Tutor

ci×Þv^xÆe©iÿv, %Lv©G ˆewWÆEi×Þv, KÅGWU KGRmn kx|ÆEbxq Õ•zmgÿGi ci×Þv%es gGWj/ ˆUGÕi cÉáGv cÿ&ÆE mgvab AaÅqwfwîK ˆ¨ I qvnGqGGl %àGvAbkÿx b Ki G Zxg %AaÅqwU ˆ^GK ˆhGKvGvmÿRbkÿx i PbvgjfK cÉkÍ² mgvab ÿjvLGZ cvi Ge mnGRB|

প্রশ্ন ▶১ A(3, 4), B(10, 4), C(7, 10) ও D(5, 10) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। ◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ৫]

ক. AD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || AB || DC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$. ৪

গ. P(x, y) বিন্দু হতে x-অক্ষের দূরত্ব এবং D বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে প্রমাণ কর যে $x^2 - 10x - 20y + 125 = 0$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (5, 10)

∴ AD সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-5} = \frac{y-4}{4-10}$

বা, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-6}$

বা, $x - 3 = \frac{y-4}{3}$

বা, $3x - 9 = y - 4$

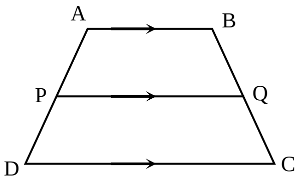
∴ $3x - y - 5 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো A(3, 4), B(10, 4), C(7, 10) এবং D(5, 10)

AB রেখার ঢাল $= \frac{4-4}{10-3} = 0$

DC রেখার ঢাল $= \frac{10-10}{5-7} = 0$

∴ AB || DC



দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের AD ও BC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, PQ || AB || DC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$

প্রমাণঃ মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

∴ $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

∴ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$ [∵ P, AD এর মধ্যবিন্দু]

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ [∵ Q, CB এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{d}) = \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{c} - \underline{d})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

কিন্তু $\overrightarrow{DC}$ ও $\overrightarrow{AB}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB})$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ DC ও AB এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং PQ ভেক্টরও DC ও AB এর সমান্তরাল হবে।

এখন $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

∴ $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$

অর্থাৎ $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$

অর্থাৎ PQ || AB || DC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$ **(প্রমাণিত)**

গ এখানে, P(x, y) বিন্দু হতে x-অক্ষের দূরত্ব = y

এবং P(x, y) বিন্দু হতে D(5, 10) বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2}$

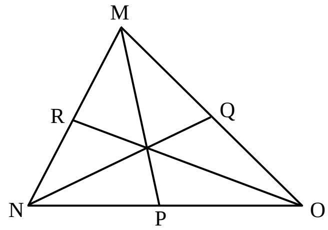
প্রশ্নমতে, $\sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2} = y$

বা, $(x-5)^2 + (y-10)^2 = y^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 20y + 100 = y^2$

বা, $x^2 - 10x - 20y + 125 = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২



P, Q, R যথাক্রমে NO, MO, MN এর মধ্যবিন্দু।

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ৫]

ক. M, N এবং O এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ এবং $\underline{c}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$. ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR} = 0$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত NO এর সমান্তরাল সরলরেখা Q বিন্দুগামী হবে। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু R, Q যথাক্রমে MN ও MO এর মধ্যবিন্দু।

তাই R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$

Q " " " $= \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2}$

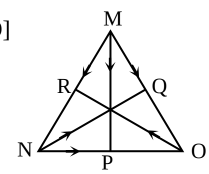
∴ $\overrightarrow{RQ} = \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2} - \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = \frac{\underline{c} - \underline{b}}{2}$

∴ $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$ **(দেখানো হলো)**

খ ΔMNP-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$

∴ $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$ .... (i)

[P, NO এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$]



DœPZi MwYZ

ΔMOR-এ $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OR}$

$\therefore \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MO}$

$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MO}$ .... (ii)

[R, MN এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$]

এবং ΔMNQ-এ $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}$

বা, $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MN}$

$\therefore \overrightarrow{NQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN}$ .... (iii)

[Q, MO এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN}$

বা, $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} = \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ ΔMNO এর MN ও MO বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও Q।

প্রমাণ করতে হবে যে, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত NO রেখার সমান্তরাল রেখা অবশ্যই Q বিন্দুগামী হবে। Q, R যোগ করি। ইহা প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে যে, RQ || NO।

প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{RQ}$ ... ... (i)

এবং $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NO}$ ... ... (ii)

কিন্তু, $\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MR}$

[□ R, Q বিন্দু যথাক্রমে MN ও MO এর মধ্যবিন্দু।]

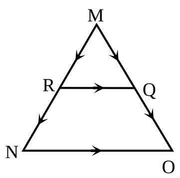
$\therefore$ (ii) থেকে পাই,

$2\overrightarrow{MQ} - 2\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NO}$

অর্থাৎ $2(\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR}) = \overrightarrow{NO}$

$\therefore 2\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{NO}$ [(i) থেকে]

$\therefore \overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$



অতএব, RQ ও NO এর ধারকরেখা সমান্তরাল বা একই হবে। কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়। $\therefore$ RQ || NO

$\therefore$ R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত NO এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই Q বিন্দুগামী হবে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩ ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

[কুমিলণ্ডা বোর্ড-২০১৯ □ প্রশ্ন নং ৬]

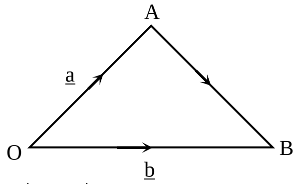
ক. ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে, চিহ্নিত চিত্রসহ $\overrightarrow{AB}$ কে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং DE = $\frac{1}{2}$BC. ৪

গ. BD ও CE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || MN || BC এবং MN = $\frac{1}{2}$(BC + DE) ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



প্রশ্নমতে, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$

$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

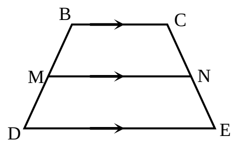
ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ মনে করি, BDEC ট্রাপিজিয়ামের BD ও EC বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং DE ও BC বাহুদ্বয় সমান্তরাল। M ও N যথাক্রমে BD ও EC এর মধ্যবিন্দু। M, N যোগ করা হলো।



প্রমাণ করতে হবে যে, MN, BC ও DE-এর সমান্তরাল এবং তাদের যোগফলের অর্ধেক।

অর্থাৎ, MN = $\frac{1}{2}$(BC + DE)

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে C, B, D, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{c}, \underline{b}, \underline{d}, \underline{e}$ ।

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$, $\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$ [$\because$ M, CB এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$

[$\because$ N, CE এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e} - \underline{d} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE})$

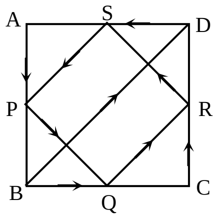
কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও DE এর) সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ DE || MN || BC **(প্রমাণিত)**

এখন, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}) \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}|$

$\therefore$ MN $= \frac{1}{2}$(BC + DE) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪



ABCD একটি বর্গ। P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA এর মধ্যবিন্দু। *[যশোর বোর্ড-২০১৯ প্রশ্ন নং ৬]*

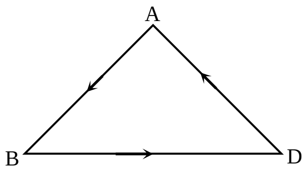
ক. $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ΔABD-এ $PS = \frac{1}{2}BD$. ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = 0$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা- ২৮২

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা- ২৮৩

প্রশ্ন ▶৫ ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N. *[সকল বোর্ড-২০১৮ প্রশ্ন নং ৫]*

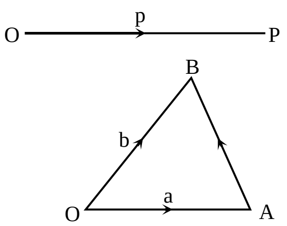
ক. চিত্রসহ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে QRNM ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$. ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

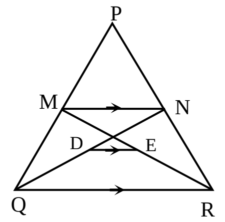
ক **অবস্থান ভেক্টর:** সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু (origin) বলা হয়।



মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে উৎপন্ন $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর O বিন্দুর পরিপ্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর প্রেক্ষিতে একই সমতলে অপর B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$।

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ ৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৮২

গ



দেওয়া আছে, ΔPQR-এ M ও N যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু। QRNM ট্রাপিজিয়ামের QN ও RM কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। E, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে Q,R,N,M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}$, $\underline{r}$, $\underline{n}$, $\underline{m}$.

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

$\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

$\therefore$ D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n})$ [D, QN এর মধ্যবিন্দু]

এবং E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m})$ [E, RM এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m} - \underline{q} - \underline{n})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{n} - \underline{m})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$

এখন, $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})|$

$\therefore DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬ ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে A(1, 3), B(– 1, – 1), C(3, – 1) এবং ত্রিভুজটির AB ও AC বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও F.

◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[ঢাকা বোর্ড-২০১৭ প্রশ্ন নং ৬]

ক. AB এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABC ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DF \parallel BC$ এবং $DF = \frac{1}{2}BC$. ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 3) ও (– 1, –1)

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ΔABC এর শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে

A(1, 3), B(– 1, – 1) ও C(3, –1)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+1)^2 + (-1+1)^2}$

$= \sqrt{16+0} = 4$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2}$
$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ ΔABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমি, $b = 4$ একক

এবং সমান সমান বাহু দৈর্ঘ্য $a = 2\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ একক

$= \frac{4}{4}\sqrt{4(2\sqrt{5})^2 - 4^2}$

$= 1.\sqrt{4.20 - 16}$

$= \sqrt{80 - 16}$

$= \sqrt{64}$

$= 8$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৮২

প্রশ্ন ▶ ৭ A(p, 3p), B(p^2, 2p), C(p – 2, p) এবং D(1, 1) চারটি ভিন্ন বিন্দু। *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২ [রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ ⎕ প্রশ্ন নং ৫]*

ক. BC রেখার ঢাল $\frac{1}{2}$ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB ও CD রেখা সমান্তরাল হলে p এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত 'p' এর ঋণাত্মক মান ব্যবহার করে A, B, C, D বিন্দু দ্বারা গঠিত ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু R ও S হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, RS || AB || CD এবং RS = $\frac{1}{2}$(AB + CD). ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (p^2, 2p) ও (p – 2, p)

$\therefore$ BC রেখার ঢাল $= \frac{p - 2p}{p - 2 - p^2} = \frac{-p}{p - 2 - p^2}$

প্রশ্নমতে, $\frac{-p}{p-2-p^2} = \frac{1}{2}$

বা, $-2p = p - 2 - p^2$

বা, $p^2 - 3p + 2 = 0$

বা, $p^2 - 2p - p + 2 = 0$

বা, $p(p-2) - 1(p-2) = 0$

বা, $(p-2)(p-1) = 0$

$\therefore$ p = 1, 2 **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১১.৩ এর উদাহরণ-১৯ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৬০

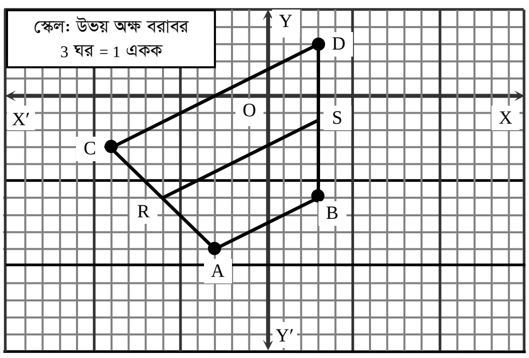
গ 'খ' থেকে পাই, p = – 1

$\therefore$ A(p, 3p) ≡ (– 1, – 3)

B(p^2, 2p) ≡ (1, – 2)

C(p – 2, p) ≡ (– 3, – 1)

D(1, 1)



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AC ও BD বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং AB ও CD বাহুদ্বয় সমান্তরাল। R ও S যথাক্রমে AC ও BD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু। R, S যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, RS || AB || CD এবং RS = $\frac{1}{2}$(AB + CD).

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{d} - \underline{c}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{c})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{d} - \underline{c})\}$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

$\therefore \left|\overrightarrow{RS}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)\right|$

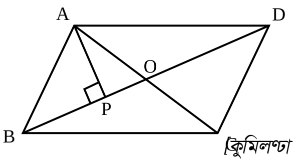
সুতরাং RS $= \frac{1}{2}$(AB + CD)

কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর) সমান্তরাল হবে।

সুতরাং $\overrightarrow{RS}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর সমান্তরাল হবে।

অতএব, RS || AB || CD এবং RS $= \frac{1}{2}$(AB + CD) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৮



◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ ⎕ প্রশ্ন নং ৪]

চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক।

ক. BD এর উপর AB এবং AD এর লম্ব-অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

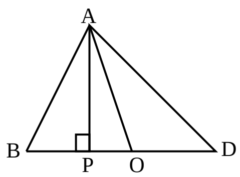
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO^2)$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, AO = OC এবং BO = OD ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক BD এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BP এবং AD এর লম্ব অভিক্ষেপ DP.

