $\left(\frac{1}{4}\right)^2\binom{n}{2} = 2\binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$

বা, $\frac{n(n-1)}{1.2} = 2.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{4}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{n-2}{12}$

বা, $2n - 4 = 12$

বা, $2n = 16$

বা, $n = \frac{16}{2}$

$\therefore n = 8$

প্রশ্ন ▶৬১ $A = (1 - 2y + y^2)^2$. $B = \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7$ এবং $F(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ১০

[মাতৃপীঠ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর প্রশ্ন নং ২]

ক. পাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. F(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতির তৃতীয় ও চতুর্থ পদের অনুপাত 4 : 15 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$A = (1 - 2y + y^2)^2$

$= \{(1 - y)^2\}^2$

$= (1 - y)^4$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে পাই,

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

সুতরাং $(1 - y)^4 = 1 + 4(-y) + 6(-y)^2 + 4(-y)^3 + (-y)^4$

$= 1 - 4y + 6y^2 - 4y^3 + y^4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$F(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} = \frac{x^2 - 16 + 16}{x^2 - 16} = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 16} + \frac{16}{x^2 - 16}$

$= 1 + \frac{16}{(x + 4)(x - 4)}$

ধরি, $\frac{16}{(x + 4)(x - 4)} \equiv \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 4}$ ... ... (i)

(i) নং কে $(x + 4)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$16 \equiv A(x - 4) + B(x + 4)$ ... ... (ii)

(ii) নং এ $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$16 = A(-4 - 4) + B(-4 + 4)$

বা, $16 = -8A$

$\therefore A = -2$

আবার, (ii) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$16 = A(4 - 4) + B(4 + 4)$

বা, $16 = 8B$

$\therefore B = 2$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{16}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{-2}{x + 4} + \frac{2}{x - 4}$

$\therefore F(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} = 1 - \frac{2}{x + 4} + \frac{2}{x - 4}$ যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

গ সৃজনশীল ৭(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬২ $A = (1 + ax)^5(1 - bx)^4$

[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী প্রশ্ন নং ২]

DœPZi MwYZ

ক. $(1 - bx)^4$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে A কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। প্রাপ্ত ফলাফলের সাহায্যে A এর মান নির্ণয় কর, যখন $x = 0.1$. ৪

গ. x যথেষ্ট ক্ষুদ্র এবং x^3 বা তার উপরের ঘাত বর্জন করে প্রমাণ কর যে, $A = 1 - 11x + 26x^2$ যখন $a = 1, b = 4$ ৪

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1 - bx)^4 = 1 + \binom{4}{1}(-bx) + \binom{4}{2}(-bx)^2 + \binom{4}{3}(-bx)^3 + \binom{4}{4}(-bx)^4$

$= 1 - 4bx + 6b^2x^2 - 4b^3x^3 + b^4x^4$

$\therefore$ x^3 এর সহগ $-4b^3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$A = (1 + ax)^5 (1 - bx)^4$

$= (1 + 5ax + 10a^2x^2 + 10a^3x^3 + ...)$
$(1 - 4bx + 6b^2x^2 - 4b^3x^3 + ...)$

$\therefore A = 1 + (5a - 4b)x + (10a^2 - 20ab + 6b^2)x^2$
$+ (10a^3 - 40a^2b + 30ab^2 - 4b^3)x^3$
$+ (5a^4 - 40a^3b + 60a^2b^2 - 20ab^3 + b^4)x^4 + ...$

$x = 0.1$ হলে,

$A = 1 + (5a - 4b)(0.1) + (10a^2 - 20ab + 6b^2)(0.1)^2$
$+ (10a^3 - 40a^2b + 30ab^2 - 4b^3)(0.1)^3$
$= 1 + 0.5a - 0.4b + 0.1a^2 - 0.2ab + 0.06b^2 + 0.01a^3 - 0.04a^2b$
$+ 0.03ab^2 - 0.004b^3$ **(Ans.)**

গ x যথেষ্ট ছোট হলে এবং x^3 ও তদুর্ধ্ব ঘাতসমূহ উপেক্ষা করলে,

$A = 1 + (5a - 4b)x + (10a^2 - 20ab + 6b^2)x^2$ ['খ' হতে প্রাপ্ত]

$a = 1$ এবং $b = 4$ হলে,

$A = 1 + (5 \times 1 - 4 \times 4)x + (10 \times 1^2 - 20 \times 1 \times 4 + 6 \times 4^2)x^2$
$= 1 + (5 - 16)x + (10 - 80 + 96)x^2$
$= 1 - 11x + 26x^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৬৩ $\frac{1}{3x - 1} + \frac{1}{(3x - 1)^2} + \frac{1}{(3x - 1)^3} + ...$ একটি ধারা এবং $Q = \left(x + \frac{k}{x^2}\right)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি। ◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x = 1$ হলে ধারাটির দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. Q এর বিস্তৃতিতে চতুর্থ পদ x মুক্ত হলে n এর মান নির্ণয় কর।৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x = 1$ হলে ধারাটি, $\frac{1}{3.1 - 1} + \frac{1}{(3.1 - 1)^2} + \frac{1}{(3.1 - 1)^3} + ...$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$

যার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2^2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$

আবার, গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$\therefore$ প্রথম 10 পদের সমষ্টি, $S_{10} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}\right)}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1024 - 1}{1024} = \frac{1023}{1024}$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{3x - 1} + \frac{1}{(3x - 1)^2} + \frac{1}{(3x - 1)^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{3x - 1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x - 1)^2} \div \frac{1}{3x - 1}$

$= \frac{1}{(3x - 1)^2} \times \frac{3x - 1}{1}$

$= \frac{1}{3x - 1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{3x - 1}\right| < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{3x - 1} < 1$

$\therefore \frac{1}{3x - 1} < 1$	অথবা, $\frac{1}{3x - 1} > -1$
বা, $3x - 1 > 1$	বা, $3x - 1 < -1$
বা, $3x - 1 + 1 > 1 + 1$	বা, $3x < -1 + 1$
বা, $3x > 2$	বা, $3x < 0$
$\therefore x > \frac{2}{3}$	$\therefore x < 0$

$\therefore x > \frac{2}{3}$ অথবা $x < 0$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

(Ans.)

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$= \dfrac{\frac{1}{3x - 1}}{1 - \frac{1}{3x - 1}}$

$= \dfrac{\frac{1}{3x - 1}}{\frac{3x - 1 - 1}{3x - 1}}$

$= \frac{1}{3x - 2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $Q = \left(x + \frac{k}{x^2}\right)^n$

এখন, $\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\left(\frac{k}{x^2}\right) + \binom{n}{2}x^{n-2}.\left(\frac{k}{x^2}\right)^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}.\left(\frac{k}{x^2}\right)^3 + ...$

$= x^n + \binom{n}{1}kx^{n-3} + \binom{n}{2}k^2.x^{n-6} + \binom{n}{3}k^3.x^{n-9} + ...$

৪র্থ পদ x মুক্ত হলে, $n - 9 = 0$ হবে।

$\therefore n = 9$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬৪ $A = (1 + 2x)^7$ এবং $B = (1 - 2x)^8$

[ডা: খাস্তগীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ২]

ক. $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. B কে চতুর্থ পদ পর্যন্ড় বিস্তৃত কর এবং উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(0.98)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

গ. AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$

বা, $\frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{n!}{(n-3)! \times 3!}$

বা, $\frac{n!}{(n-2) \times (n-3)! \times 2} = \frac{n!}{(n-3)! \times 6}$

বা, $\frac{1}{(n-2) \times 2} = \frac{1}{6}$

বা, $2n - 4 = 6$

বা, $2n = 10$

বা, $n = 5$ **(Ans.)**

খ $B = (1 - 2x)^8$

$= 1 + {}^8C_1 (-2x)^1 + {}^8C_2(-2x)^2 + {}^8C_3(-2x)^3 + \ldots \ldots$

$= 1 - 16x + 112x^2 - 448x^3 + \ldots \ldots \ldots$

$(1 - 2x)^8$ কে $(0.98)^8$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $1 - 2x = 0.98$

বা, $2x = 0.02$

বা, $x = .01$

$x = .01$ বিস্তৃতিতে বসিয়ে পাই,

$(0.98)^8 = 1 - 16 (.01) + 112(.01)^2 - 448(.01)^3 + \ldots \ldots$

$= 0.8507$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ড়] **(Ans.)**

গ $A = (1 + 2x)^7$

$B = (1 - 2x)^8$

$\therefore AB = (1 + 2x)^7 (1 - 2x)^8$

$= (1 + 2x)^7 (1 - 2x)^7 (1 - 2x)$

$= (1 - 4x^2)^7 (1 - 2x)$

$= (1 - 2x) \{1 + {}^7C_1(-4x^2)^1 + {}^7C_2(-4x^2)^2 + {}^7C_3(-4x^2)^3 + {}^7C_4(-4x^2)^4 + \ldots \ldots \ldots\}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতি থেকে পাই, x^7 এর সহগ $= -2 \times {}^7C_3 \times (-4)^3$

$= 4480$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৬৫ $A = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এবং $B = \left(a - \frac{x}{3}\right)^7, a \neq 0$

[হাজী মুহাম্মদ মহসিন সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ২]

ক. A এর প্রথম চার পদ পর্যন্ড় বিস্তৃত কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে a^3 এর সহগ 560 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমানুসারে $(2 - x)A$ কে x^3 পর্যন্ড় বিস্তৃত কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1.9 \times (1.05)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৯(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ সৃজনশীল ৮(খ) নং সমাধান এর অনুরূপ।

গ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬৬ (i) $\frac{1}{3x+2} + \frac{1}{(3x+2)^2} + \frac{1}{(3x+2)^3} + \ldots\ldots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

(ii) $A = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3$ ও $B = \left(x + \frac{2y}{x}\right)^{10}$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে কত তম পদ মধ্যপদ এবং মধ্যপদটির মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (i) নং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

$\therefore \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3 = 1 + 3\left(-\frac{x}{3}\right) + 3\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \left(-\frac{x}{3}\right)^3$

$= 1 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27}$ **(Ans.)**

খ বিস্তৃতিতে $n = 10$ জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ বিস্তৃতিটির মধ্যপদ 1টি এবং তা $\left(\frac{10}{2} + 1\right) = 6$ তম পদ।

$\therefore T_{5+1} = {}^{10}C_5 \, x^{10-5} \left(\frac{2y}{x}\right)^5$

$= {}^{10}C_5 \, x^5 . \frac{(2y)^5}{x^5}$

$= \frac{10.9.8.7.6}{5!} 2^5 y^5$

$= 8064 y^5$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ধারার প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x+2}$

