

অধ্যায় ২: বীজগাণিতিক রাশি

প্রশ্ন ১ B = {x : x পূর্ণসংখ্যা এবং x² < 5}

$$R = \{(x, y) : x \in B, y \in B \text{ এবং } 2x = y + 2\}$$

$$F(y) = y^3 - 3y^2 + 5y - 9$$

◀সম্মিত অধ্যায় ১ ও ২

[ঢাকা বোর্ড-২০১৯ ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-3x}}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. R অন্তর্যটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে অন্তর্যটি ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর। ৪

গ. F(y) কে (y - s) এবং (y - t) দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে এবং s ≠ t হয়, তবে দেখাও যে,
 $s^2 + t^2 + st - 3s - 3t + 5 = 0$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-3x}}$

এখন, f(x) ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি 1 - 3x > 0 হয়।

$$\text{অর্থাৎ, } 1 - 3x - 1 > 0 - 1$$

$$\text{বা, } -3x > -1$$

$$\text{বা, } 3x < 1$$

$$\therefore x < \frac{1}{3}$$

∴ ফাংশনের ডোমেন = $\left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{3}\right\}$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, B = {x : x পূর্ণসংখ্যা এবং x² < 5}

এখন, x = 0 হলে, x² = 0 < 5

$$x = \pm 1 \text{ হলে, } x^2 = 1 < 5$$

$$x = \pm 2 \text{ হলে, } x^2 = 4 < 5$$

$$x = \pm 3 \text{ হলে, } x^2 = 9 \square 5$$

$$\therefore B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{এবং } R = \{(x, y) : x \in B, y \in B \text{ এবং } 2x = y + 2\}$$

$$\text{আবার, } 2x = y + 2$$

$$\therefore y = 2x - 2 \dots \dots (i)$$

(i) নং এ x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

x	-2	-1	0	1	2
y = 2x - 2	-6	-4	-2	0	2

কিন্তু -6 ∉ B এবং -4 ∉ B

$$\therefore (-2, -6) \notin R \text{ এবং } (-1, -4) \notin R.$$

$$\therefore \text{অন্তর্য } R = \{(0, -2), (1, 0), (2, 2)\} \text{ (Ans.)}$$

দেখা যাচ্ছে যে, R অন্তর্যটিতে প্রতিটি ক্রমজোড় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য y এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায় এবং x এর কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য y এর একাধিক মান পাওয়া যায় না।

∴ R অন্তর্যটি একটি ফাংশন।

গ দেওয়া আছে,

$$F(y) = y^3 - 3y^2 + 5y - 9$$

F(y) কে (y - s) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে F(s)

$$\therefore F(s) = s^3 - 3s^2 + 5s - 9$$

আবার, F(y) কে (y - t) দ্বারা ভাগ করা হলে ভাগশেষ হবে F(t)

$$\therefore F(t) = t^3 - 3t^2 + 5t - 9$$

প্রশ্নানুসারে, F(s) = F(t)

$$\therefore s^3 - 3s^2 + 5s - 9 = t^3 - 3t^2 + 5t - 9$$

$$\text{বা, } s^3 - t^3 - 3(s^2 - t^2) + 5(s - t) - 9 + 9 = 0$$

$$\text{বা, } (s - t)(s^2 + st + t^2) - 3(s + t)(s - t) + 5(s - t) = 0$$

$$\therefore (s - t)(s^2 + st + t^2 - 3s - 3t + 5) = 0$$

যেহেতু s ≠ t, সেহেতু s - t ≠ 0

$$\therefore s^2 + t^2 + st - 3s - 3t + 5 = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ২ (i) $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x}{1-5x}$.

$$(ii) A = x(x + 1).$$

◀সম্মিত অধ্যায় ১ ও ২

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯ ৷ প্রশ্ন নং ১]

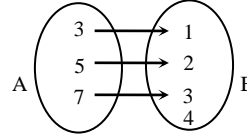
ক. {3, 5, 7} এবং {1, 2, 3, 4} সেটদ্বয় সমতুল কি-না নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, f দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক হলেও অনটু নয়। ৪

গ. $\frac{3x^2 + x + 2}{A}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, A = {3, 5, 7}, B = {1, 2, 3, 4}



A ও B সেট এর মধ্যে এক-এক মিল নেই, তাই A ও B সমতুল নয়।

খ দেওয়া আছে, $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x}{1-5x}$

ফাংশনটি এক-এক হবে, যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয় যেখানে $x_1, x_2 \in$ ডোম f।

$$\text{ধরি, } f(x_1) = f(x_2)$$

$$\text{বা, } \frac{1+x_1}{1-5x_1} = \frac{1+x_2}{1-5x_2}$$

$$\text{বা, } 1 - 5x_2 + x_1 - 5x_1x_2 = 1 + x_2 - 5x_1 - 5x_1x_2$$

$$\text{বা, } 6x_1 = 6x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

∴ ফাংশনটি এক-এক।

$$\text{আবার ধরি, } y = f(x) = \frac{1+x}{1-5x}$$

$$\text{বা, } y = \frac{1+x}{1-5x}$$

$$\text{বা, } y - 5xy = 1 + x$$

$$\Rightarrow y - 1 = x(1 + 5y)$$

$$\therefore x = \frac{y-1}{1+5y} \in \mathbb{R} \text{ হবে যদি ও কেবল যদি}$$

$$1 + 5y \neq 0 \text{ বা } y \neq -\frac{1}{5} \text{ হয়।}$$

$$\therefore \text{রেঞ্জ } f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{5}\right\} \neq \text{কোডোমেন।}$$

∴ ফাংশনটি অনটু নয়।

সুতরাং, ফাংশনটি এক-এক কিন্তু অনটু নয়। (দেখানো হলো)

গ A = x(x + 1)

$$\therefore \frac{3x^2 + x + 2}{A} = \frac{3x^2 + x + 2}{x(x + 1)}$$

$$= \frac{3(x^2 + x) - 2x + 2}{x^2 + x}$$

$$= \frac{3(x^2 + x)}{x^2 + x} + \frac{-2x + 2}{x^2 + x}$$

$$= 3 + \frac{-2(x-1)}{x(x+1)}$$

$$= 3 - 2 \frac{x-1}{x(x+1)} \dots \dots (i)$$

$$\text{ধরি, } \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \dots \dots (ii)$$

$$\text{বা, } x - 1 = A(x + 1) + Bx$$

$$x = 0 \text{ হলে } -1 = A$$

$$\therefore A = -1$$

$$x = -1 \text{ হলে, } -2 = A \cdot 0 - B$$

$$\therefore B = 2$$

(ii) হতে পাই, $\frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1}$

(i) হতে পাই,

$$\frac{3x^2+x+2}{A} = 3 - 2 \left[-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} \right]$$

$$= 3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1}$$

∴ নির্ণয় আংশিক ভগ্নাংশ $= 3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1}$ (Ans.)

প্রশ্ন ৩ $P(x) = 18x^3 - 15x^2 - x + 2$ । [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৯ ৮ প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $3x+1, P(x)$ এর একটি উৎপাদক। ২

খ. $P(x)$ কে $(x-m)$ এবং $(x-n)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে,

$$18m^2 + 18mn + 18n^2 - 15m - 15n - 1 = 0 \quad 8$$

গ. $\frac{3x-2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 - 15x^2 - x + 2$

এখন, $P\left(-\frac{1}{3}\right) = 18\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 15\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 2$

$$= -\frac{18}{27} - \frac{15}{9} + \frac{1}{3} + 2$$

$$= 0$$

∴ $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ বা $(3x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

খ $P(x)$ কে $(x-m)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ

$$P(m) = 18m^3 - 15m^2 - m + 2$$

$(x-n)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ

$$P(n) = 18n^3 - 15n^2 - n + 2$$

প্রশ্নমতে, $P(m) = P(n)$

$$\text{বা, } 18m^3 - 15m^2 - m + 2 = 18n^3 - 15n^2 - n + 2$$

$$\text{বা, } 18m^3 - 15m^2 - m - 18n^3 + 15n^2 + n = 0$$

$$\text{বা, } 18m^3 - 18n^3 - 15m^2 + 15n^2 - m + n = 0$$

$$\text{বা, } 18(m-n)(m^2+mn+n^2) - 15(m+n)(m-n) - (m-n) = 0$$

$$\text{বা, } (m-n)(18m^2 + 18mn + 18n^2 - 15m - 15n - 1) = 0$$

$$\therefore 18m^2 + 18mn + 18n^2 - 15m - 15n - 1 = 0 \quad [\square m \neq n]$$

(দেখানো হলো)

গ 'ক' হতে পাই, $(3x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\therefore P(x) = 18x^3 - 15x^2 - x + 2$$

$$= 18x^3 + 6x^2 - 21x^2 - 7x + 6x + 2$$

$$= 6x^2(3x+1) - 7x(3x+1) + 2(3x+1)$$

$$= (3x+1)(6x^2 - 7x + 2)$$

$$= (3x+1)(6x^2 - 4x - 3x + 2)$$

$$= (3x+1)\{2x(3x-2) - 1(3x-2)\}$$

$$= (3x+1)(3x-2)(2x-1)$$

$$\therefore \frac{3x-2}{P(x)} = \frac{3x-2}{(3x+1)(3x-2)(2x-1)}$$

$$= \frac{1}{(3x+1)(2x-1)}$$

ধরি, $\frac{1}{(3x+1)(2x-1)} = \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{2x-1}$

বা, $1 = A(2x-1) + B(3x+1)$

$x = -\frac{1}{3}$ হলে,

$$1 = A\left(2 \cdot -\frac{1}{3} - 1\right) + 0$$

বা, $1 = -\frac{5}{3}A$

বা, $A = -\frac{3}{5}$

$x = \frac{1}{2}$ হলে,

$$1 = 0 + B\left(3 \cdot \frac{1}{2} + 1\right)$$

বা, $1 = \frac{5}{2}B$

বা, $B = \frac{2}{5}$

$$\therefore \frac{3x-2}{P(x)} = -\frac{3}{5(3x+1)} + \frac{2}{5(2x-1)} \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ৪ দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$ এবং $A = \frac{2x}{x^4-1}$.

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[যশোর বোর্ড-২০১৯ ৮ প্রশ্ন নং ১]

ক. F ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $F^{-1}(-3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. A কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$

$F(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $3x+2 \neq 0$ হয়।

বা, $x \neq -\frac{2}{3}$ হয়।

$$\therefore \text{ডোমেন} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{3} \right\} \quad (\text{Ans.})$$

খ ধরি, $F^{-1}(x) = a$

বা, $x = F(a)$

বা, $x = \frac{2a-3}{3a+2}$

বা, $3ax + 2x = 2a - 3$

বা, $2a - 3ax = 2x + 3$

বা, $a(2-3x) = 2x+3$

বা, $a = \frac{2x+3}{2-3x}$

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{2x+3}{2-3x} \quad [\text{যেহেতু } F^{-1}(x) = a]$$

$$\therefore F^{-1}(-3) = \frac{2(-3)+3}{2-3(-3)}$$

$$= \frac{-6+3}{2+9}$$

$$= \frac{-3}{11} \quad (\text{Ans.})$$

গ দেওয়া আছে, $A = \frac{2x}{x^4-1}$

$$= \frac{2x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{2x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

ধরি, $\frac{2x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

..... (i)

(i) এর উভয়পক্ষে $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)$$

..... (ii)

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$2(-1) = A(-1-1)(1+1)$$

বা, $-2 = -4A$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এ, $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$2 \cdot 1 = B \cdot 2 \cdot (1+1)$$

বা, $2 = 4B$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B + C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 0$$

$$\therefore C = -1$$

$$\text{এবং } -A + B + D = 0$$

$$\text{বা, } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + D = 0$$

$$\therefore D = 0$$

(i) নং এ A, B, C ও D এর মান বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} &= \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{-1 \cdot x + 0}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৫ $F(x) = \sqrt{1-2x}$ এবং $Q(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$ ◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[সকল বোর্ড-২০১৮ // প্রশ্ন নং ১]

- ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২
 খ. $F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর। ৪
 গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{1-2x}$

$F(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি,

$$1-2x \geq 0$$

$$\text{বা, } -2x \geq -1$$

$$\text{বা, } 2x \leq 1$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore F(x) = \sqrt{1-2x} \text{ এর ডোমেন} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2}\} \text{ (Ans.)}$$

খ ধরি, $y = F(x) = \sqrt{1-2x}$

$$\text{বা, } y^2 = 1-2x \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 2x = 1-y^2$$

$$\text{বা, } x = \frac{1-y^2}{2}$$

$$\therefore F^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2} \text{ [}\square y = F(x), \therefore F^{-1}(y) = x\text{]}$$

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2}$$

ধরি, $x_1, x_2 \in \text{ডোম } F^{-1}(x)$

$F^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি

$$F(x_1) = F(x_2) \text{ এর জন্য } x_1 = x_2 \text{ হয়।}$$

$$\text{ধরি, } F^{-1}(x_1) = F^{-1}(x_2)$$

$$\text{বা, } \frac{1-x_1^2}{2} = \frac{1-x_2^2}{2}$$

$$\text{বা, } 1-x_1^2 = 1-x_2^2$$

$$\therefore x_1 = \pm x_2$$

সুতরাং ফাংশনটি এক-এক নয়।

গ দেওয়া আছে,

$$Q(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$$

$$= \frac{x^2-16+16}{x^2-16}$$

$$= \frac{x^2-16}{x^2-16} + \frac{16}{x^2-16}$$

$$= 1 + \frac{16}{(x+4)(x-4)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{16}{(x+4)(x-4)} \equiv \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} \dots \dots (i)$$

(i) নং কে $(x+4)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$16 \equiv A(x-4) + B(x+4) \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$$16 = A(-4-4) + B(-4+4)$$

$$\text{বা, } 16 = -8A$$

$$\therefore A = -2$$

আবার, (ii) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 = A(4-4) + B(4+4)$$

$$\text{বা, } 16 = 8B$$

$$\therefore B = 2$$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{16}{(x+4)(x-4)} = \frac{-2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$$

$$\therefore Q(x) = \frac{x^2}{x^2-16} = 1 - \frac{2}{x+4} + \frac{2}{x-4} \text{ যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত}$$

রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৬ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$ দুটি বীজগণিতীয় সমীকরণ। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ // প্রশ্ন নং ২]

- ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২
 খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x+2)$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. $\frac{x^2+x-1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

$$= x(x^2 + x - 6)$$

$$= x(x^2 + 3x - 2x - 6)$$

$$= x\{x(x+3) - 2(x+3)\}$$

$$= x(x+3)(x-2) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$

যেহেতু $(3x+2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক, তাই, $(3x+2)$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\text{বা, } 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + a = 0$$

$$\text{বা, } -18 \cdot \frac{8}{27} + 15 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } a = \frac{16}{3} - \frac{20}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } a = \frac{16-20-2}{3} \text{ বা, } a = \frac{-6}{3}$$

$$\therefore a = -2 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই,

$$\therefore Q(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x^2 + 3x - 2x - 6)$$

$$= x\{x(x+3) - 2(x+3)\} = x(x+3)(x-2)$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$$

$$= \frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \dots \dots (i)$$

উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2+x-1 \equiv A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \dots (ii)$$

যা x -এর সকল মানের জন্য সত্য।

$$(ii) \text{ নং এ } x = 0 \text{ বসিয়ে পাই, } -1 = A \cdot (-2) \cdot 3 \text{ বা, } -6A = -1$$

$$\therefore A = \frac{1}{6}$$

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 + 2 - 1 = A(2-2)(2+3) + B \cdot 2 \cdot (2+3) + C \cdot 2 \cdot (2-2)$$

$$\text{বা, } 4 + 2 - 1 = B \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{বা, } 10B = 5$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 + (-3) - 1 = A(-3 - 2) + B(-3 + 3) + C(-3)(-3 - 2)$$

$$\text{বা, } 9 - 3 - 1 = C(-3)(-5)$$

$$\text{বা, } 15C = 5$$

$$\therefore C = \frac{1}{3}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৭ $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ // প্রশ্ন নং ২]

ক. $P(x)$ এর মাত্রা ও মুখ্য সহগের অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে $x - m$ এবং $x - n$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $m \neq n$, তবে দেখাও যে, $m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n + 11 = 0$. ৪

গ. $\frac{x^3}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

এখানে, চলক x এর সর্বোচ্চ ঘাত = 3

$\therefore P(x)$ এর মাত্রা = 3

এবং $P(x)$ এর মুখ্য সহগ = 1

$\therefore P(x)$ এর মাত্রা ও মুখ্য সহগের অনুপাত = 3 : 1 (Ans.)

খ $P(x)$ কে $(x - m)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(m)$

$$\therefore P(m) = m^3 - 6m^2 + 11m - 6$$

এবং $P(x)$ কে $(x - n)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(n)$

$$\therefore P(n) = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$

প্রশ্নমতে, $P(m) = P(n)$

$$\text{বা, } m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$

$$\text{বা, } m^3 - n^3 - 6m^2 + 6n^2 + 11m - 11n = 0$$

$$\text{বা, } (m - n)(m^2 + mn + n^2) - 6(m + n)(m - n) + 11(m - n) = 0$$

$$\text{বা, } (m - n)(m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n + 11) = 0$$

$$\therefore m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n + 11 = 0 \quad [\square m \neq n \text{ বলে } m - n \neq 0]$$

(দেখানো হলো)

গ $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$$

$$= x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\therefore \frac{x^3}{P(x)} = \frac{x^3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \equiv 1 + \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \dots \dots (i)$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^3 \equiv (x - 1)(x - 2)(x - 3) + A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1 = A(-1)(-2) \text{ বা, } A = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$8 = B(1)(-1) \text{ বা, } B = -8$$

(ii) নং এ $x = 3$ বসিয়ে পাই, $27 = C(2)(1)$ বা, $C = \frac{27}{2}$

এখন, A, B এবং C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = 1 + \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{8}{x - 2} + \frac{27}{2(x - 3)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৮ $f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + c$, $g(x) = x^2 - 4x - 7$ এবং

$h(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ হলো x চলকের তিনটি বহুপদী।

[বরিশাল বোর্ড-২০১৭ // প্রশ্ন নং ২]

ক. $h(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে c এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{g(x)}{h(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $h(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

$$x = -1 \text{ হলে } h(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$$

$$= -1 - 1 + 10 - 8$$

$$= 0$$

অতএব $(x + 1)$, $h(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\therefore h(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$

$$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$$

$$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$$

$$= (x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\}$$

$$= (x + 1)(x + 2)(x - 4) \text{ (Ans.)}$$

খ সৃজনশীল ৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $g(x) = x^2 - 4x - 7$

“ক” থেকে পাই,

$$h(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)$$

$$\therefore \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$$

$$\text{মনে করি, } \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 4} \dots \dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x + 2)(x - 4) + B(x + 1)(x - 4) + C(x + 1)(x + 2) \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$1 + 4 - 7 = A(-1 + 2)(-1 - 4)$$

$$\text{বা, } -2 = A(-5)$$

$$\therefore A = \frac{2}{5}$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$4 + 8 - 7 = B(-2 + 1)(-2 - 4)$$

$$\text{বা, } 5 = B(-1)(-6)$$

$$\therefore B = \frac{5}{6}$$

(ii) নং এর উভয় পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 - 16 - 7 = C(4 + 1)(4 + 2)$$

$$\text{বা, } -7 = C(5)(6)$$

$$\therefore C = -\frac{7}{30}$$

এখন A, B, C এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} = \frac{2}{5(x + 1)} + \frac{5}{6(x + 2)} - \frac{7}{30(x - 4)}$$

এটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৯ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $g(a) = \frac{2a}{(a + 1)(a^2 + 1)^2}$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি। [ঢাকা বোর্ড-২০১৬ // প্রশ্ন নং ২]

ক. $f(-3)$ এর মান কত? ২

খ. $f(x)$ কে $x - p$ এবং $x - q$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $p \neq q$, তবে দেখাও যে,

$$p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0 \quad ৪$$

গ. $g(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$$\therefore f(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 + 6(-3) + 8$$

$$= -27 + 45 - 18 + 8 = 53 - 45 = 8 \text{ (Ans.)}$$

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৪৪

গ দেওয়া আছে, $g(a) = \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$
 ধরি, $\frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2} \equiv \frac{A}{a+1} + \frac{Ba+C}{a^2+1} + \frac{Da+E}{(a^2+1)^2} \dots(i)$
 (i) নং এর উভয়পক্ষকে $(a+1)(a^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $2a \equiv A(a^2+1)^2 + (Ba+C)(a+1)(a^2+1) + (Da+E)(a+1) \dots(ii)$

যা a এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এ $a = -1$ বসিয়ে পাই, $2(-1) = A(1+1)^2$

বা, $-2 = 4A$ বা, $A = -\frac{2}{4}$

$\therefore A = -\frac{1}{2}$

(ii) নং থেকে,

$2a \equiv A(a^4+2a^2+1) + (Ba+C)(a^3+a+a^2+1) + Da^2 + Da + Ea + E$

বা, $2a \equiv Aa^4 + 2Aa^2 + A + Ba^4 + Ba^2 + Ba^3 + Ba + Ca^3 + Ca + Ca^2 + C + Da^2 + Da + Ea + E$

$\therefore 2a \equiv (A+B)a^4 + (B+C)a^3 + (2A+B+C+D)a^2 + (B+C+D+E)a + (A+C+E)$

a^4, a^3, a^2 ও a এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A+B=0$

বা, $-\frac{1}{2} + B = 0$ [$\because A = -\frac{1}{2}$]

$\therefore B = \frac{1}{2}$

আবার, $B+C=0$

বা, $\frac{1}{2} + C = 0$

$\therefore C = -\frac{1}{2}$

আবার, $2A+B+C+D=0$

বা, $2\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + D = 0$

বা, $-1 + D = 0$

$\therefore D = 1$

আবার, $B+C+D+E=2$

বা, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + E = 2$ বা, $E = 2 - 1$

$\therefore E = 1$

এখন, A, B, C, D ও E এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{a+1} + \frac{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}}{a^2+1} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(a+1)} + \frac{a-1}{2(a^2+1)} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ১০ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ এবং $g(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$ দুটি ফাংশন।

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬ ৭/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(-1)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $3x-1 > 0$ হয়।

বা, $3x-1+1 > 0+1$ বা, $3x > 1$

$\therefore x > \frac{1}{3}$

\therefore ফাংশনের ডোমেন = $\{x \in \mathbb{V} : x > \frac{1}{3}\}$ (Ans.)

খ ধরি, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

বা, $y^2 = \frac{1}{3x-1}$ [বর্গ করে]

বা, $3x-1 = \frac{1}{y^2}$

বা, $3x = \frac{1}{y^2} + 1$

বা, $3x = \frac{1+y^2}{y^2}$

বা, $x = \frac{1+y^2}{3y^2}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{3y^2}$ [$\square f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)$]

$\therefore f^{-1}(-1) = \frac{1+(-1)^2}{3(-1)^2} = \frac{1+1}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$ (Ans.)