খ



বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ΔABD এর AO মধ্যমা যা BD বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে এবং AP ⊥ BD. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO^2)$

প্রমাণঃ ΔAOB এ $\angle AOB$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2BO . OP$ .... (i)

আবার, ΔAOD এর মধ্যে $\angle AOD$ স্থূলকোণ।

∴ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই, $AD^2 = AO^2 + OD^2 + 2OD.OP$ … … (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AD^2 = AO^2 + BO^2 - 2BO\,.\,OP + AO^2 + OD^2 + 2OD.OP$

$= 2AO^2 + BO^2 - 2BO.OP + BO^2 + 2BO.OP$ [∵ BO = OD]

$= 2AO^2 + 2BO^2$

∴ $AB^2 + AD^2 = 2\,(AO^2 + BO)^2$ **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶৯ P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। S ও T যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ প্রশ্ন নং ৫]

ক. QR এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, PQR সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফল 25 বর্গ একক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST ∥ QR এবং $ST = \frac{1}{2}$ QR. ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 8) ও (– 2, 3)

∴ QR রেখার ঢাল $= \frac{3-8}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3)

PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{50}$ একক

QR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{50}$ একক

PR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-8)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{100}$ একক = 10 একক

যেহেতু ΔPQR এর $PQ = QR = \sqrt{50}$ একক

∴ ΔPQR সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

ধরি, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{50}$ একক

এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য, b = 10 একক

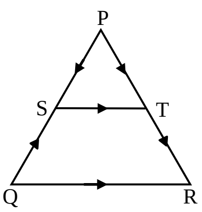
আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ একক

$= \frac{10}{4}\sqrt{4(\sqrt{50})^2 - (10)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{4 \times 50 - 100}$

$= \frac{5}{2}\sqrt{100} = \frac{5}{2} \times 10 = 25$

∴ ΔPQR এর ক্ষেত্রফল = 25 বর্গ একক। **(দেখানো হলো)**

গ



এখানে PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T. প্রমাণ করতে হবে যে,

ST ∥ QR এবং $ST = \frac{1}{2}$ QR.

প্রমাণ : $PS = SQ = \frac{1}{2}PQ$ এবং $PT = TR = \frac{1}{2}PR$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে ΔPQR হতে পাই,

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

আবার, ΔPST হতে পাই,

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PT} = -\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PT}$

$= \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

∴ $|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

∴ $ST = \frac{1}{2}QR$

সুতরাং, $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং, $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ ST ও QR সমান্তরাল।

∴ ST ∥ QR এবং $ST = \frac{1}{2}$ QR **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১০ ΔABC এর BC, AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[সিলেট বোর্ড-২০১৭ প্রশ্ন নং ৫]

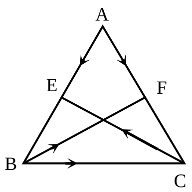
ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BF}$ ও $\overrightarrow{CE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EF ∥ BC এবং $EF = \frac{1}{2}$BC। ৪

গ. ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক A(10, 6), B(4, 0), C(14, 0) হলে, ΔABC ও ΔAEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে দেখাও যে, ΔABC ঃ ΔAEF = 4 ঃ 1. ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔABF হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$ [ত্রিভুজবিধি]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF}$

∴ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BF}$ .... (i)

আবার, ΔACE হতে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

∴ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}) - \overrightarrow{BF}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CE}\right) - \overrightarrow{BF}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{BF}$

বা, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CE} - 4\overrightarrow{BF}$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CE} - 4\overrightarrow{BF}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\,\overrightarrow{CE} - \frac{4}{3}\,\overrightarrow{BF}$

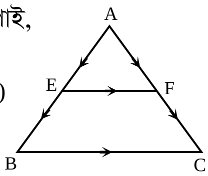
$\therefore\ \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\,\overrightarrow{BF} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CE}$ **(Ans.)**

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু E ও F। E, F যোগ করি।

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$।

প্রমাণ: E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।
ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

$\therefore\ \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



ΔABC হতে ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (i)

এবং ΔAEF হতে,

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$

বা, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ ‰es} \\ \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{array}\right]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

বা, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [সমীকরণ (i) হতে]

বা, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore\ EF = \frac{1}{2}BC$

$\therefore\ \overrightarrow{EF}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল।
কিন্তু E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে EF ও BC এর ধারকরেখা একই হতে পারে না।

$\therefore\ EF \parallel BC$।

সুতরাং $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,
ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো A(10, 6), B(4, 0) ও C(14, 0)

$\therefore\ \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 4 & 14 & 10 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(0 + 0 + 84 - 24 - 0 - 0)$

$= \frac{1}{2} \times 60 = 30$ বর্গ একক

যেহেতু E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু

$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{10+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (7, 3)$

এবং F বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{10+14}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (12, 3)$

$\therefore\ \Delta AEF$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 7 & 12 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

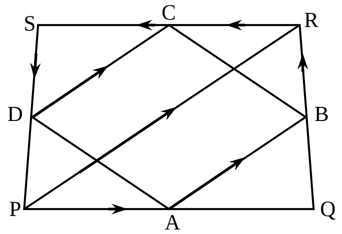
$= \frac{1}{2}(30 + 21 + 72 - 42 - 36 - 30)$

$= \frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{2}$ বর্গ একক

$\therefore\ \frac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = \frac{60}{15} = \frac{4}{1}$

$\therefore\ \Delta ABC : \Delta AEF = 4 : 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১১



চিত্রে PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C এবং D.

[যশোর বোর্ড-২০১৭ ⊡ প্রশ্ন নং ৬]

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB \parallel PR$ এবং $AB = \frac{1}{2}PR$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

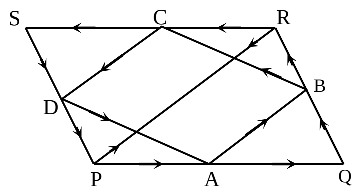
ক ΔABQ থেকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AB}$ [∵ A ও B যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু]

∴ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$ **(Ans.)**

খ



মনে করি PQRS সামান্তরিকের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে A, B, C ও D। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: ধরি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{q}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{r}$, $\overrightarrow{SP} = \underline{s}$

তাহলে,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{r})$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$,

$\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{p})$

আবার, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{p} + \underline{q}$

এবং $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \underline{r} + \underline{s}$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

অর্থাৎ $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$

তাহলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারকরেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়।

$\therefore$ ধারকরেখাদ্বয় সমান্তরাল। $\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$.

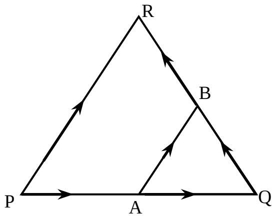
এখন, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ $\therefore AB = DC$

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ



প্রমাণঃ ΔABQ এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB}$ ... ... (i)

আবার, ΔPQR এ $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

বা, $2\overrightarrow{AQ} + 2\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PR}$ [∵ A ও B যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু]

বা, $2(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}) = \overrightarrow{PR}$ বা, $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ বা $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PR}|$

$\therefore AB = \frac{1}{2}PR.$

আবার, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখাদ্বয় সমান্তরাল।

$\therefore$ AB $\parallel$ PR এবং $AB = \frac{1}{2}PR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১২ ABCD চতুর্ভুজের A(6, – 4), B(2, 2), C(– 2, 2), D(–6, – 4) শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[ঢাকা বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ৪]

ক. BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এবং P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ $\parallel$ AD $\parallel$ BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B(2, 2) ও D(–6, –4) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব অর্থাৎ BD এর দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{(-6-2)^2 + (-4-2)^2}$ একক

$= \sqrt{64 + 36}$ একক

$= \sqrt{100}$ একক $= 10$ একক **(Ans)**

খ A(6, –4), B(2, 2), C(–2, 2) ও D(–6, –4) বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12 + 4 + 8 + 24 + 8 + 4 + 12 + 24)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 96$ বর্গ একক

$= 48$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

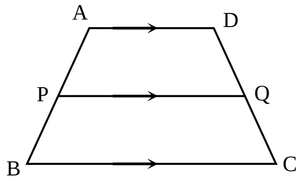
= 48 বর্গ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{48}$ একক $= \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2} \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2} \times 4\sqrt{3}$ একক

$= 4\sqrt{6}$ একক **(Ans.)**

গ



এখানে, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, PQ $\parallel$ AD $\parallel$ BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

প্রমাণঃ মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [$\because$ P, AB এর মধ্যবিন্দু]

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because$ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় ($\overrightarrow{BC}$ + $\overrightarrow{AD}$) ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং PQ ভেক্টরও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

এখন $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}|$

অর্থাৎ $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

অর্থাৎ PQ $\parallel$ AD $\parallel$ BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৩ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7, 2), B(– 4, 2), C(– 4, –3) এবং D(7,–3). ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ৪]

ক. AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত তা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উলিখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(7, 2) ও C(–4,–3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x - 7}{7 - (-4)} = \frac{y - 2}{2 - (-3)}$

বা, $\frac{x-7}{7+4}=\frac{y-2}{2+3}$

বা, $5x - 35 = 11y - 22$

বা, $5x - 11y - 35 + 22 = 0$

$\therefore 5x - 11y - 13 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $A(7, 2), B(-4, 2), C(-4, -3)$ এবং $D(7,-3)$

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7+4)^2 + (2-2)^2}$

$= \sqrt{(11)^2 + 0} = 11$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{0+5^2} = 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{121+0} = 11$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-7)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{0+5^2} = 5$ একক

AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7+4)^2 + (2+3)^2}$

$= \sqrt{121+25} = \sqrt{146}$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{121+25}$

$= \sqrt{146}$ একক

সুতরাং আমরা পাই,

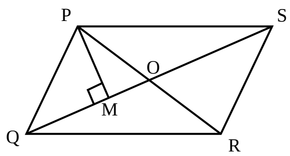
AB = CD এবং BC = AD

আবার, কর্ণ AC = কর্ণ BD.

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা–২৮৩

প্রশ্ন ▶১৪



চিত্রে PQRS একটি সামান্তরিক। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২*

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ৩]

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

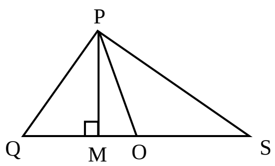
খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$. ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PO = RO এবং QO = SO. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য:** ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

খ ΔPSQ এর PO মধ্যমা SQ বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$



অঙ্কন: SQ বাহুর ওপর PM লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: ΔPSO এর $\angle POS$ স্থূলকোণ এবং SO রেখার বর্ধিতাংশের উপর PO রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OM

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে, আমরা পাই, $PS^2 = PO^2 + SO^2 + 2SO.OM$ ...... (i)

আবার, ΔPQO এর $\angle POQ$ সূক্ষ্মকোণ এবং OQ রেখার উপর PO রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OM.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PQ^2 = PO^2 + QO^2 - 2QO.OM$...........(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

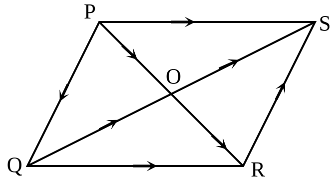
$PS^2 + PQ^2 = 2PO^2 + SO^2 + QO^2 + 2SO.OM - 2QO.OM$

$= 2PO^2 + QO^2 + QO^2 + 2QO.OM - 2QO.OM$ $[\because SO=QO]$

$= 2(PO^2 + QO^2)$

$\therefore PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, PQRS সামান্তরিকের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, $\overrightarrow{PO} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QO} = \underline{q}$, $\overrightarrow{OR} = \underline{r}$, $\overrightarrow{OS} = \underline{s}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

PO = OR এবং QO = OS

প্রমাণ:

$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{PS}$ এবং $\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR}$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

বা, $\underline{p} + \underline{s} = \underline{q} + \underline{r}$

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = \underline{q} - \underline{s}$

এখানে, $\underline{p}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক PR

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ এর ধারক PR

আবার, $\underline{q}$ ও $\underline{s}$ এর ধারক QS

$\therefore \underline{q} - \underline{s}$ এর ধারক QS

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ দুইটি সমান সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু PR ও QS দুইটি পরস্পরছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = 0$

বা, $\underline{p} = \underline{r}$ বা, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore |\overrightarrow{PO}| = |\overrightarrow{OR}|$

এবং $\underline{q} - \underline{s} = 0$ বা, $\underline{q} = \underline{s}$ বা, $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{OS}$

$\therefore |\overrightarrow{QO}| = |\overrightarrow{OS}|$

$\therefore$ PO = RO এবং QO = SO **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৫ P(7, 2), Q(– 4, 2), R(– 4, –3) এবং S(7, –3) বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ৪]

ক. PQ বাহুর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র নাকি সামান্তরিক – যাচাই কর। ৪

গ. যদি উদ্দীপকে উল্লেখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G হয়, তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, DEFG একটি সামান্তরিক। ৪

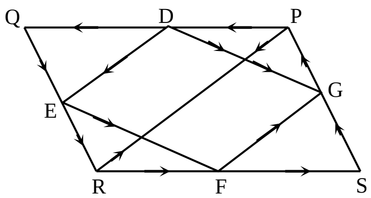
১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, P(7, 2) এবং Q(–4, 2)

PQ বাহুর ঢাল $= \dfrac{2-2}{7-(-4)} = \dfrac{0}{7+4} = 0$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১৩(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ



PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F, G। D, E; E, F; F, G এবং D, G যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, DEFG চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}, \overrightarrow{QR} = \underline{q}, \overrightarrow{RS} = \underline{r}, \overrightarrow{SP} = \underline{s}$

P, R যোগ করা হলো।

তাহলে $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{QE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{FG}$ বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF}$

$\therefore$ DE ও GF সমান ও সমান্তরাল

$\therefore$ DEFG চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৬ ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে A(2,–4), B(–4, 4) এবং C(3, a) যেখানে a > 0 *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ৩]

ক. AC = BC হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB রেখার সমীকরণ ও ঢাল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ∆ABC এর যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় A(2, – 4), B(– 4, 4) এবং C(3, a)

প্রশ্নমতে, AC = BC

বা, $\sqrt{(3-2)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{(3+4)^2 + (a-4)^2}$

বা, $\sqrt{1 + a^2 + 8a + 16} = \sqrt{49 + a^2 - 8a + 16}$

বা, $a^2 + 8a + 17 = a^2 - 8a + 65$ [বর্গ করে]

বা, $16a = 65 - 17$

বা, $a = \dfrac{48}{16}$

$\therefore a = 3$ **(Ans.)**

খ A(2, – 4) ও B(– 4, 4) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$\dfrac{x-2}{2-(-4)} = \dfrac{y-(-4)}{-4-4}$ বা, $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+4}{-8}$

বা, $-8x + 16 = 6y + 24$ বা, $-8x - 6y + 16 - 24 = 0$

বা, $-8x - 6y - 8 = 0$ বা, $-2(4x + 3y + 4) = 0$

$\therefore 4x + 3y + 4 = 0$ **(Ans.)**

আবার, AB রেখার ঢাল $= \dfrac{4-(-4)}{-4-2} = \dfrac{8}{-6} = -\dfrac{4}{3}$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা—২৮২

প্রশ্ন ▶১৭ PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং PR ও QS উহার দুটি কর্ণ। *◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২*

[সিলেট বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ৪]

ক. নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান কোথায় এবং এর ব্যাসার্ধ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS. ৪

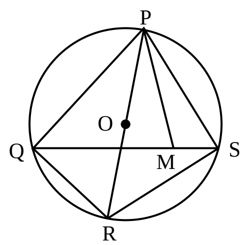
গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

আবার, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান হয়।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। PR এবং QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + QR . PS.