প্রদত্ত ধারার সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3x+2}$

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদিও কেবল যদি

$|r| < 1$ বা, $\left|\frac{1}{3x+2}\right| < 1$ হয় অর্থাৎ $-1 < \frac{1}{3x+2} < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{3x+2}$	অথবা, $\frac{1}{3x+2} < 1$
বা, $-1 > 3x + 2$	বা, $3x + 2 > 1$
বা, $-1 - 2 > 3x + 2 - 2$	বা, $3x + 2 - 2 > 1 - 2$
বা, $-3 > 3x$	বা, $3x > -1$
$\therefore x < -1$	$\therefore x > -\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x < -1$ অথবা, $x > -\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

আবার, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{3x+2}}{1 - \frac{1}{3x+2}}$ $\left[\because a = \frac{1}{3x+2}\right]$

$= \dfrac{1}{3x+2} \times \dfrac{3x+2}{3x+1} = \dfrac{1}{3x+1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৬৭ $f(x) = \ln\dfrac{4+x}{4-x}$ এবং $B = \left(1+\dfrac{x}{4}\right)^n$. ◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম ▯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্রমাণ কর যে, $0! = 1$. ২

খ. B এর বিস্ড়ৃতিতে তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ হলে n এর মান নির্ণয় কর। বিস্ড়ৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, $\dbinom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!}$

বা, $1 = \dfrac{n!}{n!0!} = \dfrac{1}{0!}$

বা, $0! = 1$ **(প্রমাণিত)**

খ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^n = 1 + \dbinom{n}{1}\left(\dfrac{x}{4}\right) + \dbinom{n}{2}\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \dbinom{n}{3}\left(\dfrac{x}{4}\right)^3 + \ldots$

প্রশ্নানুসারে, $\dbinom{n}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = 2\dbinom{n}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

বা, $\dfrac{n(n-1)}{1.2} = 2.\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{n-2}{12}$

বা, $2n - 4 = 12$

বা, $2n = 16$

বা, $n = \dfrac{16}{2}$

$\therefore$ $n = 8$ **(Ans.)**

যেহেতু n জোড় সংখ্যা তাই মধ্যপদ হবে $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ তম

বা $\left(\dfrac{8}{2}+1\right)$ তম বা $(4+1)$ তম পদ

$\therefore$ মধ্যপদ $= {}^8C_4\left(\dfrac{x}{4}\right)^4 = \dfrac{35x^4}{128}$

গ ধরি, $y = f(x) = \ell n\dfrac{4+x}{4-x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্ড়ব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ $\dfrac{4+x}{4-x} > 0$ যদি (i) $4 + x > 0$ এবং $4 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $4 + x < 0$ এবং $4 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -4$ এবং $-x > -4$

বা, $x > -4$ এবং $x < 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -4 < x\}$ এবং $(x : x < 4\}$

$= (-4, \infty) \cap (-\infty, 4) = (-4, 4)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -4$ এবং $-x < -4$

বা, $x < -4$ এবং $x > 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -4\} \cap (x : x > 4\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-4, 4) \cup \varnothing = (-4, 4)$

ধরি, $y = f(x) = \ell n\dfrac{4+x}{4-x}$

বা, $e^y = \dfrac{4+x}{4-x}$

বা, $4 + x = 4e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 4(e^y - 1)$

বা, $x = \dfrac{4(e^y-1)}{e^y+1}$

y এর সকল বাস্ড়ব মানের জন্য x এর মান বাস্ড়ব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \nabla$

ডোমেন $D_f = (-4, 4)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \nabla$

প্রশ্ন ▶৬৮ $\left(2+\dfrac{x}{4}\right)^6$ এবং $\left(k-\dfrac{y}{4}\right)^5$ দুটি দ্বিপদী রাশি।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট ▯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. ১ম রাশিকে x^3 পর্যন্ড় বিস্ড়ৃত কর। ২

খ. 'ক' এর সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

গ. ২য় রাশিটির বিস্ড়ৃতিতে k^3 এর সহগ 160 হলে, y এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ১ম দ্বিপদী রাশি: $\left(2+\dfrac{x}{4}\right)^6$

$\therefore \left(2+\dfrac{x}{4}\right)^6 = 2^6 + \dbinom{6}{1}2^5.\dfrac{x}{4} + \dbinom{6}{2}.2^4.\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \dbinom{6}{3}2^3\left(\dfrac{x}{4}\right)^3 + \ldots$

$= 64 + 6 \times 32 \times \dfrac{x}{4} + 15 \times 16 \times \dfrac{x^2}{16} + 20 \times 8 \times \dfrac{x^3}{64} + \ldots\ldots$

$= 64 + 48x + 15x^2 + \dfrac{5}{2}x^3 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\left(2+\dfrac{x}{4}\right)^6 = 2^6 + \dbinom{6}{1}.2^5.\left(\dfrac{x}{4}\right) + \dbinom{6}{2}.2^4.\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \dbinom{6}{3}.2^3.\left(\dfrac{x}{4}\right)^3 + \ldots.$

$= 64 + 6.32.\dfrac{x}{4} + \dfrac{6.5}{1.2}.16.\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{6.5.4}{1.2.3}.8.\dfrac{x^3}{64} + \ldots.$

$= 64 + 48x + 15x^2 + \dfrac{5}{2}x^3 + \ldots\ldots$ **(Ans.)**

এখানে, $2 + \dfrac{x}{4} = 1.9975$

বা, $\dfrac{x}{4} = 1.9975 - 2 = -0.0025$

বা, $x = (-0.0025) \times 4$

$\therefore$ $x = -0.01$

এখন, $x = -0.01$ বসিয়ে পাই,

$\left\{2+\dfrac{(-0.01)}{4}\right\}^6 = 64 + 48(-0.01) + 15(-0.01)^2 + \dfrac{5}{2}(-0.01)^3 + \ldots\ldots$

$\therefore$ $(1.9975)^6 = 63.5215$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ড়] **(Ans.)**

গ দ্বিপদী বিস্ড়ৃতির সাহায্যে,

$\left(k-\dfrac{y}{4}\right)^5 = k^5 + \dbinom{5}{1}k^4\left(\dfrac{-y}{4}\right)^1 + \dbinom{5}{2}k^3\left(\dfrac{-y}{4}\right)^2 + \ldots\ldots$

$= k^5 - 5k^4.\dfrac{y}{4} + 10.k^3.\dfrac{y^2}{16} - \ldots\ldots$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{10}{16}y^2 = 160$

বা, $y^2 = \frac{160 \times 16}{10}$

বা, $y^2 = 256$

বা, $y = \pm\sqrt{256}$

$\therefore$ $y = \pm 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬৯ (i) $\left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}\right)^5$ এবং

(ii) $(4x - 3)^{-1} + (4x - 3)^{-2} + (4x - 3)^{-3} + ...$ একটি ধারা

◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৭ ও ১০

[সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট প্রশ্ন নং ২]

ক. $7^x = (343)^y$ হলে $y : x$ নির্ণয় কর। ২

খ. (i) এর a বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে (ii) নং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$7^x = (343)^y$

বা, $7^x = (7^3)^y$

বা, $7^x = 7^{3y}$

বা, $x = 3y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{3}{1}$

বা, $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $y : x = 1 : 3$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী রাশিটি, $\left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}\right)^5$

$= \left\{(a)^2 - 2.a.\frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\}^5$

$= \left\{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2\right\}^5$

$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^{10}$

এখন, $\left(a - \frac{1}{a}\right)^{10} = a^{10} + {}^{10}C_1 a^{10-1}\left(-\frac{1}{a}\right)^1 + {}^{10}C_2\, a^{10-2}.\left(-\frac{1}{a}\right)^2 +$

$.... + {}^{10}C_5\, a^{10-5}.\left(-\frac{1}{a}\right)^5 ... ... + \frac{1}{a^{10}}$

$= a^{10} + {}^{10}C_1\left(-\frac{1}{a}\right)a^9 + {}^{10}C_2\, a^8\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + ...$

$+ {}^{10}C_5\, a^5 . a^{-5}(-1)^5 + ... + \frac{1}{a^{10}}$

$= a^{10} + {}^{10}C_1\, a^9\left(-\frac{1}{a}\right) + {}^{10}C_2 a^8\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + ...$

$+ {}^{10}C_5(-1)^5 + ... + \frac{1}{a^{10}}$

বিস্তৃতি থেকে, a বর্জিত পদের মান $= {}^{10}C_5(-1)^5 = -252$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

ধারাটি, $\frac{1}{4x-3} + \frac{1}{(4x-3)^2} + \frac{1}{(4x-3)^3} + ...$

ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{4x-3}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(4x-3)^2} \div \frac{1}{(4x-3)} = \frac{1}{4x-3}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{4x-3}\right| < 1$ হয়

বা, $-1 < \frac{1}{4x-3} < 1$

হয়, $\frac{1}{4x-3} > -1$

বা, $4x - 3 < -1$

বা, $4x < 2$

$\therefore$ $x < \frac{1}{2}$

অথবা,

$\frac{1}{4x-3} < 1$

বা, $4x - 3 > 1$

বা, $4x > 4$

$\therefore$ $x > 1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x < \frac{1}{2}$ অথবা $x > 1$ **(Ans.)**

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{4x-3}}{1 - \frac{1}{4x-3}}$

$= \frac{\frac{1}{4x-3}}{\frac{4x-3-1}{4x-3}}$

$= \frac{1}{4x-4}$

$= \frac{1}{4(x-1)}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭০ $B = (p + qx)^6$, $C = (q - px)^7$

$9 + 99 + 999 + ...$ *◀সমন্বিত অধ্যায় ৬, ৭ ও ১০*

[বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার প্রশ্ন নং ১]

ক. $x - 6 \geq 3x + 4$ অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. $p = 1, q = 2$ হলে BC এর বিস্তৃতিতে x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$x - 6 \geq 3x + 4$

বা, $x - 3x - 6 \geq 4$

বা, $-2x - 6 \geq 4$

বা, $2x + 6 \leq -4$

বা, $2x \leq -4 - 6$

বা, $2x \leq -10$

$\therefore$ $x \leq -5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x \leq -5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\{x \in \nabla : x \leq -5\}$ **(Ans.)**

খ $9 + 99 + 999 + ...$

ধারাটির ১ম n পদের যোগফল,

$S_n = 9 + 99 + 999 + ... + n$ তম পদ

$= (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ... + n$ তম পদ

DœPZi MwYZ

$= (10 + 100 + 1000 + \dots \dots + n$ তম পদ$) - (1 + 1 + 1 + \dots \dots + n$ তম পদ$)$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots \dots + n$ তম পদ$) - n$

$= \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n$

$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭১ $A = (2 + x)^m, B = (2 - x)^n$. ◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৭ ও ১০

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর ▯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. সমাধান করো: $2^{7y-3} = 3^{7y-3}$. ২

খ. $m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{3}$ এবং $A + B = \sqrt[3]{4}$ হলে, x এর মান নির্ণয় করো। ৪