গ সৃজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ১১ $P(x) = x^2 + x - 12$, $Q(x) = 9x + 2$. ◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২
 [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬ ৭/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $F(x) = \frac{2x}{x+3}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $2x-a$ এবং $2x-b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a+b+2=0$ ৪

গ. $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{2x}{x+3}$

$F(x) = \frac{2x}{x+3} \in \mathbb{V}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x+3 \neq 0$ হয়

অর্থাৎ $x \neq -3$ হয়

\therefore ডোম, $F = \mathbb{V} - \{-3\}$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $P(x) = x^2 + x - 12$

$P(x)$ কে $(2x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(\frac{a}{2}\right)$

$\therefore P\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} - 12$

আবার, $P(x)$ কে $(2x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(\frac{b}{2}\right)$ ।

$\therefore P\left(\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b}{2} - 12$

শর্তানুসারে, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} - 12 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b}{2} - 12$

বা, $\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} - 12 = \frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} - 12$

বা, $a^2 + 2a - 48 = b^2 + 2b - 48$

বা, $a^2 + 2a - 48 - b^2 - 2b + 48 = 0$

বা, $a^2 - b^2 + 2a - 2b = 0$

বা, $(a+b)(a-b) + 2(a-b) = 0$

বা, $(a+b+2)(a-b) = 0$

যেহেতু $a \neq b$ সুতরাং $a-b \neq 0$

$\therefore a+b+2=0$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$P(x) = x^2 + x - 12$

এবং $Q(x) = 9x + 2$

এখন, $x^2 + x - 12 = x^2 + 4x - 3x - 12 = x(x+4) - 3(x+4)$
 $= (x+4)(x-3)$

$\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{9x+2}{x^2+x-12} = \frac{9x+2}{(x+4)(x-3)}$

ধরি, $\frac{9x+2}{(x+4)(x-3)} \equiv \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-3} \dots(i)$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+4)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$9x+2 \equiv A(x-3) + B(x+4) \dots(ii)$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$$9(-4) + 2 = A(-4 - 3) + B(-4 + 4)$$

$$\text{বা, } -36 + 2 = -7A$$

$$\text{বা, } -34 = -7A$$

$$\therefore A = \frac{34}{7}$$

আবার, (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$$9 \cdot 3 + 2 = A(3 - 3) + B(3 + 4)$$

$$\text{বা, } 29 = 7B$$

$$\therefore B = \frac{29}{7}$$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{9x + 2}{(x + 4)(x - 3)} = \frac{34}{7} \cdot \frac{1}{x + 4} + \frac{29}{7} \cdot \frac{1}{x - 3}$$

$$\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{34}{7(x + 4)} + \frac{29}{7(x - 3)} \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ▶ ১২ $p(x) = x^3 + x^2 - 6x$ এবং $f(x) = x^2 - 9x - 6$ দুটি ফাংশন।

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬ ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x)$ কে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

২

খ. $p(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে,

$$a^2 + ab + b^2 + a + b = 6. \quad 8$$

গ. $\frac{f'(x)}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

8

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$f(x) = x^2 - 9x - 6$$

এখন, $f(x)$ কে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-3)$ ।

$$\therefore f(-3) = (-3)^2 - 9(-3) - 6 = 9 + 27 - 6 = 30 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$p(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

$p(x)$ কে $(x - a)$ ও $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে যথাক্রমে $p(a)$ ও $p(b)$ ।

প্রশ্নানুসারে, $p(a) = p(b)$

$$\text{বা, } a^3 + a^2 - 6a = b^3 + b^2 - 6b$$

$$\text{বা, } a^3 - b^3 + a^2 - b^2 - 6(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b)(a - b) - 6(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b - 6) = 0$$

$$\text{বা, } a^2 + ab + b^2 + a + b - 6 = 0 \text{ [যেহেতু } a \neq b \text{ সেহেতু } a - b \neq 0]$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 + a + b = 6 \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$\text{গ} \frac{f(x)}{p(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x^2 + x - 6)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x^2 + 3x - 2x - 6)}$$

$$\therefore \frac{f(x)}{p(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2) \dots \dots \dots (ii)$$

যা x -এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$0 - 0 - 6 = A(0 - 2)(0 + 3) + 0 + 0$$

$$\text{বা, } -6 = -6A$$

$$\therefore A = 1$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 - 9 \cdot 2 - 6 = 0 + B \cdot 2(2 + 3) + 0$$

$$\text{বা, } -20 = 10B$$

$$\therefore B = -2$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 - 9(-3) - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-3 - 2)$$

$$\text{বা, } 30 = 15C$$

$$\therefore C = 2$$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 3}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ১৩ $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা $p \neq 0, s \neq 0$ এবং $x - 1$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক। অপর একটি রাশি

$$Q(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16} \quad \text{[সিলেট বোর্ড-২০১৬ ৷ প্রশ্ন নং ১]}$$

ক. দেখাও যে, $p + q + r + s = 0$. ২

খ. যদি $p = 1, q = 5, r = 6, s = 8$ হয় এবং $g(x)$ কে $x - k$ ও $x - \ell$ দ্বারা ভাগ করিলে একই অবশিষ্ট থাকে, যেখানে $k \neq \ell$ তবে দেখাও যে, $k^2 + \ell^2 + k\ell + 5k + 5\ell + 6 = 0$. 8

গ. $Q(x)$ -কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

$(x - 1), g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

অর্থাৎ, $g(1) = 0$

$$\text{বা, } p(1)^3 + q(1)^2 + r \cdot 1 + s = 0$$

$$\therefore p + q + r + s = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ এখানে,

$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

এবং $p = 1, q = 5, r = 6, s = 8$

$$\therefore g(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- 88

গ দেওয়া আছে,

$$Q(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16} = \frac{x(x^2 - 16) + 16x}{x^2 - 16} = x + \frac{16x}{x^2 - 16}$$

$$= x + \frac{16x}{(x + 4)(x - 4)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{16x}{(x + 4)(x - 4)} \equiv \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 4} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(x + 4)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$16x \equiv A(x - 4) + B(x + 4) \dots \dots \dots (ii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$$16 \times (-4) = A(-4 - 4) + B(-4 + 4)$$

$$\text{বা, } -64 = -8A$$

$$\therefore A = 8$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$16 \times 4 = A(4 - 4) + B(4 + 4)$$

$$\text{বা, } 64 = 8B$$

$$\therefore B = 8$$

A ও B এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{16x}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{8}{x + 4} + \frac{8}{x - 4} = 8 \left(\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{x - 4} \right)$$

$$\therefore Q(x) = x + 8 \left(\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{x - 4} \right)$$

যা প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ১৪ $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ এবং $Q(x) = x^2 - 2x - 8$.

[যশোর বোর্ড-২০১৬ ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $\frac{x^2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

গ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $Q(x)$ হলে, a এবং b এর মান নির্ণয় কর। 8

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$Q(x) = x^2 - 2x - 8$$

$$= x^2 - 4x + 2x - 8$$

$$= x(x - 4) + 2(x - 4)$$

$$= (x - 4)(x + 2) \text{ (Ans.)}$$

$$\frac{x^2}{Q(x)} = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x^2 - 2x - 8) + (2x + 8)}{x^2 - 2x - 8}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 2x - 8} + \frac{2x + 8}{x^2 - 2x - 8}$$

$$= 1 + \frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} \text{ ['ক' হতে প্রাপ্ত]}$$

$$\therefore \frac{x^2}{Q(x)} = 1 + \frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{ধরি, } \frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2} \dots\dots\dots (ii)$$

(ii) নং কে $(x - 4)(x + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x + 8 = A(x + 2) + B(x - 4) \dots\dots\dots (iii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(iii) নং এ $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$$2 \cdot 4 + 8 = A(4 + 2) + B(4 - 4)$$

$$\text{বা, } 8 + 8 = A \cdot 6 + B \cdot 0$$

$$\text{বা, } 6A = 16 \text{ বা, } A = \frac{16}{6}$$

$$\therefore A = \frac{8}{3}$$

আবার, (iii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$2(-2) + 8 = A(-2 + 2) + B(-2 - 4)$$

$$\text{বা, } -4 + 8 = A \cdot 0 + B(-6)$$

$$\text{বা, } 4 = -6B$$

$$\text{বা, } B = \frac{-4}{6}$$

$$\therefore B = \frac{-2}{3}$$

এখন, A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x + 8}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{\frac{8}{3}}{x - 4} + \frac{\frac{-2}{3}}{x + 2} = \frac{8}{3(x - 4)} - \frac{2}{3(x + 2)}$$

$$(i) \text{ নং হতে পাই, } \frac{x^2}{Q(x)} = 1 + \frac{8}{3(x - 4)} - \frac{2}{3(x + 2)} \text{ (Ans.)}$$

গ 'ক' হতে পাই,

$$Q(x) = (x - 4)(x + 2)$$

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$

$(x - 4)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $P(4) = 0$ হবে।

$$\therefore P(4) = 4^3 - 4^2 + a(4) + b = 64 - 16 + 4a + b = 4a + b + 48$$

$$\text{শর্তমতে, } 4a + b + 48 = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

আবার, $(x + 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $P(-2) = 0$ হবে।

$$\therefore P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + b = -8 - 4 - 2a + b = -2a + b - 12$$

$$\text{শর্তমতে, } -2a + b - 12 = 0 \dots\dots\dots (v)$$

(iv) নং থেকে (v) নং বিয়োগ করে পাই,

$$4a + b + 48 + 2a - b + 12 = 0$$

$$\text{বা, } 6a + 60 = 0 \text{ বা, } 6a = -60 \therefore a = -10$$

a এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই,

$$-2(-10) + b - 12 = 0$$

$$\text{বা, } 20 + b - 12 = 0 \text{ বা, } b + 8 = 0 \therefore b = -8$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান: } a = -10 \text{ এবং } b = -8$$

প্রশ্ন ▶ ১৫ $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$ একটি ফাংশন যেখানে $x \neq 1$.

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[বরিশাল বোর্ড-২০১৬ // প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(p) = k$ হলে, p এর মান k এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x^2)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$; যেখানে, $x \neq 1$

$$\therefore f(p) = \frac{2p + 2}{p - 1}$$

শর্তমতে, $f(p) = k$

$$\text{বা, } \frac{2p + 2}{p - 1} = k$$

$$\text{বা, } 2p + 2 = pk - k$$

$$\text{বা, } 2p - pk = -k - 2$$

$$\text{বা, } p(2 - k) = -(k + 2)$$

$$\text{বা, } p = \frac{-(k + 2)}{2 - k}$$

$$\therefore p = \frac{k + 2}{k - 2} \text{ (Ans.)}$$

খ ধরি, $y = f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$

$$\therefore y = \frac{2x + 2}{x - 1}$$

$$\text{বা, } xy - y = 2x + 2$$

$$\text{বা, } xy - 2x = y + 2$$

$$\text{বা, } x(y - 2) = y + 2$$

$$\text{বা, } x = \frac{y + 2}{y - 2}$$

$$\text{বা, } f^{-1}(y) = \frac{y + 2}{y - 2} \left[\begin{array}{l} \square f(x) = y \\ \therefore x = f^{-1}(y) \end{array} \right]$$

$$\therefore f^{-1}(3) = \frac{3 + 2}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$

$$\therefore f(x^2) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1 + 2)}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 1} + \frac{4}{x^2 - 1}$$

$$\therefore f(x^2) = 2 + \frac{4}{(x + 1)(x - 1)} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{ধরি, } \frac{4}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} \dots\dots\dots (ii)$$

(ii) নং কে $(x + 1)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\therefore 4 = A(x - 1) + B(x + 1) \dots\dots\dots (iii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

$$(iii) \text{ নং এ } x = 1 \text{ বসিয়ে পাই, } 4 = 2B \therefore B = 2$$

$$(iii) \text{ নং এ } x = -1 \text{ বসিয়ে পাই, } 4 = -2A \therefore A = -2$$

\therefore (ii) নং হতে পাই,

$$\frac{4}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{-2}{x + 1} + \frac{2}{x - 1}$$

$$\text{তাহলে (i) থেকে, } f(x^2) = 2 - \frac{2}{x + 1} + \frac{2}{x - 1}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ১৬ $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

এবং $Q(x, y, z) = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3}$ দুটি বীজগণিতীয় রাশি।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট // প্রশ্ন নং ২]

ক. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক এবং প্রতিসম কিনা যাচাই কর। ২

খ. $Q(x, y, z) = 3(xy z)^{-1}$ হলে, দেখাও যে, ৪

$$x = y = z \text{ বা } xy + yz + zx = 0$$

গ. যদি $P(x, y, z) = xyz$ হয়, তাহলে দেখাও যে, ৪

$$\frac{1}{(x + y + z)^9} = \frac{1}{x^9} + \frac{1}{y^9} + \frac{1}{z^9}$$

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

$$\begin{aligned}\therefore P(y, z, x) &= (y + z + x)(yz + zx + xy) \\ &= (x + y + z)(xy + yz + zx) \\ \therefore P(z, x, y) &= (z + x + y)(zx + xy + yz) \\ &= (x + y + z)(xy + yz + zx)\end{aligned}$$

সুতরাং এটি একটি চক্রক্রমিক রাশি।

আবার, x, y, z চলকের যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময় করলেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং এটি একটি প্রতিসম রাশি।

খ দেওয়া আছে, $Q = x^{-3} + y^{-3} + z^{-3}$
এবং $Q = 3(xyz)^{-1}$

সুতরাং $x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} = 3(xyz)^{-1}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 \right\} = 0$

[$\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$]

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 \right\} = 0$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$

$\therefore yz + zx + xy = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$ এবং $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$ বা, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

$\therefore x = y$ $\therefore y = z$

$\therefore x = y = z$

সুতরাং $yz + zx + xy = 0$ অথবা $x = y = z$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$P(x, y, z) = xyz$

বা, $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$

বা, $x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x = xyz$

বা, $x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + z^2x + yz^2 + x^2z + xyz = 0$

বা, $xy(x + y) + yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) = 0$

বা, $(x + y)(xy + yz + z^2 + xz) = 0$

বা, $(x + y)\{y(x + z) + z(z + x)\} = 0$

বা, $(x + y)(y + z)(z + x) = 0$

$\therefore x + y = 0$ অথবা $y + z = 0$ অথবা $z + x = 0$

$\therefore x = -y$ $\therefore y = -z$ $\therefore z = -x$

এখন, $\frac{1}{(x + y + z)^9} = \frac{1}{(x - z + z)^9} = \frac{1}{x^9}$ [$\square y = -z$]

আবার, $\frac{1}{x^9} + \frac{1}{y^9} + \frac{1}{z^9}$

$= \frac{1}{x^9} - \frac{1}{z^9} + \frac{1}{z^9}$ [$\square y = -z$]

$= \frac{1}{x^9}$

$\therefore \frac{1}{(x + y + z)^9} = \frac{1}{x^9} + \frac{1}{y^9} + \frac{1}{z^9}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ১৭ $F(x) = \frac{x}{x+4}$ একটি ফাংশন।

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা // প্রশ্ন নং ১]

ক. $\ln F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

২

খ. $F^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ণয় কর।

৪

গ. $\frac{F(x)}{x^3 + 4x^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\ln F(x)$ ফাংশনটিতে লগারিদম থাকায় শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য $\ln F(x)$ সংজ্ঞায়িত হয়।

সুতরাং $\frac{x}{x+4} > 0$ হবে (i) যদি $x > 0$ এবং $x + 4 > 0$

অথবা (ii) $x < 0$ এবং $x + 4 < 0$ হয়।

শর্ত (i) হতে পাই, $x > 0$ এবং $x + 4 > 0$ বা, $x > -4$

\therefore ডোমেন = $\{x : -4 < x\} \cap \{x : x > 0\}$
 $= (-4, \infty) \cap (0, \infty) = (0, \infty)$

শর্ত (ii) হতে পাই, $x < 0$ এবং $x < -4$

\therefore ডোমেন = $\{x : x < -4\}$ এবং $\{x : x < 0\}$
 $= (-\infty, -4) \cap (-\infty, 0)$
 $= (-\infty, -4)$

\therefore প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন,

$D_f =$ শর্ত (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

$= \nabla - [-4, 0]$ (Ans.)

খ ধরি, $y = F(x) = \frac{x}{x+4}$

বা, $xy + 4y = x$

বা, $xy - x = -4y$

বা, $x = \frac{-4y}{y-1}$

বা, $x = \frac{4y}{1-y}$

$\therefore F^{-1}(y) = \frac{4y}{1-y}$

$\therefore F^{-1}(x) = \frac{4x}{1-x}$

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম $F^{-1}(x)$

$F^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি

$F^{-1}(x_1) = F^{-1}(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $F^{-1}(x_1) = F^{-1}(x_2)$

বা, $\frac{4x_1}{1-x_1} = \frac{4x_2}{1-x_2}$

বা, $4x_1 - 4x_1x_2 = 4x_2 - 4x_1x_2$

বা, $4x_1 = 4x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

সুতরাং ফাংশনটি এক-এক।

গ $\frac{F(x)}{x^3 + 4x^2} = \frac{\frac{x}{x+4}}{x^3 + 4x^2}$

$= \frac{x}{(x+4)(x^3 + 4x^2)}$

$= \frac{1}{(x+4)(x^2 + 4x)}$

$= \frac{1}{x(x+4)(x+4)}$

$= \frac{1}{x(x+4)^2}$

ধরি, $\frac{1}{x(x+4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{(x+4)^2}$ (1)

(1) এর উভয় পক্ষকে $x(x+4)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 = A(x+4)^2 + Bx(x+4) + Cx$ (2)

(2) এর উভয় পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই—

$1 = A(0+4)^2 + B \cdot 0 \cdot (0+4) + C \times 0$

বা, $A = \frac{1}{16}$

(2) এর উভয় পক্ষে $x = -4$ বসিয়ে পাই—

$1 = A(-4+4)^2 + B \times (-4) \times (-4+4) + C \times (-4)$

$$\text{বা, } C = -\frac{1}{4}$$

আবার, (2) এর x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 0$$

$$\text{বা, } B = -A$$

$$\text{বা, } B = -\frac{1}{16}$$

এখন, A, B এবং C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+4)^2} &= \frac{1}{16x} + \frac{-1}{16(x+4)} + \frac{-1}{4(x+4)^2} \\ &= \frac{1}{16x} - \frac{1}{16(x+4)} - \frac{1}{4(x+4)^2} \end{aligned}$$

যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ১৮ $f(x) = x$ [বিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, বিনাইদহ ৷ প্রশ্ন নং ২]

ক. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক বা প্রতিসম কিনা যাচাই কর। ২

খ. $[f(a) + f(b) + f(c)] [f(a) \cdot f(b) + f(b) \cdot f(c) + f(c) \cdot f(a)]$
 $= f(a) \cdot f(b) \cdot f(c)$ হলে দেখাও যে, $[f(a) + f(b) + f(c)]^{2n+1} = [f(a)]^{2n+1}$
 $+ [f(b)]^{2n+1} + [f(c)]^{2n+1}$, যেখানে, $n \in \mathbb{I}$. 8

গ. $\frac{f(x)}{[f(x)]^3 + 2[f(x)]^2 - 5f(x) - 6}$ রাশিটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে x এর পরিবর্তে y , y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই থাকে। কিন্তু রাশিটি প্রতিসম নয়।

কারণ, রাশিটিতে x এবং y স্থান বিনিময় করলে $\frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}$ পাওয়া যায় যা পূর্বের রাশিটি থেকে ভিন্ন।

$\therefore \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ রাশিটি প্রতিসম নয়, কিন্তু চক্র-ক্রমিক।

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x$

$$\therefore [f(a) + f(b) + f(c)] [f(a) \cdot f(b) + f(b) \cdot f(c) + f(c) \cdot f(a)] = f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \text{ হতে পাই,}$$

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$$

$$\text{বা, } a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + ca^2 + abc + c^2a = abc$$

$$\text{বা, } a^2b + ab^2 + abc + b^2c + c^2a + bc^2 + a^2c + abc = 0$$

$$\text{বা, } ab(a + b) + bc(a + b) + c^2(a + b) + ac(a + b) = 0$$

$$\text{বা, } (a + b)(ab + bc + c^2 + ac) = 0$$

$$\text{বা, } (a + b)\{b(a + c) + c(c + a)\} = 0$$

$$\text{বা, } (a + b)(b + c)(c + a) = 0$$

$$\therefore a + b = 0 \text{ অথবা } b + c = 0 \text{ অথবা } c + a = 0$$

$$\therefore a = -b \quad \therefore b = -c \quad \therefore c = -a$$

এখন, $[f(a) + f(b) + f(c)]^{2n+1}$

$$= (a + b + c)^{2n+1}$$

$$= (a - c + c)^{2n+1} = a^{2n+1}$$

আবার, $[f(a)]^{2n+1} + [f(b)]^{2n+1} + [f(c)]^{2n+1}$

$$= a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$$

$$= a^{2n+1} + (-c)^{2n+1} + c^{2n+1}$$

$$= a^{2n+1} - c^{2n+1} + c^{2n+1}$$

$[n \in \mathbb{I} \text{ হওয়ায় } 2n + 1 \text{ সর্বদা বিজোড় সংখ্যা}]$

$$= a^{2n+1}$$

$$\therefore [f(a) + f(b) + f(c)]^{2n+1} = [f(a)]^{2n+1} + [f(b)]^{2n+1} + [f(c)]^{2n+1}$$

(দেখানো হলো)

গ $\frac{f(x)}{[f(x)]^3 + 2[f(x)]^2 - 5f(x) - 6} = \frac{x}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

$$= \frac{x}{x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6}$$

$$= \frac{x}{x^2(x + 1) + x(x + 1) - 6(x + 1)}$$

$$= \frac{x}{(x + 1)(x^2 + x - 6)}$$

$$= \frac{x}{(x + 1)(x^2 + 3x - 2x - 6)}$$

$$= \frac{x}{(x + 1)\{x(x + 3) - 2(x + 3)\}}$$

$$= \frac{x}{(x + 1)(x + 3)(x - 2)}$$

মনে করি, $\frac{x}{(x + 1)(x + 3)(x - 2)} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x + 3)} \dots$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 3)(x - 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x = A(x + 1)(x + 3) + B(x - 2)(x + 3) + C(x - 2)(x + 1) \dots$$
 (ii)

(ii) নং এ, $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A(2 + 1)(2 + 3) + B \cdot 0 \cdot 5 + C \cdot 0 \cdot 3$$

$$\text{বা, } 2 = 15A$$

$$\therefore A = \frac{2}{15}$$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$-1 = A \cdot 0 + B \cdot (-3) \cdot 2 + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } -1 = -6B$$

$$\therefore B = \frac{1}{6}$$

আবার, (ii) নং এ, $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$-3 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-5) \cdot (-2)$$

$$\text{বা, } -3 = 10C$$

$$\therefore C = -\frac{3}{10}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে,

$$\frac{x}{(x - 2)(x + 1)(x + 3)} = \frac{2}{15(x - 2)} + \frac{1}{6(x + 1)} - \frac{3}{10(x + 3)}$$

ইহাই নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১৯ $f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 1}$, $x \neq \frac{1}{2}$ এবং $Q(a) = \frac{3a^3}{(a - 2)(a - 3)(a - 4)}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $g(x) = \sqrt{2 - x}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা যাচাই কর। 8

গ. $Q(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $g(x) = \sqrt{2 - x}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2 - x \geq 0$ হয়

অর্থাৎ, $x \leq 2$ হয়

\therefore ডোম $g = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x \leq 2\}$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 1}$

মনে করি, $y = f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 1}$

$$\therefore x = f^{-1}(y)$$

$$\text{এখন, } y = \frac{3x + 1}{2x - 1}$$

$$\text{বা, } 2xy - y = 3x + 1$$

$$\text{বা, } 2xy - 3x = y + 1$$

$$\text{বা, } x(2y - 3) = y + 1$$

$$\text{বা, } x = \frac{y + 1}{2y - 3}$$

$$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y + 1}{2y - 3}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x-3}$$

মনে করি, $a, b \in \text{ডোমে } f^{-1}$

$$\therefore f^{-1}(a) = \frac{a+1}{2a-3} \text{ এবং } f^{-1}(b) = \frac{b+1}{2b-3}$$

$f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(b) \text{ এর জন্য } a = b \text{ হয়।}$$

ধরি, $f^{-1}(a) = f^{-1}(b)$

$$\therefore \frac{a+1}{2a-3} = \frac{b+1}{2b-3}$$

$$\text{বা, } 2ab + 2b - 3a - 3 = 2ab + 2a - 3b - 3$$

$$\text{বা, } 2b + 3b = 2ab + 2a - 2ab + 3a + 3 - 3$$

$$\text{বা, } 5b = 5a$$

$$\therefore a = b$$

$$\therefore f^{-1}(a) = f^{-1}(b)$$

অতএব, ফাংশনটি এক এক।

গ দেওয়া আছে, $Q(a) = \frac{3a^3}{(a-2)(a-3)(a-4)}$

মনে করি, $\frac{3a^3}{(a-2)(a-3)(a-4)} = 3 + \frac{A}{a-2} + \frac{B}{a-3} + \frac{C}{a-4}$... (i)

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(a-2)(a-3)(a-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$3a^3 = 3(a-2)(a-3)(a-4) + A(a-3)(a-4) + B(a-2)(a-4) + C(a-2)(a-3) \dots \text{(ii)}$$

(ii) নং এ, $a = 2$ বসিয়ে পাই,

$$3.8 = 3.0 + A.(-1)(-2) + B.0 + C.0$$

$$\text{বা, } 24 = 2A$$

$$\therefore A = 12$$

(ii) নং এ $a = 3$ বসিয়ে পাই,

$$3.3^3 = 3.0 + A.0 + B.1(-1) + C.0$$

$$\text{বা, } 81 = -B$$

$$\therefore B = -81$$

(ii) নং $a = 4$ বসিয়ে পাই,

$$3.4^3 = 3.0 + A.0 + B.0 + C.1.2$$

$$\text{বা, } 192 = 2C$$

$$\therefore C = 96$$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3a^3}{(a-2)(a-3)(a-4)} = 3 + \frac{12}{a-2} - \frac{81}{a-3} + \frac{96}{a-4}$$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ২০ $A = \{x : 2 < x \leq 5, x \in \mathbb{V}\}$, $B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in \mathbb{V}\}$,

$f(z) = z$ এবং $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা // প্রশ্ন নং ১]

ক. $A \cap B$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। ২

খ. $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $P(x, y, z) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$. ৪