অঙ্কন: ∠QPR কে ∠SPR এর ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে ∠QPR-এর সমান করে ∠SPM আঁকি যেন PM রেখা QS কর্ণকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে ∠QPR = ∠SPM

উভয়পক্ষে ∠RPM যোগ করে পাই,

∠QPR + ∠RPM = ∠SPM + ∠RPM

অর্থাৎ, ∠QPM = ∠RPS

এখন ∆PQM ও ∆PRS এর মধ্যে

∠PQS = ∠PRS [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট ∠PMQ = অবশিষ্ট ∠PSR

∴ ∆PQM ও ∠PRS সদৃশকোণী।

$\dfrac{QM}{RS} = \dfrac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ, PR . QM = PQ . RS .... (i)
আবার, ΔPQR ও ΔPMS এর মধ্যে
$\angle$QPR = $\angle$SPM [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle$PSM = $\angle$PRQ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]
এবং অবশিষ্ট $\angle$PQR = অবশিষ্ট $\angle$PMS
$\therefore$ ΔPQR ও ΔPMS সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$
অর্থাৎ, PR . MS = QR . PS ....(ii)
এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,
PR . QM + PR. MS = PQ . RS + QR . PS
বা, PR (QM + MS) = PQ . RS + QR . PS
বা, PR . QS = PQ . RS + QR . PS [যেহেতু QM + MS = QS]
$\therefore$ PR.QS = PQ.RS + QR.PS **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ১১(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৮ ABCD চতুর্ভুজের A(–5, 0), B(5, 0), C(5, 5) এবং D(–5, 5) শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত হয়।

◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[বরিশাল বোর্ড-২০১৬ প্রশ্ন নং ৪]

ক. ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২
খ. দেখাও যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। ৪
গ. AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || BC এবং ST = $\frac{1}{2}$BC. ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(–5, 0), B(5, 0), C(5, 5) এবং D(–5, 5) বিন্দুসমূহ নিয়ে গঠিত ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 5 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0 + 25 + 25 + 0 – 0 – 0 + 25 + 25)$

$= \frac{1}{2} \times 100 = 50$ বর্গ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(–5, 0), B(5, 0), C(5, 5) ও D(–5, 5)
তাহলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5 + 5)^2 + (0 – 0)^2}$
$= \sqrt{(10)^2 + (0)^2}$
$= \sqrt{100} = 10$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5–5)^2 + (5 – 0)^2}$
$= \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25}$
= 5 একক
CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(–5 – 5)^2 + (5 – 5)^2} = \sqrt{(–10)^2 + 0^2}$
$= \sqrt{100} = 10$ একক
এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(–5 + 5)^2 + (5 – 0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2}$
$= \sqrt{25} = 5$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(–5 – 5)^2 + (0 – 5)^2}$
$= \sqrt{10^2 + 5^2}$
$= \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ একক
এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(–5 – 5)^2 + (5 – 0)^2}$
$= \sqrt{(–10)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ একক
এখানে, AB = CD; BC = AD এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD
$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৮২

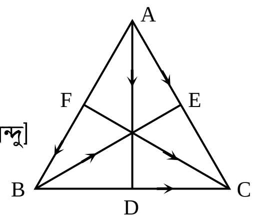
প্রশ্ন ▶১৯ AD, BE এবং CF, ΔABC এর তিনটি মধ্যমা। BE ও CF এর উপর M ও N দুটি বিন্দু। ◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট প্রশ্ন নং ৫]

ক. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$. ২
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$. ৪
গ. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}\right)$ হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, M ও N যথাক্রমে BE ও CF এর মধ্যবিন্দু। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

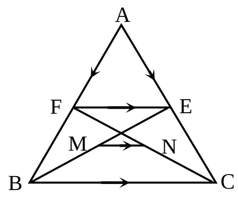
ক ΔABD-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$
$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ … … (i)
[D, BC এর মধ্যবিন্দু]
ΔABE-এ
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} – \overrightarrow{AB}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} – \overrightarrow{AB}$ … … (ii) [E, AC এর মধ্যবিন্দু]
এখন, (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} – \overrightarrow{AB}$
$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$]
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{FC}$
$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$ **(প্রমাণিত)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৮

গ ΔABC এর BE ও CF দুটি মধ্যমা। M ও N যথাক্রমে BE ও CF এর উপর যে কোন বিন্দু এবং $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}\right)$
প্রমাণ করতে হবে যে, M ও N, BE ও CF এর মধ্যবিন্দু।
প্রমাণ: মনে করি, যে কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E, F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ এবং $\underline{f}$।
সুতরাং $\overrightarrow{BC} = \underline{c} – \underline{b}$
$\overrightarrow{FE} = \underline{e} – \underline{f}$
$\therefore \overrightarrow{EF} = \underline{f} – \underline{e}$



প্রশ্নমতে, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}\right)$
$= \frac{1}{2}(\underline{c} – \underline{b} + \underline{f} – \underline{e})$
$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} + \underline{f}) – (\underline{b} + \underline{e})\}$
$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f}) – \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$
সুতরাং N এর অবস্থান ভেক্টর, $n = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f})$
M এর অবস্থান ভেক্টর, $m = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$
$\therefore$ M ও N যথাক্রমে BE ও CF এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২০ ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা প্রশ্ন নং ৬]

ক. চিত্রসহ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সজ্ঞা দাও। ২
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN = $\frac{1}{2}$QR ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে QRNM ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶২১ ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E. *[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর প্রশ্ন নং ৬]*

ক. দেখাও যে, $-(-\bar{a}) = \bar{a}$ ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪

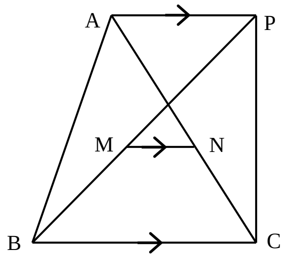
গ. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর PC লম্ব অঙ্কন করা হলো যেন $AP \parallel BC$ হয়। ABCP ট্রাপিজিয়ামের কর্ণের মধ্যবিন্দু M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel AP \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - AP)$. ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২, উদাহরণ-১(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮১

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২, উদাহরণ-৩ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ



মনে করি, APCB ট্রাপিজিয়ামের $AP \parallel BC$ এবং AC ও BP কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N. M, N যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে,

$MN \parallel AP \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - AP)$

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে, B, C, P, A এর অবস্থার ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{c}, \underline{p}, \underline{a}$

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{AP} = \underline{p} - \underline{a}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{p})$ এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{a})$ [$\because$ M, BP এবং N, CA এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{a}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{p})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{a} - \underline{b} - \underline{p})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{p} - \underline{a})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AP})$

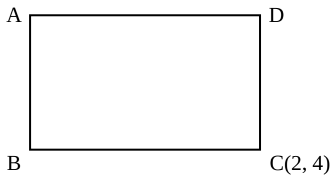
$AP \parallel BC$ হওয়ায় $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AP}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিরও $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল হবে এবং

$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AP}\right)\right|$

$\therefore MN = \frac{1}{2}(BC - AP)$

$\therefore MN \parallel AP \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - AP)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২২



◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[সিলেট ক্যাডেট কলেজ, সিলেট প্রশ্ন নং ৬]

ক. AD রেখার সমীকরণ $3x - py + 8 = 0$ এবং AD এর ঢাল $\frac{1}{3}$ হলে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. C বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট সরল রেখা (4, k) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে k এর মান কত? ৪

গ. AB, BC, CD এবং DA এর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে P, Q, R এবং S হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, AD রেখার সমীকরণ, $3x - py + 8 = 0$

বা, $py = 3x + 8$

বা, $y = \frac{3}{p}x + \frac{8}{p}$

সমীকরণটি $y = mx + c$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, ঢাল $m = \frac{3}{p}$

প্রশ্নমতে, $\frac{3}{p} = \frac{1}{3}$

বা, $p = 9$ **(Ans.)**

খ C(2, 4) বিন্দুগামী ও $\frac{1}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ,

$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 2)$

বা, $2y - 8 = x - 2$

বা, $x - 2y + 6 = 0$ ..... (i)

(i) নং রেখাটি (4, k) বিন্দুগামী।

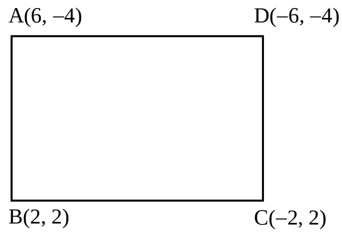
$\therefore 4 - 2 \times k + 6 = 0$

বা, $2k = 10$

বা, $k = 5$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ১১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶২৩



DœPZi MwYZ

চিত্রে, ABCD চতুর্ভুজের বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সাজানো আছে। ◄সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল ▫ প্রশ্ন নং ৬]

ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এবং P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || AD || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(6, – 4) এবং C(–2, 2)

∴ AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (-4-2)^2}$
$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$
$= \sqrt{64 + 36}$
$= \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$ একক **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ১২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ►২৪ ABCD চতুর্ভুর্জটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

◄সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা ▫ প্রশ্ন নং ৪]

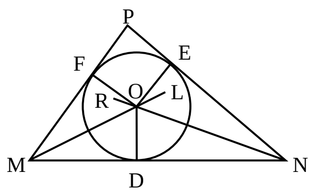
ক. একটি ত্রিভুজ PMN এঁকে এর অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + AD.BC. ৪

গ. P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, BC, CD ও AD এর মধ্যবিন্দু হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



এখানে O বিন্দু, ΔPMN এর অন্তঃকেন্দ্র।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৬

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ►২৫ ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ যথাক্রমে A(– 5, 1), B(3, – 3), C(1, – 7) এবং D(– 7, – 3). AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ যথাক্রমে P, Q, R এবং S। ◄সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা ▫ প্রশ্ন নং ৫]

ক. AC রেখার সমীকরণ এবং BC রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। (গ্রাফ পেপার ব্যবহার জরুরী নয়) ৪

গ. খসড়া (Rough) চিত্র ব্যবহার করে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(– 5, 1) ও C(1, – 7)

AC রেখার সমীকরণ,

$y + 7 = \frac{1+7}{-5-1}(x - 1)$

বা, $y + 7 = \frac{8}{-6}(x - 1)$

বা, $-6y - 42 = 8x - 8$

বা, $8x + 6y + 34 = 0$

∴ $4x + 3y + 17 = 0$ **(Ans.)**

আবার, B(3, – 3) ও C(1, – 7)

∴ BC রেখার ঢাল $= \frac{-3+7}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(– 5, 1), B(3, – 3), C(1, – 7) ও D(– 7, – 3)

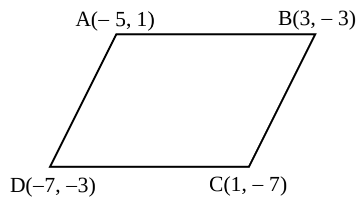
AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-3)^2 + (1+3)^2}$
$= \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-1)^2 + (-3+7)^2}$
$= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1+7)^2 + (-3+7)^2}$
$= \sqrt{8^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{5}$ একক

DA বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-7+5)^2 + (-3-1)^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$ একক

সুতরাং AB বাহু = CD বাহু এবং BC বাহু = DA বাহু



এবং কর্ণ, $AC = \sqrt{(1+5)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

কর্ণ $BD = \sqrt{(3+7)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান এবং কর্ণ দুটি সমান।

∴ ABCD একটি আয়ত। **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ►২৬ ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। AC কর্ণের মধ্যবিন্দু M।

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা ▫ প্রশ্ন নং ৬]

ক. চিত্রসহ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর অঙ্কন কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = 0$ ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর ‘অবস্থান ভেক্টর’ অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮০

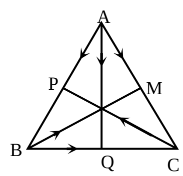
খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

গ ত্রিভুজ ABC এর AB, BC ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও M। অর্থাৎ AQ, CP ও BM ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে,

$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = 0$

ΔABQ-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$

∴ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (i)



[Q, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

ΔACP-এ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$

$\therefore \quad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}$

$\therefore \quad \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

[P, AB এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং ΔABM-এ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

বা, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$

$\therefore \quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (iii)

[M, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \underline{0}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CP} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ২৭ ΔABC এর BC, AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[মনিপুর উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৬]

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BF}$ ও $\overrightarrow{CE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

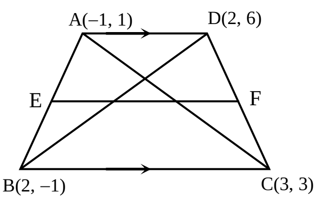
খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EF ∥ BC এবং EF = $\frac{1}{2}$ BC ৪