গ. $m = 8, n = 7$ হলে, AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় করো। ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $2^{7y-3} = 3^{7y-3}$

বা, $\frac{2^{7y-3}}{3^{7y-3}} = 1$

বা, $\left(\frac{2}{3}\right)^{7y-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ [∵ $a^0 = 1$]

বা, $7y - 3 = 0$

$\therefore y = \frac{3}{7}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = (2 + x)^m, B = (2 - x)^n$

এখন, $A + B = \sqrt[3]{4}$

বা, $(2 + x)^m + (2 - x)^n = \sqrt[3]{2^2}$

বা, $(2 + x)^{\frac{1}{3}} + (2 - x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ $\left[∵ m = n = \frac{1}{3}\right]$

বা, $\left\{(2 + x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(2 - x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3.(2 + x)^{\frac{1}{3}}(2 - x)^{\frac{1}{3}}$ $\left\{(2 + x)^{\frac{1}{3}} - (2 - x)^{\frac{1}{3}}\right\} = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $2 + x + 2 - x + 3\{(2 + x)(2 - x)\}^{\frac{1}{3}}\left\{2^{\frac{2}{3}}\right\} = 2^2$

বা, $3(4 - x^2)^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{2}{3}} = 4 - 4$

বা, $(4 - x^2)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $4 - x^2 = 0$

বা, $x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = (2 + x)^m = (2 + x)^8$

এবং $B = (2 - x)^n = (2 - x)^7$

এখন, $AB = (2 + x)^8 (2 - x)^7$

$= (2 + x)(2 + x)^7(2 - x)^7$

$= (2 + x)\{(2 + x)(2 - x)\}^7$

$= (2 + x)(4 - x^2)^7$

এখন, $AB = (2 + x)(4 - x^2)^7$

$= (2 + x)(16384 - 28672x^2 + 21504x^4 - 8960x^6 + \dots)$

$\therefore x^7$ এর সহগ $= -8960$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭২ (i) $M = \log_x\sqrt{64}$ (ii) $N = \left(2 - \frac{x}{2}\right)^6$

(iii) $a = 1 + \log_x yz;\ b = 1 + \log_y zx;\ c = 1 + \log_z xy$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০

[বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল ▯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $M = 1\frac{1}{3}$ হলে x এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $abc = ab + bc + ca$ ৪

গ. N-এর পূর্ণ বিস্তৃতি লেখ এবং উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(1.995)^6$ এর মান পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $M = 1\frac{1}{3}$

বা, $\log_x\sqrt{64} = \frac{4}{3}$

বা, $x^{\frac{4}{3}} = \sqrt{64}$

বা, $x^{\frac{4}{3}} = 8 = 2^3$

বা, $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{3}{4}}$

$\therefore x = 2^{\frac{9}{4}}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $a = 1 + \log_x yz$

বা, $a = \log_x x + \log_x yz$

বা, $a = \log_x xyz$

বা, $x^a = xyz$

বা, $x = (xyz)^{\frac{1}{a}}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $y = (xyz)^{\frac{1}{b}}$ .... (ii)

এবং $z = (xyz)^{\frac{1}{c}}$ .... (iii)

(i) × (ii) × (iii) থেকে পাই,

$xyz = (xyz)^{\frac{1}{a}} .(xyz)^{\frac{1}{b}} .(xyz)^{\frac{1}{c}}$

বা, $(xyz)^1 = (xyz)^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$

বা, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 1$

বা, $ab + bc + ca = abc$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $N = \left(2 - \frac{x}{2}\right)^6$

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই,

$N = 2^6 + {}^6C_1 2^5\left(-\frac{x}{2}\right) + {}^6C_2 2^4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + {}^6C_3 2^3\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + {}^6C_4 2^2\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + {}^6C_5 2^1\left(-\frac{x}{2}\right)^5 + \left(-\frac{x}{2}\right)^6$

$= \frac{x^6}{64} - \frac{3x^5}{8} + \frac{15x^4}{4} - 20x^3 + 60x^2 - 96x + 64$

এখন, $2 - \frac{x}{2} = 1.995$

বা, $\frac{x}{2} = 2 - 1.995 = 0.005$

$\therefore x = 0.01$

$x = 0.01$ বসিয়ে পাই,

$$\left(2-\frac{x}{2}\right)^6 = \frac{(0.01)^6}{64} - \frac{3(0.01)^5}{8} + \frac{15(0.01)^4}{4} - 20(0.01)^3 + 60(0.01)^2 - 96(0.01) + 64$$

$\therefore \quad (1.995)^6 = 63.04598$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৩ $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, $g(x) = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$ ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০*

[বরিশাল সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরিশাল প্রশ্ন নং ২]

ক. $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots$ এই ধারাটির, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ যখন, $|r| < 1$ যুক্তি দেখাও। ২

খ. $f(x) + \{f(x)\}^2 + \{f(x)\}^3 + \dots$, x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে? ৪

গ. দেখাও যে, $\{g(x)\}^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 ও x^6 এর সহগদ্বয়ের পার্থক্য $\frac{7}{8}$। ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ এই ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি,

$S_n = a + ar + ar^2 + \dots\dots + ar^{n-1}$

$= a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ যখন $r < 1$

$= a \cdot \frac{r^n - 1}{r-1}$, যখন $r > 1$

এখন $|r| < 1$ হলে অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে n এর মান বৃদ্ধি করলে

$|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n এর মান যথেষ্ট বড় করলে ($n \to \infty$ হলে) $|r^n|$ এর মান 0 এর কাছাকাছি হয়।

ফলে S_n এর প্রান্তীয় মান, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

অসীম ধারাটির সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

প্রদত্ত ধারাটি, $f(x) + \{f(x)\}^2 + \{f(x)\}^3 + \dots\dots = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots\dots$

প্রদত্ত ধারার **১**ম পদ, $a = \frac{1}{2x+1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x+1)^2} \div \frac{1}{(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি $|r| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{2x+1}\right| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $-1 < \frac{1}{2x+1} < 1$

$\therefore -1 < \frac{1}{2x+1}$ অথবা, $\frac{1}{2x+1} < 1$

বা, $-1 > 2x + 1$ বা, $2x + 1 > 1$

বা, $-1 - 1 > 2x + 1 - 1$ বা, $2x + 1 - 1 > 1 - 1$

বা, $-2 > 2x$ বা, $2x > 0$

$\therefore x < -1$ $\therefore x > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x < -1$ অথবা $x > 0$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$

$\therefore \{g(x)\}^8 = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8 = \binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^1 + \binom{8}{2}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^3 + \dots\dots\dots$$

$$= 1 + 8.\left(\frac{-x^2}{4}\right) + 28.\frac{x^4}{16} + 56.\frac{-x^6}{64} + \dots\dots\dots$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{7x^4}{4} - \frac{7}{8}x^6 + \dots\dots\dots\dots\dots$$

$\therefore \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8 = 1 - 2x^2 + 0.x^3 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 + \dots\dots\dots\dots$

এখানে $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

$\therefore \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^6 এর

সহগের পার্থক্য $= 0 - \left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৭৪ $(a + 2x)^6$, $\left(K + \frac{x}{4}\right)^5$ ও $\left(2 - \frac{x}{2}\right)^7$ তিনটি দ্বিপদী রাশি।

[উদয়ন মাধ্যমিক বিদ্যালয়, বরিশাল প্রশ্ন নং ২]

ক. প্রথম রাশিতে a = 1 হলে, প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃতিটি নির্ণয় কর। ২

খ. দ্বিতীয় দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে K^3 এর সহগ 160 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে তৃতীয় দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(1.9975)^7$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৭৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক a = 1 হলে প্রথম রাশিটি $(1 + 2x)^6$ প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে

n = 0	1						
n = 1	1	1					
n = 2	1	2	1				
n = 3	1	3	3	1			
n = 4	1	4	6	4	1		
n = 5	1	5	10	10	5	1	
n = 6	1	6	15	20	15	6	1

$\therefore (1 + 2x)^6 = 1 + 6(2x) + 15(2x)^2 + 20(2x)^3 + 15(2x)^4 + 6(2x)^5 + (2x)^6$

$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$

(Ans.)

খ দ্বিতীয় রাশিটি,

$$\left(K + \frac{x}{4}\right)^5 = K^5 + {}^5C_1K^4\left(\frac{x}{4}\right)^1 + {}^5C_2K^3\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots\dots$$

$$= K^5 + {}^5C_1K^4 \cdot \frac{x}{4} + {}^5C_2 \cdot K^3 \cdot \frac{x^2}{16} + \dots\dots$$

এখানে, K^3 এর সহগ $= {}^5C_2\frac{x^2}{16}$

প্রশ্নমতে,

$^5C_2\frac{x^2}{16} = 160$

বা, $\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{x^2}{16} = 160$

বা, $x^2 = 256$

$\therefore x = \pm 16$

গ তৃতীয় রাশিটিকে বিস্তৃতি করে পাই,

$$\left(2-\frac{x}{2}\right)^7 = 2^7 + {}^7C_1\, 2^6.\left(-\frac{x}{2}\right)^1 + {}^7C_2\, 2^5\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + {}^7C_3\, 2^4.\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + ...$$

$= 128 - 224x + 168x^2 - 70x^3 + ...$ **(Ans.)**

এখানে, $2 - \frac{x}{2} = 1.9975$

বা, $2 - 1.9975 = \frac{x}{2}$

$\therefore x = .005$

এখন বিস্তৃতিতে $x = 0.005$ বসিয়ে পাই,

$$\left(2-\frac{0.005}{2}\right)^7 = 128 - 224\times0.005 + 168\times(0.005)^2 - 70\times(0.005)^3 + ...$$

$= 128 - 1.12 + 4.2\times10^{-3} - 8.75\times10^{-6} + ...$

$\therefore (1.9975)^7 = 126.8842$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ড়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৫ $A = (1+x)^{44}$ এবং $B = (2-x)(1+px)^8$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠী প্রশ্ন নং ৩]

ক. কোন ধারার n তম পদ $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. A এর বিস্তৃতিতে 21 তম পদ ও 22 তম পদ সমান হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর x^3 পর্যন্ড় বিস্তৃতির মান $2 + 7x + 10x^2 + qx^3$ হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore$ প্রথম পদ, $U_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

দ্বিতীয় পদ, $U_2 = \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{6}$

তৃতীয় পদ, $U_3 = \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$

চতুর্থ পদ, $U_4 = \frac{1}{4(4+1)} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ ধারাটি: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + ...$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = (1+x)^{44}$

এখন, $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21তম পদ $= {}^{44}C_{20}.1^{44-20}.x^{20}$