গ. $\frac{2f(x^5)}{\{f(x)+1\}\{f(x^2)+1\}^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \leq 5, x \in \mathbb{V}\}$

$$B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in \mathbb{V}\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x : 2 < x < 3, x \in \mathbb{V}\} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$x = b + c - a$$

$$y = c + a - b$$

$$\text{এবং } z = a + b - c$$

এখন, $P(x, y, z)$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= \frac{1}{2}(x+y+z) \{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

$$[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z) \{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}]$$

$$= \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b+a+b-c) \{(b+c-a-c-a+b)^2 + (c+a-b-a-b+c)^2 + (a+b-c-b-c+a)^2\}$$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) \{(2b-2a)^2 + (2c-2b)^2 + (2a-2c)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) \{4(a-b)^2 + 4(b-c)^2 + 4(c-a)^2\}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}(a+b+c) \{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) [\because \frac{1}{2}(a+b+c) \{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$$

$$\therefore P(x, y, z) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ দেওয়া আছে, $f(z) = z$

$$\therefore \frac{2f(x^5)}{(f(x)+1)(f(x^2)+1)^2} = \frac{2x^5}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2+1)^2 - (2x^4+4x^3+4x^2+2x+2)}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{2x^4+4x^3+4x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

ধরি, $\frac{2x^4+4x^3+4x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$... (i)

(i) এর উভয় পাশে $(x+1)(x^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)$$

$$\Rightarrow 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2 = A(x^4 + 2x^2 + 1) + (Bx+C)(x^3 + x + x^2 + 1) + (Dx+E)(x+1)$$

$$\Rightarrow 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2 = A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^3 + x^2 + x) + C(x^3 + x^2 + x + 1) + D(x^2 + x) + E(x+1) \dots \dots \text{(ii)}$$

এখন (ii) এর উভয় পাশের x^4, x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 2 \dots \dots \dots \text{(iii)}$$

$$B + C = 4 \dots \dots \dots \text{(iv)}$$

$$2A + B + C + D = 4 \dots \dots \dots \text{(v)}$$

$$B + C + D + E = 2 \dots \dots \dots \text{(vi)}$$

$$A + C + E = 2 \dots \dots \dots \text{(vii)}$$

$$B + C \text{ এর মান (vi) নং এ বসিয়ে পাই,}$$

$$D + E = 2 - 4 = -2 \dots \dots \dots \text{(viii)}$$

(v) নং হতে পাই,

$$2 + A + C + D = 4 \text{ [A + B = 2 বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow A + C = 2 - D \dots \dots \dots \text{(ix)}$$

(vii) নং হতে পাই,

$$2 - D + E = 2; \text{ [A + C = 2 - D বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } E - D = 0$$

$$\Rightarrow E = D \dots \dots \dots \text{(x)}$$

(viii) হতে পাই, $D + D = -2$ [E = D বসিয়ে]

$$\text{বা, } D = -1$$

$$\text{(x) হতে পাই, } E = D = -1$$

আবার, (v) নং হতে পাই,

$$2A + 4 - 1 = 4 \text{ [B + C = 4 এবং D = -1 বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } A = \frac{1}{2}$$

$$\text{(iii) নং হতে, } B = 2 - A = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{(iv) নং হতে, } C = 4 - B = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

এখন, A, B, C, D ও E এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}}{x^2+1} + \frac{-x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3x+5}{2(x^2+1)} - \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{f(x^5)}{(f(x)+1)(f(x^2)+1)^2} = 2 - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3x+5}{2(x^2+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{প্রশ্ন } \blacktriangleright \text{ ২১ } f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা // প্রশ্ন নং ১]

- ক. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২
- খ. $x-p$ এবং $x-q$ দ্বারা $f(x)$ কে ভাগ করলে যদি একই অবশেষ থাকে তবে দেখাও যে, $p^2 + pq + q^2 + 5p + 5q + 2 = 0$, যখন $p \neq q$. ৪
- গ. $\frac{18-3x}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

$$x = 1 \text{ হলে, } f(1) = 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 8$$

$$= 1 + 5 + 2 - 8$$

$$= 0$$

$\therefore (x-1), f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\therefore f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

$$= x^3 - x^2 + 6x^2 - 6x + 8x - 8$$

$$= x^2(x-1) + 6x(x-1) + 8(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 + 6x + 8)$$

$$= (x-1)(x^2 + 4x + 2x + 8)$$

$$= (x-1)\{x(x+4) + 2(x+4)\}$$

$$= (x-1)(x+2)(x+4) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

$$f(x) \text{ কে } x-p \text{ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে } f(p)$$

$$\therefore f(p) = p^3 + 5p^2 + 2p - 8$$

$$f(x) \text{ কে, } x-q \text{ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে } f(q)$$

$$\therefore f(q) = q^3 + 5q^2 + 2q - 8$$

প্রশ্নমতে, $f(p) = f(q)$

$$\text{বা, } p^3 + 5p^2 + 2p - 8 = q^3 + 5q^2 + 2q - 8$$

$$\text{বা, } (p^3 - q^3) + (5p^2 - 5q^2) + (2p - 2q) = 0$$

$$\text{বা, } (p-q)(p^2 + pq + q^2) + 5(p+q)(p-q) + 2(p-q) = 0$$

$$\text{বা, } (p-q)(p^2 + pq + q^2 + 5p + 5q + 2) = 0$$

$$\therefore p^2 + pq + q^2 + 5p + 5q + 2 = 0 \text{ [} \because p \neq q \text{] (দেখানো হলো)}$$

$$\text{গ } \frac{18-3x}{f(x)} = \frac{18-3x}{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}$$

$$= \frac{18-3x}{(x-1)(x+2)(x+4)} \text{ [ক নং হতে]}$$

$$\text{ধরি, } \frac{18-3x}{(x-1)(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4} \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$\text{(i) নং এর উভয়পক্ষকে } (x-1)(x+2)(x+4) \text{ দ্বারা গুণ করে পাই,}$$

$$18 - 3x = A(x+2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x+2) \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$18 - 3 = A(3)(5) + B \cdot 0 + C \cdot 0$$

$$\therefore A = 1$$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$18 - 3(-2) = A \cdot 0 + B(-3)(2) + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } 18 + 6 = -6B$$

$$\therefore B = -4$$

(ii) নং এ $x = -4$ বসিয়ে পাই,

$$18 - 3(-4) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-5)(-2)$$

$$\text{বা, } 18 + 12 = 10C$$

$$\therefore C = 3$$

A, B, C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{18-3x}{(x-1)(x+2)(x+4)} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

$$\text{প্রশ্ন } \blacktriangleright \text{ ২২ } f(x) = \frac{3x+1}{1-2x} \text{ একটি ফাংশন এবং}$$

$A = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা // প্রশ্ন নং ১]

- ক. 'A' কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২
- খ. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এটি একটি এক-এক ফাংশন। ৪
- গ. উদ্দীপকের ফাংশনের প্রেক্ষিতে $f^{-1}(-5)$ নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

ধরি, $P = x-y, Q = y-z, R = z-x$

তাহলে, $P+Q+R = x-y+y-z+z-x = 0$

$$\text{সুতরাং } P^3 + Q^3 + R^3 = 3PQR$$

$$[\square a+b+c=0 \text{ হলে } a^3+b^3+c^3=3abc]$$

$$\text{অর্থাৎ, } (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

(Ans.)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$

$f(x) \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি $1-2x \neq 0$ হয় বা, $x \neq \frac{1}{2}$ হয়

$$\therefore \text{ডোম } f = \nabla - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ (Ans.)}$$

$f(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো $a, b \in \text{ডোম } f$ এর জন্য $f(a) = f(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $f(a) = f(b)$

$$\text{বা, } \frac{3a+1}{1-2a} = \frac{3b+1}{1-2b}$$

$$\text{বা, } 3a - 6ab + 1 - 2b = 3b - 6ab + 1 - 2a$$

$$\text{বা, } 5a = 5b$$

$$\therefore a = b$$

অতএব, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক। (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$

$$\text{ধরি, } y = f(x) = \frac{3x+1}{1-2x}$$

তাহলে, $y = f(x)$

$$\therefore x = f^{-1}(y) \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$\text{আবার, } y = \frac{3x+1}{1-2x}$$

$$\text{বা, } y - 2xy = 3x + 1$$

$$\text{বা, } 3x + 2xy = y - 1$$

$$\text{বা, } x(3 + 2y) = y - 1$$

$$\text{বা, } x = \frac{y-1}{3+2y}$$

$$\text{বা, } f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3+2y} \text{ [(i) নং হতে]}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3+2x}$$

$$\therefore f^{-1}(-5) = \frac{-5-1}{3+2 \times (-5)} = \frac{6}{7} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ২৩ $F: \nabla - \left\{ -\frac{5}{4} \right\} \rightarrow \nabla - \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ এবং $F(x) = \frac{x-3}{4x+5}$ ও $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - b$ ◀সম্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[হলি ক্রস উচ্চ বালিকা বিদ্যালয়, ঢাকা ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $(2x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে b এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. $F(x)$ এক এক এবং অনটু ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর। ৪
 গ. $\frac{x}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - b$
 যেহেতু $(2x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

সুতরাং, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

বা, $18\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - b = 0$

বা, $-\frac{18}{8} + \frac{15}{4} + \frac{1}{2} - b = 0$

বা, $\frac{-18+30+4}{8} = b$

বা, $b = \frac{16}{8}$

∴ $b = 2$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{x-3}{4x+5}$

যেকোনো $a, b \in \text{ডোম } F$ এর জন্য $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $F(a) = F(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $F(a) = F(b)$

বা, $\frac{a-3}{4a+5} = \frac{b-3}{4b+5}$

বা, $4ab + 5a - 12b - 15 = 4ab - 12a + 5b - 15$

বা, $5a + 12a = 5b + 12b$

বা, $17a = 17b$

∴ $a = b$

সুতরাং, $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

আবার, ধরি, $y = F(x)$

∴ $y = \frac{x-3}{4x+5}$

বা, $4xy + 5y = x - 3$

বা, $4xy - x = -3 - 5y$

বা, $x(4y - 1) = -3 - 5y$

বা, $x = \frac{3+5y}{1-4y} \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি $1-4y \neq 0$

বা, $y \neq \frac{1}{4}$ হয়

∴ $F(x)$ এর রেঞ্জ = $\nabla - \left\{ \frac{1}{4} \right\} = \text{কোডোমেন}$

∴ ফাংশনটি অনটু

সুতরাং $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক।

গ 'ক' হতে পাই, $b = 2$ এবং $(2x+1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$= 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$

$= 9x^2(2x+1) + 3x(2x+1) - 2(2x+1)$

$= (2x+1)(9x^2 + 3x - 2)$

$= (2x+1)(9x^2 + 6x - 3x - 2)$

$= (2x+1)\{3x(3x+2) - 1(3x+2)\}$

$= (2x+1)(3x+2)(3x-1)$

এখন, $\frac{x}{P(x)} = \frac{x}{(2x+1)(3x+2)(3x-1)}$

ধরি, $\frac{x}{(2x+1)(3x+2)(3x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3x+2} + \frac{C}{3x-1} \dots \dots$ (i)

(i) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে $(2x+1)(3x+2)(3x-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x = A(3x+2)(3x-1) + B(2x+1)(3x-1)$

$+ C(2x+1)(3x+2) \dots \dots$ (ii)

এখন, (ii) নং এ $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$-\frac{1}{2} = A\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right\}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\} + B.0 + C.0$

বা, $-\frac{1}{2} = A\left(-\frac{3}{2} + 2\right)\left(-\frac{3}{2} - 1\right)$

বা, $-\frac{1}{2} = A\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$

∴ $A = \frac{2}{5}$

আবার, (ii) নং এ $x = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$-\frac{2}{3} = A.0 + B\left\{2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\right\}\left\{3\left(-\frac{2}{3}\right) - 1\right\} + C.0$

বা, $-\frac{2}{3} = B\left(-\frac{4}{3} + 1\right)(-2 - 1)$

বা, $-\frac{2}{3} = B\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)$

∴ $B = -\frac{2}{3}$

এবং (ii) নং এ $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{3} = A.0 + B.0 + C\left(2\left(\frac{1}{3}\right) + 1\right)\left(3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\right)$

বা, $\frac{1}{3} = C\left(\frac{2}{3} + 1\right)(3)$

∴ $C = \frac{1}{15}$

এখন, A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই

$\frac{x}{P(x)} = \frac{\frac{2}{5}}{2x+1} + \frac{-\frac{2}{3}}{3x+2} + \frac{\frac{1}{15}}{3x-1}$ (Ans.)

প্রশ্ন ২৪ $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}, x \neq 2, g(x) = \sqrt{3-2x}$

$p(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

◀সম্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, ঢাকা ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $g(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২
 খ. $p(x)$ কে $x-a$ এবং $x-b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ ৪
 গ. $4f^{-1}(x) = x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$g(x) = \sqrt{3-2x}$

$g(x) = \sqrt{3-2x} \in \nabla$ যদি এবং কেবল যদি

$3-2x \geq 0$

বা, $3 \geq 2x$

বা, $\frac{3}{2} \geq x$

অর্থাৎ, $x \leq \frac{3}{2}$

সুতরাং, ডোম $g = \left\{ x \in \nabla : x \leq \frac{3}{2} \right\}$ (Ans.)

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৪

গ ধরি, $y = f(x) = \frac{4x-9}{x-2}, x \neq 2$

বা, $y = \frac{4x-9}{x-2}$

বা, $xy - 2y = 4x - 9$

বা, $xy - 4x = 2y - 9$

বা, $x(y-4) = 2y - 9$

বা, $x = \frac{2y-9}{y-4}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{2y-9}{y-4}$ [$\square y = f(x) \therefore f^{-1}(y) = x$]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x-9}{x-4}$

দেওয়া আছে, $4f^{-1}(x) = x$

বা, $4\left(\frac{2x-9}{x-4}\right) = x$

বা, $8x - 36 = x^2 - 4x$

বা, $x^2 - 4x - 8x + 36 = 0$

বা, $x^2 - 12x + 36 = 0$

বা, $x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + (6)^2 = 0$

বা, $(x-6)^2 = 0$

বা, $x-6 = 0$

$\therefore x = 6$ (Ans.)

প্রশ্ন ২৫ $p(x) = \frac{x^3}{x^3 - 25x}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ এবং $f(x) = \sqrt{2-4x}$ তিনটি

ফাংশন।

◀সম্মিত অধ্যায় ১ ও ২

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, ঢাকা ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

২

খ. দেখাও যে, $g^{-1}(x) = g(x)$

৪

গ. $p(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{2-4x}$

$f(x) \in \nabla$ হবে যদি এবং কেবল যদি $2-4x \geq 0$ হয়।

বা, $-4x \geq -2$

বা, $4x \leq 2 \therefore x \leq \frac{1}{2}$

\therefore ডোমেন $f = \{x \in \nabla : x \leq \frac{1}{2}\}$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

ধরি, $g^{-1}(x) = a$

বা, $x = g(a)$

বা, $x = \frac{a+2}{a-1}$

বা, $ax - x = a + 2$

বা, $ax - a = x + 2$

বা, $a(x-1) = x+2$

বা, $a = \frac{x+2}{x-1} = g(x)$

$\therefore g^{-1}(x) = g(x)$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $p(x) = \frac{x^3}{x^3 - 25x}$

বা, $p(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25} = \frac{x^2 - 25 + 25}{x^2 - 25}$

$= \frac{x^2 - 25}{x^2 - 25} + \frac{25}{x^2 - 25}$

$= 1 + \frac{25}{(x+5)(x-5)}$

ধরি, $\frac{25}{(x+5)(x-5)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5}$ (i)

(i) কে $(x+5)(x-5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$25 = A(x-5) + B(x+5)$ (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) এ $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$25 = A(-5-5) + B(-5+5)$

বা, $25 = -10A \therefore A = -\frac{5}{2}$

আবার, (ii) এ $x = 5$ বসিয়ে পাই,

$25 = A(5-5) + B(5+5)$

বা, $25 = 10B$

$\therefore B = \frac{5}{2}$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{25}{(x+5)(x-5)} = \frac{-\frac{5}{2}}{x+5} + \frac{\frac{5}{2}}{x-5}$

$\therefore g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25} = 1 - \frac{5}{2(x+5)} + \frac{5}{2(x-5)}$ যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ২৬ $F(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$, $x \neq -\frac{2}{3}$ এবং $P = \frac{x^3}{x^2-9}$

◀সম্মিত অধ্যায় ১ ও ২

[শহীদ বীর উদ্ভম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

২

খ. $F^{-1}(-3)$ নির্ণয় কর।

৪

গ. P কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-১৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫২

খ সৃজনশীল ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $P = \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{x(x^2-9)+9x}{(x^2-9)}$
 $= x + \frac{9x}{(x+3)(x-3)}$

ধরি, $\frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+3)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$9x = A(x-3) + B(x+3)$... (ii)

(ii) এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$27 = B \times 6$

$\Rightarrow B = \frac{27}{6}$

$\therefore B = \frac{9}{2}$

আবার, (ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$-6A = -27$

$\Rightarrow A = \frac{27}{6}$

$\therefore A = \frac{9}{2}$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{9}{2(x+3)} + \frac{9}{2(x-3)}$

$\therefore P = \frac{x^3}{x^2-9} = x + \frac{9}{2(x+3)} + \frac{9}{2(x-3)}$ (Ans.)

প্রশ্ন ২৭ $f : \nabla \rightarrow \nabla$ এবং $g : \nabla - \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \rightarrow \nabla$ ফাংশন দুইটি যথাক্রমে

$f(x) = \frac{2x+5}{3}$ এবং $g(x) = \frac{4x+3}{2x+5}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত এবং

$P(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

◀সম্মিত অধ্যায় ১ ও ২

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর।

২

- খ. দেখাও যে, $g(x)$ ফাংশনটি এক-এক হলেও সার্বিক নয়। 8
 গ. $\frac{2a+3}{P(a)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+5}{3}$
 যেহেতু ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত, তাই ফাংশনটির ডোমেন = \mathbb{R}

খ দেওয়া আছে, $g: \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ এবং $g(x) = \frac{4x+3}{2x+5}$
 যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম g এর জন্য $g(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $g(x_1) = g(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $g(x_1) = g(x_2)$
 বা, $\frac{4x_1+3}{2x_1+5} = \frac{4x_2+3}{2x_2+5}$
 বা, $8x_1x_2 + 6x_2 + 20x_1 + 15 = 8x_1x_2 + 6x_1 + 20x_2 + 15$
 বা, $20x_1 - 6x_1 = 20x_2 - 6x_2$
 বা, $14x_1 = 14x_2 \therefore x_1 = x_2$
 $\therefore g$ ফাংশনটি এক-এক। (দেখানো হলো)

ধরি, $y = g(x) = \frac{4x+3}{2x+5}$
 বা, $2xy + 5y = 4x + 3$
 বা, $2xy - 4x = 3 - 5y$
 বা, $x = \frac{3-5y}{2y-4} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $2y - 4 \neq 0$ বা, $y \neq 2$ হয়।
 $\therefore g(x)$ এর রেঞ্জ = $\mathbb{R} - \{2\} \neq$ কোডোমেন।
 $\therefore g(x)$ ফাংশনটি সার্বিক নয়। (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $p(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$
 $a = -1$ হলে $p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$
 $= -1 - 1 + 10 - 8$
 $= 0$

অতএব $(a+1)$, $p(a)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore p(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$
 $= a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 8a - 8$
 $= a^2(a+1) - 2a(a+1) - 8(a+1)$
 $= (a+1)(a^2 - 2a - 8)$
 $= (a+1)(a^2 - 4a + 2a - 8)$
 $= (a+1)\{a(a-4) + 2(a-4)\}$
 $= (a+1)(a+2)(a-4)$

$\therefore \frac{2a+3}{P(a)} = \frac{2a+3}{(a+1)(a+2)(a-4)}$
 ধরি, $\frac{2a+3}{(a+1)(a+2)(a-4)} = \frac{A}{a+1} + \frac{B}{a+2} + \frac{C}{a-4} \dots \dots$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(a+1)(a+2)(a-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $2a+3 = A(a+2)(a-4) + B(a+1)(a-4) + C(a+1)(a+2) \dots \dots \dots$ (ii)

এখন, (ii) এর উভয়পক্ষে $a = -1$ বসিয়ে পাই,
 $-2+3 = A(-1+2)(-1-4) + 0 + 0$
 বা, $1 = -5A$,
 $\therefore A = -\frac{1}{5}$

আবার, (ii) এর উভয়পক্ষে $a = -2$ বসিয়ে,
 $-4+3 = 0 + B(-2+1)(-2-4) + 0$
 বা, $-1 = B(-1)(-6)$
 $\therefore B = -\frac{1}{6}$

আবার, (ii) এর উভয়পক্ষে $a = 4$ বসিয়ে পাই,
 $8+3 = 0 + 0 + C(4+1)(4+2)$
 বা, $11 = 30C \therefore C = \frac{11}{30}$

সুতরাং (i) নং হতে পাই,
 $\frac{2a+3}{(a+1)(a+2)(a-4)} = -\frac{1}{5(a+1)} - \frac{1}{6(a+2)} + \frac{11}{30(a-4)}$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ২৮ $f(x) = \sqrt{2x-1}$ এবং $g(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$ ◀সম্বন্ধিত অধ্যায় ১ ও ২
 [এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা ৮/প্রশ্ন নং ১]

- ক. $A = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - 9x + 20 = 0\}$ সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। ২
 খ. $f^{-1}(-2)$ নির্ণয় কর। 8
 গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে $A = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - 9x + 20 = 0\}$
 এখন, $x^2 - 9x + 20 = 0$
 বা, $x^2 - 5x - 4x + 20 = 0$
 বা, $x(x-5) - 4(x-5) = 0$
 বা, $(x-5)(x-4) = 0$
 হয়, $x-5 = 0$
 বা, $x = 5$
 অথবা, $x-4 = 0$
 বা, $x = 4$
 $\therefore A = \{4, 5\}$ (Ans.)

খ ধরি, $y = f(x) = \sqrt{2x-1}$
 বা, $y^2 = 2x-1$ [বর্গ করে]
 বা, $2x = 1 + y^2$
 বা, $x = \frac{1+y^2}{2}$
 $\therefore f^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{2}$ [$\square y = f(x), \therefore f^{-1}(y) = x$]
 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2}$
 $\therefore f^{-1}(-2) = \frac{1+(-2)^2}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ (Ans.)