গ. ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাংক A(10, 6), B(4, 0), C(14, 0) হলে ΔABC ও ΔAEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে দেখাও যে, ΔABC : ΔAEF = 4 : 1. ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১০ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২৮



চিত্রে ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। AB ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F।

[হলি ক্রস উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ৬]

ক. A(3, 3p) এবং B(4, p^2 + 1) বিন্দুগামী রেখার ঢাল –1 হলে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD এর প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EF ∥ BC ∥ AD এবং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক A (3, 3p) এবং B (4, p^2 + 1) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল

$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{p^2 + 1 - 3p}{4 - 3} = p^2 - 3p + 1$

প্রশ্নানুসারে, $p^2 - 3p + 1 = -1$

বা, $p^2 - 3p + 2 = 0$

বা, $p^2 - 2p - p + 2 = 0$

বা, $p(p - 2) - 1(p - 2) = 0$

বা, $(p - 2)(p - 1) = 0$

হয়, $p - 2 = 0$ অথবা, $p - 1 = 0$

বা, $p = 2$ বা, $p = 1$

$\therefore p = 2, 1$

$\therefore$ p এর মান 2, 1 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABCD এর A(–1, 1), B(2, – 1), C(3, 3) এবং D(2, 6)

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2 + 1)^2 + (-1 - 1)^2}$

$= \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ **(Ans.)**

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 + 1)^2}$

$= \sqrt{1^2 + 4^2}$

$= \sqrt{17}$ **(Ans.)**

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 6)^2}$

$= \sqrt{1^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{10}$ **(Ans.)**

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2 + 1)^2 + (6 - 1)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 5^2}$

$= \sqrt{34}$ **(Ans.)**

কর্ণ BD এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2 - 2)^2 + (6 + 1)^2}$

$= \sqrt{0 + 7^2}$

$= 7$ **(Ans.)**

কর্ণ AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3 + 1)^2 + (3 - 1)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 2^2}$

$= \sqrt{20}$ **(Ans.)**

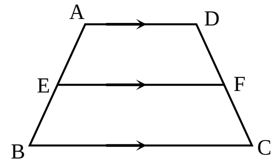
ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{(1 + 6 + 18 + 2) - (2 - 3 + 6 - 6)\}$

$= \frac{1}{2}(27 + 1)$

= 14 বর্গ একক **(Ans.)**

গ



এখানে, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। প্রমাণ করতে হবে যে, EF ∥ AD ∥ BC এবং EF = $\frac{1}{2}$(AD + BC)

প্রমাণ: মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \quad \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

∴ E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [∵ E, AB এর মধ্যবিন্দু]

F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [∵ F, CD এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং EF ভেক্টর ও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

কারণ $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

বা, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}|$

অর্থাৎ $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$

অর্থাৎ EF || AD || BC এবং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(AD + BC)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২৯ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(a, a + 1), B(– 6, – 3) এবং C(5, – 1)। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা প্রশ্ন নং ৫]

ক. a = 2 হলে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় কর। ২

খ. a এর কোন মানের জন্য বিন্দুগুলি সমরেখ হবে। ৪

গ. যদি AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E বিন্দু হয়, তবে ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, DE || BC ও $DE = \frac{1}{2}BC$। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক A(a, a + 1), B(– 6, – 3) এবং C(5, – 1)

এখন, a = 2 হলে, A বিন্দুটি A(2, 3).

∴ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2-6}{2}, \frac{3-3}{2}\right)$

$\equiv (-2, 0)$ **(Ans.)**

এবং AC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$

$\equiv \left(\frac{7}{2}, 1\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

A(a, a + 1), B(–6, –3) এবং C(5, –1)

AB রেখার ঢাল $= \frac{-3-a-1}{-6-a} = \frac{-(a+4)}{-(a+6)} = \frac{a+4}{a+6}$

BC রেখার ঢাল $= \frac{-1-(-3)}{5-(-6)} = \frac{-1+3}{5+6} = \frac{2}{11}$

A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি

AB রেখার ঢাল = BC রেখার ঢাল হয়।

বা, $\frac{a+4}{a+6} = \frac{2}{11}$

বা, 11a + 44 = 2a + 12

বা, 11a – 2a = 12 – 44

বা, 9a = – 32

$\therefore a = -\frac{32}{9}$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৮২

প্রশ্ন ▶৩০ ABCD চতুর্ভুজে AB || DC এবং P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, CB, DC ও AD এর মধ্যবিন্দু। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ৬]

ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধিটি লিখ। ২

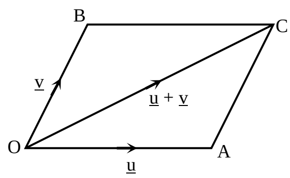
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

SQ || DC || AB এবং $SQ = \frac{1}{2}[AB + DC]$ ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

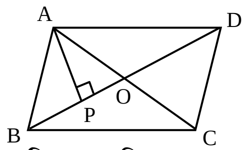
ক **ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধিঃ** কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়।



খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩।

গ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৩১



চিত্র : ABCD একটি সামান্তরিক। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২*

[সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর প্রশ্ন নং ৪]

ক. BD এর ওপর AB এবং AD এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AD^2 = 2(OA^2 + OB^2)$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, OA = OC এবং OB = OD. ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৮ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩২ ∆PQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N.

[জয়দেবপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, গাজীপুর প্রশ্ন নং ৬]

ক. চিত্রসহ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ২

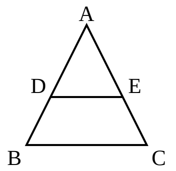
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে QRNM ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$. ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩৩ ΔABC এ AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।



[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল, ময়মনসিংহ প্রশ্ন নং ৫]

ক. ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ২

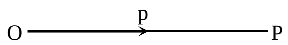
খ. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

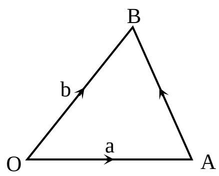
গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $DE \parallel BC$। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **ভেক্টর রাশি:** যে রাশিকে পরিপূর্ণভাবে প্রকাশ করার জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয় তাকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলে।

অবস্থান ভেক্টর: সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু (origin) বলা হয়।



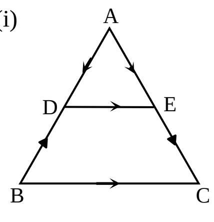


মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে উৎপন্ন $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর O বিন্দুর পরিপ্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর প্রেক্ষিতে একই সমতলে অপর B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$।

খ ΔABC-এ AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E
ΔADE-এ ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE}$ ... ... (i)



কিন্তু AB বাহুর মধ্যবিন্দু D

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

সুতরাং (i) নং হতে পাই,

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{DE}$

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৮২

প্রশ্ন ▶৩৪ A(0, –1), B(–2, 3), C(6, 7) এবং D(8, 3) বিন্দুগুলি একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ। ◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, মোমেনশাহী প্রশ্ন নং ৫]

ক. BD সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত তা যুক্তি দ্বারা দেখাও। ৪

গ. উদ্দীপকে উলেখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B(– 2, 3) ও D(8, 3) হলে,

BD এর সমীকরণ, $\frac{y-3}{3-3} = \frac{x+2}{-2-8}$

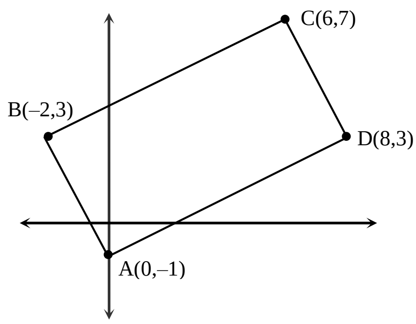
বা, $-10(y-3) = 0$

$\therefore \quad y - 3 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $y = 3$ **(Ans.)**

খ ABCD চতুর্ভুজে A(0, –1), B(–2, 3), C(6, 7) ও D(8, 3)

এখানে, $AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$
$= \sqrt{4 + 16}$
$= \sqrt{20}$ একক



$BC = \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2}$
$= \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$ একক

$CD = \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2}$
$= \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$ একক

এবং $AD = \sqrt{(8-0)^2 + (3+1)^2}$
$= \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$ একক

আবার, কর্ণ $AC = \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2}$
$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ একক

এবং কর্ণ $BD = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2}$
$= \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$ একক

$\therefore$ AB = CD, BC = AD এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD

$\therefore$ A, B, C, D বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ একটি আয়ত। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবই এর অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩।

প্রশ্ন ▶৩৫ ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাংক যথাক্রমে A(4, 16), B(0, – 4) এবং C(10, 0)। M ও N যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। ◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর প্রশ্ন নং ৫]

ক. AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}BC$ ৪

গ. দেখাও যে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল ΔAMN এর ক্ষেত্রফলের চারগুণ। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$A(4, 16)$ ও $B(0, -4)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ,

$$y + 4 = \frac{16 + 4}{4 - 0}(x - 0)$$

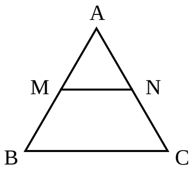
বা, $y + 4 = 5(x - 0)$

$\therefore 5x - y = 4$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ ΔABC এর ক্ষেত্রফল,

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 & 4 \\ 16 & -4 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$



$$= \frac{1}{2}|-16 + 0 + 160 - 0 + 40 - 0|$$

$$= \frac{1}{2}|184|$$

$= 92$ বর্গ একক

যেহেতু M, AB এর মধ্যবিন্দু এবং N, AC এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore M \equiv \left(\frac{4+0}{2}, \frac{16-4}{2}\right) \equiv (2, 6)$$

$$\text{এবং } N \equiv \left(\frac{4+10}{2}, \frac{16+0}{2}\right) \equiv (7, 8)$$

এখন, ΔAMN এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 & 7 \\ 8 & 16 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{(112 + 24 + 16) - (32 + 32 + 42)\}$$

$= 23$ বর্গ একক

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta AMN} = \frac{92}{23} = 4$$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= 4 \times \Delta AMN$ এর ক্ষেত্রফল

প্রশ্ন ▶৩৬ $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$ $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ কোন চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ বিন্দু। ◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[ফরিদপুর জিলা স্কুল, ফরিদপুর □ প্রশ্ন নং ৫]

ক. AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, ABCD একটি সামান্তরিক এবং উক্ত সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AC = 2.AO$। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$A(-2, -1)$ এবং $B(5, 4)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ,

$$y + 1 = \frac{4 + 1}{5 + 2}(x + 2)$$

$$y + 1 = \frac{5}{7}(x + 2)$$

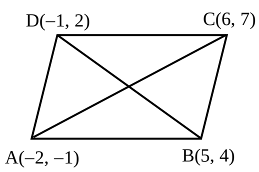
$7y + 7 = 5x + 10$

$\therefore$ $5x - 7y + 3 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$

xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো।



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+2)^2 + (4+1)^2}$ একক

$= \sqrt{74}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+1)^2 + (7-2)^2}$ একক

$= \sqrt{74}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1+2)^2 + (2+1)^2}$ একক

$= \sqrt{10}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-5)^2 + (7-4)^2}$ একক

$= \sqrt{10}$ একক

$\therefore$ চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান।

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি আয়ত অথবা সামান্তরিক

কর্ণ AC $= \sqrt{(6+2)^2 + (7+1)^2}$ একক

$= 8\sqrt{2}$ একক

কর্ণ BD $= \sqrt{(5+1)^2 + (4-2)^2}$ একক

$= 2\sqrt{10}$ একক

$\therefore$ কর্ণদ্বয় সমান নয়।

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিন্দুগুলোকে নিয়ে পাই,

ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল,

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 6 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$= \frac{1}{2}(-8 + 35 + 12 + 1 + 5 - 24 + 7 + 4)$ বর্গ একক

$= 16$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

এরপর,

$AC = AO + OC$

$\therefore$ $AC = 2AO$ [□ $\vec{AO} = \underline{a}$, $\vec{OC} = \underline{c}$ এবং $\underline{a} = \underline{c}$] **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩৭ $A(3, 4)$, $B(5, 7)$ দুটি বিন্দু। $y - 2x + 3 = 0$ একটি রেখা। PQRS বিন্দু চারটির অবস্থান ভেক্টর $\underline{p}, \underline{q}, \underline{r}, \underline{s}$ এখানে $\frac{\underline{q} - \underline{p}}{\underline{r} - \underline{s}} = L$ ◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[ফরিদপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফরিদপুর □ প্রশ্ন নং ৬]

ক. AB রেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে তা বের কর। ২

খ. প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষ ও y অক্ষের সাথে ছেদ করে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল বের কর। ৪

গ. দেখাও যে, $L = 1$ হলে PQRS একটি সামান্তরিক হবে কিন্তু $L = 0$ হলে একটি রেখাংশ হবে। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক AB রেখার ঢাল $= \frac{7 - 4}{5 - 3} = \frac{3}{2}$

রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে

$$\tan\theta = \frac{3}{2} = \tan(56.3°)$$

$\therefore$ $\theta = 56.3°$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $y - 2x + 3 = 0$ ... ... (i)

(i) নং x-অক্ষকে ছেদ করলে (i) নং এ কোটি $= 0$ অর্থাৎ $y = 0$

DœPZi MwYZ

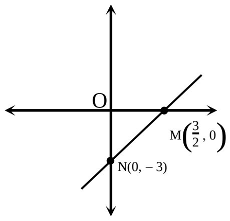
বসিয়ে পাই, $x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু, $M\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

(i) নং y-অক্ষকে ছেদ করলে (i) নং-এ ভুজ = 0 অর্থাৎ, x = 0 বসিয়ে পাই, y = –3

$\therefore$ y অক্ষের ছেদবিন্দু N(0, – 3)

চিত্র হতে স্পষ্টঃত রেখাটি x ও y অক্ষের সাথে OMN সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।



যার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{4}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

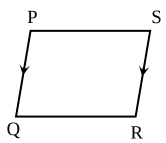
গ দেওয়া আছে, P, Q, R, S বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}, \underline{q}, \underline{r}, \underline{s}$.