$= {}^{44}C_{20}x^{20}$

$(1+x)^{44}$এর বিস্তৃতিতে 22তম পদ $= {}^{44}C_{21}.1^{44-21}.x^{21}$

$= {}^{44}C_{21}x^{21}$

শর্তমতে,

${}^{44}C_{20}.x^{20} = {}^{44}C_{21}.x^{21}$

বা, $\frac{44!}{(44-20)!\,20!}x^{20} = \frac{44!}{(44-21)!\,21!}x^{21}$

বা, $\frac{23!\,21!}{24!\,20!} = x$

বা, $\frac{23!\,21\times20!}{24\times23!20!} = x$ [$\because n! = n(n-1)!$]

বা, $x = \frac{21}{24}$

$\therefore x = \frac{7}{8}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = (2-x)(1+px)^8$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$(2-x)(1+px)^8 = (2-x)$
$[1 + {}^8C_1(px) + {}^8C_2(px)^2 + {}^8C_3(px)^3 + ...]$

$= (2-x)[1 + 8px + 28p^2x^2 + 56p^3x^3 + ...]$

$= 2 + 16px + 56p^2x^2 + 112p^3x^3 - x - 8px^2 - 28p^2x^3 - 56p^3x^4 - ....$

$= 2 + (16p-1)x + (56p^2 - 8p)x^2 + (112p^3 - 28p^2)x^3 + ...$

প্রশ্নমতে,

$2 + (16p-1)x + (56p^2-8p)x^2 + (112p^3-28p^2)x^3$
$= 2 + 7x + 10x^2 + qx^3$

$\therefore 16p - 1 = 7$

$\Rightarrow p = \frac{1}{2}$

এবং $112p^3 - 28p^2 = q$

বা, $112\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 28\left(\frac{1}{2}\right)^2 = q$

বা, $q = 14 - 7$

বা, $q = 7$

$\therefore p = \frac{1}{2}, q = 7$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৬ $A = \left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এবং $B = \left(a-\frac{x}{2}\right)^7$; $a \neq 0$

[পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী প্রশ্ন নং ৩]

ক. A এর প্রথম চার পদ পর্যন্ড় বিস্তৃতি কর। ২

খ. B এর বিস্তৃতিতে a^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(2-x)A$ কে x^3 পর্যন্ড় বিস্তৃত কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $1.9\times(1.05)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল ৯(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ দেওয়া আছে, $B = \left(a-\frac{x}{2}\right)^7$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$B = \left(a-\frac{x}{2}\right)^7 = a^7 + \binom{7}{1}a^6.\left(\frac{-x}{2}\right) + \binom{7}{2}a^5.\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{7}{3}a^4.\left(\frac{-x}{2}\right)^3 + \binom{7}{4}a^3.\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + ...$$

$= a^7 - 7a^6.\frac{x}{2} + 21a^5.\frac{x^2}{4} - 35a^4.\frac{x^3}{8} + 35a^3\frac{x^4}{16} - .....$

$= a^7 - \frac{7}{2}a^6x + \frac{21}{4}a^5x^2 - \frac{35}{8}a^4x^3 + \frac{35}{16}a^3x^4 - ...$

শর্তমতে, $\frac{35}{16}x^4 = 560$

বা, $x^4 = \frac{560 \times 16}{35}$

বা, $x^4 = 256$

বা, $x^4 = (\pm 4)^4$

$\therefore$ $x = \pm 4$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৭ $(4x-1)^{-1} + (4x-1)^{-2} + (4x-1)^{-3} + ...$ একটি গুণোত্তর ধারা এবং $M = (3y^2 - 2y^{-1})$ একটি দ্বিপদী রাশি।

[বি এন কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $x = 1$ হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. x এর ওপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. M^{11} এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

৭৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত গুণোত্তর ধারা, $(4x-1)^{-1} + (4x-1)^{-2} + (4x-1)^{-3} + ...$

$= \frac{1}{4x-1} + \frac{1}{(4x-1)^2} + \frac{1}{(4x-1)^3} + ...$

$x = 1$ হলে $4x - 1 = 4 \times 1 - 1 = 3$

$\therefore$ ধারাটি, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত $= \frac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ 'ক' হতে পাই,

প্রদত্ত ধারা, $\frac{1}{(4x-1)} + \frac{1}{(4x-1)^2} + \frac{1}{(4x-1)^3} + ...$

প্রথম পদ, $a = \frac{1}{4x-1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(4x-1)^2} \div \frac{1}{4x-1}$

$= \frac{1}{4x-1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি,

$|r| < 1$ হয়।

বা, $\left|\frac{1}{4x-1}\right| < 1$

বা, $|4x-1| > 1$

অর্থাৎ $4x - 1 > 1$ অথবা, $-(4x-1) > 1$

বা, $4x > 2$ বা, $4x - 1 < -1$

বা, $x > \frac{1}{2}$ বা, $4x < 0$

বা, $x < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > \frac{1}{2}$ অথবা $x < 0$ **(Ans.)**

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{4x-1}}{1 - \frac{1}{4x-1}}$

$= \frac{\frac{1}{4x-1}}{\frac{4x-1-1}{4x-1}}$

$= \frac{1}{4x-2}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $M = (3y^2 - 2y^{-1})$

প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $= M^{11} = (3y^2 - 2y^{-1})^{11} = \left(3y^2 - \frac{2}{y}\right)^{11}$

এখানে, দ্বিপদী রাশিটির ঘাত 11, যা বিজোড় সংখ্যা।

এবং রাশিটির পদসংখ্যা = 11 + 1 = 12

$\therefore$ মধ্যপদ হবে $\left(\frac{12}{2}\right)$ বা, 6 তম পদ এবং $\left(\frac{12}{2} + 1\right)$

বা, 7 তম পদের মান।

প্রদত্ত বিস্তৃতির 6 বা (5 + 1) তম পদ $= {}^{11}C_5 (3y^2)^{11-5} \cdot \left(-\frac{2}{y}\right)^5$

$= -462 \times 729 \times y^{12} \times \frac{32}{y^5}$

$= -10777536y^7$

এবং প্রদত্ত বিস্তৃতির 7 বা (6 + 1) তম পদ $= {}^{11}C_6 (3y^2)^{11-6} \cdot \left(-\frac{2}{y}\right)^6$

$= 462 \times 243 \times y^{10} \times \frac{64}{y^6}$

$= 7185024y^4$

$\therefore$ M^{11} এর বিস্তৃতির মধ্যপদদ্বয় $-10777536y^7$ এবং $7185024y^4$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৮ (i) $(5x+1)^{-1} + (5x+1)^{-2} + (5x+1)^{-3} + ...$

(ii) $p - 3 = 3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ *◀সমন্বিত অধ্যায় ৭, ৯ ও ১০*

[ইনজিনিয়ারিং ইউনিভারসিটি গার্লস স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ২]

ক. $(1 - 3x)^5$ এর বিস্তৃতিতে ৩য় পদের সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে (i) নং এ বর্ণিত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং হতে দেখাও যে, $9p^3 - 81p^2 + 162p - 2188 = 0$ ৪

৭৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1 - 3x)^5$ এর বিস্তৃতিতে ৩য় পদের সহগ $= {}^5C_2 \times (-3)^2 = 90$ **(Ans.)**

খ (i) নং এ বর্ণিত ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{5x+1}$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{(5x+1)^{-2}}{(5x+1)^{-1}} = \frac{1}{5x+1}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি

$|r| < 1$ হয়

বা, $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{5x+1} < 1$

এখন, $\frac{1}{5x+1} < 1$ আবার, $\frac{1}{5x+1} > -1$

বা, $5x + 1 > 1$ বা, $5x + 1 < -1$

বা, $5x + 1 - 1 > 1 - 1$ বা, $5x + 1 - 1 < -1 - 1$

বা, $5x > 0$ বা, $5x < -2$

$\therefore x > 0$ $\therefore x < -\frac{2}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > 0$ অথবা $x < -\frac{2}{5}$

গ দেওয়া আছে,

$p - 3 = 3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ ... ... (i)

বা, $(p-3)^3 = \left(3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)^3$

বা, $(p-3)^3 = 3^5 + 3^{-2} + 3.3^{\frac{5}{3}}.3^{-\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{5}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)$

বা, $(p-3)^3 = 243 + \frac{1}{9} + 3.3(p-3)$ [(i) নং হতে]

বা, $p^3 - 3p^2.3 + 3p.9 - 27 = 243 + \frac{1}{9} + 9p - 27$

বা, $p^3 - 9p^2 + 18p - 243 = \frac{1}{9}$

বা, $9p^3 - 81p^2 + 162p - 2187 = 1$

$\therefore 9p^3 - 81p^2 + 162p - 2188 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৭৯ $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^6$ একটি দ্বিপদী রাশি।

[সরকারি মোহাম্মদপুর মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. বিস্তৃতির সাধারণ পদ কত? ২

খ. বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. বিস্তৃতির x^6 এর সহগ 540 হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^6$

উক্ত বিস্তৃতির সাধারণ পদ, $T_{r+1} = {}^6C_r . (x^2)^{6-r} . \left(\frac{3a}{x}\right)^r$

$= {}^6C_r . x^{12-2r} . \frac{(3a)^r}{x^r}$

$= {}^6C_r . x^{12-3r} . (3a)^r$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত দ্বিপদী রাশি $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^6$

এখানে, $n = 6$

$\therefore$ পদ সংখ্যা $= n + 1 = 6 + 1 = 7$ **(Ans.)**

এখানে, 6 জোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্তৃতির মধ্যপদ হবে $\left(\frac{6}{2} + 1\right)$ তম

বা, 4 তম পদ

$\therefore$ বিস্তৃতির 4র্থ পদ বা $(3 + 1)$ তম পদ

$T_{3+1} = {}^6C_3 . (x^2)^{6-3} . \left(\frac{3a}{x}\right)^3$

$= \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} . x^6 . \frac{(3a)^3}{x^3}$

$= 20 \times x^3 \times 27a^3$

$= 540\, a^3x^3$ **(Ans.)**

গ 'ক' নং হতে প্রাপ্ত

বিস্তৃতির সাধারণ পদ, $T_{r+1} = {}^6C_r . x^{12-3r} . (3a)^r$ ... ... (i)

প্রশ্নমতে, $12 - 3r = 6$

বা, $-3r = -6$

$\therefore r = 2$

(i) নং হতে পাই,

x^6 এর সহগ $= {}^6C_2 . (3a)^2$ [□ r = 2]

$= \frac{6 \times 5}{1 \times 2} . 9a^2$

$= 135\, a^2$

শর্তমতে, $135a^2 = 540$

বা, $a^2 = 4$

$\therefore a = \pm 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮০ $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$ এবং $g(x) = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[সিভিল এভিয়েশন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে $(1 + x)^4$ কে বিস্তৃত কর। ২

খ. x এর উপর কি শর্তারোপ করলে $f(x) + \{f(x)\}^2 + \{f(x)\}^3 + \ldots$ অসীম ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে? ৪

