# দ্বিতীয় অধ্যায়

# বীজগাণিতিক রাশি

## LECTURE SHEET

■ **বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic expression)**: বীজগাণিতিক রাশিকে সংক্ষেপে রাশি বলা হয়। যেমন : $2x$, $2x + 3y$, $6x + 4y^2$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি। এদের প্রতীকটিকে চলক বলা হয়।

■ **বহুপদী :** বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে। পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধু অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল।

$x$ একটি চলক হলে $a$, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ ইত্যাদি আকারের রাশি $x$ চলকের বহুপদী। এরূপ এক চলকের বহুপদী, দুই চলকের বহুপদী, তিন চলকের বহুপদী হতে পারে।

■ **ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য**

i. $P(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে

ii. $P(x)$ বহুপদীকে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

iii. $P(a) = 0$ হলে $(x - a)$ হচ্ছে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক

vi. $P(x)$ বহুপদীর $x - a$ একটি উৎপাদক হলে $P(a) = 0$

■ **সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্র–ক্রমিক রাশি**

**সমমাত্রিক বহুপদী (Homogeneous Polynomial) :** কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, তাকে সমমাত্রিক বহুপদী বলে।

**প্রতিসম রাশি (Symmetric) :** একাধিক চলকবিশিষ্ট কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম রাশি বলা হয়।

$ab + bc + ca$ রাশিটি $a, b, c$ চলকের এবং $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি $x$,

$y, z$ চলকের প্রতিসম রাশি।

**চক্র–ক্রমিক রাশি (Cxclic) :** চক্র–ক্রমিক রাশিতে চলকগুলোর স্থান চক্রাকারে পরিবর্তন হলেও রাশির মান অপরিবর্তিত থাকে।

তিন চলকের প্রত্যেক রাশি চক্র–ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র–ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়।

$x^2 + y^2 + z^2$ চক্র–ক্রমিক রাশির কারণে $x$ এর স্থলে $y$, $y$ এর স্থলে $z$ এবং $z$ এর স্থলে $x$ বসালে রাশিটি $y^2 + z^2 + x^2$ পূর্বের রাশির সমান হয়।

- **চক্র–ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ**

ক. কোনো চক্র–ক্রমিক বহুপদীর $(a - b)$ একটি উৎপাদক হলে, $(b - c)$ এবং $(c - a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।

খ. এক মাত্রার এবং দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র–ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a + b + c)$ ও $k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)$ যেখানে $k$ ও $m$ ধ্রুবক।

গ. দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলকগুলোর সকল মানের জন্য এদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদগুলোর সহগ পরস্পর সমান হবে।

- **মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fractions) :** একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব ধরে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলে।

যেমন, $\dfrac{x}{(x-1)(x-5)}$ এবং $\dfrac{x^2+1}{(x+8)(x^2+5x+7)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

মূলদীয় ভগ্নাংশের সরলীকরণের সময় নিম্নোক্ত অভেদগুলো বিনা প্রমাণে গ্রহণ করা যায় :

i. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

ii. $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

iii. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (a - b)(b - c)(c - a)$

iv. $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b)(b + c)(c + a)$

v. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

vi. $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc = (a + b)(b + c)(c + a)$

vii. $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

viii. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

**Note :** এই অধ্যায়ের প্রতিটি অঙ্কের সমাধান করতে এসব সূত্র ব্যবহার করতেই হবে। তাই সূত্রগুলো মুখস্থ রাখা অত্যন্ত জরুরি।

- **আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fraction)** : যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

ধরা যাক, $N(x)$ ও $D(x)$ উভয়ই $x$ চলকের বহুপদী এবং লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হয় তাহলে ভগ্নাংশটি প্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper Fraction)। যদি $D(x)$ এর মাত্রা $N(x)$ এর চেয়ে ছোট বা সমান হয়, তবে সেই ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper Fraction) বলা হয়।

- **সমতা সূত্র :**

i. যদি সকল $x$ এর জন্য $ax + b = px + q$ হয়, তবে $x = 0$ ও $x = 1$ বসিয়ে পাই, $b = q$ এবং $a + b = p + q$ যা থেকে দেখা যায়, $a = p, b = q$.

ii. যদি সকল $x$ এর জন্য $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ হয়; তবে $x = 0$, $x = 1$ ও $x = -1$ বসিয়ে পাই, $c = r$, $a + b + c = p + q + r$ এবং $a - b + c = p - q + r$; যা থেকে দেখা যায় যে, $a = p, b = q, c = r$.

iii. সাধারণভাবে, দেখা যায় যে, যদি সকল $x$ এর জন্য $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = p_o x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$ হয়,

তবে $a_o = p_o, a_1 = p_1, \ldots, a_{n-1} = p_{n-1}, a_n = p_n$

অর্থাৎ সমতা চিহ্নের উভয়পক্ষে $x$ এর একই ঘাতের সহগদ্বয় পরস্পর সমান।