L = 1 হলে $\underline{q} - \underline{p} = \underline{r} - \underline{s}$ এবং L = 0 হলে $\underline{q} - \underline{p} = 0$

দেখাতে হবে যে, PQRS সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{q} - \underline{p} = \underline{r} - \underline{s}$ হয়।

$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$ এবং $\overrightarrow{SR} = \underline{r} - \underline{s}$

মনে করি, PQRS একটি সামান্তরিক। তাহলে PQ ও SR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।



$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore \underline{q} - \underline{p} = \underline{r} - \underline{s}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{q} - \underline{p} = \underline{r} - \underline{s}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

সুতরাং PQ ও SR রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ PQRS একটি সামান্তরিক।

$\therefore$PQRS একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{q} - \underline{p} = \underline{r} - \underline{s}$ হয়।

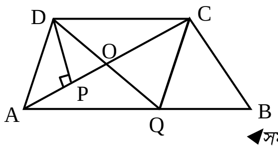
আবার, $\underline{q} - \underline{p} = 0$ হলে, $\underline{q} = \underline{p}$

বা, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$

অর্থাৎ, P ও Q বিন্দু সমাপতিত হয় এবং এখানে $\overrightarrow{OQ}$ একটি রেখাংশ ভেক্টর।

অর্থাৎস L = 1 হলে PQRS একটি সামান্তরিক হবে এবং L = 0 হলে একটি রেখাংশ হবে। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩৮ চিত্রে ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB = 14 একক, CD = 8 একক, AD = 5 একক, এর উচ্চতা 3.5 একক এবং ∠DAB = ∠CQB



◀সমন্বিত অধ্যায় ৩, ১১ ও ১২

[গভঃ ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, রাজশাহী প্রশ্ন নং ৪]

ক. ΔQBC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AD^2 + CD^2 = 2(DO^2 + AO^2)$ ৪

গ. AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, AB || MN || CD এবং MN = 11 একক। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

DC = 8 একক, AB = 14 একক

চিত্র হতে পাই, QB = AB – AQ

= AB – DC

= 14 – 8 = 6 একক

$\therefore$ ΔQBC এর ভূমি, QB = 6 একক

এবং ΔQBC এর উচ্চতা = 3.5 একক

$\therefore$ ΔQBC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3.5$

= 10.5 বর্গ একক

খ সৃজনশীল ৮(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

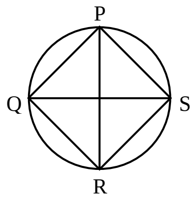
এরপর,

$MN = \frac{1}{2}(DC + AB)$

$= \frac{1}{2}(14 + 8)$ [$\because$ AB = 14 একক; DC = 8 একক]

= 11 একক **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩৯



চিত্রে PS = 5 সে.মি.

◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২

[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা প্রশ্ন নং ৪]

ক. PS এর সমান ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের আয়তন নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + PS.QR ৪

গ. যদি PQ, QR, RS ও SP বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D হয়, তবে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক গোলকের ব্যাস = PS = 5 সে.মি.

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{5}{2} = 2.5$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকটির আয়তন $= \frac{4\pi}{3} r^3$

$= \frac{4 \times 3.1416}{3} (2.5)^3$

= 65.45 ঘন সে.মি. **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৬

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

[বি. দ্রঃ A, B, C, D এর স্থলে P, Q, R, S এবং P, Q, R, S এর স্থলে A, B, C, D হবে।]

প্রশ্ন ▶ ৪০ ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু D ও E.

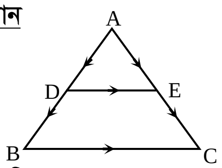
[বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া প্রশ্ন নং ৬]

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করো। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2} BC$. ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে BCED ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করো যে, $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ এবং MN || DE || BC. ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান



ক ΔABC-এ

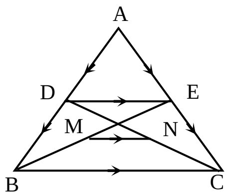
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

$= 2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC}$ [∵ E, AC এর মধ্যবিন্দু] **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ



মনে করি, BCED ট্রাপিজিনামের DE || BC এবং BE ও CD কর্ণদ্বনের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। M ও N যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

প্রমাণঃ মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D, E, B ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

∴ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{b})$ [∵ M, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [∵ N, DC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{e} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - d)\}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

DE || BC হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটি, $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

আবার, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})|$

$= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{DE}|)$

$\therefore MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

অর্থাৎ MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪১ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। AC ও BD এর দুইটি কর্ণ।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২

[মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ ▯ প্রশ্ন নং ৪]

ক. নববিন্দুবৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD ৪

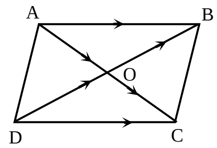
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক অধ্যায়-৩ এর সৃজনশীল ৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-১২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৬

গ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণঃ $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [∵ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [∵ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [∵ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

∴ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

[∵ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল] **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪২ ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F এবং শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2, 3), B(5, 6), C(– 1, 4).

◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ ▯ প্রশ্ন নং ৬]

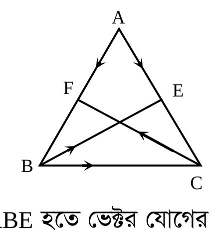
ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2} BC$. ৪

গ. ΔABC এর বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔABE হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজবিধি]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$ .... (i)

আবার, ΔACF হতে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ দেওয়া আছে, ΔABC এর শীর্ষবিন্দুত্রয় A(2, 3), B(5, 6), C(– 1, 4)

সুতরাং, AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(2-5)^2 + (3-6)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 3^2}$

$= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} = 4.24$ একক (প্রায়)

BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(5+1)^2 + (6-4)^2}$

$= \sqrt{6^2 + 2^2}$

$= \sqrt{40} = 6.32$ একক (প্রায়)

AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(2+1)^2 + (3-4)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3.16$ একক (প্রায়)

এখন, ΔABC এর পরিসীমা, $2s = (4.24 + 6.32 + 3.16)$ একক

$= 13.72$ একক

$\therefore$ অর্ধপরিসীমা, $s = 6.86$ একক (প্রায়)

সুতরাং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6.86 \times (6.86 - 6.32) \times (6.86 - 3.16) \times (6.86 - 4.24)}$

$= \sqrt{35.91} = 5.99$ বর্গ একক (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৩ ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর প্রশ্ন নং ৬]

ক. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

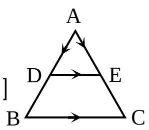
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BC || DE এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ ৪

গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔADE–এ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

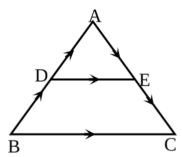
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]



সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

D, E যোগ করা হলো। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং DE || BC



প্রমাণ: D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (i)

এবং $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [সমীকরণ (i) হতে]

সুতরাং $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

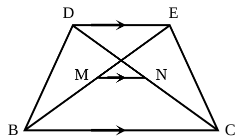
$\therefore$ $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্ড়রাল।

কিন্ডু D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore$ DE || BC

অর্থাৎ $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং DE || BC **(প্রমাণিত)**

M মনে করি, BCED ট্রাপিজিয়ামের DE || BC এবং CD ও BE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ এবং MN || DE || BC.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}, \underline{d}$.

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because$ M, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because$ N, CD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore$ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

DE || BC হওয়ায় $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরের সমান্ড়রাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্ড়রাল হবে।

কারণ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})|$

$\therefore$ $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

অর্থাৎ MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৪ ABCD একটি সামান্ড়রিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, পার্বতীপুর, দিনাজপুর প্রশ্ন নং ৪]

ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

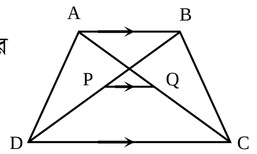
গ. প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেকের সমান। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-২(ক) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮১

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

গ মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB||CD এবং AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও P। P, Q যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ = \frac{1}{2}|(DC - AB)|$

এবং PQ || AB || CD.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$.

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$ [$\because$ P, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$ [$\because$ Q, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{b} - \underline{d})$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{d}) - (\underline{b} - \underline{a})\}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

AB || CD হওয়ায় $(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

কারণ $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}|$

অর্থাৎ PQ || AB || DC

এবং $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})|$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪৫ ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, পার্বতীপুর, দিনাজপুর ▯ প্রশ্ন নং ৬]

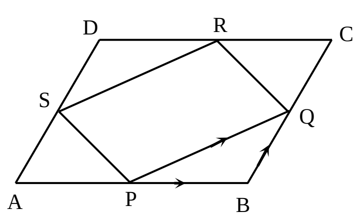
ক. $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQ || AC এবং $PQ = \frac{1}{2}AC$ ৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S।

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীল-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা- ২৮২

প্রশ্ন ▶৪৬ y = 3x + 4 রেখাটি X অক্ষকে A বিন্দুতে, 3x + y = 10 রেখাটি y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে এবং রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু C.

◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[বর্ডার গার্ড পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, রংপুর ▯ প্রশ্ন নং ৬]

ক. y = mx + c রেখাটির তিনটি বৈশিষ্ট্য লিখ। ২

খ. ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু M ও N। BN ও CM কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু P ও Q. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || MN || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - MN)$. ৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক y = mx + c রেখার তিনটি বৈশিষ্ট্য:

(i) রেখাটির ঢাল m

(ii) রেখাটি দ্বারা y অক্ষের ছেদক অংশ c

(iii) $c \neq 0$ হলে রেখাটি মূলবিন্দুগামী নয়।

খ (i) নং রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

কাজেই A বিন্দুর কোটি y = 0

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, 0 = 3x + 4

$\therefore x = \frac{-4}{3}$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{-4}{3}, 0\right)$

যেহেতু (ii) নং রেখাটি y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। কাজেই B বিন্দুর ভুজ, x = 0

$\therefore$ (ii) নং হতে পাই, 0 + y = 10

$\therefore$ y = 10

B বিন্দুর স্থানাংক (0, 10)

(i) নং ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু (1, 7)

$\therefore$ c বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 7)

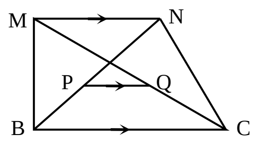
$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 \\ 7 & 10 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\left\{\left(10 + 0 - \frac{28}{3}\right) - \left(0 - \frac{40}{3} + 0\right)\right\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\left(10 - \frac{28}{3} + \frac{40}{3}\right)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times \frac{42}{3} = 7$ বর্গ একক **(Ans.)**

M মনে করি, BCNM ট্রাপিজিয়ামের MN || BC এবং CM ও BN



কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও P। P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ = \frac{1}{2}(BC - MN)$ এবং $PQ \| MN \| BC$.

প্রমাণঃ মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, N, M এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{n}$, $\underline{m}$.

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{n})$

[$\because$ P, BN এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{m})$

[$\because$ Q, CM এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{m}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{n})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{m} - \underline{b} - \underline{n})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{n} - \underline{m})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN})$

$MN \| BC$ হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরের সমান্ড়রাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{MN}$ এর সমান্ড়রাল হবে।

কারণ $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN})$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN})|$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(BC - MN)$

অর্থাৎ $PQ \| MN \| BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - MN)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ A(2, 3), B(8, 1), C(11, 5) ও D(x, y) একটি সামান্ড়রিকের চারটি শীর্ষবিন্দু। *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[রংপুর জিলা স্কুল, রংপুর প্রশ্ন নং ৫]

ক. AB রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে। ৪

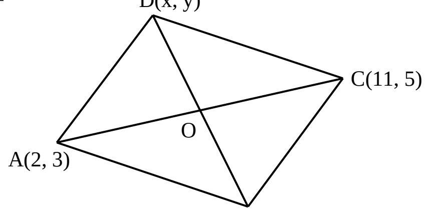
গ. D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক AB রেখার ঢাল $= \frac{1-3}{8-2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

গ



আমরা জানি, সামান্ড়রিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে। ABCD সামান্ড়রিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

AC এর মধ্যবিন্দু $O \equiv \left(\frac{2+11}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \equiv \left(\frac{13}{2}, 4\right)$

আবার, BD এর মধ্যবিন্দু $O \equiv \left(\frac{8+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right)$

শর্তানুসারে,

$\frac{8+x}{2} = \frac{13}{2}$ এবং $\frac{1+y}{2} = 4$

বা, $x = 13 - 8$ বা, $1 + y = 8$

$\therefore x = 5$ $\therefore y = 7$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y) = (5, 7)$। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮ ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E.