গ. দেখাও যে $\{g(x)\}^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^6 এর সহগদ্বয়ের পার্থক্য $\frac{7}{8}$। ৪

৮০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$

প্রদত্ত ধারাটি :

$f(x) + \{f(x)\}^2 + \{f(x)\}^3 + \ldots = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \ldots$

প্রদত্ত ধারার ১ম পদ, $a = \frac{1}{2x + 1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x + 1)^2} \div \frac{1}{(2x + 1)} = \frac{1}{2x + 1}$

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদিও কেবল যদি $|r| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{2x + 1}\right| < 1$ হয়।

অর্থাৎ $-1 < \frac{1}{2x + 1} < 1$

~ $-1 < \frac{1}{2x + 1}$ অথবা, $\frac{1}{2x + 1} < 1$

বা, $-1 > 2x + 1$ বা, $2x + 1 > 1$

বা, $-1 - 1 > 2x + 1 - 1$ বা, $2x + 1 - 1 > 1 - 1$

বা, $-2 > 2x$ বা, $2x > 0$

~ $x < -1$ ~ $x > 0$

~ নির্ণেয় শর্ত: $x < -1$ অথবা $x > 0$ **(Ans.)**

গ দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$\{g(x)\}^8 = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8 = \binom{8}{0}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^1$

$$+ \binom{8}{2}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^3 + ...$$

$$= 1 + 8.\left(\frac{-x^2}{4}\right) + 28.\frac{x^4}{16} + 56.\frac{-x^6}{64} + ...$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{7x^4}{4} - \frac{7}{8}x^6 + ...$$

$$\therefore \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8 = 1 - 2x^2 + 0.x^3 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 + ...$$

এখানে $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্ড়ৃতিতে x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

$\therefore \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্ড়ৃতিতে x^3 এবং x^6 এর

সহগের পার্থক্য $= 0 - \left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8}$ **(`LvGbv nGjv)**

প্রশ্ন ▶৮১ $P = (a + bx)^6$, $Q = (b + ax)^5$

[কামরুন্নেসা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. P এর বিস্ড়ৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. যদি P এর বিস্ড়ৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাত যথাক্রমে Q এর বিস্ড়ৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হয় তবে দেখাও যে, $a : b = \sqrt{5} : 2$ ৪

গ. Q এর ক্ষেত্রে b = 1 এবং a = 3 হলে এর সাহায্যে $(1.255)^5$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় নির্ণয় কর। ৪

৮১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $P = (a + bx)^6$

$= a^6 + {}^6C_1 a^5 . (bx)^1 + {}^6C_2 a^4 . (bx)^2 + {}^6C_3 a^3 (bx)^3 + {}^6C_4 a^2 (bx)^4 + {}^6C_5 a^1 (bx)^5 + {}^6C_6 (bx)^6$

$= a^6 + 6a^5 bx + 15a^4b^2x^2 + 20a^3b^3x^3 + 15a^2b^4x^4 + 6ab^5x^5 + b^6x^6$ **(Ans)**

খ $Q = (b + ax)^5$

$= b^5 + 5b^4 ax + 10b^3a^2x^2 + ...$

'ক' হতে পাই, P এর বিস্ড়ৃতির দ্বিতীয় পদ, $6a^5bx$

P „ „ তৃতীয় „ $= 15a^4b^2x^2$

শর্তমতে,

$$\frac{6a^5bx}{15a^4b^2x^2} = \frac{5b^4ax}{10b^3a^2x^2}$$

বা, $\frac{2a}{5bx} = \frac{b}{2ax}$

বা, $4a^2 = 5b^2$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{5}{4}$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $a : b = \sqrt{5} : 2$ **(দেখানো হলো)**

গ b = 1, এবং a = 3 হলে,

$Q = (1 + 3x)^5$

$= 1 + 5 \times 3x + 10 \times 9 \times x^2 + 10 \times 27 \times x^3 + 5 \times 3^4 \times x^4 + 3^5x^5$

$= 1 + 15x + 90x^2 + 270x^3 + 405x^4 + 243x^5$

এখানে, $1.255 = 1 + 3x$

বা, $3x = 0.255$

$\therefore$ $x = 0.085$

এখন, x = 0.085 বসিয়ে পাই,

$\{1 + 3(0.085)\}^3$

$= 1 + 15 \times 0.085 + 90 \times (0.085)^2 + 270 \times (0.085)^3 + 405 \times (0.085)^4 + 243\ (0.085)^5$

= 3.1133 (চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় আসন্ন)

প্রশ্ন ▶৮২ $P = (1 - 2x)^7$ ও $Q = (1 + mx)^6$.

[মিরপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. P এর বিস্ড়ৃতিতে x^3 ও x^4 এর সহগের পার্থক্য নির্ণয় কর? ২

খ. $(1 - x)Q$ কে x^2 পর্যন্ড় বিস্ড়ৃতি করলে যদি $1 + nx^2$ পাওয়া যায় তবে, m ও n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. m = 2 হলে PQ এর বিস্ড়ৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৮২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দ্বিপদী বিস্ড়ৃতি ব্যবহার করে পাই,

$P = (1 - 2x)^7$

$$= 1 + \binom{7}{1}(-2x)^1 + \binom{7}{2}(-2x)^2 + \binom{7}{3}(-2x)^3 + \binom{7}{4}(-2x)^4 + ...$$

$$= 1 + \frac{7}{1}(-2x) + \frac{7.6}{1.2}(4x^2) + \frac{7.6.5}{1.2.3}(-8x^3) + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}(16x^4) + ...$$

$= 1 - 14x + 84x^2 - 280x^3 + 560x^4 - ....$

$\therefore$ x^3 এর সহগ $= -280$

x^4 এর সহগ = 560

$\therefore$ x^3 ও x^4 এর সহগের পার্থক্য $= 560 - (-280) = 840$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $Q = (1 + mx)^6$

$= 1 + 6mx + 15m^2x^2 + ...$

প্রদত্ত রাশি $= (1 - x)Q$

$= (1 - x)(1 + mx)^6$

$= (1 - x)(1 + 6mx + 15m^2x^2 + ...)$

$= (1 + 6mx + 15m^2x^2 + ...) - x - 6mx^2 - 15m^2x^3 + ...$

$= 1 - x + 6mx - 6mx^2 + 15m^2x^2 - 15m^2x^3 + ...$

$= 1 + x(6m - 1) + x^2(15m^2 - 6m) - 15m^2x^3 + \cdots$

শর্তমতে, $6m - 1 = 0$ এবং $15m^2 - 6m = n$

$\therefore$ $m = \frac{1}{6}$

বা, $15\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 6.\frac{1}{6} = n$

বা, $15 . \frac{1}{36} - 1 = n$

বা, $n = \frac{5}{12} - 1$

$\therefore$ $n = \frac{-7}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $m = \frac{1}{6}$ এবং $n = \frac{-7}{12}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, m = 2

$\therefore$ $Q = (1 + mx)^6 = (1 + 2x)^6$

$P = (1 - 2x)^7$

$\therefore$ $PQ = (1 - 2x)^7(1 + 2x)^6$

$= (1 - 2x)(1 - 2x)^6(1 + 2x)^6$

$= (1 - 2x)(1 - 4x^2)^6$

দ্বিপদী বিস্ড়ৃতি ব্যবহার করে পাই,

$$(1 - 2x)(1 - 4x^2)^6 = (1 - 2x)\left[1 + \binom{6}{1}(-4x^2)^1 + \binom{6}{2}(-4x^2)^2 + \binom{6}{3}(-4x^2)^3 + \binom{6}{4}(-4x^2)^4 + ...\right]$$

DœPZi MwYZ

$= (1 - 2x)[1 - 24x^2 + 240x^4 - 1280x^6 + 3840x^8 - ....]$
$= (1 - 24x^2 + 240x^4 - 1280x^6 + 3840x^8 - ....)$
$\quad - (2x - 48x^3 + 480x^5 - 2560x^7 + 7680x^9 - ....)$

$\therefore$ x^7 এর সহগ $= -(-2560) = 2560$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮৩ কোনো ধারার n তম পদ $U_n = (1 + x)^{n-2}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[ভাষা শহীদ আব্দুল জব্বার আনসার ভিডিপি স্কুল এন্ড কলেজ, গাজীপুর ⎕ প্রশ্ন নং ৩]

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক পদের সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর। উক্ত পদের বিস্দৃতিতে মধ্যপদের মান 540 হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৫নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৮৪ $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^6$ একটি দ্বিপদী রাশি।

[মুকুল নিকেতন উচ্চ বিদ্যালয়, ময়মনসিংহ ⎕ প্রশ্ন নং ৩]

ক. বিস্দৃতির সাধারণ পদ কত? ২

খ. বিস্দৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. বিস্দৃতির x^6 এর সহগ 540 হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত বিস্দৃতি $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^6$

উক্ত বিস্দৃতির সাধারণ পদ, $t_{r+1} = {}^6C_r \,.\, (x^2)^{6-r} \,.\, \left(\frac{3a}{x}\right)^r$
$= {}^6C_r \,.\, x^{12-3r} \,.\, (3a)^r$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত বিস্দৃতি $\left(x^2 + \frac{3a}{x}\right)^6$

এখানে, $n = 6$

$\therefore$ পদ সংখ্যা $= n + 1 = 6 + 1 = 7$ **(Ans.)**

এখানে, 6 জোড় সংখ্যা।

সুতরাং বিস্দৃতির মধ্যপদ হবে $\left(\frac{6}{2} + 1\right)$ তম

বা, 4 তম পদ

$\therefore$ বিস্দৃতির 4র্থ পদ বা $(3 + 1)$ তম পদ।

$t_{3+1} = {}^6C_3 \,.\, (x^2)^{6-3} \,.\, \left(\frac{3a}{x}\right)^3$
$= \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \,.\, x^6 \,.\, \frac{(3a)^3}{x^3}$
$= 20 \times x^3 \times 27a^3$
$= 540\, a^3x^3$ **(Ans.)**

গ 'ক' নং হতে প্রাপ্ত

বিস্দৃতির সাধারণ পদ, t_{r+1}
$= {}^6C_r \,.\, x^{12-3r} \,.\, (3a)^r$ ... ... (i)

প্রশ্নমতে, $12 - 3r = 6$

বা, $-3r = -6$

$\therefore$ $r = 2$

(i) নং হতে পাই,

x^6 এর সহগ $= {}^6C_2 \,.\, (3a)^2$ |⎕ $r = 2$

$= \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \,.\, 9a^2$
$= 135\, a^2$

শর্তমতে, $135a^2 = 540$

বা, $a^2 = 4$

$\therefore$ $a = \pm 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮৫ $a = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$, $b = 2x^2 + \frac{p}{x^3}$