গ সৃজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ২৯ $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$ এবং $f(x) = x^2 + 6x + 9$
 [সেন্ট যোসেফ উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা ৮/প্রশ্ন নং ১]

- ক. $f(x)$ কে $(x+2)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ২
 খ. $P(x)$ কে $(x-a)$ এবং $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $a^2 + ab + b^2 + a + b = 12$ 8
 গ. $\frac{f(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,
 $f(x) = x^2 + 6x + 9$
 এখন, $f(x)$ কে $(x+2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(-2)$
 $\therefore f(-2) = (-2)^2 + 6(-2) + 9$
 $= 4 - 12 + 9$
 $= 1$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$
 $P(x)$ কে $(x-a)$ এবং $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে যথাক্রমে $P(a)$ এবং $P(b)$
 প্রশ্নানুসারে, $P(a) = P(b)$
 বা, $a^3 + a^2 - 12a = b^3 + b^2 - 12b$
 বা, $a^3 - b^3 + a^2 - b^2 - 12a + 12b = 0$
 বা, $(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a+b)(a-b) - 12(a-b) = 0$
 বা, $(a-b)(a^2 + ab + b^2 + a + b - 12) = 0$

বা, $a^2 + ab + b^2 + a + b - 12 = 0$

[যেহেতু $a \neq b$ সেহেতু $a - b \neq 0$]

$\therefore a^2 + ab + b^2 + a + b = 12$ (প্রমাণিত)

গ $\frac{f(x)}{p(x)} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^3 + x^2 - 12x}$
 $= \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2}{x(x^2 + x - 12)}$
 $= \frac{(x+3)^2}{x(x^2 + 4x - 3x - 12)}$
 $= \frac{(x+3)^2}{x\{x(x+4) - 3(x+4)\}}$
 $= \frac{(x+3)^2}{x(x+4)(x-3)}$

ধরি, $\frac{(x+3)^2}{x(x+4)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-3}$ (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $x(x+4)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $(x+3)^2 = A(x+4)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+4)$... (ii)
 যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$(0+3)^2 = A(0+4)(0-3) + 0 + 0$

বা, $9 = -12A$

বা, $A = -\frac{9}{12}$

$\therefore A = -\frac{3}{4}$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$(3+3)^2 = 0 + 0 + C \cdot 3 \cdot (3+4)$

বা, $6^2 = C \cdot 3 \cdot 7$

বা, $C = \frac{36}{21}$

$\therefore C = \frac{12}{7}$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -4$ বসিয়ে,

$(-4+3)^2 = 0 + B(-4)(-4-3) + 0$

বা, $(-1)^2 = B(-4)(-7)$

বা, $1 = 28B$

$\therefore B = \frac{1}{28}$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{(x+3)^2}{x(x+4)(x-3)} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{28} + \frac{12}{7}$
 $= -\frac{3}{4x} + \frac{1}{28(x+4)} + \frac{12}{7(x-3)}$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ৩০ $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, $p(x) = x^4 + x^2 - 2$ ◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর ৷/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $p(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. দেখাও যে, $f(x)$ এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন। ৪

গ. $\frac{x^2}{p(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $p(x) = x^4 + x^2 - 2$
 $= x^4 + 2x^2 - x^2 - 2$
 $= x^2(x^2 + 2) - 1(x^2 + 2)$
 $= (x^2 - 1)(x^2 + 2)$
 $= (x+1)(x-1)(x^2 + 2)$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$f(x) \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি $2x+1 \neq 0$ বা, $x \neq -\frac{1}{2}$ হয়।

\therefore ডোম, $f = \nabla - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

$f(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো $a, b \in$ ডোম f এর জন্য $f(a) = f(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $f(a) = f(b)$

বা, $\frac{a-3}{2a+1} = \frac{b-3}{2b+1}$

বা, $2ab - 6b + a - 3 = 2ab - 6a + b - 3$

বা, $a + 6a = b + 6b$

বা, $7a = 7b \therefore a = b$

অতএব, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

ধরি, $y = f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

বা, $2xy + y = x - 3$

বা, $y + 3 = x - 2xy$

বা, $y + 3 = x(1 - 2y)$

$\therefore x = \frac{y+3}{1-2y} \in \nabla$

এখন, $f\left(\frac{y+3}{1-2y}\right) = \frac{\frac{y+3}{1-2y} - 3}{2 \cdot \frac{y+3}{1-2y} + 1}$
 $= \frac{y+3-3+6y}{1-2y}$
 $= \frac{2y+6+1-2y}{1-2y}$
 $= \frac{7y}{1-2y} \times \frac{1-2y}{7}$
 $= y$

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি সঠিক।

সুতরাং, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক। (দেখানো হলো)

গ $\frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2} = \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 - x^2 - 2}$
 $= \frac{x^2}{x^2(x^2 + 2) - 1(x^2 + 2)}$
 $= \frac{x^2}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}$
 $= \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2 + 2)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2 + 2}$ (i)

(i) এর উভয় পক্ষকে $(x+1)(x-1)(x^2 + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 = A(x-1)(x^2 + 2) + B(x+1)(x^2 + 2) + (Cx+D)(x+1)(x-1)$(ii)

(ii)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = B(1+1)(1+2)$

বা, $6B = 1$

$\therefore B = \frac{1}{6}$

(ii)-এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$1 = A(-1-1)(1+2)$

বা, $-6A = 1$

$\therefore A = -\frac{1}{6}$

(ii)-এর উভয়পক্ষ হতে x^3, x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B + C = 0$

বা, $C = -A - B = -\left(-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{6}$

$\therefore C = 0$

এবং $-A + B + D = 1$

$$\text{বা, } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$$

$$\text{বা, } D = 1 - \frac{2}{6}$$

$$\text{বা, } D = \frac{4}{6}$$

$$\therefore D = \frac{2}{3}$$

এখন, A, B, C ও D এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+2)} \equiv \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{0 \cdot x + \frac{2}{3}}{x^2+2}$$

$$= -\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{6(x-1)} + \frac{2}{3(x^2+2)}$$

যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৩১ $F(x) = \sqrt{1-2x}$ এবং $Q(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$

সমস্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[জয়দেবপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, গাজীপুর ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২
 খ. $F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর। ৪
 গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৫ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৩২ $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$

$$Q(x) = x^3 + 4 + x^2 + 4x$$

$$R(x) = x^2 - 4x - 7$$

[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল, ময়মনসিংহ ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্যসহগ নির্ণয় কর। ২
 খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪
 গ. $\frac{R(x)}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$

আদর্শরূপে, $P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$

এখানে, x এর সর্বোচ্চ ঘাত ৩

\therefore মুখ্যপদ = $10x^3$

\therefore মুখ্য সহগ = 10 (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$

$$= 10x^3 - x^2 + 15x + 9$$

এখন, $x = -\frac{1}{2}$ হলে,

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 15\left(-\frac{1}{2}\right) + 9$$

$$= -\frac{10}{8} - \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 9$$

$$= \frac{-10 - 2 - 60 + 72}{8}$$

$$= 0$$

$\therefore x = \left(-\frac{1}{2}\right)$ বা, $(2x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$

$$= 10x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 3x + 18x + 9$$

$$= 5x^2(2x + 1) - 3x(2x + 1) + 9(2x + 1)$$

$$= (2x + 1)(5x^2 - 3x + 9) \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 + 4x + 4$

$$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 4)$$

$$\therefore \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x^2 + 4)}$$

ধরি, $\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x^2 + 4)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$ (i)

(i) এর উভয় পক্ষকে $(x + 1)(x^2 + 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x + 1) \text{ (ii)}$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (ii) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$(-1)^2 - 4(-1) - 7 = A(1 + 4)$$

$$\text{বা, } 1 + 4 - 7 = 5A$$

$$\text{বা, } 5A = -2$$

$$\therefore A = -\frac{2}{5}$$

আবার, (ii) নং থেকে x^2, x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 1$$

$$\text{বা, } -\frac{2}{5} + B = 1$$

$$\therefore B = \frac{7}{5}$$

$$\text{এবং } B + C = -4$$

$$\text{বা, } C = -4 - \frac{7}{5}$$

$$\therefore C = -\frac{27}{5}$$

(i) নং এ A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x^2 + 4)} = \frac{-2}{5(x + 1)} + \frac{\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}}{x^2 + 4} = \frac{-2}{5(x + 1)} + \frac{7x - 27}{5(x^2 + 4)}$$

যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৩৩ $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ একটি বহুপদী এবং

$$Q(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, মোমেনশাহী ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্র ত্রমিক ও সমমাত্রিক রাশি। ২
 খ. $F(a, b, c) = 0$ হলে দেখাও যে, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ ৪
 গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$

$$\therefore F(b, c, a) = (b + c + a)(bc + ca + ab) - bca$$

$$= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$$

যেহেতু রাশিটিতে প্রথম চলকের স্থলে দ্বিতীয় চলক, দ্বিতীয় চলকের স্থলে তৃতীয় চলক এবং তৃতীয় চলকের স্থলে প্রথম চলক বসালে রাশিটির কোন পরিবর্তন হয় না। $F(a, b, c)$ রাশিটি চক্রত্রমিক। (দেখানো হলো)

আবার, রাশিটির প্রথম অংশ গুণ করলে,

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = (a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2)$$

প্রতিটি রাশি ৩ মাত্রার এবং অবশিষ্ট পদ abc ও ৩ মাত্রার।

$$\therefore F(a, b, c) \text{ রাশিটি ৩ মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী।}$$

(দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = 0$

$$\therefore (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$$

$$\text{বা, } (a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$$

$$\text{বামপক্ষ} = (a + b + c)^3$$

$$= (a + b + c)^3 - 3abc + 3abc$$

$$= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$$

$$= (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\} + 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$- 3ab - 3bc - 3ca) + 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc$$

$$[\because (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc]$$

$$= a^3 + b^3 + c^3$$

= ডানপক্ষ

$$\therefore (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 \quad (\text{দেখানো হলো})$$

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$

এখন, $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x(x^2 + 2x - 3) + 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

$$= x + \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$= x + \frac{3x + 1}{(x-1)(x+3)}$$

$$\therefore \frac{3x + 1}{(x-1)(x+3)} \text{ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।}$$

ধরি, $\frac{3x + 1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \dots \dots \dots (i)$

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(x-1)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই-

$$3x + 1 = A(x+3) + B(x-1) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot 1 + 1 = A(1+3) + B(1-1)$$

$$\text{বা, } 4 = 4A$$

$$\therefore A = 1$$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$3(-3) + 1 = A(-3+3) + B(-3-1)$$

$$\text{বা, } -9 + 1 = 0 + B(-4)$$

$$\text{বা, } -8 = -4B$$

$$\therefore B = 2$$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x + 1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}$$

$$\therefore Q(x) = x + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3}; \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ৩৪ $g: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত

এবং $p(a) = \frac{a^2}{(3a+1)(a+2)^2}$ ◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর // প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $S = \{3^n : n = 0 \text{ অথবা, } n \in \mathbb{Z}\}$ সেটটি | এর সমতুল। ২

খ. দেখাও যে, g ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয়। ৪

গ. $p(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $S = \{3^n : n = 0 \text{ অথবা } n \in \mathbb{Z}\}$

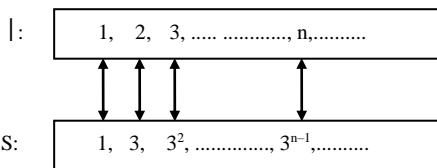
$$n = 0 \text{ হলে } 3^n = 3^0 = 1$$

আমরা জানি, $\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, \dots\}$

তাহলে, তালিকা পদ্ধতিতে S কে লেখা যায়,

$$S = \{1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}, \dots\}$$

এখন S ও \mathbb{Z} এর মধ্যে একটি এক-এক মিল নিচে প্রদর্শিত হলো :



সুতরাং \mathbb{Z} ও S সেটদ্বয় সমতুল। (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$g(x) \in \mathbb{V}$ হবে যদি ও কেবল যদি $2x+1 \neq 0$ বা, $x \neq -\frac{1}{2}$ হয়।

$$\therefore \text{ডোম, } g = \mathbb{V} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$g(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো $a, b \in \text{ডোম } g$ এর জন্য $g(a) = g(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $g(a) = g(b)$

$$\text{বা, } \frac{a-3}{2a+1} = \frac{b-3}{2b+1}$$

$$\text{বা, } 2ab - 6b + a - 3 = 2ab - 6a + b - 3$$

$$\text{বা, } a + 6a = b + 6b$$

$$\text{বা, } 7a = 7b \therefore a = b$$

অতএব, $g(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

ধরি, $y = g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$$\text{বা, } 2xy + y = x - 3$$

$$\text{বা, } y + 3 = x - 2xy$$

$$\text{বা, } y + 3 = x(1 - 2y)$$

$$\therefore x = \frac{y+3}{1-2y} \in \mathbb{V} \text{ হবে যদি ও কেবল যদি } 1-2y \neq 0 \text{ বা, } y \neq \frac{1}{2} \text{ হয়।}$$

$$\therefore g(x) \text{ এর রেঞ্জ} = \mathbb{V} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \neq \text{কোডোমেন}$$

$\therefore g(x)$ ফাংশনটি সার্বিক নয়।

$\therefore g$ ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয়। (দেখানো হলো)

গ ধরি, $p(a) = \frac{a^2}{(3a+1)(a+2)^2} = \frac{A}{3a+1} + \frac{B}{a+2} + \frac{C}{(a+2)^2} \dots \dots (i)$

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(3a+1)(a+2)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$a^2 = A(a+2)^2 + B(3a+1)(a+2) + C(3a+1) \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $a = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{3}+2\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{9} = A \cdot \frac{25}{9}$$

$$\therefore A = \frac{1}{25}$$

(ii) নং হতে a^2 ও a এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + 3B = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{25} + 3B = 1$$

$$\text{বা, } 3B = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore B = \frac{8}{25}$$

$$\text{এবং } 4A + 7B + 3C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{4}{25} + \frac{56}{25} + 3C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{60}{25} + 3C = 0$$

$$\text{বা, } 3C = -\frac{60}{25}$$

$$\text{বা, } 3C = -\frac{12}{5}$$

$$\therefore C = -\frac{4}{5}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$P = \frac{1}{25(3a+1)} + \frac{8}{25(a+2)} - \frac{4}{5(a+2)^2} \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ৩৫ $f(y) = y^3$ এবং $g(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

[ফরিদপুর জিলা স্কুল, ফরিদপুর // প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ রাশিটি সমমাত্রিক ও চক্রক্রমিক কিনা যাচাই কর। ২

খ. $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} + \frac{1}{f(z)} = 3(xyz)^{-1}$ হলে দেখাও যে, $x = y = z$ ৪

গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, একে সমমাত্রিক বহুপদী বলা হয়। $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী।

ধরি, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

x এর স্থলে y , y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$$f(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3y.z.x$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

অর্থাৎ $f(x, y, z) = f(y, z, x)$

সুতরাং $f(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি।

খ দেওয়া আছে,

$$f(y) = y^3$$

$$\therefore f(x) = x^3$$

$$\text{এবং } f(z) = z^3$$

এখন, $\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} + \frac{1}{f(z)} = 3(xyz)^{-1}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 - 3\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 \right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

$$\therefore x = y$$

আবার, $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

$$\therefore y = z$$

$$\therefore x = y = z \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 4x}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$$

$$\therefore g(x) = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)} \dots \dots \dots (i)$$

ধরি, $\frac{4x}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \dots \dots \dots (ii)$

(ii) নং কে $(x+2)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$4x = A(x-2) + B(x+2) \dots \dots \dots (iii)$$

(iii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$4 \cdot 2 = A \cdot 0 + B(2+2)$$

বা, $8 = 4B$

$$\therefore B = 2$$

আবার, (iii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$4 \cdot (-2) = A(-2-2) + B \cdot 0$$

বা, $-8 = -4A$

$$\therefore A = 2$$

A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{4x}{(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-2}$$

$$\therefore (i) \text{ নং হতে পাই, } g(x) = x + \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৩৬ $P = x + 2, Q = x^2 + 4, R = x^4 + 16$ এবং $S = x^8 - 256$

[গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী ৮/ প্রশ্ন নং ২]

ক. P, Q ও R এর সাহায্যে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ এবং একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ তৈরি কর। ২

খ. $\frac{1}{P}, \frac{2}{Q}, \frac{16}{R}$ ও $\frac{512}{S}$ এর সমষ্টিতে সরলরূপে প্রকাশ কর। ৪

গ. $\frac{P}{Q(x-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$P = x + 2, Q = x^2 + 4, R = x^4 + 16$$

$$\therefore P, Q \text{ ও } R \text{ এর সাহায্যে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ}$$

$$= \frac{x^2 + 4}{(x+2)(x^4 + 16)}$$

$$\therefore P, Q \text{ ও } R \text{ এর সাহায্যে একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ}$$

$$= \frac{x^4 + 16}{(x+2)(x^2 + 4)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$P = x + 2, Q = x^2 + 4, R = x^4 + 16$$

$$\text{এবং } S = x^8 - 256$$

$$\therefore \frac{1}{P} + \frac{2}{Q} + \frac{16}{R} + \frac{512}{S}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{16}{x^4+16} + \frac{512}{x^8-256}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{16}{x^4+16} + \frac{512}{(x^4+16)(x^4-16)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{16(x^4-16) + 512}{(x^4+16)(x^4-16)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{16(x^4+16)}{(x^4+16)(x^4-16)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{16}{x^4-16}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2+4} + \frac{16}{(x^2+4)(x^2-4)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2(x^2-4) + 16}{(x^2+4)(x^2-4)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2-4)}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x^2-4}$$

$$= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x-2+2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x}{(x+2)(x-2)} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$P = x + 2, Q = x^2 + 4$$

$$\therefore \frac{P}{Q(x-1)} = \frac{x+2}{(x^2+4)(x-1)}$$

ধরি, $\frac{x+2}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \dots \dots \dots (1)$

উভয়পক্ষকে $(x-1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$(x+2) = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) \dots \dots \dots (2)$$

(2) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$3 = A \times 5$$

$$\therefore A = \frac{3}{5}$$

(2) এর উভয় পক্ষে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 0$$

$$\therefore B = -A = -\frac{3}{5}$$

$$\text{এবং } C - B = 1$$

$$\therefore C = 1 + B = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

এখন, A, B ও C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \frac{3/5}{x-1} + \frac{-3/5 x + 2/5}{x^2+4}$$

$$= \frac{3}{5(x-1)} - \frac{3x-2}{5(x^2+4)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ৩৭ $f: \nabla - \{1\} \rightarrow \nabla$ যেখানে $f(x) = \frac{5x+4}{x+1}$ এবং

$$g(x) = \frac{x}{x^3 + 4x - x^2 - 4} \quad \leftarrow \text{সম্বন্ধিত অধ্যায় ১ ও ২}$$

[রাজশাহী ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রাজশাহী // প্রশ্ন নং ১]

- ক. $(x+3)^2 + y^2 = 25$ অক্ষয়টি ফাংশন কিনা যাচাই কর। ২
 খ. $f(x)$ ফাংশনটি সার্বিক কিনা যাচাই কর। ৪
 গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $(x+3)^2 + y^2 = 25$

বা, $y^2 = 25 - (x+3)^2$

$\therefore y = \pm \sqrt{25 - (x+3)^2}$

এখানে, x এর একই মানের জন্য y এর দুইটি ভিন্ন মান পাওয়া যাবে।

$\therefore x^2 + y^2 = 25$ অক্ষয়টি ফাংশন নয়। (Ans.)

খ ধরি, $y = \frac{5x+4}{x+1}$

বা, $yx + y = 5x + 4$

বা, $yx - 5x = 4 - y$

$\therefore x = \frac{4-y}{y-5} \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি $y - 5 \neq 0$ বা, $y \neq 5$ হয়।

$\therefore f(x)$ এর রেঞ্জ $= \nabla - \{5\} \neq$ কোডোমেন

অর্থাৎ f ফাংশনটি সার্বিক নয়।

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x}{x^3 + 4x - x^2 - 4}$

$$= \frac{x}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$$

$$= \frac{x}{x^2(x-1) + 4(x-1)}$$

$$= \frac{x}{(x-1)(x^2+4)}$$

অত:পর পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২এর উদাহরণ-২৮ নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৯

প্রশ্ন ৩৮ (i) x, y, z এর একটি বহুপদী হলো

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

(ii) $\frac{a^2}{a^4 + a^2 - 2}$ একটি বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ

[পাবনা জেলা স্কুল, পাবনা // প্রশ্ন নং ১]

ক. $F(x, y, z)$ চক্রাক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর। ২

খ. $F(x, y, z) = 0$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে দেখাও যে, $x = y = z$ ৪

গ. (ii) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$\therefore F(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3zyx$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3zxy$$

$$F(z, x, y) = z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

এখানে, চক্রাকারে, $x = y, y = z, z = x$ বসালে রাশিটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং এটি একটি চক্রাক্রমিক রাশি।

আবার, x, y, z চলকের যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং এটি একটি প্রতিসম রাশি।

খ দেওয়া আছে,

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

প্রশ্নমতে, $F(x, y, z) = 0$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $\frac{1}{2}(x+y+z) \{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} = 0$

বা, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$ [$x + y + z \neq 0$]

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথক শূন্য হবে।

$\therefore (x-y)^2 = 0$

বা, $x - y = 0$

$\therefore x = y$

এবং $(y-z)^2 = 0$

বা, $y - z = 0$

$\therefore y = z$

সুতরাং $x = y = z$ (দেখানো হলো)

গ $\frac{a^2}{a^4 + a^2 - 2} = \frac{a^2}{a^4 + 2a^2 - a^2 - 2}$

$$= \frac{a^2}{a^2(a^2 + 2) - 1(a^2 + 2)}$$

$$= \frac{a^2}{(a^2 - 1)(a^2 + 2)}$$

$$= \frac{a^2}{(a+1)(a-1)(a^2 + 2)}$$

ধরি, $\frac{a^2}{(a+1)(a-1)(a^2 + 2)} \equiv \frac{A}{a+1} + \frac{B}{a-1} + \frac{Ca+D}{a^2 + 2}$ (i)

(i) এর উভয় পক্ষকে $(a+1)(a-1)(a^2 + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$a^2 \equiv A(a-1)(a^2 + 2) + B(a+1)(a^2 + 2) + (Ca+D)(a+1)(a-1) \dots (ii)$$

(ii)-এ $a = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = B(1+1)(1+2)$

বা, $6B = 1$

$\therefore B = \frac{1}{6}$

(ii)-এ $a = -1$ বসিয়ে পাই,

$$1 = A(-1-1)(1+2)$$

বা, $-6A = 1$

$\therefore A = -\frac{1}{6}$

(ii)-এর উভয়পক্ষ হতে a^3, a^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B + C = 0$$

বা, $C = -A - B = -\left(-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{6}$

$\therefore C = 0$

এবং $-A + B + D = 1$

বা, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$

বা, $D = 1 - \frac{2}{6}$

বা, $D = \frac{4}{6}$

$\therefore D = \frac{2}{3}$

এখন, A, B, C ও D এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই

$$\frac{a^2}{(a+1)(a-1)(a^2 + 2)} \equiv \frac{-1/6}{a+1} + \frac{1/6}{a-1} + \frac{0 \cdot a + 2/3}{a^2 + 2}$$

$$= -\frac{1}{6(a+1)} + \frac{1}{6(a-1)} + \frac{2}{3(a^2 + 2)}$$

যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৩৯ $f(x) = \frac{2x+3}{2x-1}$ এবং $B(x) = x^3 + x - 4x^2 - 4$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া ৷/ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২
 খ. $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর। ৪
 গ. $\frac{x}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $f(x) = \frac{2x+3}{2x-1} \in \nabla$ হবে যদি ও কেবল যদি

এবং $2x - 1 \neq 0$ বা, $x \neq \frac{1}{2}$ হয়।

\therefore ডোম $f = \left\{ x \in \nabla : x \neq \frac{1}{2} \right\}$ (Ans.)