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী প্রশ্ন নং ৬]

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $DE \| BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪

গ. BD ও CE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে প্রমাণ কর যে, $DE \| MN \| BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$. ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর অনুচ্ছেদ "অবস্থান ভেক্টর" দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৮০

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ সৃজনশীল ৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৯ ΔPQR এর QR, PR এবং PQ বাহুর মধ্যবিন্দুত্রয় যথাক্রমে X, Y এবং Z। *[সৈয়দপুর সরকারি কারিগরী কলেজ, নীলফামারী প্রশ্ন নং ৬]*

ক. $\underline{a}$, $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্ড়রাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $m = n = 0$. ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Z হতে X বিন্দুগামী রেখা PR এর সমান্ড়রাল। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{QY} = \overrightarrow{ZR}$. ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\underline{a}$, $\underline{b}$ দুইটি অশূন্য অসমান্ড়রাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$। দেখাতে হবে যে, $m = n = 0$

দেওয়া আছে, $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = \underline{0} - n\underline{b}$ [উভয় পক্ষে $(-n\underline{b})$ যোগ করে]

বা, $m\underline{a} + \underline{0} = -n\underline{b}$

$\therefore m\underline{a} = -n\underline{b}$

যদি m ও n অশূন্য হয় তাহলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

(i) বিপরীতমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন একই হয়।

(ii) সমমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন বিপরীত হয়।

উভয়ক্ষেত্রেই $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্ড়রাল হবে যা অসম্ভব কেননা দেওয়া আছে যে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি অসমান্ড়রাল ভেক্টর।

$\therefore$ m ও n অশূন্য হতে পারে না।

অর্থাৎ $m = n = 0$. **(দেখানো হলো)**

খ ΔQPR এর QP ও QR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Z ও X। প্রমাণ করতে হবে যে, Z হতে X বিন্দুগামী রেখা অর্থাৎ ZX রেখা PR এর সমান্তরাল। অর্থাৎ $ZX \parallel PR$

প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

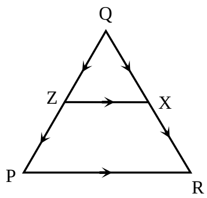
$\overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QZ} = \overrightarrow{ZX}$ … … … … (i)

এবং $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PR}$ … … … (ii)

কিন্তু, $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{QX}$, $\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{QZ}$

[∵ Z, X বিন্দু যথাক্রমে QP ও QR এর মধ্যবিন্দু।]

∴ (ii) থেকে পাই,



$2\overrightarrow{QX} - 2\overrightarrow{QZ} = \overrightarrow{PR}$

অর্থাৎ $2(\overrightarrow{QX} - \overrightarrow{QZ}) = \overrightarrow{PR}$

∴ $2\overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{PR}$ [(i) থেকে]

∴ $\overrightarrow{ZX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

অতএব, ZX ও PR এর ধারকরেখা সমান্তরাল বা একই হবে। কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়। ∴ $ZX \parallel PR$

∴ Z বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PR এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই X বিন্দুগামী হবে। **(প্রমাণিত)**

গ সৃজনশীল ২(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৫০ ABCD চতুর্ভুজের A(7, – 4), B(3, 2), C(– 1, 2) এবং D(– 5, – 4) শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা ◻ প্রশ্ন নং ৪]

ক. AC ও BD এর দৈর্ঘ্য বের কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা বের কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AB, BC, CD ও AD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে PQRS একটি সামান্তরিক।৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, A(7, – 4), B(3, 2), C(– 1, 2), D(– 5, – 4)

∴ $AC = \sqrt{(7+1)^2 + (-4-2)^2}$

$= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ একক **(Ans.)**

$BD = \sqrt{(3+5)^2 + (2+4)^2}$

$= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ একক **(Ans.)**

খ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 3 & -1 & -5 & 7 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{(14 + 6 + 4 + 20) - (-12 - 2 - 10 - 28)\}$

$= \frac{1}{2}(44 + 52) = 48$ বর্গএকক

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $a^2 = 48$ বর্গএকক

∴ বর্গক্ষেত্রের এক বাহু, $a = \sqrt{48}$ একক $= 4\sqrt{3}$ একক

∴ বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা, $4a = 4 \times 4\sqrt{3}$ একক

$= 16\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶৫১ PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর X বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে। PQ, QR, RS ও SP বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G. $XA \perp QR$ এবং বর্ধিত XA, PS কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২

[নবাব ফয়জুন্নেছা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিল্লা ◻ প্রশ্ন নং ৪]

ক. ΔMNO এ $\angle OMN$ স্থূলকোণ এবং $OD \perp MN$. প্রমাণ কর যে, $ON^2 = OM^2 + MN^2 + 2MN.MD$ ২

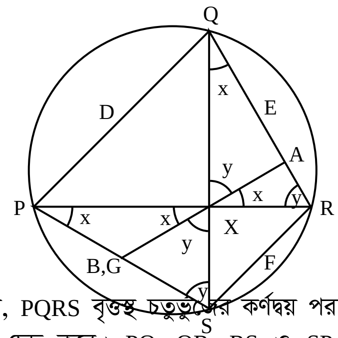
খ. প্রমাণ কর যে, B ও G একই বিন্দু। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, DEFG একটি সমান্তরিক। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬৬

খ



মনে করি, PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর X বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে। PQ, QR, RS ও SP বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G. $XA \perp QR$ এবং বর্ধিত XA, PS কে B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, B ও G একই বিন্দু।

প্রমাণ: একই চাপ SR এর উপর দণ্ডায়মান বলে

$\angle RQS = \angle RPS$

অর্থাৎ $\angle RQX = \angle XPG$

আবার, $\angle RQX = \angle GXP$ [উভয়েই $\angle QXA$ এর পূরক কোণ বলে]

∴ $\angle XPG = \angle GXP$

ফলে, ΔXPG ত্রিভুজে $GP = GX$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\angle GSX = \angle QRX = \angle QXA = \angle SXG$

ফলে ΔXGS ত্রিভুজে $XG = SG$

∴ $GP = GS = GX$

সুতরাং G, SP বাহুর মধ্যবিন্দু

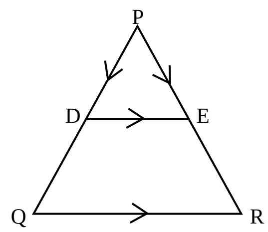
কিন্তু B, SP বাহুর মধ্যবিন্দু [দেওয়া আছে]

∴ B ও G বিন্দুদ্বয় আলাদা হতে পারে না।

∴ B ও G একই বিন্দু। **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶৫২



ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E

[কুমিল্লা মডার্ণ হাই স্কুল, কুমিল্লা ◻ প্রশ্ন নং ৬]

ক. একক ভেক্টর ও শূন্য ভেক্টর কাকে বলে? ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$ ৪

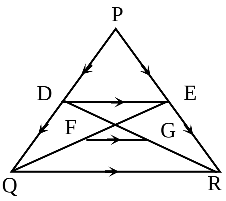
গ. DERQ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, FG || DE || QR এবং FG = $\frac{1}{2}$ (QR – DE) ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **শূন্য ভেক্টর:** যে ভেক্টরের মান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। $\overrightarrow{AA}$ একটি শূন্য ভেক্টর।
একক ভেক্টর: যে ভেক্টরের মান একক তাকে একক ভেক্টর বলে। কোনো ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়। $\overrightarrow{AB}$ এর একক ভেক্টর $= \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$.

খ সৃজনশীল-৯(গ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ



মনে করি, DERQ ট্রাপিজিয়ামের DE || QR এবং QE ও DR কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G। F ও G যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, FG || DE || QR এবং FG = $\frac{1}{2}$(QR – DE)

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D, E, Q ও R এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{q}$ ও $\underline{r}$

$$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$$
$$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$$

$\therefore$ F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q})$

[∵ F, QE এর মধ্যবিন্দু]

এবং G বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d})$

[∵ G, DR এর মধ্যবিন্দু]

$$\therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q})$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d} - \underline{e} - \underline{q}) \quad = \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$$
$$\therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$$

DE || QR হওয়ায় $(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{FG}$ ভেক্টরটি, $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

আবার, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

$$\therefore |\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{DE}|)$$
$$\therefore FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$$

অর্থাৎ FG || DE || QR এবং FG = $\frac{1}{2}$ (QR – DE) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৫৩ ΔPQR এর PD, QE ও RF তিনটি মধ্যমা।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৩, ৪ ও ১২

[মাতৃপীঠ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর প্রশ্ন নং ৫]

ক. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $QD^2 + PD^2 = \frac{1}{2}(PQ^2 + PR^2)$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF} = 0$ ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

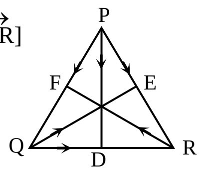
ক অধ্যায়-৪ এর সৃজনশীল ১(ক)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ অধ্যায়-৩ এর সৃজনশীল ২(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ ΔPQD-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD}$

$\therefore \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ .... (i)

[D, QR এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$]



ΔPRF-এ $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RF}$

$\therefore \overrightarrow{RF} = \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{RF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$ .... (ii)

[F, PQ এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$]

এবং ΔPQE-এ $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QE}$

বা, $\overrightarrow{QE} = \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PQ}$

$\therefore \overrightarrow{QE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ .... (iii)

[E, PR এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$$

বা, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \underline{0}$$

$\therefore \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৫৪ A(0, – 1), B(– 2, 3), C(6, 7) এবং D(8, 3) বিন্দু চারটি একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[নোয়াখালী জিলা স্কুল, নোয়াখালী প্রশ্ন নং ৬]

ক. BD সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

গ. AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B(– 2, 3) ও D(8, 3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

DœPZi MwYZ

$$\frac{x+2}{-2-8} = \frac{y-3}{3-3}$$

বা, $\frac{x+2}{-10} = \frac{y-3}{0}$

বা, $-10(y-3) = 0$

$\therefore\ y - 3 = 0$ **(Ans.)**

খ ABCD চতুর্ভুজে A(0, –1), B(–2, 3), C(6, 7) ও D(8, 3),

এখানে, $AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

$BC = \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2}$

$= \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

$CD = \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2}$

$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

এবং $DA = \sqrt{(8-0)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

আবার, কর্ণ $AC = \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2}$

$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক

এবং কর্ণ $BD = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2}$

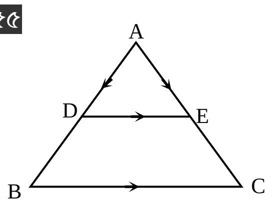
$= \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$ একক

$\therefore$ AB = CD, BC = AD এবং কর্ণ AC = কর্ণ BD

$\therefore$ A, B, C, D বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ একটি আয়ত।

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৫এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶৫৫



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী □ প্রশ্ন নং ৫]

ক. $(\overline{AD} + \overline{DE})$ কে $\overline{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

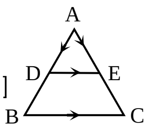
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BC || DE এবং $DE = \frac{1}{2}$ BC. ৪

গ. DB এবং EC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L ও M হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || LM || BC এবং $LM = \frac{1}{2}(DE + BC)$. ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔADE–এ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

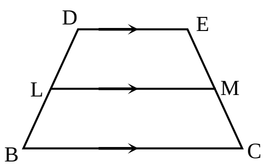
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]



সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

গ



এখানে BCED ট্রাপিজিয়ামের DB ও EC অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L ও M। প্রমাণ করতে হবে যে,

LM || BC || DE এবং $LM = \frac{1}{2}(BC + DE)$।

প্রমাণঃ মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D, B, C ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{e}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ L বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$

এখন, $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e} - \underline{b} - \underline{d})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right)$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right)$ ভেক্টরটিও তাদের সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{LM}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তরাল হবে।

এখন, $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right)$

$\therefore \left|\overrightarrow{LM}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\right| = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{DE}\right|\right)$

অর্থাৎ, $LM = \frac{1}{2}(BC + DE)$

অর্থাৎ, LM || BC || DE এবং $LM = \frac{1}{2}(BC + DE)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৫৬ ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ৬]

ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ ৪

গ. BCEF চতুর্ভুজের BF ও CE বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC})$ ৪

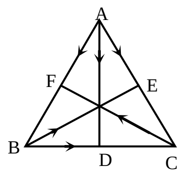
৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{BE}$]



$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$

[F, AB এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}$

[উভয়পক্ষে $(-\overrightarrow{AB})$ যোগ করে]

বা, $3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে] **(Ans.)**

খ ΔABD-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (i)

[D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

ΔACF-এ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

[F, AB এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং ΔABE-এ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (iii)

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $AE = \frac{1}{2}AC$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

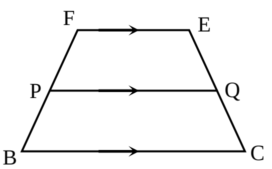
বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ



এখানে, FBCE ট্রাপিজিয়ামের FB ও CE অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC})$

প্রমাণঃ মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে F, B, C ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{f}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{e}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{FE} = \underline{e} - \underline{f}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{f} + \underline{b})$ [$\because$ P, FB এর মধ্যবিন্দু]

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$ [$\because$ Q, CE এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{f} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e} - \underline{f} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{f})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE})$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৫৭ A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৪]

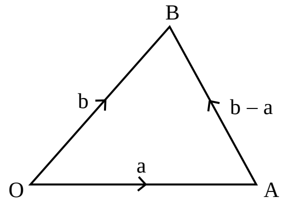
ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ২

খ. দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ c বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, দেখাও যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরে $\underline{c} = \frac{\underline{na + mb}}{m + n}$ ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে উৎপন্ন $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর O বিন্দুর পরিপ্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর প্রেক্ষিতে একই সমতলে অপর B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$।



A, B যোগ করি।

দেওয়া আছে, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ অর্থাৎ $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

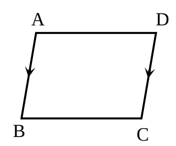
খ দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$.

