পঞ্চম অধ্যায়

সমীকরণ

LECTURE SHEET

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ **এক চলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার সমাধান :**

এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$. এখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$।

সমীকরণটির সমাধান,

$ax^2 + bx + c = 0$

বা, $a^2x^2 + abx + ac = 0$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

বা, $(ax)^2 + 2(ax)\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac = 0$

বা, $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac$

বা, $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$

বা, $ax + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

বা, $ax = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

বা, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ……………………… (i)

অতএব, x এর দুইটি মান পাওয়া গেল এবং মান দুইটি হচ্ছে,

(i) $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ … … … … … … … (ii)

(ii) $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ … … … … … … …(iii)

উপরের (i) নং সমীকরণে $b^2 - 4ac$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বলে। কারণ ইহা সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি নির্ণয় করে।

নিশ্চায়কের অবস্থাভেদে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি

(i) $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।

(ii) $b^2 - 4ac > 0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

(iii) $b^2 - 4ac = 0$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান হবে। এক্ষেত্রে $x = -\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b}{2a}$.

(iv) $b^2 - 4ac < 0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে বাস্তব মূল নাই।

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

- **মূল চিহ্ন সমন্বিত সমীকরণ**

আমরা জানি, চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের বীজ বা মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলোর দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সমীকরণে চলকের বর্গমূল সংবলিত রাশি থাকলে তাকে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ সমাধান করে যে মূলগুলো পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো মূল প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। এ ধরনের মূল অবান্তর (Extraneous) মূল। সুতরাং মূলচিহ্ন সংবলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মূলগুলো প্রদত্ত সমীকরণের মূল কিনা তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যেসব মূল উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের মূল।

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ সূচক সমীকরণ (Indicial Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, তাকে সূচক সমীকরণ বলে।

$2^x = 8$, $16^x = 4^{x+2}$, $2^{x+1} - 2x - 8 = 0$ ইত্যাদি সমীকরণগুলো সূচক সমীকরণ যেখানে x অজ্ঞাত চলক। সূচক সমীকরণ সমাধান করতে সূচকের নিম্নলিখিত ধর্মটি ব্যবহার করা যায় : $a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = m$ হয়। এ জন্য প্রথমে সমীকরণের উভয়পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয়।

জেনে রাখতে হবে :

সূচকের নিয়মে ভিত্তি কখনো শূন্য হতে পারে না $\frac{a}{b}$ এর ক্ষেত্রে $b \neq 0$ হবে।

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট

যে সমীকরণ জোটের উভয় সমীকরণই দ্বিঘাত এদেরকে দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট বলে। যেমন– $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$ দ্বিঘাত সমীকরণ জোট।

জেনে রাখ :

১. $x^2 + y^2$ এর মান সর্বদা ধনাত্মক কারণ দুইটি সংখ্যার বর্গের যোগফল কখনও ঋণাত্মক হয় না।

২. xy এর মান ঋণাত্মক হলে x কিংবা y এর যেকোনো একটি ঋণাত্মক।

৩. $(x + y)$ ও $(x - y)$ উভয় রাশির মানই ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক যেকোনোটি অথবা উভয়ই হতে পারে।

যেমন : $(x + y)^2 = 49$ হলে $x + y = \pm 7$

আবার $(x - y)^2 = 64$ হলে $x - y = \pm 8$

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার

অনেক সময় সমস্যায় দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করতে হয়, সেক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশি দুইটির মান x এবং y বা অন্য যেকোনো দুইটি স্বতন্ত্র প্রতীক ধরতে হয়। তারপর সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে পরস্পর অনির্ভর, সঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ গঠন করে সমীকরণ জোটের সমাধান করলেই x এবং y অজ্ঞাত রাশিগুলোর মান নির্ণয় করা যায়।

- **বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য x একক হলে বর্গক্ষেত্রের**

1. ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গ একক
2. পরিসীমা $= 4x$ একক
3. কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}x$ একক

- **আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x একক এবং প্রস্থ y একক হলে আয়তক্ষেত্রের**

1. ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গ একক
2. পরিসীমা $= 2(x + y)$ একক
3. কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2}$ একক

- **একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y হলে–**

1. সংখ্যাটি $= x + 10y$
2. অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে সংখ্যাটি $= (y + 10x)$

জেনে রাখ :

1. কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদাই ধনাত্মক হবে।
2. কোনো সংখ্যার বর্গমূল সর্বদাই ধনাত্মক হবে।
3. যেকোনো ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও ক্ষেত্রফল সর্বদাই ধনাত্মক। এদের ঋণাত্মক মান কখনোই গ্রহণযোগ্য নয়।
4. বর্গ ও আয়তের ক্ষেত্রে কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হবে।
5. কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা সর্বদাই ধনাত্মক হবে।

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

- **দুই চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট**

সূচকীয় সমীকরণে উভয়পক্ষে ভিত্তি সমান হলে ঘাতগুলোকে সমান আকারে লেখা যায়।

সমীকরণ জোটে যেকোনো পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমাধান করা যায়।

জেনে রাখ

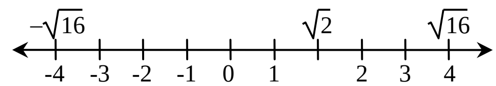
(১) যেকোনো সংখ্যার সূচক বা ঘাত শূন্য (0) হলে তার মান 1.

যথা $a^\circ = 1$, $(-2a)^\circ = 1$, $\left(\frac{x}{5}\right)^\circ = 1$, $\left(\frac{2x^2}{3x+12}\right)^\circ = 1$ কিন্তু 0° অসংজ্ঞায়িত।

(২) $y^{-2} = \frac{1}{9}$ হলে $y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$ [$\pm$ sign হয়েছে দ্বিঘাত সমীকরণের জন্য, বর্গমূল ($\sqrt{}$) এর জন্য নয়]

(৩) যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল সর্বদা ধনাত্মক।

আরো জেনে রাখ



সংখ্যারেখায় দেখা যায় $\sqrt{2}$ (1.732) এর অবস্থান শূন্য (0) হতে ডানদিকে অর্থাৎ সর্বদা ধনাত্মক। অনুরূপভাবে $\sqrt{16}$ এর সর্বদা ধনাত্মক এ কারণেই সংখ্যারেখায় $\sqrt{16}$ শূন্য (0) ডানদিকে কিন্তু $-\sqrt{16}$ শূন্য (0) হতে বামদিকে অবস্থিত।

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান

মনে করি, $y = ax^2 + bx + c$, তাহলে, x এর যে সকল মানের জন্য $y = 0$ হবে অর্থাৎ লেখচিত্রটি x-অক্ষকে ছেদ করবে, x-এর ঐ সকল মানই $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির সমাধান