খ $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$
 বা, $\frac{2x_1+3}{2x_1-1} = \frac{2x_2+3}{2x_2-1}$

বা, $4x_1x_2 + 6x_2 - 2x_1 - 3 = 4x_1x_2 + 6x_1 - 2x_2 - 3$

বা, $-2x_1 - 6x_1 = -2x_2 - 6x_2$

বা, $-8x_1 = -8x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore f(x)$ এক-এক ফাংশন।

গ $\frac{x}{Q(x)} = \frac{x}{x^3 - 4x^2 + x - 4}$
 $= \frac{x}{x^2(x-4) + 1(x-4)}$
 $= \frac{x}{(x-4)(x^2+1)}$

ধরি, $\frac{x}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ (i)

(i) এর উভয়পক্ষে $(x-4)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-4)$ (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) এর উভয় পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$4 = A(4^2+1) + 0$

$\therefore A = \frac{4}{17}$

(ii) এর উভয়পক্ষে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0$

বা, $B = -A$

$\therefore B = -\frac{4}{17}$

এবং $C - 4B = 1$ বা, $C = 1 + 4B = 1 - \frac{16}{17}$

$\therefore C = \frac{1}{17}$

এখন, A, B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x}{(x-4)(x^2+1)} = \frac{4}{17(x-4)} + \frac{-\frac{4x}{17} + \frac{1}{17}}{x^2+1}$
 $= \frac{4}{17(x-4)} + \frac{1-4x}{17(x^2+1)}$

যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৪০ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ এবং $g(x) = \sqrt{2x-3}$ দুটি বীজগণিতীয় রাশি।

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ ৷/ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $g(x) = 5$ হলে x এর মান বের কর। ২
 খ. $f(x)$ কে $(x-a)$ ও $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকলে প্রমাণ কর যে, $a^2 + b^2 + ab + 3a + 3b = 0$, যেখানে $a \neq b$. ৪
 গ. $g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(x) = \sqrt{2x-3}$

শর্তমতে, $g(x) = 5$

বা, $\sqrt{2x-3} = 5$

বা, $2x-3 = 25$ [বর্গ করে]

বা, $2x = 25 + 3$

বা, $2x = 28$

$\therefore x = 14$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a)$

$\therefore f(a) = a^3 + 3a^2 + 1$

আবার, $f(x)$ কে $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(b)$

$\therefore f(b) = b^3 + 3b^2 + 1$

শর্তমতে, $f(a) = f(b)$

বা, $a^3 + 3a^2 + 1 = b^3 + 3b^2 + 1$

বা, $a^3 + 3a^2 + 1 - b^3 - 3b^2 - 1 = 0$

বা, $a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) = 0$

বা, $(a-b)(a^2 + ab + b^2) + 3(a-b)(a+b) = 0$

বা, $(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b) = 0$

যেহেতু $a \neq b$ সুতরাং $a - b \neq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + ab + 3a + 3b = 0$ (প্রমাণিত)

গ ধরি, $y = g(x) = \sqrt{2x-3}$

বা, $y^2 = 2x - 3$

বা, $2x = y^2 + 3$

বা, $x = \frac{y^2+3}{2}$

বা, $g^{-1}(y) = \frac{y^2+3}{2}$ [$\square g(x) = y \therefore x = g^{-1}(y)$]

বা, $g^{-1}(-3) = \frac{(-3)^2+3}{2}$

বা, $g^{-1}(-3) = \frac{9+3}{2}$

বা, $g^{-1}(-3) = \frac{12}{2}$

$\therefore g^{-1}(-3) = 6$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৪১ $p(x, y, z) = (xy + yz + zx)(x + y + z)$ এবং

$q(x) = \frac{x^4}{x^2-25}$ [রামদেও বাজলা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, জয়পুরহাট ৷/ প্রশ্ন নং ২]

ক. যদি $(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $a = b = c$ ২

খ. $p(x, y, z) = xyz$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{(x+y+z)^9} = \frac{1}{x^9} + \frac{1}{y^9} + \frac{1}{z^9}$ ৪

গ. $q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$

দুইটি বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে, তারা আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হবে।

$\therefore (a-b)^2 = 0$

বা, $a-b = 0$

$\therefore a = b$

আবার, $(b-c)^2 = 0$

বা, $b-c = 0$

$\therefore b = c$

$\therefore a = b = c$ (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে,

$$P(x, y, z) = xyz$$

$$\text{বা, } (x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$$

$$\text{বা, } x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x = xyz$$

$$\text{বা, } x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + z^2x + yz^2 + x^2z + xyz = 0$$

$$\text{বা, } xy(x + y) + yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)(xy + yz + z^2 + xz) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)\{y(x + z) + z(z + x)\} = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)(y + z)(z + x) = 0$$

$$\therefore x + y = 0 \text{ অথবা } y + z = 0 \text{ অথবা } z + x = 0$$

$$\therefore x = -y \quad \therefore y = -z \quad \therefore z = -x$$

$$\text{এখন, } \frac{1}{(x + y + z)^9} = \frac{1}{(x - z + z)^9} = \frac{1}{x^9} \quad [\square y = -z]$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{x^9} + \frac{1}{y^9} + \frac{1}{z^9} = \frac{1}{x^9} - \frac{1}{z^9} + \frac{1}{z^9} \quad [\square y = -z]$$

$$= \frac{1}{x^9}$$

$$\therefore \frac{1}{(x + y + z)^9} = \frac{1}{x^9} + \frac{1}{y^9} + \frac{1}{z^9}$$

গ দেওয়া আছে,

$$q(x) = \frac{x^4}{x^2 - 25}$$

$$= \frac{x^2(x^2 - 25) + 25x^2}{x^2 - 25}$$

$$= x^2 + 25 \frac{x^2}{x^2 - 25}$$

$$= x^2 + 25 \left\{ \frac{(x^2 - 25) + 25}{x^2 - 25} \right\}$$

$$= x^2 + 25 + \frac{625}{x^2 - 25}$$

$$\text{ধরি, } \frac{1}{x^2 - 25} = \frac{1}{(x + 5)(x - 5)} \equiv \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 5} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং কে $(x + 5)(x - 5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$1 \equiv A(x - 5) + B(x + 5) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = 5$ বসিয়ে পাই,

$$1 = B \times 10$$

$$\therefore B = \frac{1}{10}$$

আবার,

(ii) নং এ $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$$1 = A(-5 - 5) + B(-5 + 5)$$

$$1 = -A \times 10 + B \times 0$$

$$\therefore A = -\frac{1}{10}$$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{x^2 - 25} = \frac{1}{10(x - 5)} - \frac{1}{10(x + 5)}$$

$\therefore q(x)$ এর আংশিক ভগ্নাংশ,

$$\frac{x^4}{x^2 - 25} = x^2 + 25 + 625 \left\{ \frac{1}{10(x - 5)} - \frac{1}{10(x + 5)} \right\}$$

$$= x^2 + 25 + \frac{125}{2(x - 5)} - \frac{125}{2(x + 5)} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৪২ (a) $f: y \rightarrow \frac{2y - 1}{2y + 3}$ (b) $\frac{1}{p(p^2 + 1)^2}$ ◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[দিনাজপুর জিলা স্কুল, দিনাজপুর ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $B \setminus (B \setminus B) = B$ ২

খ. (a) এর আলোকে y এর মান নির্ণয় কর যখন $2f^{-1}(y) = y$ ৪

গ. উদ্দীপক (b) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $x \in B \setminus (B \setminus B)$

তাহলে, $x \in B$ এবং $x \notin B \setminus B$

$$\Rightarrow x \in B \text{ এবং } x \notin \emptyset \quad [\because B \setminus B = \emptyset]$$

$$\Rightarrow x \in B$$

$$\therefore B \setminus (B \setminus B) \subset B$$

আবার ধরি, $x \in B$

তাহলে, $x \in B$ এবং $x \notin \emptyset$

$$\Rightarrow x \in B \text{ এবং } x \notin (B \setminus B)$$

$$\Rightarrow x \in B \setminus (B \setminus B)$$

$$\therefore B \subset B \setminus (B \setminus B)$$

সুতরাং, $B \setminus (B \setminus B) = B$ (দেখানো হলো)

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.২ এর উদাহরণ-৩৬(গ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৩

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ-২৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৯

প্রশ্ন ৪৩ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ এবং $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25}$ ◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, পার্বতীপুর, দিনাজপুর ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর রেঞ্জ এবং $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $2 - x > 0$ হয়।

$$\text{বা, } 2 > x$$

$$\therefore x < 2$$

$$\therefore \text{ফাংশনের ডোমেন} = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} \text{ (Ans.)}$$

খ. ধরি, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$\text{বা, } y^2 = \frac{1}{2-x}$$

$$\text{বা, } 2 - x = \frac{1}{y^2}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{y^2} + 2$$

এখন, $x = -\frac{1}{y^2} + 2 \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$$y^2 > 0 \text{ হয়}$$

$$\text{বা, } y > 0$$

$$\therefore \text{রেঞ্জ, } f = \{x : \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$\text{আবার, } x = -\frac{1}{y^2} + 2$$

$$= \frac{-1 + 2y^2}{y^2}$$

$$\text{বা, } f^{-1}(y) = \frac{-1 + 2y^2}{y^2} \quad [\square f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)]$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-1 + 2x^2}{x^2} \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25}$$

$$= \frac{x^2 - 25 + 25}{x^2 - 25}$$

$$= \frac{x^2 - 25}{x^2 - 25} + \frac{25}{x^2 - 25}$$

$$= 1 + \frac{25}{(x + 5)(x - 5)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{25}{(x + 5)(x - 5)} = \frac{A}{x + 5} + \frac{B}{x - 5} \dots \dots (i)$$

(i) নং কে $(x + 5)(x - 5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$25 = A(x - 5) + B(x + 5) \dots \dots (ii)$$

যা x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এ $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$$25 = A(-5 - 5) + B(-5 + 5)$$

বা, $25 = -10A$

$$\text{বা, } A = \frac{25}{-10}$$

$$\therefore A = -\frac{5}{2}$$

আবার, (ii)নং এ $x = 5$ বসিয়ে পাই,

$$25 = A(5 - 5) + B(5 + 5)$$

বা, $25 = 10B$

$$\text{বা, } B = \frac{25}{10}$$

$$\therefore B = \frac{5}{2}$$

A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{25}{(x+5)(x-5)} = \frac{-\frac{5}{2}}{x+5} + \frac{\frac{5}{2}}{x-5}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25} = 1 + \frac{5}{2(x-5)} - \frac{5}{2(x+5)} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৪৪ $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, $f(x) = \frac{4x+1}{4x-1}$, \mathbb{V} বাস্তব সংখ্যার সেট এবং সার্বিক সেট

U এর যেকোন উপসেট A, B, C এবং $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[বর্ডার গার্ড পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, রংপুর ৮/ প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ২

খ. f এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। অতঃপর দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন। ৪

গ. $\frac{x^3}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $x \in (A \cap B)^c$

তাহলে, $x \notin (A \cap B)$

$\Rightarrow x \notin A$ অথবা $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ অথবা $x \in B^c$

$\Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

$\therefore (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$

আবার ধরি, $x \in A^c \cup B^c$

$\Rightarrow x \in A^c$ অথবা $x \in B^c$

$\Rightarrow x \notin A$ অথবা $x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

$\therefore A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$

$\therefore (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{4x+1}{4x-1}$

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি

$4x - 1 \neq 0$ বা, $4x \neq 1$, বা, $x \neq \frac{1}{4}$ হয়।

\therefore ডোমেন $= \mathbb{V} - \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ (Ans.)

ধরি, $y = f(x) = \frac{4x+1}{4x-1}$

$$\therefore y = \frac{4x+1}{4x-1}$$

বা, $4xy - y = 4x + 1$

বা, $4xy - 4x = y + 1$

বা, $x(4y - 4) = y + 1$

বা, $x = \frac{y+1}{4y-4}$

$$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+1}{4y-4} \quad [\square f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)]$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+1}{4x-4}$$

এখানে, $x = 1$ ব্যতীত অন্য সকল বাস্তব মানের জন্য $f^{-1}(x)$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

\therefore রেঞ্জ $f(x) = \mathbb{V} - \{1\}$

যেকোনো $a, b \in$ ডোম f এর জন্য $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $f(a) = f(b)$ হলে $a = b$ হয়।

ধরি, $f(a) = f(b)$

$$\text{বা, } \frac{4a+1}{4a-1} = \frac{4b+1}{4b-1}$$

$$\text{বা, } \frac{4a+1+4a-1}{4a+1-4a+1} = \frac{4b+1+4b-1}{4b+1-4b+1} \quad [\text{যোজন বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{8a}{2} = \frac{8b}{2}$$

$$\therefore a = b$$

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি এক-এক। (দেখানো হলো)

গ সূজনশীল ৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৫ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$ বহুপদীর একটি উৎপাদক

$$Q(x) = 6x^2 + 7x + a$$

[রংপুর জিলা স্কুল, রংপুর ৮/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $Q(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর।

২

খ. $a = 2$ হলে, দেখাও যে, $c = 2b$

৪

গ. $a = -5$ হলে, $\frac{x^3}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

৪

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q(x) = 6x^2 + 7x + a$

$Q(x)$ এর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে,

$2x + 1 = 0$ এর জন্য $Q(x) = 0$ হবে।

অর্থাৎ $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য $Q(x) = 0$ হবে।

$$\text{এখন, } Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + a = 0$$

$$\text{বা, } 6 \cdot \frac{1}{4} - \frac{7}{2} + a = 0$$

$$\text{বা, } \frac{6-14}{4} + a = 0$$

$$\text{বা, } \frac{-8}{4} + a = 0$$

$$\text{বা, } a - 2 = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ (Ans.)}$$

খ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$

$$Q(x) = 6x^2 + 7x + a$$

$a = 2$ হলে, $Q(x) = 6x^2 + 7x + 2$

$$= 6x^2 + 4x + 3x + 2$$

$$= (3x + 2)(2x + 1)$$

$Q(x)$ যদি $P(x)$ এর উৎপাদক হয় তবে $x = -\frac{2}{3}$ এবং

$x = -\frac{2}{3}$ এর জন্য $P(x) = 0$ হবে।

$$\text{এখন, } P\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{2}{3}\right) + c$$

$$= -18 \cdot \frac{8}{27} + 15 \cdot \frac{4}{9} - \frac{2b}{3} + c$$

$$= c - \frac{2b}{3} - \frac{16}{3} + \frac{20}{3}$$

$$= c - \frac{2b}{3} + \frac{4}{3}$$

$$\text{এখানে } P\left(\frac{1}{2}\right) = 18\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c$$

$$= -18 \cdot \frac{1}{8} + 15 \cdot \frac{1}{4} - \frac{b}{2} + c$$

$$= c - \frac{b}{2} + \frac{15}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= c - \frac{b}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\text{শর্তানুসারে, } c - \frac{2b}{3} + \frac{4}{3} = 0 \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$c - \frac{b}{2} + \frac{3}{2} = 0 \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(i) নং হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$-\frac{2b}{3} + \frac{b}{2} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{-4b + 3b + 8 - 9}{6} = 0$$

$$\text{বা, } -b - 1 = 0$$

$$\therefore b = -1$$

b এর মান, (ii) নং এ বসিয়ে,

$$c - \frac{(-1)}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{বা, } c + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\text{বা, } c + \frac{4}{2} = 0$$

$$\therefore c = -2 = 2(-1) = 2b$$

$$\therefore c = 2b \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$\text{গ } Q(x) = 6x^2 + 7x + a$$

$$a = -5 \text{ হলে, } Q(x) = 6x^2 + 7x - 5$$

$$= 6x^2 - 3x + 10x - 5$$

$$= 3x(2x - 1) + 5(2x - 1)$$

$$= (2x - 1)(3x + 5)$$

$$\text{এখন, } \frac{x^3}{Q(x)} = \frac{x^3}{6x^2 + 7x - 5}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{6x^3}{6x^2 + 7x - 5}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{6x^3 + 7x^2 - 5x - 7x^2 + 5x}{6x^2 + 7x - 5}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{x(6x^2 + 7x - 5) - (7x^2 - 5x)}{6x^2 + 7x - 5}$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ x - \frac{7}{6} \cdot \frac{6x^2 - 30x}{6x^2 + 7x - 5} \right\}$$

$$= \frac{x}{6} - \frac{7}{36} \cdot \frac{6x^2 + 7x - 5 - 7x + 5 - \frac{30}{7}x}{6x^2 + 7x - 5}$$

$$= \frac{x}{6} - \frac{7}{36} \cdot \left\{ 1 + \frac{-\frac{79}{7}x + 5}{6x^2 + 7x - 5} \right\}$$

$$= \frac{x}{6} - \frac{7}{36} + \frac{1}{36} \cdot \frac{79x - 35}{6x^2 + 7x - 5}$$

$$\text{এখন, ধরি, } \frac{79x - 35}{6x^2 + 7x - 5}$$

$$\text{বা, } \frac{79x - 35}{(2x - 1)(3x + 5)} \equiv \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{3x + 5}$$

$$\text{বা, } 79x - 35 \equiv A(3x + 5) + B(2x - 1) \dots \dots \dots \text{(i)}$$

(i) নং সমীকরণে, $x = -\frac{5}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$79\left(-\frac{5}{3}\right) - 35 = A \cdot 0 + B\left(-\frac{10}{3} - 1\right)$$

$$\text{বা, } \frac{-395 - 105}{3} = B\left(\frac{-10 - 3}{3}\right)$$

$$\text{বা, } -500 = -13B$$

$$\therefore B = \frac{500}{13}$$

আবার, (i) নং সমীকরণে $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$79 \times \frac{1}{2} - 35 = A\left(\frac{3}{2} + 5\right) + B \cdot 0$$

$$\text{বা, } \frac{79 - 70}{2} = A\left(\frac{3 + 10}{2}\right)$$

$$\text{বা, } 13A = 9$$

$$\therefore A = \frac{9}{13}$$

$$\therefore \frac{79x - 35}{6x^2 + 7x - 5} = \frac{9}{13} \cdot \frac{1}{2x - 1} + \frac{500}{13} \cdot \frac{1}{3x + 5}$$

$$\text{সুতরাং } \frac{x^3}{Q(x)} = \frac{x}{6} - \frac{7}{36} + \frac{1}{36} \left\{ \frac{9}{13} \cdot \frac{1}{2x - 1} + \frac{500}{13} \cdot \frac{1}{3x + 5} \right\}$$

$$= \frac{x}{6} - \frac{7}{36} + \frac{1}{52(2x - 1)} + \frac{125}{117(3x + 5)}$$

ইহাই নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ

প্রশ্ন 8৬ $f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + c$, $g(x) = x^2 - 4x - 7$ এবং

$$h(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এ্যান্ড কলেজ, সৈয়দপুর, নীলফামারী ৷ প্রশ্ন নং ২]

ক. $h(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

২

খ. $(3x + 2)$ যদি $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে, c এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. $\frac{g(x)}{h(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

৪

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন ৮ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৪৭ $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ বহুপদীকে $(x - a)$ ও $(x - b)$ দ্বারা ভাগ

করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে এবং $Q(x) = x^2 + x - 1$

[নীলফামারী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নীলফামারী ৷ প্রশ্ন নং ২]

ক. $Q(x)y^3$ কে x ও y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে প্রকাশ করে মাত্রা নির্ণয় কর।

২

খ. $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a^2 + ab + b^2 - 6a - 6b + 11 = 0$, যেখানে $a \neq b$

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $Q(x) = x^2 + x - 1$

$$\therefore Q(x) \cdot y^3 = (x^2 + x - 1) y^3$$

$$= x^2 y^3 + x y^3 - y^3$$

ইহা x ও y চলকের বহুপদীর আদর্শ রূপ।

$$\therefore Q(x) \cdot y^3 \text{ এর মাত্রা} = 2 + 3 = 5 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

$$\text{এবং } Q(x) = x^2 + x - 1$$

$$\therefore \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{x^2 + x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2 + x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \dots \dots \text{(i)}$$

উভয়পক্ষকে $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 + x - 1 \equiv A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2) \dots \dots \text{(ii)}$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii)নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1^2 + 1 - 1 = A(1 - 2)(1 - 3) + B(1 - 1)(1 - 3) + c(1 - 1)(1 - 2)$$

$$\text{বা, } 1 = A(-1) \cdot (-2)$$

$$\text{বা, } 1 = 2A$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

(ii)নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 + 2 - 1 = A(2 - 2)(2 - 3) + B(2 - 1)(2 - 3) + C(2 - 1)(2 - 2)$$

$$\text{বা, } 4 + 2 - 1 = B \cdot 1(-1)$$

$$\text{বা, } -B = 5$$

$$\therefore B = -5$$

(ii)নং এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$$3^2 + 3 - 1 = A(3 - 2)(3 - 3) + B(3 - 1)(3 - 3) + C(3 - 1)(3 - 2)$$

$$\text{বা, } 9 + 3 - 1 = C \cdot 2 \cdot 1$$

$$\text{বা, } 2C = 11$$

$$\therefore C = \frac{11}{2}$$

A, B ও C এর মান (i)নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-5}{x - 2} + \frac{\frac{11}{2}}{x - 3}$$

$$= \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{5}{x - 2} + \frac{11}{2(x - 3)}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

গ দেওয়া আছে,

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$= (x^2 - 2x - x + 2)(x - 3)$$

$$= (x^2 - 3x + 2)(x - 3)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$P(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a)$

$$\therefore P(a) = a^3 - 6a^2 + 11a - 6$$

এবং $P(x)$ কে $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(b)$

$$\therefore P(b) = b^3 - 6b^2 + 11b - 6$$

প্রশ্নমতে, $P(a) = P(b)$

$$\text{বা, } a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = b^3 - 6b^2 + 11b - 6$$

$$\text{বা, } a^3 - b^3 - 6a^2 + 6b^2 + 11a - 11b = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2) - 6(a + b)(a - b) + 11(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 6a - 6b + 11) = 0$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 - 6a - 6b + 11 = 0 \quad [\square a \neq b \text{ বলে } a - b \neq 0]$$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন 8c $f: \nabla \rightarrow \nabla$, $f(y) = \frac{y-3}{3}$; $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$ এবং

$$Q(y) = 4y^4 + 12y^3 + 7y^2 - 3y - 2$$

[কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা ৷ প্রশ্ন নং ১]

$$\text{ক. } f^{-1}(3) \text{ এর মান বের কর।} \quad 2$$

$$\text{খ. } P(x, y, z) = xyz \text{ হলে প্রমাণ কর যে, } (x + y + z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 8$$

$$\text{গ. } \frac{f^{-1}(y)}{Q(y)} \text{ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।} \quad 8$$

8c নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(y) = \frac{y-3}{3}$

$$\text{ধরি, } x = f(y) = \frac{y-3}{3}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = y$$

$$\text{এখন, } x = \frac{y-3}{3}$$

$$\text{বা, } 3x = y - 3$$

$$\text{বা, } y = 3x + 3$$

$$\text{বা, } f^{-1}(x) = 3x + 3$$

$$\text{বা, } f^{-1}(3) = 3 \cdot 3 + 3$$

$$\therefore f^{-1}(3) = 12 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

$$\text{বা, } xyz = x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x$$

$$[P(x, y, z) = xyz]$$

$$\text{বা, } x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + z^2x + yz^2 + x^2z + xyz = 0$$

$$\text{বা, } xy(x + y) + yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)(xy + yz + z^2 + xz) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)\{y(x + z) + z(z + x)\} = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)(y + z)(z + x) = 0$$

$$\therefore x + y = 0 \text{ অথবা, } y + z = 0 \text{ অথবা } z + x = 0$$

$$\therefore x = -y \quad \therefore y = -z \quad \therefore z = -x$$

$$\text{এখন, } (x + y + z)^5 = (x - z + z)^5 = x^5 \quad [\square y = -z]$$

$$\text{আবার, } x^5 + y^5 + z^5 = x^5 + (-z)^5 + z^5 \quad [\square y = -z]$$

$$= x^5 - z^5 + z^5$$

$$= x^5$$

$$\therefore (x + y + z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ 'ক' থেকে পাই,

$$f^{-1}(x) = 3x + 3$$

$$\therefore f^{-1}(y) = 3y + 3$$

দেওয়া আছে,

$$Q(y) = 4y^4 + 12y^3 + 7y^2 - 3y - 2$$

$Q(y)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই,

$$Q(y) = 4y^4 + 12y^3 + 7y^2 - 3y - 2$$

$$= 4y^4 + 4y^3 + 8y^3 + 8y^2 - y^2 - y - 2y - 2$$

$$= 4y^3(y + 1) + 8y^2(y + 1) - y(y + 1) - 2(y + 1)$$

$$= (y + 1)(4y^3 + 8y^2 - y - 2)$$

$$= (y + 1)\{4y^2(y + 2) - 1(y + 2)\}$$

$$= (y + 1)(y + 2)(4y^2 - 1)$$

$$= (y + 1)(y + 2)(2y + 1)(2y - 1)$$

$$\therefore \frac{f^{-1}(y)}{Q(y)} = \frac{3y + 3}{4y^4 + 12y^3 + 7y^2 - 3y - 2}$$

$$= \frac{3(y + 1)}{(y + 1)(y + 2)(2y + 1)(2y - 1)}$$

$$= \frac{3}{(y + 2)(2y + 1)(2y - 1)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{3}{(y + 2)(2y + 1)(2y - 1)} = \frac{A}{y + 2} + \frac{B}{2y + 1} + \frac{C}{2y - 1} \dots \dots (i)$$

উভয়পক্ষকে $(y + 2)(2y + 1)(2y - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$3 = A(2y + 1)(2y - 1) + B(y + 2)(2y - 1) + C(y + 2)(2y + 1) \dots (ii)$$

(ii)নং এ $y = -2$ বসিয়ে পাই,

$$3 = A(-3)(-5) + B \cdot 0 + C \cdot 0$$

$$\therefore A = \frac{1}{5}$$

(ii) এ $y = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$3 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot \frac{5}{2} \cdot 2$$

$$\therefore C = \frac{3}{5}$$

(ii) নং $y = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$3 = A \cdot 0 + B \cdot \frac{3}{2} \cdot (-2) + C \cdot 0$$

$$\therefore B = -1$$

A, B ও C এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$$\frac{3}{(y + 2)(2y + 1)(2y - 1)} = \frac{1}{5(y + 2)} - \frac{1}{(2y + 1)} + \frac{3}{5(2y - 1)}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৪৯ $P(x) = 6x^4 + 7x^3 + ax^2 + bx + 4$, $Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$,
 $G(x) = x^2 + x - 2$

[নবাব ফয়জুল্লাহ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, কুমিল্লা ৷ প্রশ্ন নং ২]

- ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$ ২
 খ. $P(x)$ এর উৎপাদক $G(x)$ হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. $\frac{x}{(x^2+1)Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $f(a) = a^3 + 6a^2 + 11a + 6$
 $a = -1$ হলে $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$
 $= -1 + 6 - 11 + 6$
 $= 0$

∴ $(a + 1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $f(a) = a^3 + 6a^2 + 11a + 6$
 $= a^3 + a^2 + 5a^2 + 5a + 6a + 6$
 $= a^2(a + 1) + 5a(a + 1) + 6(a + 1)$
 $= (a + 1)(a^2 + 5a + 6)$
 $= (a + 1)(a^2 + 3a + 2a + 6)$
 $= (a + 1)\{a(a + 3) + 2(a + 3)\}$
 $= (a + 1)(a + 2)(a + 3)$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে,

$G(x) = x^2 + x - 2$
 $= x^2 + 2x - x - 2$
 $= x(x + 2) - 1(x + 2)$
 $= (x + 2)(x - 1)$

$(x - 1)$, $P(x) = 6x^4 + 7x^3 + ax^2 + bx + 4$ এর একটি উৎপাদক হলে,
 $P(1) = 0$ হবে।

∴ $6.1^4 + 7.1^3 + a.1^2 + b.1 + 4 = 0$

বা, $6 + 7 + a + b + 4 = 0$

∴ $a + b = -17$... (i)

আবার, $(x + 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $P(-2) = 0$

বা, $6(-2)^4 + 7(-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + 4 = 0$

বা, $96 - 56 + 4a - 2b + 4 = 0$

বা, $4a - 2b = -44$

বা, $2a - b = -22$... (ii)

(i) + (ii) থেকে পাই, $3a = -39$

∴ $a = -13$ (Ans.)