[অগ্রণী স্কুল ও কলেজ, রাজশাহী ⎕ প্রশ্ন নং ২]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(x - y)^5$ এর বিস্দৃতি নির্ণয় কর।২

খ. a^4 এর বিস্দৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর। ৪

গ. b^{10} এর বিস্দৃতিতে x^5 ও x^{15} এর সহগ সমান হলে p এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $p > 0$। ৪

৮৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$\therefore (x - y)^5 = x^5 + 5(x)^4(-y)^1 + 10(x)^3(-y)^2 + 10(x)^2(-y)^3$
$\quad + 5(x) \,.\, (-y)^4 + (-y)^5$

$\therefore (x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$a = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
$= x^3 - 3.x^2.\frac{1}{x} + 3.x.\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

$\therefore$ $a^4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

ধরি, a^4 এর $(r + 1)$ তম পদটি x বর্জিত

$\therefore$ $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$ বিস্দৃতির $(r + 1)$ তমপদ $= {}^{12}C_r \,.\, x^{12-r}$ $\left(-\frac{1}{x}\right)^r$
$= {}^{12}C_r \,.\, x^{12-2r}\,(-1)^r$

শর্তমতে, $12 - 2r = 0$

বা, $2r = 12$

বা, $r = 6$

$\therefore$ x বর্জিত পদটি $= {}^{12}C_6\,(-1)^6$
$= 924$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$b = \left(2x^2 + \frac{p}{x^3}\right)$

বা, $b^{10} = \left(2x^2 + \frac{p}{x^3}\right)^{10}$

b^{10} এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ $= {}^{10}C_r . (2x^2)^{10-r} . \left(\frac{p}{x^3}\right)^r$

$$= {}^{10}C_r . 2^{10-r} . x^{20-5r} . p^r$$

$(r + 1)$ তম পদে x^5 বিদ্যমান থাকলে, $20 - 5r = 5$

বা, $5r = 15$

বা, $r = 3$

আবার, $(r + 1)$ তম পদে x^{15} বিদ্যমান থাকলে, $20 - 5r = 15$

বা, $5r = 5$

বা, $r = 1$

যেহেতু, x^5 ও x^{15} এর সহগ সমান।

$\therefore \ {}^{10}C_3 . 2^7 . p^3 = {}^{10}C_1 . 2^9 . p$

$\therefore \ p^2 = \frac{{}^{10}C_1 \times 2^9}{{}^{10}C_3 \times 2^7}$

বা, $p^2 = \frac{10 \times 4}{120}$

বা, $p^2 = \frac{1}{3}$

বা, $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $[\because p > 0]$

$\therefore \ P = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮৬ $A = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \ldots\ldots\ldots$

এবং $B = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)^n$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[শিরোইল সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, রাজশাহী প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্রমাণ কর যে, $n! = n(n - 1)!$ ২

খ. A ধারাটিতে x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে এর অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিস্তৃতির ৪র্থ পদের ও ৬ষ্ঠ পদের সহগ সমান হলে n এর মান নির্ণয় কর এবং ধারাটির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

৮৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি,

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2 \times 1!$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 2!$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3!$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4!$

$\therefore n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \ldots\ldots 3.2.1$

$= n \times (n - 1)!$

$\therefore n! = n(n - 1)!$ **(প্রমাণিত)**

খ উদ্দীপকের ধারাটির, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

অসীমতক সমষ্টির জন্য $\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right| < 1$ হতে হবে।

$\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right| < 1$ কে বর্গ করে পাই,

$\frac{1}{x+1} < 1$

বা, $x + 1 > 1$

$\therefore \ x > 0$

সুতরাং $x > 0$ হলেই ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে। **(Ans.)**

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} + 1}{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x + 1 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x} \ \textbf{(Ans.)}$$

গ প্রদত্ত রাশি $= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)^n$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2.x.\frac{1}{x}\right)^n$$

$$= \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right\}^n$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$$

এখন, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে,

৪র্থ পদ $= \binom{2n}{3} x^{2n-3} . \left(-\frac{1}{x}\right)^3$

$$= -\frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} x^{2n-6}$$

এবং ৬ষ্ঠ পদ $= \binom{2n}{5} x^{2n-5} \left(-\frac{1}{x}\right)^5$

$$= -\frac{(2n)!}{5!(2n-5)!} x^{2n-10}$$

শর্তমতে, $-\frac{(2n)!}{5!(2n-5)!} = -\frac{(2n)!}{3!(2n-3)!}$

বা, $\frac{1}{5.4.3!.(2n-5)!} = \frac{1}{3!(2n-3)(2n-4)(2n-5)!}$

বা, $\frac{1}{20} = \frac{1}{(2n-3)(2n-4)}$

বা, $4n^2 - 14n + 12 = 20$

বা, $4n^2 - 14n - 8 = 0$

বা, $2n^2 - 7n - 4 = 0$

বা, $2n^2 - 8n + n - 4 = 0$

বা, $2n(n - 4) + 1(n - 4) = 0$

বা, $(n-4)(2n+1) = 0$

হয়, $n - 4 = 0$ অথবা, $2n + 1 = 0$

$\therefore$ $n = 4$ বা, $n = -\frac{1}{2}$ [যাহা গ্রহণযোগ্য নয়] **(Ans.)**

$n = 4$ বসিয়ে পাই,

প্রদত্ত রাশি = $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2 \times 4} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{8}$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম পদ বা পঞ্চম পদ মধ্যপদ।

$\therefore$ $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে পঞ্চম পদ = $\binom{8}{4}x^{8-4}\left(-\frac{1}{x}\right)^4$

$= 70.x^4.\frac{1}{x^4} = 70$

$\therefore$ মধ্যপদ 70 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮৭ $P (1 + 3x)^5$, $Q = (2 - 6x)^6$

[নওগাঁ কে.ডি. সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের দুইটি মূল বৈশিষ্ট্য লিখ। ২

খ. PQ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

গ. Q এর বিস্তৃতির মধ্যপদ P এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সমান হলে, প্রমাণ কর যে, $Q = \left(\frac{129}{64}\right)^6$ ৪

৮৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেল ত্রিভুজের 2টি বৈশিষ্ট্য

(i) ত্রিভুজের বাম ও ডান দিকে 1 আছে।

(ii) ত্রিভুজের মাঝখানের সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি উপরের 2টি সংখ্যার যোগফল।

খ দেওয়া আছে, $P = (1 + 3x)^5$

$Q = (2 - 6x)^6$

$\therefore$ $PQ = (1 + 3x)^5 (2 - 6x)^6$
$= (1 + 3x)^5\, 2^6 (1 - 3x)^6$
$= 2^6 (1 - 3x) \{(1 + 3x)(1 - 3x)\}^5$
$= 2^6 (1 - 3x)(1 - 9x^2)^5$
$= 2^6 (1 - 3x) \{1 + 5.(-9x^2) + {}^5C_2 . (-9x^2)^2 + {}^5C_3 . (-9x^2)^3 + ...\}$

বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ $= 2^6 . (-3) . {}^5C_3 . (-9)^3$

$= -2^6 . 3 . \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}(-9^3)$
$= 2^6 . 3.10.9^3$
$= 1399680$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$Q = (2 - 6x)^6$

এবং $P = (1 + 3x)^5$

এখানে, 6 জোড় সংখ্যা।

সুতরাং Q এর বিস্তৃতির মধ্যপদ হবে $\left(\frac{6}{2}+1\right)$ বা $(3 + 1)$ তম পদ

$= {}^6C_3 . 2^{6-3} . (-6x)^3$
$= -34560\, x^3$

P এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদ বা $(2 + 1)$ তম পদ

$= {}^5C_2 . (3x)^2$
$= 90x^2$

শর্তমতে, $-34560\, x^3 = 90x^2$

বা, $x = -\frac{1}{384}$

$\therefore$ $Q = \left\{2 - 6\left(-\frac{1}{384}\right)\right\}^6 = \left(2 + \frac{1}{64}\right)^6$

$\therefore Q = \left(\frac{129}{64}\right)^6$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৮৮ কোনো ধারার n-তম পদ $U_n = (1 + x)^{n-2}$; $n \in \mathbb{N}$ হলে $A = 4x - 1 - x^2$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৫, ৭ ও ১০

[পাবনা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পাবনা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $A = 0$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর এবং উক্ত পদের বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 540 হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $A = 0$ হলে,

$4x - 1 - x^2 = 0$

বা, $x^2 - 4x + 1 = 0$

বা, $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.1}}{2.1}$
$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$
$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$
$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$
$= 2 \pm \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মূলদ্বয় : $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৫(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৫(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৮৯ $P = \frac{2y}{y-1}$, $Q = (2 + 3x)^9$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০

[বগুড়া জিলা স্কুল প্রশ্ন নং ২]

ক. $(x\sqrt{x})^x = x^{x\sqrt{x}}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. Q এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় কর। ৪

গ. $2P^{\frac{1}{2}} - 6P^{-\frac{1}{2}} = 1$ হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২০২

খ $Q = (2 + 3x)^9$

যেহেতু $n = 9$ বিজোড় সংখ্যা, এক্ষেত্রে মধ্যপদ হবে দুইটি এবং তা হবে $\frac{n+1}{2}$ তম ও $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম পদ

$\therefore$ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ বা, $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ বা, 5 বা, $(4 + 1)$ তম পদ $= {}^9C_4 (2)^5 (3x)^4$
$= {}^9C_4\, 2^5 . 3^4 x^4$
$= 326592\, x^4$ **(Ans.)**

$\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম বা $(5+1)$ তম পদ $= {}^9C_5\, 2^4\, (3x)^5$

$= {}^9C_5\, 2^4 \,.\, 3^5\, x^5$

$= 489888\, x^5$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $2P^{\frac{1}{2}} - 6P^{-\frac{1}{2}} = 1$

$\therefore\ 2\sqrt{P} - \frac{6}{\sqrt{P}} = 1$

বা, $\frac{2P-6}{\sqrt{P}} = 1$

বা, $2P - 6 = \sqrt{P}$

বা, $(2P-6)^2 = (\sqrt{P})^2$ [বর্গ করে]

বা, $4P^2 - 24P + 36 = P$

বা, $4P^2 - 25P + 36 = 0$

বা, $4P^2 - 16P - 9P + 36 = 0$

বা, $4P(P-4) - 9(P-4) = 0$

বা, $(P-4)(4P-9) = 0$

$\therefore$ হয় $P - 4 = 0$ অথবা, $4P - 9 = 0$

বা, $P = 4$ বা, $4P = 9$

বা, $\frac{2y}{y-1} = 4$ বা, $\frac{8y}{y-1} = 9$

বা, $4y - 4 = 2y$ বা, $9y - 9 = 8y$

বা, $2y = 4$ বা, $y = 9$

বা, $y = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান : 2 অথবা 9 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯০ $(5x+2)^{-1} + (5x+2)^{-2} + (5x+2)^{-3} + \ldots\ldots$ অসীম গুণোত্তর ধারা এবং $A = \left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n$ ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০*