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।



$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore$ $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামন্তরিক।

$\therefore$ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

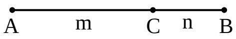
গ দেওয়া আছে,

AB রেখাংশ c বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। A, B, C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$।

প্রমাণঃ

তাহলে, AC : CB = m : n

বা, n . AC = m . CB



বা, $n\left|\overrightarrow{AC}\right| = m\left|\overrightarrow{CB}\right|$

বা, $n.\overrightarrow{AC} = m.\overrightarrow{CB}$

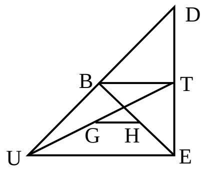
বা, $n.(\underline{c} - \underline{a}) = m(\underline{b} - \underline{c})$

বা, $n\underline{c} - n\underline{a} = m\underline{b} - m\underline{c}$

বা, $(m + n)\,\underline{c} = m\underline{b} + n\underline{a}$

$\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৫৮



DU ও DE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে B ও T;
UT ও EB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে G ও H

[সরকারি মুসলিম উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৬]

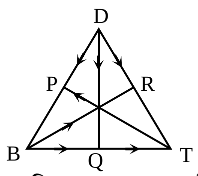
ক. P, Q, R যথাক্রমে DB, BT ও TD এর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DB}$ ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BT = \frac{1}{2}EU$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে ট্রাপিজিয়াম BUET হতে প্রমাণ কর যে, $GH = \frac{1}{2}(EU - BT)$ ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔDBQ-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{DQ}$

 Q বিন্দুটি BT এর মধ্যবিন্দু

$\therefore$ $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QT}$

বা, $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{DQ}$

$\therefore$ $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DB}$ **(দেখানো হলো)**

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৮২

গ সৃজনশীল ৫(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৫৯ ΔABC এর পরিকেন্দ্র M, লম্ববিন্দু N এবং ভরকেন্দ্র G।

◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২

[হাজী মুহাম্মদ মহসিন সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৪]

ক. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যটি বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। ২

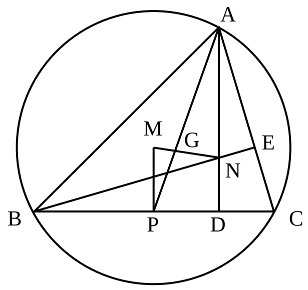
খ. প্রমাণ কর যে, M, N ও G একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৭৫

খ



আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু হতে দূরত্বের দ্বিগুণ। ΔABC এর লম্ব বিন্দু N থেকে A শীর্ষের দূরত্ব NA এবং পরিকেন্দ্র M থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব MP. যেখানে P, BC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ NA = 2MP …… (i)

চিত্রানুসারে, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু N, পরিকেন্দ্র M। A, P যোগ করি, তাহলে AP, ΔABC এর একটি মধ্যমা। M, N যোগ করি। মনে করি, MN রেখাংশ AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

এখন (i) নং সমীকরণ থেকে NA = 2MP.

এখন যেহেতু AD ও MP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু AD || MP। এখন AD || MP এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore$ ∠PAD = ∠APM [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ ∠NAG = ∠MPG.

এখন, ΔAGN এবং ΔPGM এর মধ্যে

∠AGN = ∠PGM [বিপ্রতীপ কোণ]

∠NAG = ∠MPG [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট ∠ANG = অবশিষ্ট ∠PMG.

$\therefore$ ΔAGN এবং ΔPGM সদৃশকোণী।

সুতরাং $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{NA}{MP}$

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2MP}{MP}$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2}{1}$

$\therefore$ AG : GP = 2 : 1

অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

অর্থাৎ M, G, N একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ২৮২

প্রশ্ন ▶ ৬০ ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং AP পরিবৃত্তের ব্যাস। শীর্ষ A থেকে বিপরীত বাহু BC এর উপর লম্ব AQ। আবার BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। *◀সমন্বিত অধ্যায় ৩ ও ১২*

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল ও কলেজ চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৪]

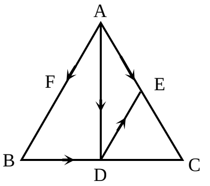
ক. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ কে $\overrightarrow{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, AB.AC = AP.AQ. ৪

গ. BCEF ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || EF || BC এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BC – FE) ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



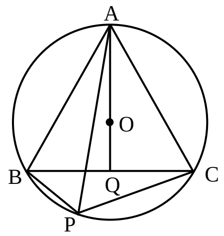
E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

আবার, ΔADE এ, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং AP পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A থেকে বিপরীত বাহু BC এর উপর AQ লম্ব।। প্রমাণ করতে হবে যে, AB. AC = AP . AQ

অঙ্কন: B, P এবং C, P যোগ করি।



প্রমাণ: একই চাপ AB এর জন্যে ∠APB ও ∠ACQ বৃত্তস্থ কোণ। AP বৃত্তের ব্যাস বলে ∠ABP অর্ধবৃত্তস্থ কোণ ও BC বাহুর উপর AQ লম্ব হওয়ায় ∠AQC সমকোণ।

Δ ABP ও Δ AQC এর মধ্যে

∠APB = ∠ACQ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

∠ABP = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = ∠AQC.

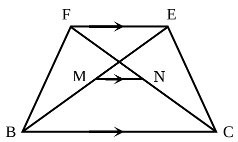
∴ অবশিষ্ট ∠BAP = অবশিষ্ট ∠QAC

∴ Δ ABP এবং ΔAQC সদৃশকোণী

∴ $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AC}$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

∴ AB. AC = AP. AQ. **(প্রমাণিত)**

গ মনে করি, BCEF ট্রাপিজিয়ামের FE || BC এবং CF ও BE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে,

MN = $\frac{1}{2}$(BC – FE) এবং MN || FE || BC.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$, $\underline{f}$.

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{FE} = \underline{e} - \underline{f}$

∴ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [∵ M, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f})$ [∵ N, CF এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f} - \underline{b} - \underline{e})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{f})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$

FE || BC হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{FE}$ ভেক্টরের সমান্ড়্রাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{FE}$ এর সমান্ড়্রাল হবে।

কারণ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$

$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})|$

∴ MN = $\frac{1}{2}$(BC – FE)

অর্থাৎ MN || FE || BC এবং MN = $\frac{1}{2}$(BC – FE) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬১ ΔXYZ এর XY, YZ ও XZ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N, YN ও ZL এর মধ্যবিন্দু S ও T.

[বান্দরবান ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বান্দরবান প্রশ্ন নং ৬]

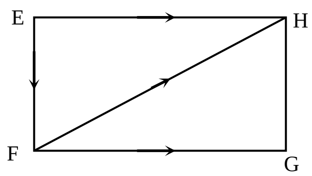
ক. EFGH একটি চতুর্ভুজ হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{YN} + \overrightarrow{ZL} = 0$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ST = $\frac{1}{2}$(YZ – LN) ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



EFGH চতুর্ভুজের কর্ণ $\overrightarrow{FH}$

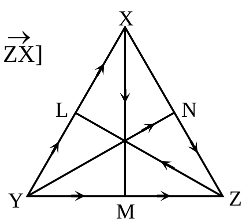
এখন, ΔEFH হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে পাই,

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH}$

বা, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}$ **(দেখানো হলো)**

খ ΔYZN-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{YN} = \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZN}$

$\therefore \overrightarrow{YN} = \overrightarrow{YZ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ZX}$ ... ... (i)



[N, ZX এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{ZN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ZX}$]

ΔYXM-এ $\overrightarrow{YM} = \overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XM}$

$\therefore \overrightarrow{XM} = \overrightarrow{YM} - \overrightarrow{YX}$

$\therefore \overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{YZ} - \overrightarrow{YX}$ ... ... (ii)

[M, YZ এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{YM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{YZ}$]

এবং ΔYZL-এ $\overrightarrow{YL} = \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZL}$

বা, $\overrightarrow{ZL} = \overrightarrow{YL} - \overrightarrow{YZ}$

$\therefore \overrightarrow{ZL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{YX} - \overrightarrow{YZ}$ ... ... (iii)

[L, $\overrightarrow{YX}$ এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{YL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{YX}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

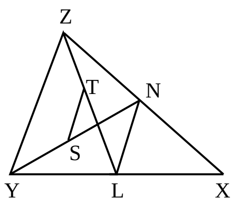
$\overrightarrow{YN} + \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{ZL} = \overrightarrow{YZ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ZX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{YZ} - \overrightarrow{YX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{YX} - \overrightarrow{YZ}$

বা, $\overrightarrow{YN} + \overrightarrow{ZL} + \overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{YZ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ZX} - \frac{1}{2}\overrightarrow{YX}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{YX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{YX} - \frac{1}{2}\overrightarrow{YX} = \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{YN} + \overrightarrow{ZL} + \overrightarrow{XM} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ



দেওয়া আছে,

∆ZYX-এ L ও N যথাক্রমে XY ও ZX এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ LN || YZ এবং LN = $\frac{1}{2}$ YZ

$\therefore$ LYZN একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, YN ও ZL কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T। T, S যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, ST = $\frac{1}{2}$(YZ – LN)

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে Y, Z, L ও N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{y}, \underline{z}, \underline{l}$ ও $\underline{n}$

$\overrightarrow{YZ} = \underline{z} - \underline{y}$

$\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

$\therefore$ S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{y} + \underline{n})$ [□ S, YN এর মধ্যবিন্দু]

এবং T বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{z} + \underline{l})$ [□ T, zL এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}(\underline{z} + \underline{l}) - \frac{1}{2}(\underline{y} + \underline{n})$

$= \frac{1}{2}(\underline{z} + \underline{l} - \underline{y} - \underline{n})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{z} - \underline{y}) - (\underline{n} - \underline{l})\}$

$\therefore \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{YZ} - \overrightarrow{LN})$

$\therefore |\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{YZ} - \overrightarrow{LN})|$

$\therefore$ ST $= \frac{1}{2}$(YZ – LN) [□$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ হলে তাদের মান সমান হয়]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶৬২ ∆ABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. *[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট □ প্রশ্ন নং ৫]*

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। ৪

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, ∆ABC এ AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী, ∆ABE থেকে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$ [∵ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}) - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$

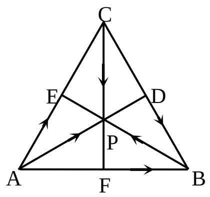
$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**



খ সৃজনশীল প্রশ্ন ২(খ) এর অনুরূপ।

গ ∆ABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E।

প্রমাণ করতে হবে যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC রেখার সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। E, F যোগ করি। ইহা প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে যে, EF || BC।

প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE}$ ... ... (i)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ... ... (ii)

কিন্তু, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$

[□ F, E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।]

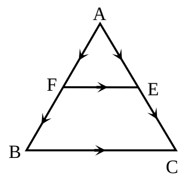
$\therefore$ (ii) থেকে পাই,

$2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{BC}$

$\therefore 2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ [(i) থেকে]

$\therefore \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



অতএব, FE ও BC এর ধারকরেখা সমান্তরাল বা একই হবে।

কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়। $\therefore$ FE || BC

$\therefore$ F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬৩ ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 6), (6, 5), (5, 2) ও (1, 1) *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট □ প্রশ্ন নং ৪]

ক. $(p^2, 2p)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{p}$ ঢালবিশিষ্ট রেখাটি (–2, 1) বিন্দুগামী হলে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, উক্ত জ্যামিতিক চিত্রের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ঢাল $m = \frac{1}{p}$

নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1) = (p^2, 2p)$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

বা, $y - 2p = \frac{1}{p}(x - p^2)$

বা, $y - 2p = \frac{x}{p} - p$

বা, $y = \frac{x}{p} - p + 2p$

$\therefore y = \frac{x}{p} + p = \frac{1}{p}(x + p^2)$ **(Ans.)**

এখন, $y = \frac{x}{p} + p$ রেখাটি $(-2, 1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 1 = \frac{-2}{p} + p$ বা, $1 = \frac{-2 + p^2}{p}$

বা, $p^2 - p - 2 = 0$

বা, $p^2 - 2p + p - 2 = 0$

বা, $p(p - 2) + 1(p - 2) = 0$

বা, $(p - 2)(p + 1) = 0$

হয়, $p - 2 = 0$ অথবা, $p + 1 = 0$

$\therefore p = 2$ $\therefore p = -1$

$\therefore$ p এর সম্ভাব্য মান – 1, 2 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, A(2, 6), B(6, 5), C(5, 2), D(1, 1)

AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x - 2}{2 - 5} = \frac{y - 6}{6 - 2}$

বা, $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 6}{4}$

বা, $4x - 8 = -3y + 18$

বা, $4x + 3y = 18 + 8$

$\therefore 4x + 3y = 26$ ... ... (i)

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x - 6}{6 - 1} = \frac{y - 5}{5 - 1}$

বা, $\frac{x - 6}{5} = \frac{y - 5}{4}$

বা, $4x - 24 = 5y - 25$

$\therefore 4x - 5y = -1$ ... ... (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow 8y = 27$

$\therefore y = \frac{27}{8}$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

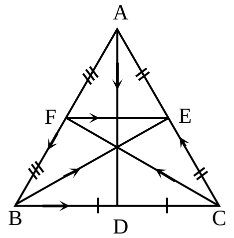
$4x = 26 - 3y$

বা, $x = \frac{26 - 3y}{4} = \frac{26 - 3 \times \frac{27}{8}}{4} = \frac{127}{32}$

$\therefore$ কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{127}{32}, \frac{27}{8}\right)$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶ ৬৪



[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট প্রশ্ন নং ৬]

ক. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \underline{0}$ ২

খ. $\overrightarrow{AD} = -(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$ এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

গ. ভেক্টরের ধারণা ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{FE}$ ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

খ ΔABD-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (i)

[D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

ΔACF-এ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

[F, AB এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং ΔABE-এ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (iii)

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \underline{0}$

বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = -(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$ **(সত্যতা যাচাই করা হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৮২

প্রশ্ন ▶৬৫ $A(2, 3)$, $B(8, 1)$, $C(11, 5)$ ও $D(x, y)$ একটি সামান্তরিকের চারটি শীর্ষবিন্দু। ◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[বিএএফ শাহীন কলেজ, শমশেরনগর, মৌলভীবাজার ◻ প্রশ্ন নং ৬]

ক. $T(x, y)$ বিন্দুটি A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হলে প্রমাণ কর যে, $3x - y = 13$. ২

খ. D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD সামান্তরিকের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R ও S হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A(2, 3)$, $B(8, 1)$

$T(x, y)$ বিন্দুটি A ও B বিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে,

$TA = TB$

বা, $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-1)^2}$

বা, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 16x + 64 + y^2 - 2y + 1$

বা, $x^2 - 4x + y^2 - 6y - x^2 + 16x - y^2 + 2y = 64 + 1 - 4 - 9$

বা, $12x - 4y = 52$

$\therefore 3x - y = 13$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু,

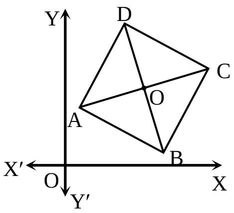
$A(2, 3)$, $B(8, 1)$, $C(11, 5)$, $D(x, y)$