(i) থেকে পাই, $-13 + b = -17$

∴ $b = -4$ (Ans.)

গ. দেওয়া আছে, $Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$= 2x^2 + 6x - x - 3$

$= 2x(x + 3) - 1(x + 3)$

$= (x + 3)(2x - 1)$

এখন, $\frac{x}{(x^2+1)Q(x)} = \frac{x}{(x+3)(2x-1)(x^2+1)}$

ধরি, $\frac{x}{(x+3)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$... (i)

(i) এর উভয়পক্ষে $(x + 3)(2x - 1)(x^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x = A(2x - 1)(x^2 + 1) + B(x + 3)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 3)(2x - 1)$... (ii)

(ii) এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$-3 = A(-7)(10) + B.0 + (Cx + D).0$

∴ $A = \frac{3}{70}$

(ii) এ $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই, $\frac{1}{2} = A.0 + B\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right) + (Cx + D).0$

∴ $B = \frac{4}{35}$

(ii) এর উভয়পক্ষে x^3 এর সহগ এবং ধ্রুবক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$0 = 2A + B + 2C$

বা, $2C + 2.\frac{3}{70} + \frac{4}{35} = 0$

∴ $C = -\frac{1}{10}$

এবং $0 = -A + 3B - 3D$

বা, $3D = -\frac{3}{70} + 3.\frac{4}{35}$

∴ $D = \frac{1}{10}$

A, B, C, D এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x}{(x+3)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{70}}{x+3} + \frac{\frac{4}{35}}{2x-1} + \frac{-\frac{x}{10} + \frac{1}{10}}{x^2+1}$

$= \frac{3}{70(x+3)} + \frac{4}{35(2x-1)} + \frac{1-x}{10(x^2+1)}$ [যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ]

প্রশ্ন ▶ ৫০ $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$F(x) = \sqrt{5 - 7x}$

$G(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[কুমিল্লা মডার্ন হাই স্কুল, কুমিল্লা ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২
 খ. যদি $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে,
 $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ ৪
 গ. $G(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{5 - 7x}$

$F(x) \in \nabla$ যদি ও কেবল যদি $5 - 7x \geq 0$ হয়

বা, $7x \leq 5$

∴ $x \leq \frac{5}{7}$

∴ ডোম F = $\{x \in \nabla : x \leq \frac{5}{7}\}$ (Ans.)

খ. পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৪

গ. রাশিটি, $G(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

এখন, $\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x(x^2 - 2x - 3) + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$= x + \frac{3x + 1}{(x - 3)(x + 1)}$

∴ $\frac{3x + 1}{(x - 3)(x + 1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{3x + 1}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1}$... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(x - 3)(x + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই-

$3x + 1 = A(x + 1) + B(x - 3)$... (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$3(-1) + 1 = A(-1 + 1) + B(-1 - 3)$

বা, $-3 + 1 = A.0 - 4B$

বা, $-2 = -4B$

∴ $B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3.3 + 1 = A(3 + 1) + B(3 - 3)$

বা, $9 + 1 = 4.A + B.0$ বা, $10 = 4A$

∴ $A = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

A ও B এর মান (i)নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{3x + 1}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{\frac{5}{2}}{x - 3} + \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}$

$$\therefore \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3} = x + \frac{5}{x-3} + \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore G(x) = x + \frac{5}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ৫১ $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$, যেখানে $x \neq 3$ এবং

$$g(x) = \frac{x-3}{2x+1}, \text{ যেখানে } x \neq -\frac{1}{2}$$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী ৮/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $p(x) = 2x - 3$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ ফাংশনটি সার্বিক কি না যাচাই কর। ৪

গ. $g^{-1}(x)$ নির্ণয় কর, অতঃপর $g^{-1}(-5)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 2x - 3$

$$\text{ধরি, } y = P(x) = 2x - 3$$

$$\text{বা, } y = 2x - 3$$

$$\text{বা, } 2x = y + 3$$

$$\therefore x = \frac{y+3}{2}$$

SSC উচ্চতর গণিত মেইড ইজি উত্তরপত্র-৩৯

এখানে, y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

\therefore রেঞ্জ, $P = \mathbb{R}$ (Ans.)

খ ধরি, $y = f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

$$\text{বা, } y = \frac{x-2}{x-3}$$

$$\text{বা, } xy - 3y = x - 2$$

$$\text{বা, } xy - x = 3y - 2$$

$$\text{বা, } x(y-1) = 3y-2$$

$$\therefore x = \frac{3y-2}{y-1}$$

$$\text{এখন, } f\left(\frac{3y-2}{y-1}\right) = \frac{\frac{3y-2}{y-1} - 2}{\frac{3y-2}{y-1} - 3}$$

$$= \frac{\frac{3y-2-2y+2}{y-1}}{\frac{3y-2-3y+3}{y-1}}$$

$$= \frac{3y-2-2y+2}{3y-2-3y+3}$$

$$= \frac{y}{y-1}$$

$$= \frac{y-1}{y-1}$$

$$= \frac{y}{y-1} \times \frac{y-1}{1}$$

$$= y$$

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি সার্বিক।

গ দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

$$\text{ধরি, } g^{-1}(x) = a$$

$$\text{বা, } x = g(a)$$

$$\text{বা, } x = \frac{a-3}{2a+1}$$

$$\text{বা, } 2ax + x = a - 3$$

$$\text{বা, } 2ax - a = -x - 3$$

$$\text{বা, } a(2x-1) = -x-3$$

$$\text{বা, } a = \frac{-x-3}{2x-1}$$

$$\text{বা, } a = \frac{x+3}{1-2x}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}$$

$$\therefore g^{-1}(-5) = \frac{-5+3}{1-2(-5)} = \frac{-2}{1+10} = -\frac{2}{11} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৫২ মনে কর, $f(x) = x^3 - 7x - 6$ এবং $g(x) = 2x^2 + x - a$ দুইটি বহুপদী। [চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম ৮/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হলে, $f(x)$ ও $g(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{g(x)}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $f(x) = x^3 - 7x - 6$

$$x = -1 \text{ হলে, } f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6$$

$$= -1 + 7 - 6$$

$$= 0$$

$\therefore (x+1), f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7x - 6$

$$= x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6$$

$$= x^2(x+1) - x(x+1) - 6(x+1)$$

$$= (x+1)(x^2 - x - 6)$$

$$= (x+1)(x^2 - 3x + 2x - 6)$$

$$= (x+1)\{x(x-3) + 2(x-3)\}$$

$$= (x+1)(x+2)(x-3) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$g(x) = 2x^2 + x - a$$

এখন, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\text{বা, } 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - a = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - a = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore g(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$= 2x^2 + 2x - x - 1$$

$$= 2x(x+1) - 1(x+1)$$

$$= (x+1)(2x-1)$$

$$= (x+1)(2x-1)$$

'ক' হতে পাই, $f(x) = (x+1)(x+2)(x-3)$

দেখা যাচ্ছে যে, $f(x)$ ও $g(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক $(x+1)$

(Ans.)

গ $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - 7x - 6}$

$$= \frac{2x^2 + x - 1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

ধরি, $\frac{2x^2 + x - 1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} \dots \dots (i)$

(i) এর উভয়পক্ষে $(x+1)(x+2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $2x^2 + x - 1 = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2) \dots \dots (ii)$

(ii) নং-এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$2 - 1 - 1 = A(1)(-4) + 0.B + C.0$$

$$\therefore A = 0$$

(ii) নং-এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$$2(-2)^2 + (-2) - 1 = A.0 + B(-1)(-5) + C.0$$

$$\text{বা, } 8 - 3 = 5B$$

$$\therefore B = 1$$

(ii) নং-এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$$2(3)^2 + 3 - 1 = A.0 + B.0 + C(4)(5)$$

$$\text{বা, } 18 + 2 = 20C$$

$$\therefore C = 1$$

(i) নং এ A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x^2 + x - 1}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} \text{ [যা নির্ণয়ে আংশিক}$$

ভগ্নাংশে প্রকাশ]

$$\text{প্রশ্ন } \blacktriangleright \text{ ৫৩ } f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 2$$

[ডা: খান্জীর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম // প্রশ্ন নং ১]

$$\text{ক. } a^3 - 8b^3 + 6ab + 1 \text{ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।} \quad 2$$

খ. যদি $f(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $2(a^2 + ab + b^2) = a + b - 4$ 8

$$\text{গ. } \frac{9}{f(x)} \text{ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।} \quad 8$$

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

$$\text{ক. } a^3 - 8b^3 + 6ab + 1 \\ = (a)^3 + (-2b)^3 + (1)^3 - 3.a.(-2b).1 \\ = (a - 2b + 1)(a^2 + 4b^2 + 1 + 2ab + 2b - a) \text{ (Ans.)}$$

খ. $f(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে তবে $f(a) = f(b)$

$$\therefore 2a^3 - a^2 + 4a - 2 = 2b^3 - b^2 + 4b - 2$$

$$\text{বা, } 2(a^3 - b^3) - (a^2 - b^2) + 4(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } 2(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a + b)(a - b) + 4(a - b) = 0$$

$$\text{বা, } 2(a^2 + ab + b^2) - (a + b) + 4 = 0 \text{ [} \square a \neq b \text{]}$$

$$\text{বা, } 2(a^2 + ab + b^2) = a + b - 4 \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$\text{গ. } f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 2$$

$$\therefore \frac{9}{f(x)} = \frac{9}{2x^3 - x^2 + 4x - 2}$$

$$= \frac{9}{2x^3 - x^2 + 4x - 2}$$

$$= \frac{9}{x^2(2x - 1) + 2(2x - 1)}$$

$$= \frac{9}{(2x - 1)(x^2 + 2)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{9}{(2x - 1)(x^2 + 2)} \equiv \frac{A}{2x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} \dots \dots \text{ (i)}$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(2x - 1)(x^2 + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$9 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)(2x - 1) \dots \dots \text{ (ii)}$$

(ii) নং এ $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$9 = A \left(\frac{1}{4} + 2 \right)$$

$$\text{বা, } \frac{9A}{4} = 9$$

$$\text{বা, } A = 4$$

(ii) এর উভয়পক্ষে x^2 এর সহগ ও ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$$A + 2B = 0 \quad \text{এবং} \quad 2A - C = 9$$

$$\therefore 2B = -A \quad C = 2A - 9$$

$$\therefore B = -\frac{A}{2} \quad = 2 \times 4 - 9$$

$$= -\frac{4}{2} \quad = -1$$

$$= -2$$

A, B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{9}{(2x - 1)(x^2 + 2)} = \frac{4}{2x - 1} - \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$$

এটিই নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

$$\text{প্রশ্ন } \blacktriangleright \text{ ৫৪ } Q(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a \text{ বহুপদীর একটি উৎপাদক } 3x - 1 \text{।}$$

[হাজী মুহাম্মদ মহসিন সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম // প্রশ্ন নং ১]

$$\text{ক. } a \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad 2$$

$$\text{খ. } Q(x) \text{ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।} \quad 8$$

$$\text{গ. } \frac{3x^2 + 8x + 2}{Q(x)} \text{ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।} \quad 8$$

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

$$\text{ক. } Q(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$$

যেহেতু $(3x - 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক, তাই $(3x - 1)$ দ্বারা $Q(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে।

$$\text{অর্থাৎ, } Q\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\text{বা, } 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } 18 \cdot \frac{1}{27} + 15 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } \frac{2 + 5 - 1}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } \frac{6}{3} + a = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ (Ans.)}$$

খ. পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২, উদাহরণ-১৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৪৬

$$\text{গ. } Q(x) = (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1) \text{ ['খ' হতে]}$$

$$\therefore \frac{3x^2 + 8x + 2}{Q(x)} = \frac{3x^2 + 8x + 2}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)}$$

$$\text{মনে করি, } \frac{3x^2 + 8x + 2}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} \equiv \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x + 2}$$

$$+ \frac{C}{3x - 1} \dots \dots \text{ (i)}$$

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$3x^2 + 8x + 2 \equiv A(3x + 2)(3x - 1) + B(2x + 1)(3x - 1)$$

$$+ C(3x + 2)(2x + 1) \dots \dots \text{ (ii)}$$

(ii) নং এ, $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = A \left\{ 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \right\} \cdot \left\{ 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \right\}$$

$$+ B.0 + C.0$$

$$\text{বা, } \frac{3}{4} - 4 + 2 = A \left(-\frac{3}{2} + 2\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - 1\right)$$

$$\text{বা, } \frac{3}{4} - 2 = A \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{বা, } \frac{3 - 8}{4} = A \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\text{বা, } \frac{-5}{4} = A \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\therefore A = 1$$

(ii) নং এ, $x = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = A.0 + B \left\{ 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \right\}$$

$$\left\{ 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 \right\} + C.0$$

$$\text{বা, } 3 \cdot \frac{4}{9} - \frac{16}{3} + 2 = B \left(-\frac{4}{3} + 1\right) \cdot (-2 - 1)$$

$$\text{বা, } \frac{4}{3} - \frac{16}{3} + 2 = B \left(-\frac{1}{3}\right) (-3)$$

$$\text{বা, } \frac{4 - 16 + 6}{3} = B$$

$$\therefore B = -2$$

(ii) নং এ $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{1}{3} + 2 = A.0 + B.0 + C \left(3 \cdot \frac{1}{3} + 2\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} + 1\right)$$

$$\text{বা, } \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 2 = C \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right)$$

$$\text{বা, } \frac{1 + 8 + 6}{3} = C \cdot 3 \cdot \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{15}{3} = C \cdot \frac{15}{3}$$

$$\therefore C = 1$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x^2 + 8x + 2}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} = \frac{1}{2x + 1} - \frac{2}{3x + 2} + \frac{1}{3x - 1}$$

প্রশ্ন ▶ ৫৫ $g(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+4)}$, $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$ যেখানে $f: \nabla \rightarrow \nabla$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল ও কলেজ চট্টগ্রাম // প্রশ্ন নং ১]

- ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^6 - 14a^3 + 25$ ২
 খ. $3f^{-1}(x) = 2x$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a^6 - 14a^3 + 25$
 $= a^6 - 10a^3 + 25 - 4a^3$
 $= (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot 5 + (5)^2 - 4a^3$
 $= (a^3 - 5)^2 - (2a^{\frac{3}{2}})^2$
 $= (a^3 - 5 + 2a^{\frac{3}{2}})(a^3 - 5 - 2a^{\frac{3}{2}})$
 $= (a^3 + 2\sqrt[3]{a^2} - 5)(a^3 - 2\sqrt[3]{a^2} - 5)$ (Ans.)

খ ধরি, $y = f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$

বা, $xy + y = 2x + 5$

বা, $xy - 2x = 5 - y$

বা, $x(y - 2) = 5 - y$

বা, $x = \frac{5-y}{y-2}$

সুতরাং, $x = \frac{5-y}{y-2}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{5-y}{y-2}$ [$y = f(x)$ হলে $x = f^{-1}(y)$]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{5-x}{x-2}$

প্রশ্নমতে, $3f^{-1}(x) = 2x$

বা, $3 \cdot \left(\frac{5-x}{x-2}\right) = 2x$

বা, $\frac{15-3x}{x-2} = 2x$

বা, $2x^2 - 4x = 15 - 3x \Rightarrow 2x^2 - 4x + 3x = 15$

বা, $2x^2 - x - 15 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 5x - 15 = 0$

বা, $2x(x-3) + 5(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(2x+5) = 0$

হয়, $x-3 = 0$ অথবা, $2x+5 = 0$

$\therefore x = 3$ বা, $2x = -5$

$\therefore x = -\frac{5}{2}$

$\therefore x = 3, -\frac{5}{2}$ (Ans.)

গ পাঠ্যবই অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ-২৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৯

প্রশ্ন ▶ ৫৬ $P(x) = x + 1$ এবং $Q(x) = x - 1$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম // প্রশ্ন নং ১]

ক. $g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ হলে প্রমাণ কর যে, $g^{-1}(x) = g(x)$. ২

খ. দেখাও যে, $\frac{1}{P(x)} + \frac{2}{P(x^2)} + \frac{4}{P(x^4)} + \frac{8}{P(x^8)} + \frac{16}{Q(x^{16})} = \frac{1}{Q(x)}$ ৪

গ. $\frac{4x}{Q(x^4)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$

ধরি, $g^{-1}(x) = a$

বা, $x = g(a)$

বা, $x = \frac{a+2}{2a-1}$

বা, $2ax - x = a + 2$

বা, $2ax - a = x + 2$

বা, $a(2x - 1) = x + 2$

বা, $a = \frac{x+2}{2x-1} = g(x)$

$\therefore g^{-1}(x) = g(x)$ (প্রমাণিত)

খ দেওয়া আছে, $P(x) = x + 1$ এবং $Q(x) = x - 1$

বামপক্ষ = $\frac{1}{P(x)} + \frac{2}{P(x^2)} + \frac{4}{P(x^4)} + \frac{8}{P(x^8)} + \frac{16}{Q(x^{16})}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x^4+1)} + \frac{8}{(x^8+1)} + \frac{16}{(x^{16}-1)}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x^4+1)} + \frac{8}{(x^8+1)} + \frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x^4+1)} + \left\{ \frac{8(x^8-1) + 16}{(x^8+1)(x^8-1)} \right\}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x^4+1)} + \frac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{4}{(x^4+1)} + \frac{8}{x^8-1}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \left\{ \frac{4(x^4-1) + 8}{(x^4+1)(x^4-1)} \right\}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x^2+1)} + \frac{4}{x^4-1}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \left\{ \frac{2(x^2-1) + 4}{(x^2+1)(x^2-1)} \right\}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$
 $= \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{Q(x)}$ (দেখানো হলো)

গ এখানে, $\frac{4x}{Q(x^4)} = \frac{4x}{x^4-1}$

$= \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$= \frac{4x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$

ধরি, $\frac{4x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$4x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1)$

$(x+1)(x-1) \dots \dots \dots$ (ii)

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$4(-1) = A(-1-1)(1+1)$

বা, $-4 = -4A$

$\therefore A = 1$

(ii) নং এ, $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$4 \cdot 1 = B \cdot 2 \cdot (1+1)$

বা, $4 = 4B$

$\therefore B = 1$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B + C = 0$

বা, $1 + 1 + C = 0$

$\therefore C = -2$

এবং $-A + B + D = 0$

বা, $-1 + 1 + D = 0$

$\therefore D = 0$

(i) নং এ A, B, C ও D এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{4x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{-2x+0}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)} - \frac{2x}{x^2+1}$$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৫৭ $F(p, q, r) = p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}r^{-1}$ এবং $Q(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

[বান্দরবান ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বান্দরবান // প্রশ্ন নং ১]

- ক. দেখাও যে, $(x+2)$ হবে $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ রাশিটির একটি উৎপাদক। ২
- খ. $f(p, q, r) = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $p = q = r$ অথবা $pq + qr + rp = 0$ ৪
- গ. $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

- ক** ধরি, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
এখন, $P(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6$
 $= -8 + 24 - 22 + 6$
 $= 0$
সুতরাং $\{x - (-2)\}$ বা, $(x+2)$, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

- খ** প্রশ্নমতে, $F(p, q, r) = 0$
বা, $p^{-3} + q^{-3} + r^{-3} - 3p^{-1}q^{-1}r^{-1} = 0$
বা, $\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \left(\frac{1}{q}\right)^3 + \left(\frac{1}{r}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{r} = 0$
বা, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) \left\{ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 \right\} = 0$
 $\therefore \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) \left\{ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 \right\} = 0$
 $\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$
বা, $\frac{qr + rp + pq}{pqr} = 0$
 $\therefore pq + qr + rp = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 = 0$
এখন, দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 = 0$ এবং $\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 0$ বা, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ বা, $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$ বা, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$
 $\therefore p = q \dots \dots$ (i) $\therefore q = r \dots \dots$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $p = q = r$
সুতরাং $p = q = r$ অথবা $pq + qr + rp = 0$ (প্রমাণিত)

- গ** দেওয়া আছে,
 $Q(x) = \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}$
 $= 1 + \frac{4}{(x+2)(x-2)}$
ধরি, $\frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \dots \dots$ (i)
(i) নং কে $(x+2)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $4 = A(x-2) + B(x+2) \dots \dots$ (ii)
যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।
(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,
 $4 = A(-2-2) + B(-2+2)$
বা, $4 = -4A$
 $\therefore A = -1$
আবার, (ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,
 $4 = A(2-2) + B(2+2)$
বা, $4 = 4B$
 $\therefore B = 1$

A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$$

$\therefore Q(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৫৮ $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ এবং $g(x) = x^3 + x^2 - 6x$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট // প্রশ্ন নং ১]

- ক. আংশিক ভগ্নাংশ বলতে কী বোঝায়? ২
- খ. যদি $f(x)$ কে $x - m$ এবং $x - n$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে দেখাও যে, $m^2 + n^2 + mn + 5m + 5n + 6 = 0$ ৪
- গ. $\frac{x^2 - 9x - 6}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আংশিক ভগ্নাংশ: যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

যেমন : $\frac{3x-8}{x^2-5x+6} = \frac{2(x-3) + (x-2)}{(x-3)(x-2)}$
 $= \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3}$

এখানে প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে দুইটি ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা হয়েছে। অর্থাৎ ভগ্নাংশটিকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয়েছে।

- খ** পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৪৪
[বি.দ্র. p, a ও b এর স্থলে যথাক্রমে f, m ও n ধরতে হবে]
- গ** সূজনশীল ১২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৫৯ $f(x) = \frac{3x-1}{5x+2}$ এবং $p(b, c, d) = b^3 + c^3 + d^3 - 3bcd$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[সরকারি অগ্রগামী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, সিলেট // প্রশ্ন নং ১]

- ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২
- খ. $f^{-1}(2)$ নির্ণয় কর। ৪
- গ. $p(b, c, d) = 0$ এবং $b + c + d \neq 0$ হলে দেখাও যে, $b = c = d = 0$

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

- ক** দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{3x-1}{5x+2}$
 $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি $5x+2 \neq 0$ হয়
বা, $x \neq -\frac{2}{5}$
 \therefore ডোম, $f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{2}{5}\}$ (Ans.)

- খ** ধরি, $y = f(x) = \frac{3x-1}{5x+2}$
বা, $y = \frac{3x-1}{5x+2}$
বা, $5xy + 2y = 3x - 1$
বা, $5xy - 3x = -2y - 1$
বা, $x(5y - 3) = -2y - 1$
বা, $x = \frac{-2y-1}{5y-3}$
বা, $f^{-1}(y) = \frac{-2y-1}{5y-3}$ [$y = f(x)$ হলে $x = f^{-1}(y)$]
 $\therefore f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{5x-3}$

এখন, $f^{-1}(2) = \frac{-2(2)-1}{5(2)-3} = \frac{-4-1}{10-3} = \frac{-5}{7}$ (Ans.)

- গ** দেওয়া আছে,
 $p(b, c, d) = 0$
বা, $b^3 + c^3 + d^3 - 3bcd = 0$
বা, $\frac{1}{2} (b+c+d)\{(b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-b)^2\} = 0$
বা, $(b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-b)^2 = 0$ [$\because b+c+d \neq 0$]

দুই বা ততোধিক রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হলে, তাদের প্রত্যেকের মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $(b - c)^2 = 0$

বা, $b - c = 0$

$\therefore b = c$

অনুরূপভাবে, $c = d$

এবং $d = b$

$\therefore b = c = d$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ৬০ $P(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

এবং $Q(a, b, c) = (b + c)(c + a)(a + b)$

[সিলেট সরকারি পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট ৷/ প্রশ্ন নং ২]

ক. যদি $(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $x = y = z$ ২

খ. দেখাও যে, $Q(a, b, c) + abc = P(a, b, c)$ ৪

গ. যদি $P(a, b, c) = abc$ হয় তবে যাচাই কর, $\frac{1}{(a + b + c)^7} = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7}$ হওয়া সম্ভব কিনা। ৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$

দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

$\therefore (x - y)^2 = 0$ আবার, $(y - z)^2 = 0$

বা, $x - y = 0$ বা, $y - z = 0$

$\therefore x = y$ $\therefore y = z$

$\therefore x = y = z$ (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে,

$P(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

$Q(a, b, c) = (b + c)(c + a)(a + b)$

বামপক্ষ = $Q(a, b, c) + abc$

= $(b + c)(c + a)(a + b) + abc$

অতঃপর, পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ২ এর উদাহরণ-১৭ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫১

গ দেওয়া আছে,

$P(a, b, c) = abc$

বা, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$

বা, $a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + ca^2 + abc + c^2a = abc$

বা, $a^2b + ab^2 + abc + b^2c + c^2a + bc^2 + a^2c + abc = 0$

বা, $ab(a + b) + bc(a + b) + c^2(a + b) + ac(a + b) = 0$

বা, $(a + b)(ab + bc + c^2 + ac) = 0$

বা, $(a + b)\{b(a + c) + c(c + a)\} = 0$

বা, $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$

$\therefore a + b = 0$ অথবা $b + c = 0$ অথবা $c + a = 0$

$\therefore a = -b$ $\therefore b = -c$ $\therefore c = -a$

এখন, $\frac{1}{(a + b + c)^7} = \frac{1}{(a - c + c)^7} = \frac{1}{a^7} [\square b = -c]$

আবার, $\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7}$

= $\frac{1}{a^7} - \frac{1}{c^7} + \frac{1}{c^7} [\square b = -c]$

= $\frac{1}{a^7}$

$\therefore \frac{1}{(a + b + c)^7} = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7}$

প্রশ্ন ৬১ $P(x) = x^3 - x - 3$ এবং $Q(x) = (x + 4)(x^2 + 5)$

$Q(x)$ বহুপদীকে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 18.

[মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর ৷/ প্রশ্ন নং ২]

ক. দেখাও যে, $p^3 + q^3 + r^3 + 3pqr$ একটি প্রতিসম রাশি। ২

খ. a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $f(p, q, r) = p^3 + q^3 + r^3 + 3pqr$

$\therefore f(q, p, r) = q^3 + p^3 + r^3 + 3pqr$

= $p^3 + q^3 + r^3 + 3pqr$

এবং $f(r, q, p) = r^3 + q^3 + p^3 + 3rpq$

= $p^3 + q^3 + r^3 + 3pqr$

অর্থাৎ, p, q, r চলকের যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময় করলে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং, রাশিটি প্রতিসম রাশি।

খ দেওয়া আছে, $Q(x) = (x + 4)(x^2 + 5)$

এখন, $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $Q(a)$.

শর্তমতে, $Q(a) = 18$

বা, $(a + 4)(a^2 + 5) = 18$

বা, $a^3 + 4a^2 + 5a + 20 = 18$

বা, $a^3 + 4a^2 + 5a + 2 = 0$

বা, $a^3 + 2a^2 + 2a^2 + 4a + a + 2 = 0$

বা, $a^2(a + 2) + 2a(a + 2) + 1(a + 2) = 0$

বা, $(a + 2)(a^2 + 2a + 1) = 0$

বা, $(a + 2)(a + 1)^2 = 0$

বা, $a + 2 = 0$ নতুবা, $(a + 1)^2 = 0$

$\therefore a = -2$ বা, $a + 1 = 0$

বা, $a = -1$

$\therefore a = -1, -2$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 - x - 3$

$Q(x) = (x + 4)(x^2 + 5)$

$\therefore \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - x - 3}{(x + 4)(x^2 + 5)}$

ধরি, $\frac{x^3 - x - 3}{(x + 4)(x^2 + 5)} = 1 + \frac{A}{x + 4} + \frac{Bx + D}{x^2 + 5} \dots \dots$ (i)

(i) নং সমীকরণকে $(x + 4)(x^2 + 5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 - x - 3 = (x + 4)(x^2 + 5) + A(x^2 + 5) + (Bx + D)(x + 4)$

= $x^3 + 4x^2 + 5x + 20 + Ax^2 + 5A + Bx^2 + 4Bx + Dx + 4D$

বা, $x^3 - x - 3 = x^3 + (A + B + 4)x^2 + (4B + D + 5)x + 5A + 4D + 20 \dots \dots$ (ii)

এখন, (ii) নং সমীকরণে x^2, x এর সহগ ও ধ্রুবকপদ সমীকৃত করে পাই, x^2 এর সহগ: $A + B + 4 = 0$

$B = -(4 + A)$

x এর সহগ: $4B + D + 5 = -1$

বা, $-4(4 + A) + D + 5 = -1$

বা, $-16 - 4A + D + 5 = -1$

বা, $D = 10 + 4A$

ধ্রুবক পদ: $5A + 4D + 20 = -3$

বা, $5A + 4(10 + 4A) + 20 = -3$

বা, $5A + 40 + 16A + 20 = -3$

বা, $21A = -63$

$\therefore A = -3$

এবং $B = -1$

$D = 10 - 12 = -2$

এখন, A, B ও D এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$\frac{x^3 - x - 3}{(x + 4)(x^2 + 5)} = 1 + \frac{-3}{x + 4} + \frac{-x - 2}{x^2 + 5}$

$\therefore \frac{P(x)}{Q(x)} = 1 - \frac{3}{x + 4} - \frac{x + 2}{x^2 + 5}$ (Ans.)

প্রশ্ন ৬২ (i) $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

(ii) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

(iii) $\frac{2}{(2x + 10)(x + 3)^2}$

[পটুয়াখালী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পটুয়াখালী ৷/ প্রশ্ন নং ২]

ক. $P(a)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. যদি $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$. ৪

গ. (iii) নং ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
 $a = -1$ হলে, $P(-1) = 4 - 12 + 7 + 3 - 2 = 0$
 $\therefore \{a - (-1)\}$ অর্থাৎ $(a + 1)$, $P(a)$ এর একটি উৎপাদক।
 এখন, $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
 $= 4a^4 + 4a^3 + 8a^3 + 8a^2 - a^2 - a - 2a - 2$
 $= 4a^3(a + 1) + 8a^2(a + 1) - a(a + 1) - 2(a + 1)$
 $= (a + 1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$
 $= (a + 1)\{4a^2(a + 2) - 1(a + 2)\}$
 $= (a + 1)(a + 2)(4a^2 - 1)$
 $= (a + 1)(a + 2)(2a + 1)(2a - 1)$ (Ans.)

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৪

গ ধরি, $\frac{2}{(2x + 10)(x + 3)^2} \equiv \frac{A}{2x + 10} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{(x + 3)^2} \dots (1)$

(1) নং এর উভয়পক্ষকে $(2x + 10)(x + 3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2 = A(x + 3)^2 + B(2x + 10)(x + 3) + C(2x + 10) \dots (2)$$

এখন, (2) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A.0 + B.0 + C\{2 \times (-3) + 10\}$$

$$\text{বা, } 2 = C(-6 + 10)$$

$$\text{বা, } 2 = 4C \therefore C = \frac{1}{2}$$

আবার, (2) নং এ $x = -5$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A(-5 + 3)^2 + B.0 + C.0$$

$$\text{বা, } 2 = A(-2)^2$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

(2) নং এর উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগগুলো সমীকৃত করে পাই,

$$0 = A + 2B$$

$$\text{বা, } B = \frac{-A}{2} \therefore B = -\frac{1}{4}$$

A, B ও C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2}{(2x + 10)(x + 3)^2} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{2x + 10} + \frac{-\frac{1}{4}}{x + 3} + \frac{\frac{1}{2}}{(x + 3)^2}$$

$$= \frac{1}{2(2x + 10)} - \frac{1}{4(x + 3)} + \frac{1}{2(x + 3)^2}$$

ইহাই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ৬৩ $P(a) = \frac{2a}{(a + 1)(a^2 + 1)}$ এবং $Q = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$ দুটি ফাংশন।

[ক্যামব্রিয়ান স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. সমমাত্রিক বহুপদী ও প্রতিসম রাশি কী? ২

খ. যদি $Q = \frac{3}{abc}$ হয় তবে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$

8

গ. $P(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমমাত্রিক বহুপদী: কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, একে সমমাত্রিক বহুপদী (homogeneous polynomial) বলা হয়।

$x^2 + 2xy + 5y^2$ রাশিটি x, y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা ২)

প্রতিসম রাশি (Symmetric Expression): একাধিক চলক সংবলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলক স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম (symmetric) রাশি বলা হয়। যেমন, $a + b + c$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি।

খ দেওয়া আছে,

$$Q = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$$

$$\text{বা, } \frac{3}{abc} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \left[\because Q = \frac{3}{abc} \right]$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 \right\} = 0$$

$$\left[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2} (x + y + z) \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \right]$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$$

$$\therefore bc + ca + ab = 0$$

$$\text{অথবা, } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

$$\text{সুতরাং } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0 \text{ এবং } \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

$$\therefore a = b$$

$$\therefore b = c$$

$$\therefore a = b = c$$

সুতরাং $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$$P(a) = \frac{2a}{(a + 1)(a^2 + 1)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{2a}{(a + 1)(a^2 + 1)} \equiv \frac{A}{a + 1} + \frac{Ba + C}{a^2 + 1} \dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(a + 1)(a^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করি,

$$2a \equiv A(a^2 + 1) + (Ba + C)(a + 1) \dots (ii)$$

(ii) নং এ $a = -1$ বসিয়ে পাই,

$$2(-1) = A\{(-1)^2 + 1\} + 0$$

$$\text{বা, } -2 = 2A$$

$$\therefore A = -1$$

a^2, a এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 0 \dots (iii)$$

$$B + C = 2 \dots (iv)$$

(iii) নং হতে,

$$A + B = 0$$

$$\text{বা, } -1 + B = 0$$

$$\therefore B = 1$$

(iv) নং হতে,

$$B + C = 2$$

$$\text{বা, } C + 1 = 2$$

$$\therefore C = 1$$

A, B ও C এর মানগুলো (i) নং এ বসাই,

$$\therefore \frac{2a}{(a + 1)(a^2 + 1)} = \frac{-1}{a + 1} + \frac{a.1 + 1}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{a + 1}{a^2 + 1} - \frac{1}{a + 1} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৬৪ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$; $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$
 এবং $R(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ হলো x চলকের তিনটি বহুপদী।

[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা ৷ প্রশ্ন নং ২]

ক. $R(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$R(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$

$$x = -1 \text{ হলে, } R(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$$

$$= 0$$

∴ (x + 1), R(x) এর একটি উৎপাদক।

$$\therefore R(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$$

$$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$$

$$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$$

$$= (x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\}$$

$$= (x + 1)(x - 4)(x + 2) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, P(x) = 18x³ + 15x² - x + a

যেহেতু (3x + 2), P(x) এর একটি উৎপাদক, তাই, (3x + 2) দ্বারা P(x) কে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\text{বা, } 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + a = 0$$

$$\text{বা, } -18 \cdot \frac{8}{27} + 15 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} + a = 0$$

$$\text{বা, } a = \frac{16}{3} - \frac{20}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } a = \frac{16 - 20 - 2}{3}$$

$$\text{বা, } a = \frac{-6}{3}$$

$$\therefore a = -2 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, Q(x) = x³ + x² - 6x

Q(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই,

$$\therefore Q(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x^2 + 3x - 2x - 6)$$

$$= x\{x(x + 3) - 2(x + 3)\} = x(x + 3)(x - 2)$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$$= \frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3} \dots\dots (i)$$

উভয়পক্ষকে x(x - 2)(x + 3) দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 + x - 1 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2) \dots (ii)$$

যা x-এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এ x = 0 বসিয়ে পাই,

$$-1 = A(-2) \cdot 3 \text{ বা, } -6A = -1 \therefore A = \frac{1}{6}$$

(ii) নং এ x = 2 বসিয়ে পাই,

$$2^2 + 2 - 1 = A(2 - 2)(2 + 3) + B \cdot 2 \cdot (2 + 3) + C \cdot 2(2 - 2)$$

$$\text{বা, } 4 + 2 - 1 = B \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{বা, } 10B = 5 \therefore B = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এ x = -3 বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 + (-3) - 1 = A(-3 - 2)(-3 + 3) + B(-3)(-3 + 3) + C(-3)(-3 - 2)$$

$$\text{বা, } 9 - 3 - 1 = C(-3)(-5)$$

$$\text{বা, } 15C = 5$$

$$\therefore C = \frac{1}{3}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x - 2)} + \frac{1}{3(x + 3)}$$

$$= \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x - 2)} + \frac{1}{3(x + 3)}$$

যা আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ।

প্রশ্ন ▶ ৬৫ x, y, z এর একটি বহুপদী হলো F(x, y, z) = x³ + y³ + z³ - 3xyz
[খিলগাঁও সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, ঢাকা ১/ প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, F(x, y, z) হলো একটি চক্রগুণিত রাশি। ২

খ. F(x, y, z) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি F(x, y, z) = 0, x + y + z ≠ 0 হয়, তবে দেখাও যে, x² + y² + z² = xy + yz + zx. ৪

গ. যদি x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b - c হয়, তবে দেখাও যে, F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4 ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, F(x, y, z) = x³ + y³ + z³ - 3xyz

$$\text{এখন, } F(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3yzx = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= F(x, y, z)$$

$$\text{আবার, } F(z, x, y) = z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= F(x, y, z)$$

$$\therefore F(x, y, z) = F(y, z, x) = F(z, x, y)$$

অতএব, F(x, y, z) একটি চক্রগুণিত রাশি। (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে,

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y) - 3xyz$$

$$= (x + y + z)^3 - 3(x + y)z(x + y + z) - 3xy(x + y + z)$$

$$= (x + y + z)\{(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy\}$$

$$= (x + y + z)\{(x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 - 3z(x + y) - 3xy\}$$

$$= (x + y + z)\{x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - z(x + y) - 3xy\}$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমতে, F(x, y, z) = 0

$$\therefore (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

যেহেতু, x + y + z ≠ 0

$$\text{সুতরাং } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$x = b + c - a$$

$$y = c + a - b$$

এবং z = a + b - c

‘খ’ হতে পাই, F(x, y, z)

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

$$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \left[\because \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \right]$$

$$= 4.F(a, b, c)$$

$$\therefore F(x, y, z) = 4.F(a, b, c)$$

$$\text{বা, } \frac{F(a, b, c)}{F(x, y, z)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ▶ ৬৬ f(x) = ln $\frac{5+x}{5-x}$, P(x) = x² + x - 1 ◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

[নারায়ণগঞ্জ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, নারায়ণগঞ্জ ১/ প্রশ্ন নং ১]

ক. a³ + b³ + c³ - 3abc কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

- খ. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8
 গ. $f(x)$ এর D_f ও R_f নির্ণয় কর। 8

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
 $= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$
 $= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$
 $= (a+b+c) \{ (a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \} - 3ab(a+b+c)$
 $= (a+b+c) (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a+b+c)$
 $= (a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

খ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + x - 6)} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)}$
 ধরি, $\frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$ (i)
 উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $x^2 + x - 1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$ (ii)
 (ii) -এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,
 $-1 = A(-2) \cdot 3$
 বা, $-6A = -1$
 $\therefore A = \frac{1}{6}$
 (ii) -এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,
 $2^2 + 2 - 1 = A(2-2)(2+3) + B \cdot 2 \cdot (2+3) + C \cdot 2(2-2)$
 বা, $4 + 2 - 1 = B \cdot 2 \cdot 5$
 বা, $10B = 5$
 $\therefore B = \frac{1}{2}$
 (ii) -এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,
 $(-3)^2 + (-3) - 1 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3)(-3+3) + C(-3)(-3-2)$
 $-1 = C(-3)(-5)$
 বা, $15C = 5$
 $\therefore C = \frac{1}{3}$
 এখন A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,
 $\frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}$
 $= \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}$
 যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

গ ধরি, $y = f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$
 যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়
 $\therefore \frac{5+x}{5-x} > 0$ যদি (i) $5+x > 0$ এবং $5-x > 0$ হয়
 অথবা (ii) $5+x < 0$ এবং $5-x < 0$ হয়।
 (i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$
 বা, $x > -5$ এবং $x < 5$
 \therefore ডোমেন $= \{x : -5 < x\}$ এবং $\{x : x < 5\}$
 $= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$
 (ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$
 বা, $x < -5$ এবং $x > 5$
 \therefore ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap \{x : x > 5\} = \emptyset$
 \therefore প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (i)$ ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ
 $= (-5, 5) \cup \emptyset = (-5, 5)$
 ধরি, $y = f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$
 বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$
 বা, $5+x = 5e^y - xe^y$
 বা, $x(1+e^y) = 5(e^y - 1)$
 বা, $x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$
 y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

\therefore প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{V}$
 ডোমেন $D_f = (-5, 5)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{V}$ (Ans.)

প্রশ্ন ৬৭ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $3x - 1$
[সরকারি মোহাম্মদ পুর মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা 1/ প্রশ্ন নং ১]
 ক. a এর মান নির্ণয় কর। 2
 খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। 8
 গ. $\frac{3x^2 + 8x + 2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। 8

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,
 $(3x - 1), P(x)$ এর একটি উৎপাদক।
 তাহলে, $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$
 বা, $18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + a = 0$
 বা, $\frac{18}{27} + \frac{15}{9} - \frac{1}{3} + a = 0$
 বা, $\frac{18 + 45 - 9}{27} + a = 0$
 বা, $\frac{54}{27} + a = 0$
 বা, $a + 2 = 0$
 $\therefore a = -2$ (Ans.)

খ 'ক' নং হতে প্রাপ্ত $a = -2$
 $\therefore P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$
 অতঃপর, পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ-১৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৬

গ 'খ' নং হতে প্রাপ্ত,
 $P(x) = (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$
 $\therefore \frac{3x^2 + 8x + 2}{P(x)} = \frac{3x^2 + 8x + 2}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)}$
 ধরি,
 $\frac{3x^2 + 8x + 2}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x + 2} + \frac{C}{3x - 1}$ (i)
 (i) নং এর উভয়পক্ষে $(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$ দ্বারা গুণ করি।
 $3x^2 + 8x + 2 = A(3x + 2)(3x - 1) + B(2x + 1)(3x - 1) + C(2x + 1)(3x - 1)$ (ii)
 (ii) নং এর x^2, x ও ধ্রুবক পদের সহগ সমন্বয় করে পাই,
 $9A + 6B + 6C = 3$ (iii)
 $3A + B + 7C = 8$ (iv)
 $-2A - B + 2C = 2$
 বা, $2A + B - 2C = -2$ (v)
 (iv) - (v) করে পাই,
 $A + 9C = 10$ (vi)
 (iii) - $6 \times$ (iv) \Rightarrow
 $9A + 6B + 6C - 6 \times (3A + B + 7C) = 3 - 48$
 বা, $-9A - 36C = -45$
 $\therefore A + 4C = 5$ (vii)
 এখন, (vi) ও (vii) হতে পাই,
 $A + 9C = 10$
 $A + 4C = 5$
 বিয়োগ করে, $5C = 5$
 বা, $C = 1$
 আবার, (vi) হতে পাই,
 $A = 10 - 9C = 10 - 9 \times 1 = 1$
 (iv) নং হতে পাই,
 $B = 8 - (3A + 7C) = 8 - (3.1 + 7.1) = -2$
 \therefore (i) নং এ মান বসিয়ে পাই,
 $\frac{3x^2 + 8x + 2}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} = \frac{1}{2x + 1} - \frac{2}{3x + 2} + \frac{1}{3x - 1}$
 (Ans.)

প্রশ্ন ৬৮ $P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9$ এবং $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

- ক. $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূপে লিখে এর মাত্রা নির্ণয় কর। ২
 খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪
 গ. $\frac{x^2+x-1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$P(x) = -x^2 + 15x + 10x^3 + 9;$$

একে x চলকের আদর্শরূপে প্রকাশ করলে পাই,

$$P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$$

$P(x)$ রাশিটির পদসমূহের সর্বোচ্চ ঘাত 3

∴ $P(x)$ এর মাত্রা 3 (Ans.)

খ $P(x)$ এর ধ্রুবক পদ 9 এর উৎপাদকসমূহের সেট,

$$F_1 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$$

$P(x)$ এর মুখ্য সহগ 10 এর উৎপাদকসমূহের সেট,

$$F_2 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে $a = \frac{r}{s}$

এবং $r \in F_1, s \in F_2$

$$a = 1 \text{ হলে, } P(1) \neq 0$$

$$a = -1 \text{ হলে, } P(-1) \neq 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ হলে, } P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ হলে, } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

সুতরাং $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x + 1)$ অর্থাৎ $(2x + 1)$,

$P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned} \text{এখন, } P(x) &= 10x^3 - x^2 + 15x + 9 \\ &= 10x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 3x + 18x + 9 \\ &= 5x^2(2x + 1) - 3x(2x + 1) + 9(2x + 1) \\ &= (2x + 1)(5x^2 - 3x + 9) \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ দেওয়া আছে,

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$$= \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + x - 6)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^2 + x - 1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \dots \dots \dots (i)$$

উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 + x - 1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \dots (ii)$$

(ii) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$-1 = A(-2) \cdot 3$$

$$\text{বা, } -6A = -1$$

$$\text{বা, } A = \frac{1}{6}$$

(ii) এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 + 2 - 1 = A \cdot 0 + B \cdot 2(2+3) + C \cdot 0$$

$$\text{বা, } 5 = B \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{বা, } 10B = 5$$

$$\text{বা, } B = \frac{6}{10} = \frac{1}{2}$$

(ii) এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 - 3 - 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-3)(-3-2)$$

$$\text{বা, } 5 = C \cdot 15$$

$$\text{বা, } C = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

এখন, A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{x^2 + x - 1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}$$

যা, নির্ণয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ৬৯ $F(x) = \frac{x-5}{2x+1}$ এবং $g(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ দুইটি ফাংশন।

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[শিরোইল সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, রাজশাহী ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. দেখাও যে, F একটি এক-এক ফাংশন। ২
 খ. $F^{-1}(x) = x - 5$ হলে x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. $\frac{x^3}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $a, b \in \text{ডোমে } F$ এবং $F(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $F(a) = F(b)$ এর জন্য $a = b$ হয়।

$$\text{ধরি, } F(a) = F(b)$$

$$\text{বা, } \frac{a-5}{2a+1} = \frac{b-5}{2b+1}$$

$$\text{বা, } 2ab + a - 10b - 5 = 2ab - 10a + b - 5$$

$$\text{বা, } 11a = 11b$$

$$\therefore a = b$$

∴ $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক। (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{x-5}{2x+1}$

এখন, $F^{-1}(x) = x - 5$ হলে,

$$x = F(x - 5)$$

$$\text{বা, } x = \frac{x-5-5}{2(x-5)+1}$$

$$\text{বা, } x = \frac{x-10}{2x-10+1}$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 9x = x - 10$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 10x + 10 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$\text{বা, } x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$\text{বা, } x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

এখন, $x + 2, g(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে

$g(-2) = 0$ হবে।

$$\begin{aligned} \therefore g(-2) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 \\ &= -8 + 24 - 22 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ $(x + 2), g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 3x + 6 \\ &= x^2(x + 2) + 4x(x + 2) + 3(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 + 4x + 3) \\ &= (x + 2)(x^2 + 3x + x + 3) \\ &= (x + 2)(x + 3)(x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{এখন, } \frac{x^3}{g(x)} = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \dots \dots (i)$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^3 = (x + 1)(x + 2)(x + 3) + A(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x + 1)(x + 2) \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,
 $(-1)^3 = 0 + A(-1 + 2)(-1 + 3) + 0 + 0$

বা, $-1 = 2A \therefore A = -\frac{1}{2}$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,
 $(-2)^3 = 0 + 0 + B(-1)(1) + 0$
 $\therefore B = 8$

(ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,
 $(-3)^3 = 0 + 0 + 0 + C(-2)(-1)$
 বা, $-27 = 2C$

$\therefore C = -\frac{27}{2}$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{8}{x+2} + \frac{-\frac{27}{2}}{x+3}$$

$$\therefore \frac{x^3}{g(x)} = 1 - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{8}{x+2} - \frac{27}{2(x+3)}$$

যা প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

প্রশ্ন ৭০ $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা, $a \neq 0, d \neq 0$ এবং $x - r$ বহুপদীর একটি উৎপাদক। $S = \{3^n : n = 0 \text{ অথবা } n \in \mathbb{N}\}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[বি এল সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, সিরাজগঞ্জ ৷/ প্রশ্ন নং ২]

ক. $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ এবং $C = \{e, f\}$ হলে $A \times (B \cup C)$ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, যদি $r = \frac{p}{q}$ লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশিত মূলদ সংখ্যা হয়, তবে p, d এর উৎপাদক ও q, a এর উৎপাদক হবে। ৪

গ. S এর একটি প্রকৃত উপসেট বর্ণনা কর যা S এর সমতুল। ৪

৭০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,
 $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{e, f\}$
 $\therefore B \cup C = \{c, d\} \cup \{e, f\} = \{c, d, e, f\}$
 $\therefore A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{c, d, e, f\}$
 $= \{(a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f)\}$ (Ans.)