[পলশ্রী উন্নয়ন একাডেমী ল্যাবরেটারী স্কুল এন্ড কলেজ, বগুড়া প্রশ্ন নং ২]

ক. $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. $n = 15$ হলে A এর বিস্তৃতির কততম পদ x মুক্ত এবং উক্ত পদের মান নির্ণয় কর। ৪

৯০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারার,

প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{1} = 2$

$\therefore r > 1$

সুতরাং ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই।

খ ধারাটির ১ম পদ, $a = (5x+2)^{-1}$

$= \frac{1}{5x+2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{(5x+2)^{-2}}{(5x+2)^{-1}}$

$= \frac{1}{5x+2}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

বা, $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{5x+2} < 1$

$\therefore\ \frac{1}{5x+2} < 1$

বা, $5x + 2 > 1$

বা, $5x + 2 - 2 > 1 - 2$

বা, $5x > -1$

$\therefore\ x > -\frac{1}{5}$

অথবা, $\frac{1}{5x+2} > -1$

বা, $5x + 2 < -1$

বা, $5x + 2 - 2 < -1 - 2$

বা, $5x < -3$

বা, $x < -\frac{3}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x > -\frac{1}{5}$ অথবা $x < -\frac{3}{5}$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{5x+2}}{1 - \frac{1}{5x+2}}$

$= \frac{1}{5x+2-1}$

$= \frac{1}{5x+1}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n$

$n = 15$ হলে, $A = \left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$

ধারাটির সাধারণ পদ, $T_{r+1} = {}^{15}C_r \,.\, (2x^2)^{15-r} \,.\, \left(-\frac{1}{x^3}\right)^r$

$= {}^{15}C_r \,.\, 2^{(15-r)} \,.\, x^{30-2r-3r} \,.\, (-1)^r$

$= {}^{15}C_r \,.\, 2^{15-r} \,.\, x^{30-5r} (-1)^r \ldots\ldots$ (i)

$(r+1)$ তম পদ x মুক্ত হলে,

$30 - 5r = 0$

বা, $5r = 30$

$\therefore\ r = 6$

$\therefore$ $(r+1)$ তম বা $(6+1)$ তম বা 7 তম পদ x মুক্ত **(Ans.)**

(i) নং হতে,

x মুক্ত পদের মান $= {}^{15}C_6 \,.\, 2^{15-6} \,.(-1)^6$

$= 2562560$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯১ $P = (1 - y - 2y^2)^6$, $Q = x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}}$, $x > 0$ ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০*

[গাইবান্ধা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, গাইবান্ধা প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\sqrt[x]{p} = \sqrt[y]{q} = \sqrt[z]{r}$ এবং $pqr = 1$ হলে, দেখাও যে, $x + y + z = 0$ ২

খ. $Q = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + 3 = \frac{48}{7x}$ ৪

গ. P কে y^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করে তা থেকে $(0.9 \times 1.05)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৯১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\sqrt[x]{p} = \sqrt[y]{q} = \sqrt[z]{r} = k$

তাহলে, $p = k^x$, $q = k^y$, $r = k^z$

$\therefore$ $pqr = k^x.k^y.k^z = k^{x+y+z}$

বা, $1 = k^{x+y+z}$

বা, $k^{x+y+z} = 1 = k^0$

$\therefore$ $x + y + z = 0$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$Q = x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}}$

বা, $x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}} = 0$ [$\because$ Q = 0]

বা, $x^2 = 7^{\frac{2}{3}} - 2 + 7^{-\frac{2}{3}}$

বা, $x^2 = 7^{\frac{2}{3}} - 2.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}} + 7^{-\frac{2}{3}}$

বা, $x^2 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $x = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}$ ... ... (i)

বা, $x^3 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $x^3 = 7 - 7^{-1} - 3.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $x^3 = 7 - \frac{1}{7} - 3.1.x$ [(i) নং হতে]

বা, $x^3 = \frac{49 - 1}{7} - 3x$

বা, $x^3 + 3x = \frac{48}{7}$

বা, $x^2 + 3 = \frac{48}{7x}$

$\therefore$ $x^2 + 3 = \frac{48}{7x}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$P = (1 - y - 2y^2)^6$

$= (1 - 2y + y - 2y^2)^6$

$= \{1(1 - 2y) + y(1 - 2y)\}^6$

$= \{(1 - 2y)(1 + y)\}^6$

$\therefore \{(1 - 2y)(1 + y)\}^6 = (1 - 12y + 60y^2 - 160y^3 + ...)(1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + ...)$

$= 1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 - 12y - 72y^2 - 180y^3 + 60y^2 + 360y^3 - 160y^3 + ...$

$= 1 - 6y + 3y^2 + 40y^3 + ...$ (i)

আবার, এখানে, $(0.9 \times 1.05)^6$

$= \{(1 - 0.1)(1 + 0.05)\}^6$

$= \{(1 - 2 \times 0.05)(1 + 0.05)\}^6$

একে $\{(1 - 2y)(1 + y)\}^6$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$y = 0.05$

(i) নং হতে পাই,

$\{(1 - 2y)(1 + y)\}^6 = 1 - 6y + 3y^2 + 40y^3 + ...$

বা, $(0.9 \times 1.05)^6 = 1 - 6 \times (0.05) + 3.(0.05)^2 + 40.(0.05)^3 + ...$

$= 0.7125$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ড়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯২ $P(x) = 2x^2 + \frac{k}{x^3}$ এবং $A = (1 + x)^7$, $B = (1 - x)^8$

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, লালমনিরহাট ▯ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $2.\dot{3}0\dot{5}$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. $\{P(x)\}^{10}$ এর বিস্ড়ৃতিতে x^5 ও x^{15} এর সহগ দুইটি সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. AB এর বিস্ড়ৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৯২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $2.\dot{3}0\dot{5} = 2.305305305 ... ...$

$= 2 + (.305 + .000305 + .000000305 + ...)$

এখানে, বন্ধনীর অভ্যন্ড়রের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ, a = .305

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{.000305}{.305} = .001$

$\therefore$ $2.\dot{3}0\dot{5} = 2 + \frac{a}{1 - r}$

$= 2 + \frac{.305}{1 - .001}$

$= 2 + \frac{305}{999}$

$= \frac{2303}{999}$ **(Ans.)**

খ এখানে, $P(x) = 2x^2 + \frac{k}{x^3}$

$\therefore$ $\{P(x)\}^{10} = \left(2x^2 + \frac{k}{x^3}\right)^{10}$

$= (2x^2)^{10} + {}^{10}C_1(2x^2)^9\left(\frac{k}{x^3}\right) + {}^{10}C_2(2x^2)^8\left(\frac{k}{x^3}\right)^2 + {}^{10}C_3(2x^2)^7\left(\frac{k}{x^3}\right)^3 + {}^{10}C_4(2x^2)^6\left(\frac{k}{x^3}\right)^4 + ...$

$= 1024x^{20} + 5120kx^{15} + 11520k^2x^{10} + 15360k^3x^5 + 13440k^4 + ...$

প্রশ্নমতে, x^5 এর সহগ = x^{15} এর সহগ

বা, $15360k^3 = 5120k$

বা, $k^2 = \frac{1}{3}$

বা, $k = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\therefore$ $k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৯৩ $(a + 3x)^n$ একটি দ্বিপদী এবং এর যেকোন তিনটি পদ, b, $\frac{21bx}{2}$ এবং $\frac{189x^2}{4}$ b *[হাজীগঞ্জ পাইলট বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর ▯ প্রশ্ন নং ২]*

ক. ১ম চারটি পদ পর্যন্ড় দ্বিপদীটির বিস্ড়ৃতি কর। ২

খ. বিস্ড়ৃতির প্রথম ৩টি পদ যদি যথাক্রমে উদ্দীপকে বর্ণিত ১ম তিনটি পদের সমান হয় তবে দেখাও যে, $a = b^{\frac{1}{n}} = \frac{2n}{7}$ ৪

গ. a, b ও n এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত দ্বিপদী

$(a + 3x)^n = a^n + na^{n-1}.3x + {}^nC_2.a^{n-2}(3x)^2 + {}^nC_3.a^{n-3}.(3x)^3 + ...$

$= a^n + na^{n-1}.3x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2}.a^{n-2}9x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}a^{n-3}(3x)^3 + ...$

$= a^n + na^{n-1}.3x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.9x^2$

$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} . 27x^3 + ...$ **(Ans.)**

খ 'ক' নং হতে প্রদত্ত বিস্তৃতিটি

$(a + 3x)^n = a^n + na^{n-1} . 3x + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} . 9x^2$

$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} . 27x^3 + ...$

শর্তমতে, $a^n = b$

বা, $a = b^{\frac{1}{n}}$ ... ... (i)

$\therefore \frac{21bx}{2} = na^{n-1} . 3x$

বা, $\frac{7b}{2} = n\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}$

বা, $\frac{7b}{2n} = b^{1-\frac{1}{n}}$

বা, $\frac{7b}{2n} = \frac{b}{b^{\frac{1}{n}}}$

বা, $b^{\frac{1}{n}} = \frac{2n}{7}$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে,

$a = b^{\frac{1}{n}} = \frac{2n}{7}$ **(দেখানো হলো)**

গ $\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} 9x^2 = \frac{189}{4} bx^2$

বা, $n(n-1) a^{n-2} = \frac{21}{2} b$ ... .. (iii)

'খ' এর (i) ও (ii) নং হতে,

$a = \frac{2n}{7}$

বা, $n = \frac{7a}{2}$

$\frac{21bx}{2} = na^{n-1} 3x$

বা, $na^{n-1} = \frac{7}{2} b$ ... ... (iv)

(iv) ÷ (iii) করে পাই,

$\frac{a}{(n-1)} = \frac{1}{3}$

বা, $3a = n - 1$

বা, $3a = \frac{7a}{2} - 1$

বা, $6a = 7a - 2$

বা, $a = 2$

$\therefore n = \frac{7a}{2} = \frac{7}{2} \times 2 = 7$

আবার, $a^n = b$ [খ নং হতে]

বা, $b = 2^7 = 128$

$\therefore a = 2$

$n = 7$

$b = 128$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯৪ (i) $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এ সহগ 560

(ii) $\left(g - \frac{1}{2}x\right)^6 = u - 96x + vx^2 + ...$ ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৯ ও ১০*

[লক্ষ্মীপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর প্রশ্ন নং ৩]

ক. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ = ? ২

খ. (i) নং রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x^5 এর সহগের 15 গুণ হলে k = ? ৪

গ. g, u, v এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{x}{|x|}$

x = 0 ব্যতিত, x এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোম $f = \nabla - \{0\}$