সামান্তরিকের একটি কর্ণ অপর কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ AC কর্ণের ছেদবিন্দু $\left(\frac{2+11}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, 4\right)$

এবং BD কর্ণের ছেদবিন্দু $\left(\frac{x+8}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$

আবার, কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু একই।



অর্থাৎ, $\left(\frac{x+8}{2}, \frac{y+1}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, 4\right)$

অর্থাৎ, $\frac{x+8}{2} = \frac{13}{2}$ এবং $\frac{y+1}{2} = 4$

বা, $x + 8 = 13$ বা, $y + 1 = 8$

$\therefore x = 5$ $\therefore y = 7$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (5, 7)$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶৬৬ ABCD আয়তের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, B, C ও D শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(t - 1, t - 2)$, $(-1 - t, t + 2)$, $(t + 5, 8 - t)$ এবং $(t + 7, 4 - t)$; যেখানে $t \neq 3$, $t \neq -1$, $t \neq -7$. ◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর ◻ প্রশ্ন নং ৪]

ক. $(5, 5)$ ও $(5, -x)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 একক হলে, x এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, $AC = 2AO$. ৪

গ. দেখাও যে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল 20 বর্গএকক। ৪

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(5, 5)$ ও $(5, -x)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \sqrt{(5-5)^2 + \{5 - (-x)\}^2}$

$= \sqrt{0 + (5+x)^2}$

শর্তমতে, $\sqrt{(5+x)^2} = 4$

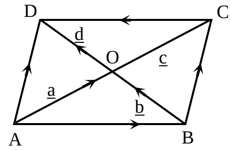
বা, $(5 + x)^2 = 16$

বা, $5 + x = \pm 4$

বা, $x = \pm 4 - 5$

$\therefore x = -1, -9$ **(Ans.)**

খ



দেওয়া আছে, ABCD আয়তের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\overrightarrow{AO} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BO} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC = 2AO$

ভেক্টরের যোজন বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয় পক্ষে $- c - d$ যোগ করে]

এখানে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC, $\therefore$ $\underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC।

$\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD, $\therefore$ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD।

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু AC, BD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = 0$ বা, $\underline{a} = \underline{c}$

অর্থাৎ, $|\underline{a}| = |\underline{c}|$

বা, $AO = OC$

সুতরাং $AC = AO + OC = 2AO$ **(প্রমাণিত)**

গ ABCD আয়তে শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে $A(t - 1, t - 2)$, $B(-1 - t, t + 2)$, $C(t + 5, 8 - t)$, $D(t + 7, 4 - t)$

এখন, A ও C এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{t - 1 + t + 5}{2}, \frac{t - 2 + 8 - t}{2}\right)$

$= \left(\frac{2t + 4}{2}, \frac{6}{2}\right)$

$= (t + 2, 3)$

আবার, B ও D এর মধ্যবিন্দু =

$\left(\frac{-1 - t + t + 7}{2}, \frac{4 - t + t + 2}{2}\right)$

$= \left(\frac{6}{2}, \frac{6}{2}\right) = (3, 3)$

শর্তমতে, $(t + 2, 3) = (3, 3)$

সুতরাং $t + 2 = 3$

$\therefore t = 1$

এখন, $t = 1$ হলে,

$A \equiv (0, -1)$

$B \equiv (-2, 3)$

$C \equiv (6, 7)$

সুতরাং ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 & 6 \\ 7 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{(18 + 2 + 0) - (-14 + 0 - 6)\}$

$= \frac{1}{2}(20 + 20) = 20$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল 20 বর্গএকক। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৬৭ ABCD চতুর্ভুজের A B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$ । *[উদয়ন মাধ্যমিক বিদ্যালয়, বরিশাল প্রশ্ন নং ৬]*

ক. সমান ভেক্টর কী? ব্যাখ্যা কর। ২

খ. দেখাও যে, ABCD চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, উদ্দীপকের চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S হলে PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

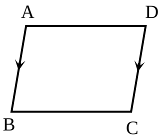
ক **সমান ভেক্টর:** যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই, দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয়, তাহলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।

খ দেওয়া আছে,

A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$.
দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।



$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

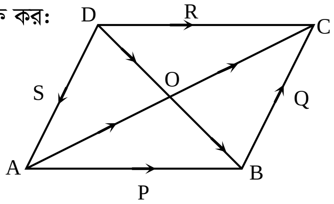
$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶ ৬৮ নিচের চিত্রটি লক্ষ কর:



[পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী প্রশ্ন নং ৫]

ক. ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ বিধির সংজ্ঞা চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

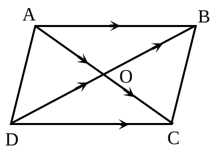
খ. প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। [ভেক্টরের বিধি প্রযোজ্য] ৪

গ. উদ্দীপকের উল্লেখিত চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S হলে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক হবে। ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ে অনুশীলনী-১২ এর 'ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি' দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭৪

খ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore$ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

[$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

(প্রমাণিত)

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮৩

প্রশ্ন ▶ ৬৯ A(3, 4), B(10, 4), C(7, 10) ও D(5, 10) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[সিদ্ধেশরী উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়, ঢাকা প্রশ্ন নং ৫]

ক. AD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

PQ || AB || DC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$ ৪

গ. P(x, y) বিন্দু হতে x অক্ষের দূরত্ব এবং D বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 - 10x - 20y + 125 = 0$ ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭০ A(P, 3P), B(P^2, 2P), C(P–2, P) এবং D(1, 1) চারটি ভিন্ন বিন্দু। *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[ভাষা শহীদ আব্দুল জব্বার আনসার ভিডিপি স্কুল এন্ড কলেজ, গাজীপুর প্রশ্ন নং ৫]

ক. BC রেখার ঢাল $\frac{1}{2}$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB ও CD রেখা সমান্তরাল হলে P এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।৪

গ. 'খ' তে প্রাপ্ত 'P' এর ঋণাত্মক মান ব্যবহার করে A, B, C, D বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু R ও S হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, RS || AB || CD এবং $RS = \frac{1}{2}(AB + CD)$। ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৭নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭১ ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে A(2,–4), B(–4, 4) এবং C(3, a) যেখানে a > 0 *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[কে.কে. গভঃ ইনস্টিটিউশন, মুন্সীগঞ্জ প্রশ্ন নং ৫]

ক. AC = BC হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB রেখার সমীকরণ ও ঢাল নির্ণয় কর। 'ক' হতে প্রাপ্ত a এর মান ব্যবহার করে ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ΔABC এর যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক। ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল-১৬(ক)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, –4) ও (– 4, 4)

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ: $\frac{x-2}{2+4} = \frac{y+4}{-4-4}$

বা, $\frac{x-2}{6} = \frac{y+4}{-8}$

বা, $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-4}$

বা, $4x - 8 = -3y - 12$

$\therefore\ 4x + 3y + 4 = 0$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ: $4x + 3y + 4 = 0$; একে $y = mx + c$ আকারে প্রকাশ করলে পাই,

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$; $\therefore$ রেখাটির ঢাল $= -\frac{4}{3}$

'ক' হতে প্রাপ্ত a এর মান = 3

$\therefore$ A, B ও C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, –4), (–4, 4) ও (3, 3)

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}|(8 - 12 - 12) - (16 + 12 + 6)|$

$= \frac{1}{2}|-50| = \frac{1}{2} \times 50 = 25$ বর্গ একক

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮২

প্রশ্ন ▶ ৭২ PQR ত্রিভুজের উচ্চতা h = 3.5 cm, শীর্ষবিন্দু P থেকে ভূমি QR এর উপর মধ্যমা PD = 4cm ও ∠Q = 60°. *◀সমন্বিত অধ্যায় ৪ ও ১২*

[জামালপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, জামালপুর প্রশ্ন নং ৬]

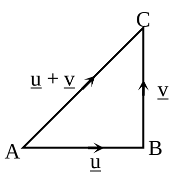
ক. ভেক্টর যোগের 'ত্রিভুজ বিধি' কী? চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ উদ্দীপকের ত্রিভুজটি আঁক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ ও PR এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ QR এর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বুঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি: উপরের চিত্রে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত যোজন পদ্ধতিকে ত্রিভুজ বিধি বলা হয়।

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৪ এর সম্পাদ্য-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮৫

গ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৩ A(3, 4), B(– 4, 2), C(6, – 1) এবং D(k, 3) একই সমতলে অবস্থিত চারটি বিন্দু। *◀সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

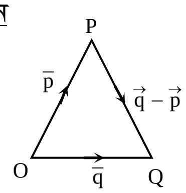
[নাটোর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর প্রশ্ন নং ৬]

ক. মূলবিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{p}$ এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{q}$ হলে $\overrightarrow{PQ}$ এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. R(x, y) বিন্দুটি A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, 14x + 4y = 5. ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ΔABC এর ক্ষেত্রফলের তিনগুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান



ক দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$

তাহলে, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$

বা, $\vec{p} + \overrightarrow{PQ} = \vec{q}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, R(x, y) বিন্দুটি A(3, 4) এবং B(– 4, 2) বিন্দু দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

$\therefore RA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

এবং $RB = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$

শর্তমতে, RA = RB

বা, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2}$

বা, $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4.$

বা, $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 25 - x^2 - 8x - 16 - y^2 + 4y - 4 = 0$

বা, $-14x - 4y + 5 = 0$

$\therefore\ 14x + 4y = 5$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে

A(3, 4), B(– 4, 2), C(6, –1) এবং D(k, 3)

বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & k & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{6 + 4 + 18 + 4k - (-16) - 12 - (-k) - 9\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(6 + 4 + 18 + 4k + 16 - 12 + k - 9)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(23 + 5k)$ বর্গ একক

আবার, A, B ও C বিন্দুকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{6 + 4 + 24 - (-16) - 12 - (-3)\}$

$= \frac{1}{2}(6 + 4 + 24 + 16 - 12 + 3)$

$= \frac{1}{2}(53 - 12) = \frac{41}{2}$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= 3 \times$ ABC ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

বা, $\frac{1}{2}(23 + 5k) = 3 \times \frac{41}{2}$

বা, $23 + 5k = 123$

বা, $5k = 123 - 23$

বা, $5k = 100 \therefore k = 20$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৪ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7, 2), B(– 4, 2), C(– 4, – 3) এবং D(7, – 3)। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[গাইবান্ধা সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, গাইবান্ধা প্রশ্ন নং ৬]

ক. AC সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত তা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উলিলখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৭৪ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ১৩ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৫ A(2, – 3), B(3, 0), C(0, 1) এবং D(– 1, - 2) চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক হলে– ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[লক্ষ্মীপুর সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর প্রশ্ন নং ৬]

ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি কি? ২

খ. ABCD কি ধরনের চতুর্ভুজ? ৪

গ. ABCD চতুর্ভুজের যে অংশ ৪র্থ চতুর্থভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল = ? ৪

৭৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর 'ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি' দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৭৪

খ AB রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-2)^2 + (0+3)^2}$ একক

$= \sqrt{1+9}$ একক

$= \sqrt{10}$ একক

BC রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2}$ একক

$= \sqrt{9+1}$ একক

$= \sqrt{10}$ একক

CD রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-1)^2}$ একক

$= \sqrt{1+9}$ একক

$= \sqrt{10}$ একক

DA রেখার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+1)^2 + (-3+2)^2}$ একক

$= \sqrt{9+1}$ একক

$= \sqrt{10}$ একক

এখানে, AB = BC = CD = DA

সুতরাং ABCD চতুর্ভুজটি বর্গ অথবা রম্বস।

কর্ণ AC এর দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{(0-2)^2 + (1+3)^2}$ একক

$= \sqrt{4+16}$ একক

$= \sqrt{20}$ একক

কর্ণ BD এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-0)^2}$ একক

$= \sqrt{16+4}$ একক

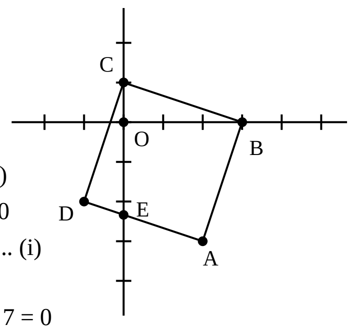
$= \sqrt{20}$ একক

$\therefore$ AC = BD

সুতরাং ABCD চতুর্ভুজটি একটি বর্গ।

গ এখানে,

DA রেখার সমীকরণ:



$\frac{x-2}{2+1} = \frac{y+3}{-3+2}$

বা, $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-1}$

বা, $x - 2 = -(3y + 9)$

বা, $x - 2 + 3y + 9 = 0$

$\therefore x + 3y + 7 = 0$ ... ... (i)

y-অক্ষে, x = 0

(i) নং হতে, $0 + 3y + 7 = 0$

বা, $3y = -7$

$\therefore y = -\frac{7}{3}$

$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= E\left(0, -\frac{7}{3}\right)$

এখানে, চতুর্ভুজটির OEAB অংশটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করেছে।

$\therefore$ OEAB চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 0 + 0 - 0 + \frac{14}{3} + 9 - 0\right)$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\left(\frac{14}{3} + 9\right)$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2} \times \frac{41}{3}$ বর্গএকক

$= \frac{41}{6}$ বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\frac{41}{6}$ বর্গএকক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭৬ P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। S ও T যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু। ◀*সমন্বিত অধ্যায় ১১ ও ১২*

[বেপজা পাবলিক স্কুল অ্যান্ড কলেজ, চট্টগ্রাম প্রশ্ন নং ৫]

ক. QR এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, PQR সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফল 25 বর্গএকক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || QR এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৯ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।