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-২ এর উদাহরণ ১১(খ) নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৪৫

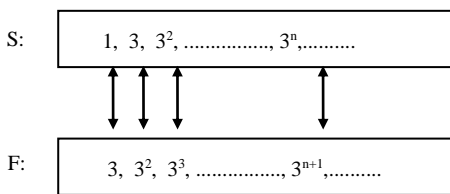
গ উপরের প্রশ্নে উল্লেখিত সেট $S = \{1, 3, 3^2, \dots, 3^n, \dots\}$

এখন আমরা একটি সেট F লিখি নিম্নোক্তভাবে, $F = \{3k : k \in S\}$
 [অর্থাৎ F এর একটি উপাদান S এর অনুরূপ উপাদানের ৩ গুণ]

অর্থাৎ, $F = \{3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{n+1}, \dots\}$

এই সেটের প্রত্যেকটি সদস্যই S সেটে আছে।

এখন S এবং F এর মধ্যে আমরা একটি এক-এক-মিল দেখাতে পারি।



যেহেতু F এর প্রত্যেকটি সদস্যই S সেটে আছে এবং S এর অন্তত একটি সদস্য আছে যা F এ নেই, অর্থাৎ ১, তাহলে বলা যায় F, S -এর প্রকৃত উপসেট এবং S এর সমতুল।

প্রশ্ন ৭১ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ এবং $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[পুলিশ লাইন উচ্চ বিদ্যালয়, দিনাজপুর ৷/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x) = 1$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর এবং $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা দেখাও। ৪

গ. $p(x)$ কে $x - m$ এবং $x - n$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $m \neq n$ তবে দেখাও যে,
 $m^2 + mn + n^2 - 6m - 6n + 11 = 0$ ৪

৭১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

দেওয়া আছে,

$$f(x) = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1$$

$$\text{বা, } \sqrt{1-2x} = 1$$

$$\text{বা, } 1 - 2x = 1 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 2x = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ (Ans.)}$$

খ এখানে,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি

$$1 - 2x > 0$$

$$\text{বা, } 2x - 1 < 0$$

$$\text{বা, } 2x < 1$$

$$\text{বা, } x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore x < \frac{1}{2}$$

\therefore ডোম, $f = \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{2}\}$ (Ans.)

ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে, $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{1-2x_1}} = \frac{1}{\sqrt{1-2x_2}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{1-2x_1} = \sqrt{1-2x_2}$$

$$\text{বা, } 1 - 2x_1 = 1 - 2x_2 \text{ [উভয়কে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } -2x_1 = -2x_2$$

$$\text{বা, } x_1 = x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

সুতরাং ফাংশনটি এক-এক।

গ সূজনশীল ৭(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৭২ (i) $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[কুমিল্লা হাই স্কুল, কুমিল্লা ৷/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $\{3, 5, 7\}$ এবং $\{1, 2, 3, 4\}$ সেটদ্বয় সমতুল কি না নির্ণয় কর। ২

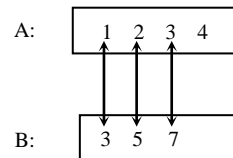
খ. দেখাও যে, f দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক হলেও অনটু নয়। ৪

গ. $\frac{3x^2 + x + 2}{A}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7\}$

এদের মধ্যে এক-এক মিল সম্পর্ক নিরূপণ:



উপরের চিত্রে এক-এক মিলটিকে $A \longleftrightarrow B$:

$2k + 1$, $k \in A$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়। কিন্তু $9 \notin B$ হওয়ায় ৪, B সেটের কোন উপাদানের সাথে সম্পর্কিত নয়।

সুতরাং A ও B সমতুল নয়।

খ দেওয়া আছে,

$$f: \nabla - \{1\} \rightarrow \nabla$$

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$f(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি যে কোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে, $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\text{বা, } \frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1+x_2}{1-x_2}$$

$$\text{বা, } 1-x_2+x_1-x_1x_2 = 1+x_2-x_1-x_1x_2$$

$$\text{বা, } 2x_1 = 2x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

সুতরাং ফাংশনটি এক-এক।

$$\text{ধরি, } y = f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{বা, } y - xy = 1 + x$$

$$\text{বা, } x + xy = y - 1$$

$$\text{বা, } x(1+y) = y - 1$$

$$\therefore x = \frac{y-1}{y+1} \in \nabla \text{ হবে যদি } 1+y \neq 0$$

$$\text{বা, } y \neq -1 \text{ হয়।}$$

অর্থাৎ ফাংশনটির রেঞ্জ $\nabla - \{-1\} \neq$ কোডোমেন (∇)

\therefore ফাংশনটি সার্বিক বা অনটু নয়।

সুতরাং ফাংশনটি এক-এক হলেও অনটু নয়। (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$$A = x(x+1)$$

$$\therefore \frac{3x^2+x+2}{A} = \frac{3x^2+x+2}{x(x+1)} = 3 + \frac{2-2x}{x(x+1)}$$

$$\text{ধরি, } \frac{2-2x}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $x(x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2-2x \equiv A(x+1) + Bx \dots \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x=0$ বসিয়ে পাই,

$$2 = A \therefore A = 2$$

(ii) নং এ $x=-1$ বসিয়ে পাই,

$$2 - 2(-1) = -B$$

$$\text{বা, } 4 = -B$$

$$\therefore B = -4$$

A ও B এর মানসমূহ (i) এ বসাই

$$\therefore \frac{2-2x}{x(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{-4}{x+1}$$

$$\therefore \frac{3x^2+x+2}{x(x+1)} = 3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৭৩ $g: \nabla - \left\{ \frac{1}{5} \right\} \rightarrow \nabla, g(x) = \frac{1+x}{1-5x}$

এবং $A = \frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

ইবনে তাইমিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিল্লা ৷ প্রশ্ন নং ১।

ক. g দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, প্রদত্ত ফাংশনটি এক-এক কিন্তু অনটু নয়। ৪

গ. A কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$g(x) = \frac{1+x}{1-5x}$$

$g(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $1-5x \neq 0$ হয়

$$\text{বা, } -5x \neq -1$$

$$\text{বা, } x \neq \frac{1}{5}$$

$$\therefore \text{ডোম } g = \nabla - \left\{ \frac{1}{5} \right\} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$g(x) = \frac{1+x}{1-5x}$$

$g(x)$ এক-এক ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি যেকোনো বাস্তব সংখ্যা $x_1, x_2 \in$ ডোম g এর জন্য $g(x_1) = g(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়

ধরি, $g(x_1) = g(x_2)$

$$\text{বা, } \frac{1+x_1}{1-5x_1} = \frac{1+x_2}{1-5x_2}$$

$$\text{বা, } 1-5x_2+x_1-5x_1x_2 = 1-5x_1+x_2-5x_1x_2$$

$$\text{বা, } -5x_2+x_1 = -5x_1+x_2$$

$$\text{বা, } 6x_1 = 6x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$

$\therefore g(x)$ এক-এক ফাংশন।

আবার,

$$\text{ধরি, } y = g(x) = \frac{1+x}{1-5x}$$

$$\text{বা, } y - 5xy = 1 + x$$

$$\text{বা, } x + 5xy = y - 1$$

$$\text{বা, } x(1+5y) = y - 1$$

$$\text{বা, } x = \frac{y-1}{5y+1} \dots \dots \dots (i)$$

$$\therefore g^{-1}(y) = \frac{y-1}{5y+1}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x-1}{5x+1} \in \nabla \text{ হবে,}$$

$$\text{যদি } 5x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{5} \text{ হয়}$$

সুতরাং কোডোমেন \neq রেঞ্জ, অর্থাৎ ফাংশনটি অনটু নয়।

সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক-এক কিন্তু অনটু নয়। (দেখানো হলো)

গ ধরি,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \dots \dots \dots (1)$$

(1) এর উভয় পক্ষকে $(2x+1)(x+3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 \equiv A(x+3)^2 + B(2x+1)(x+3) + C(2x+1) \dots \dots \dots (2)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (2) এ $x=-3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 = C\{2(-3)+1\}$$

$$\text{বা, } 9 = C(-6+1)$$

$$\text{বা, } -5C = 9$$

$$\therefore C = -\frac{9}{5}$$

আবার, (2) নং এ $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{4} = A\left(\frac{-1+6}{2}\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{4} = A\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\text{বা, } 25A = 1$$

$$\therefore A = \frac{1}{25}$$

আবার, (2) নং থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + 2B = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{25} + 2B = 1$$

$$\text{বা, } 2B = 1 - \frac{1}{25}$$

$$\text{বা, } 2B = \frac{25-1}{25}$$

$$\text{বা, } 2B = \frac{24}{25}$$

$$\text{বা, } B = \frac{24}{25 \times 2}$$

$$\therefore B = \frac{12}{25}$$

A, B, C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{1}{25} + \frac{12}{25} + \frac{-9}{5}$$

$$= \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$$

যা নির্ণয়ে আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ১৪ $f(x) = \frac{x+1}{3x-1}$ এবং $g(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3-4x}$

সম্বন্ধিত অধ্যায় ১ ও ২

[চট্টগ্রাম সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম ১/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^2 - 2x - 2 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 - 2x - 2 = 0$

নিশ্চায়ক $= (-2)^2 - 4.1.(-2)$

$= 4 + 8$

$= 12 > 0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়।

মূলদ্বয়ের প্রকৃতি: বাস্তব, অমূলদ ও অসমান। (Ans.)

খ ধরি, $y = f(x) = \frac{x+1}{3x-1}$

বা, $3xy - y = x + 1$

বা, $3xy - x = 1 + y$

বা, $x(3y - 1) = 1 + y$

বা, $x = \frac{1+y}{3y-1}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1+y}{3y-1}$ [$\square y = f(x) \therefore f^{-1}(y) = x$]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1+x}{3x-1}$

$x = \frac{1}{3}$ হলে $f^{-1}(x)$ অসংজ্ঞায়িত।

\therefore ডোম, $f^{-1} = R - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে,

$g(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3-4x}$

$= \frac{x^2+x-1}{x(x^2-4)}$

$= \frac{x^2+x-1}{x(x+2)(x-2)}$

ধরি, $\frac{x^2+x-1}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} \dots \dots \dots$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x+2)(x-2)$ দ্বারা গুণ করি

$\therefore x^2+x-1 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2) \dots \dots$ (ii)

(ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-1 = A(2)(-2)$

$\therefore A = \frac{1}{4}$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$(-2)^2 + (-2) - 1 = B(-2)(-2 - 2)$

বা, $1 = 8B$

$\therefore B = \frac{1}{8}$

(i) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2^2 + 2 - 1 = C.2.(2 + 2)$

বা, $5 = 8C$

$\therefore C = \frac{5}{8}$

A, B ও C এর মানসমূহ (i) নং এ বসাই,

$$\frac{x^2+x-1}{x(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8}$$

$$= \frac{1}{4x} + \frac{1}{8(x+2)} + \frac{5}{8(x-2)} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৫ $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x$ ও $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$.

[বান্দরবান সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, বান্দরবান ১/ প্রশ্ন নং ১]

ক. $P\left(-\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ ৪

গ. $\frac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x$

$\therefore P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 - \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{81} + \frac{1}{27} + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}$

$= \frac{1+3+36+108}{81}$

$= \frac{148}{81} \text{ (Ans.)}$

খ দেওয়া আছে, $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$

বামপক্ষ $= (a+b+c)^3$

$= (a+b+c)^3 - 3abc + 3abc$

$= (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc$

[$\because abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$]

$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\} + 3abc$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$-3ab-3bc-3ca) + 3abc$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$

$= a^3+b^3+c^3-3abc+3abc$

[$\because (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$]

$= a^3+b^3+c^3$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে,

$P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x$

$= x^3(x-1) + 4x(x-1)$

$= (x-1)(x^3+4x)$

$= x(x-1)(x^2+4)$

এখন, $\frac{x^2}{x(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$

বা, $x^2 = A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4).x + (Cx+D)x(x-1) \dots \dots$ (i)

[উভয়পক্ষকে $x(x-1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে]

এখন (i) নং এ $x = 1$ বসালে,

$1 = 0 + B(1+4) \times 1 + 0$

$1 = 5B$

$\therefore B = \frac{1}{5}$

(i) নং $x = 0$ বসালে,

$0 = A(-1)(4) + 0 + 0$

বা, $0 = -4A$

$\therefore A = 0$

আবার, x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B + C = 0 \dots \dots \dots$ (ii)

$-A - C + D = 1 \dots \dots \dots$ (iii)

A ও B এর মান (ii) নং এ বসিয়ে,

$0 + \frac{1}{5} + C = 0,$

$$\therefore C = -\frac{1}{5}$$

A ও C এর মান (iii) নং এ বসিয়ে,

$$-0 - \left(-\frac{1}{5}\right) + D = 1,$$

$$\therefore D = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2}{x(x-1)(x^2+4)} &= \frac{x^2}{P(x)} = 0 + \frac{\frac{1}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{5}(x-4)}{x^2+4} \\ &= \frac{1}{5(x-1)} - \frac{(x-4)}{5(x^2+4)} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

প্রশ্ন ▶ ৭৬ (i) $f(x) = \frac{4x+3}{2x+5}$

(ii) $g(a) = 18a^3 - 15a^2 - a + 2$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[শাহজালাল জামেয়া ইসলামিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট // প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x) = \sqrt{3x+5}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(a)$ কে $(a-P)$ এবং $(a-Q)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে তবে দেখাও যে, $18P^2 + 18PQ + 18Q^2 - 15P - 15Q = 1$ যেখানে $P \neq Q$ ৪

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$f(x) = \sqrt{3x+5}$$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $3x+5 \geq 0$ হয়

বা, $3x \geq -5$

$\therefore x \geq -\frac{5}{3}$

\therefore ডোম $f = \{x : x \in \nabla \text{ এবং } x \geq -\frac{5}{3}\}$ (Ans.)

খ ধরি,

$$y = f(x) = \frac{4x+3}{2x+5}$$

বা, $2xy + 5y = 4x + 3$

বা, $2xy - 4x = 3 - 5y$

বা, $x(2y - 4) = 3 - 5y$

বা, $x = \frac{3-5y}{2y-4}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{3-5y}{2y-4}$ [$\because y = f(x) \therefore f^{-1}(y) = x$]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3-5x}{2x-4}$

$\therefore f^{-1}(3) = \frac{3-5 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 4}$

$= \frac{-12}{2}$

$= -6$ (Ans.)

গ দেওয়া আছে,

$$g(a) = 18a^3 - 15a^2 - a + 2$$

$g(a)$ কে $(a-P)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $g(P)$

$\therefore g(P) = 18P^3 - 15P^2 - P + 2$

এবং $g(a)$ কে $(a-Q)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $g(Q)$

$\therefore g(Q) = 18Q^3 - 15Q^2 - Q + 2$

প্রশ্নমতে,

$$g(P) = g(Q)$$

বা, $18P^3 - 15P^2 - P + 2 = 18Q^3 - 15Q^2 - Q + 2$

বা, $18(P^3 - Q^3) - 15(P^2 - Q^2) - (P - Q) = 0$

বা, $18(P-Q)(P^2 + PQ + Q^2) - 15(P+Q)(P-Q) - 1(P-Q) = 0$

বা, $(P-Q)\{18P^2 + 18PQ + 18Q^2 - 15P - 15Q - 1\} = 0$

বা, $18P^2 + 18PQ + 18Q^2 - 15P - 15Q - 1 = 0$ [$\because P \neq Q$]

$\therefore 18P^2 + 18PQ + 18Q^2 - 15P - 15Q = 1$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৭৭ $F(a, b, c) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ একটি বহুপদী $f(a)$

$= a^2 + a - 12$ এবং $g(a) = \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$

[সরকারি এস সি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, সুনামগঞ্জ // প্রশ্ন নং ৩]

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক ও সমমাত্রিক রাশি। ২

খ. যদি $f(a)$ কে $2a-x$ এবং $2a-y$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $x \neq y$ তবে দেখাও যে, $x+y+2=0$ ৪

গ. $g(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

প্রদত্ত রাশিটি a, b, c চলকের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী।

(এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)

আবার, $F(b, c, a) = (b+c+a)(bc+ca+ab) - bca$

$= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

$\therefore F(c, a, b) = (c+a+b)(ca+ab+bc) - cab$

$= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

$\therefore F(a, b, c) = F(b, c, a) = F(c, a, b)$

$\therefore F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক ও সমমাত্রিক রাশি। (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল ১১(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ সৃজনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৮ $f(x) = \frac{4x+3}{2x+5}$ এবং $g(x) = \frac{x^2}{(3x+1)(x+2)^2}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[স্বরূপকাঠি কলেজিয়েট একাডেমী, পিরোজপুর // প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন। ২

খ. $f^{-1}(-2) = p f^{-1}(-3)$ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $g(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

৭৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x)$ এক-এক হবে যদি ও কেবল

যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

ধরি, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\frac{4x_1+3}{2x_1+5} = \frac{4x_2+3}{2x_2+5}$

বা, $8x_1x_2 + 6x_2 + 20x_1 + 15 = 8x_1x_2 + 6x_1 + 20x_2 + 15$

বা, $20x_1 - 6x_1 = 20x_2 - 6x_2$

বা, $14x_1 = 14x_2 \therefore x_1 = x_2$

$\therefore f$ ফাংশনটি এক-এক। (দেখানো হলো)

খ ধরি, $f^{-1}(x) = a$

বা, $x = f(a)$ বা, $x = \frac{4a+3}{2a+5}$

বা, $2ax + 5x = 4a + 3$

বা, $2ax - 4a = 3 - 5x$

বা, $a(2x - 4) = 3 - 5x$

বা, $a = \frac{3-5x}{2x-4}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3-5x}{2x-4}$

প্রশ্নমতে, $f^{-1}(-2) = p f^{-1}(-3)$

বা, $\frac{3-5(-2)}{2(-2)-4} = p \left\{ \frac{3-5(-3)}{2(-3)-4} \right\}$

বা, $\frac{3+10}{-4-4} = p \left(\frac{3+15}{-6-4} \right)$

বা, $\frac{13}{-8} = p \left(\frac{18}{-10} \right)$

বা, $p = \frac{13 \times 10}{18 \times 8}$

$\therefore p = \frac{65}{72}$ (Ans.)

গ ধরি, $g(x) = \frac{x^2}{(3x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \dots \dots$ (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(3x + 1)(x + 2)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $x^2 \equiv A(x + 2)^2 + B(3x + 1)(x + 2) + C(3x + 1) \dots \dots \dots$ (ii)

(ii) নং এ $x = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{3} + 2\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{9} = A \cdot \frac{25}{9}$$

$$\therefore A = \frac{1}{25}$$

(ii) নং হতে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + 3B = 1$$

$$\text{বা, } \frac{1}{25} + 3B = 1$$

$$\text{বা, } 3B = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

$$\therefore B = \frac{8}{25}$$

$$\text{এবং } 4A + 7B + 3C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{4}{25} + \frac{56}{25} + 3C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{60}{25} + 3C = 0$$

$$\text{বা, } 3C = -\frac{60}{25}$$

$$\text{বা, } 3C = -\frac{12}{5}$$

$$\therefore C = -\frac{4}{5}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$g(x) = \frac{1}{25(3x + 1)} + \frac{8}{25(x + 2)} - \frac{4}{5(x + 2)^2} \text{ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।}$$

প্রশ্ন ৭৯ $F(a) = \frac{1}{1 - a^3}$ এবং $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

[বাউফল সরকারি মডেল মাধ্যমিক বিদ্যালয়, পটুয়াখালী ৷ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক বা প্রতিসম কিনা যাচাই কর। ২
 খ. $F(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪
 গ. যদি $P(x, y, z) = xyz$ হয়, দেখাও যে, $\frac{1}{(x + y + z)} = \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7}$ ৪

৭৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

$$\therefore P(y, z, x) = (y + z + x)(yz + zx + xy)$$

$$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$$\text{এবং } P(z, x, y) = (z + x + y)(zx + xy + yz)$$

$$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

সুতরাং এটি একটি চক্রক্রমিক রাশি।

আবার, x, y, z চলকের যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময় করলেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং এটি একটি প্রতিসম রাশি।

খ প্রদত্ত রাশি, $\frac{1}{1 - a^3} = \frac{1}{(1 - a)(1 + a + a^2)}$

$$\text{ধরি, } \frac{1}{(1 - a)(1 + a + a^2)} \equiv \frac{A}{1 - a} + \frac{Ba + C}{1 + a + a^2} \dots \dots \dots (i)$$

(i) এর উভয়পক্ষকে $(1 - a)(1 + a + a^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
 $1 \equiv A(1 + a + a^2) + (Ba + C)(1 - a) \dots \dots \dots (ii)$
 যা a এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) এ $a = 1$ বসিয়ে পাই, $1 = A(1 + 1 + 1)$ বা, $3A = 1$

$$\therefore A = \frac{1}{3}$$

(ii) নং থেকে a^2 , a এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A - B = 0$

$$\text{বা, } \frac{1}{3} - B = 0$$

$$\therefore B = \frac{1}{3}$$

$$\text{এবং } A + B - C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{2}{3} = C$$

$$\therefore C = \frac{2}{3}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{(1 - a)(1 + a + a^2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - a} + \frac{\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}}{1 + a + a^2}$$

$$= \frac{1}{3(1 - a)} + \frac{\frac{a + 2}{3}}{1 + a + a^2}$$

$$= \frac{1}{3(1 - a)} + \frac{a + 2}{3(1 + a + a^2)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = (x + y + z)(xy + yz + zx)$

$$\text{বা, } xyz = x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x$$

$$[P(x, y, z) = xyz]$$

$$\text{বা, } x^2y + xy^2 + xyz + y^2z + z^2x + yz^2 + x^2z + xyz = 0$$

$$\text{বা, } xy(x + y) + yz(x + y) + z^2(x + y) + xz(x + y) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)(xy + yz + z^2 + xz) = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)\{y(x + z) + z(z + x)\} = 0$$

$$\text{বা, } (x + y)(y + z)(z + x) = 0$$

$$\therefore x + y = 0 \text{ অথবা, } y + z = 0 \text{ অথবা } z + x = 0$$

$$\therefore x = -y \quad \therefore y = -z \quad \therefore z = -x$$

$$\text{এখন, } \frac{1}{(x + y + z)^7} = \frac{1}{(x - z + z)^7} = \frac{1}{x^7} \quad [\square y = -z]$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7} = \frac{1}{x^7} + \frac{1}{(-z)^7} + \frac{1}{z^7} \quad [\square y = -z]$$

$$= \frac{1}{x^7} - \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^7}$$

$$= \frac{1}{x^7}$$

$$\therefore \frac{1}{(x + y + z)^7} = \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7} \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ৮০ $A = \{x : x \text{ পূর্ণ সংখ্যা এবং } x^2 < 5\}$

$$B = \frac{2x}{x^4 - 1} \text{ এবং } R = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } 2x = y + 2\}$$

◀সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ২

[সরকারি বরগুনা বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, বরগুনা ৷ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x}}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর। ২

খ. R অন্তর্যটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং অন্তর্যটি ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর। ৪

গ. B কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৮০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x}}$

$f(x)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি ও কেবল যদি

$$1 - 4x > 0 \text{ হয়}$$

$$\text{বা, } -4x > -1$$

$$\text{বা, } 4x < 1$$

$$\therefore x < \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ডোম, } f = \{x : x \in \mathbb{V} \text{ এবং } x < \frac{1}{4}\} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$A = \{x : x \text{ পূর্ণসংখ্যা এবং } x^2 < 5\}$$

$$= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{এবং } R = \{(x, y) : x \in A \text{ এবং } 2x = y + 2\}$$

$$\therefore 2x = y + 2$$

$$\text{বা, } y = 2x - 2$$

$x \in A$ এর জন্য y এর অনুরূপ মান বের করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-4	-2	0	2

এখানে, $-6, -4 \notin A$

সুতরাং $(-2, -6) \notin \nabla$ এবং $(-1, -4) \notin R$

$$\therefore R = \{(0, -2), (1, 0), (2, 2)\}$$

এবং অস্বয়টি ফাংশন কারণ

অস্বয়টিতে ডোমেনের প্রতিটি উপাদান ভিন্ন। (Ans.)

গ দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} B &= \frac{2x}{x^4 - 1} \\ &= \frac{2x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{2x}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

ধরি,

$$\frac{2x}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{(Cx + D)}{x^2 + 1} \dots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ দ্বারা গুণ করে,

$$2x = A(x - 1)(x^2 + 1) + B(x + 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 1)(x - 1) \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} 2(-1) &= A(-1 - 1) \{(-1)^2 + 1\} + 0 + 0 \\ -2 &= A(-2)(2) \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$2 = 0 + B(1 + 1)(1^2 + 1) + 0$$

$$\text{বা, } 2 = 4B$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

x^3, x^2 এর সহগ সমীকৃত করে

$$A + B + C = 0 \dots \dots (iii)$$

$$-A + B + D = 0 \dots \dots (iv)$$

(iii) নং হতে,

$$A + B + C = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 0$$

$$\therefore C = -1$$

(iv) নং হতে,

$$-A + B + D = 0$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + D = 0$$

$$\therefore D = 0$$

A, B, C ও D এর মানসমূহ (i) নং এ বসাই,

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)} &= \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-1 \cdot x + 0}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{x}{x^2 + 1} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$