এবং রেঞ্জ, $f = \{-1, 1\}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২ এর উদাহরণ-১০(গ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৫

গ দেওয়া আছে, $\left(g - \frac{1}{2}x\right)^6 = u - 96x + vx^2 + ...$ (i)

এখানে, $\left(g - \frac{x}{2}\right)^6 = g^6 + 6g^5\left(-\frac{x}{2}\right) + {}^6C_2 g^4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 - .....$

$= g^6 - 3g^5x + \frac{15}{4} g^4x^2 - ... ..$

$\therefore$ শর্তমতে, $u = g^6$ ... ... (ii)

$-96x = -3g^5x$

বা, $g^5 = 32$

বা, $g^5 = 2^5$

$\therefore g = 2$

(ii) নং হতে, $u = g^6 = 2^6 = 64$

এবং $vx^2 = \frac{15}{4} g^4 x^2$

বা, $v = \frac{15}{4} \times 2^4$ [g = 2]

বা, $v = \frac{15}{4} \times 16$

$\therefore v = 60$

$\therefore$ নির্ণেয় মান g = 2

u = 64

v = 60 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯৫ $p = 1 - x$ এবং $q = 1 + ax$

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট বোর্ড আদর্শ উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজ বিধি ব্যবহার করে p^4 এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. pq^6 কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃতি করলে যদি $1 + bx^2$ পাওয়া যায় তাহলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. a = 1 হলে, p^8q^7 এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর। ৪

৯৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে :

1

1 1

DœPZi MwYZ

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\therefore \quad p^4 = (1-x)^4 = \{1 + (-x)\}^4$
$= 1 + 4(-x) + 6(-x)^2 + 4(-x)^3 + (-x)^4$
$= 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $p = 1 - x$
$q = 1 + ax$
$\therefore \quad pq^6 = (1-x)(1+ax)^6$
$(1-x)(1+ax)^6$
$= (1-x)\left[\binom{6}{0}.(ax)^0 + \binom{6}{1}(ax)^1 + \binom{6}{2}(ax)^2 + ...\right]$
$= (1-x)\left[1 + \frac{6}{1}.ax + \frac{6.5}{1.2}a^2x^2 + ...\right]$
$= (1-x)(1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...)$
$= (1 + 6ax + 15a^2x^2 + ...) + (-x - 6ax^2 - 15a^2x^3 - \ ......)$
$= 1 + (6a-1)x + 15a^2x^2 - 6ax^2 - 15a^2x^3 + ...$
$= 1 + (6a-1)x + (15a^2 - 6a)x^2 - 15a^2x^3 + ...$
প্রশ্নমতে,
$1 + (6a-1)x + (15a^2 - 6a)x^2 = 1 + bx^2$
উভয়পক্ষ থেকে x ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,
$6a - 1 = 0,\ 15a^2 - 6a = b$
বা, $a = \frac{1}{6}$ এবং $b = 15.\frac{1}{36} - 6.\frac{1}{6}$
$= \frac{5}{12} - 1$
$= -\frac{7}{12}$
$\therefore$ নির্ণেয় মান: $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{-7}{12}$

গ $a = 1$ হলে, $p^8q^7 = (1-x)^8(1+x)^7$
$(1-x)^8(1+x)^7 = (1-x)(1-x)^7(1+x)^7 = (1-x)(1-x^2)^7$
$= (1-x)$
$\left[\binom{7}{0}(-x^2)^0 + \binom{7}{1}(-x^2)^1 + \binom{7}{2}(-x^2)^2 + \binom{7}{3}(-x^2)^3 + \binom{7}{4}(-x^2)^3 + \binom{7}{4}(-x^2)^4 + ...\right]$
$\therefore (1-x)^8(1+x)^7 = (1-x)(1-x^2)^7 = (1-x)$
$[1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 - ...]$
$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + ...)$
$+ (-x + 7x^3 - 21x^5 + 35x^7 - 35x^9 + ...)$
$\therefore (1-x)^8(1+x)^7 = 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5$
$- 35x^6 + 35x^8 - ......$
$\therefore (1-x)^8(1+x)^7 = 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6$
$+ 35x^7 + 35x^8 ....$
$\therefore (1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35
$\therefore x^7$ এর সহগ 35

প্রশ্ন ▶৯৬ $A = (2 + x)$ এবং $B = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ দুইটি দ্বিপদী রাশি।

[হবিগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $(1 + y)^n$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতিটি লিখ। ২
খ. প্রদত্ত রাশি দুইটির গুণফলকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। ৪
গ. "খ" এ প্রাপ্ত ফলাফল ব্যবহার করে $2.1 \times (1.05)^8$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1.2}.y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^3 + ...+ y^n$

খ $A = (2 + x)$
$B = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$
$\therefore \quad AB = (2+x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$
$= (2 + x)$
$\left\{1 + {}^8C_1.\left(\frac{x}{2}\right)^1 + {}^8C_2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + {}^8C_3\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ ....\right\}$
$= (2+x)(1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + ...)$
$= 2 + x + 8x + 4x^2 + 14x^2 + 7x^3 + 14x^3 + 7x^4 + ...$
$= 2 + 9x + 18x^2 + 21x^3 + ...$

গ 'খ' নং হতে পাই,
$(2+x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8 = 2 + 9x + 18x^2 + 21x^3 + ...$
$(2+x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ কে $2.1 \times (1.05)^8$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
$2 + x = 2.1$
$\therefore \quad x = 2.1 - 2$
$\therefore \quad x = 0.1$
এখন $x = 0.1$, $(2+x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে বসিয়ে পাই,
$2.1 \times (1.05)^8 = 2 + 9(0.1) + 18(.1)^2 + 21(0.1)^3 = 3.101$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯৭ $A = (1 - 2x)^5$, $B = \left(a - \frac{1}{3}x\right)^7$, $C = \left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^7$

[স্বরূপকাঠি কলেজিয়েট একাডেমী, পিরোজপুর □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে A কে বিস্তৃত কর। ২
খ. B এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ x^4 এর সহগের 135 গুণ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪
গ. C কে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং তার সাহায্যে $(2.99)^7$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। ৪

৯৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্যাসকেলের ত্রিভুজটি নিম্নরূপ:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$\therefore (1-2x)^5 = 1 + 5.(-2x) + 10(-2x)^2 + 10(-2x)^3$
$+ 5(-2x)^4 + (-2x)^5$
$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$ **(Ans.)**

খ $B = \left(a - \frac{x}{3}\right)^7$
$\therefore \quad \left(a - \frac{x}{3}\right)^7 = a^7 + 7a^6.\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2.a^5.\left(-\frac{x}{3}\right)^2$
$+ {}^7C_3.a^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4.a^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + ...$
$= a^7 - \frac{7}{3}a^6x + \frac{7}{3}a^5x^2 - \frac{35}{27}x^3a^4 + \frac{35}{81}a^3x^4 + ...$
শর্তমতে, $\frac{7}{3}a^5 = 135 \times \frac{35}{81}a^3$
বা, $a^2 = \frac{135 \times 5}{27}$

বা, $a^2 = 25$

$\therefore$ $a = \pm 5$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$$C = \left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^7$$

$$\therefore \left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^7 = 3^7 + 7.3^6.\left(-\frac{x^2}{4}\right) + {}^7C_2.3^5.\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2$$

$$+ {}^7C_3.3^4.\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + {}^7C_4.3^3.\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4 + ...$$

$$= 2187 - \frac{5103}{4}x^2 + \frac{5103}{16}x^4 - \frac{2835}{64}x^6 + \frac{945}{256}x^8 + ... \text{(i)}$$

শর্তমতে,

$$2.99 = 3 - \frac{x^2}{4}$$

বা, $\frac{x^2}{4} = 0.01$

বা, $x^2 = 0.04$

$\therefore$ $x = 0.2$

$x = 0.2$ (i) এ বসিয়ে পাই,

$$(2.99)^7 = 2187 - \frac{5103}{4}(0.2)^2 + \frac{5103}{16}(0.2)^4 - \frac{2835}{64}(0.2)^6 + \frac{945}{256}(0.2)^8 + ...$$

$= 2136.4775$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ড় আসন্ন মান) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯৮ $9 + 99 + 999 + 9999 + ...$ একটি অসীম ধারা এবং $(1 + a)^n$ এর বিস্ড়ৃতিতে প্রথম চারটি পদের সহগ যথাক্রমে x_1, x_2, x_3, x_4

◀সমন্বিত অধ্যায় ৭ ও ১০

[বাউফল সরকারী মডেল মাধ্যমিক বিদ্যালয়, পটুয়াখালী প্রশ্ন নং ৩]

ক. সাধারণ পদ $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ এর জন্য অনুক্রমটি লিখ। ২

খ. অসীম ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_3 + x_4} = \frac{2x_2}{x_2 + x_3}$ ৪

৯৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

সাধারণ পদ $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$n = 0$ হলে $\cos 0° = 1$

$n = 1$ হলে $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$n = 2$ হলে $\cos \pi = -1$

$n = 3$ হলে $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$n = 4$ হলে $\cos(2\pi) = 1$

ধারাটি হবে $1 + 0 - 1 + 0 + 1 + ...$

বা, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ....$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারাটি $= 9 + 99 + 999 + 9999 + ... + n$ তম পদ

$= \{(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ... + n$ তম পদ$\}$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + ... + n$ তম পদ$) - (1 + 1 + 1 + ... + n$ তম পদ$)$

$$= \left(10 . \frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n$$

$$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের

সমষ্টি, $S_n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত দ্বিপদী রাশিটি

$$(1 + a)^n = 1 + na + {}^nC_2a^2 + {}^nC_3\, a^3 + {}^nC_4a^4 + ...$$

$$= 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3 + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4!}a^4 + ...$$

$$= 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{6}a^3 + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24}a^4 + ...$$

প্রশ্নমতে,

$x_1 = 1$

$x_2 = n$

$$x_3 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$x_4 = \frac{n(n-1)\,(n-2)}{6} = \frac{(n^2 - n)\,(n-2)}{6} = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}$$

$$\text{L.H.S} = \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_3 + x_4}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{n^2-n}{2} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{3n^2 - 3n + n^3 - 3n^2 + 2n}{6}}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{3(n^2 - n)}{n^3 - n}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{3(n^2 - n)}{n(n^2 - 1)}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{3n\,(n-1)}{n(n+1)\,(n-1)}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{3}{n+1}$$

$$= \frac{4}{1+n}$$

$$\text{R.H.S.} = \frac{2x_2}{x_2 + x_3}$$

$$= \frac{2.n}{n + \frac{n^2 - n}{2}}$$

$$= \frac{2n\,.\,2}{2n + n^2 - n}$$

$$= \frac{2n\,.\,2}{n^2 + n}$$

$$= \frac{4n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{4}{1+n}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S **(প্রমাণিত)**

DœPZi MwYZ