সপ্তম অধ্যায়

অসীম ধারা

LECTURE SHEET

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

- **অনুক্রম :** কতগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

  অনুক্রমের পদ নির্ণয় : অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। উপরে বর্ণিত $1, 4, 9, 16, \ldots\ldots\ldots\ldots$ অনুক্রমের প্রথম পদ $= 1$, দ্বিতীয় পদ $= 4$, তৃতীয় পদ $= 9$ এবং চতুর্থ পদ $= 16$।

- **ধারা :** কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা পাওয়া যায়।

- **সমান্তর ধারা :** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সবসময় সমান হলে সেই ধারাকে সমান্তর ধারা বলে।

  সমান্তর ধারার ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$ এবং n তম পদ $= a + (n - 1)d$

- **গুণোত্তর ধারা :** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সবসময় সমান হলে অর্থাৎ যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে। গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= r$ হলে nতম পদ $= ar^{n-1}$।

- **অসীম ধারা (Infinite Series) :**

  $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots\ldots$ বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম হলে $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots\ldots$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম ধারা (Infinite Series) এবং u_n–কে এই ধারার n তম পদ বলা হয়।

প্রত্যেক অনন্ত ধারার আংশিক সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ সম্পূর্ণ ধারার (অসীম পর্যন্ত) সমষ্টি নির্ণয় করা না গেলেও যেকোনো পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

■ অসীম ধারার আংশিক সমষ্টি (Partial sum of Infinite Series) :

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots\dots$ অনন্ত ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি, $S_1 = u_1$

২য় আংশিক সমষ্টি, $S_2 = u_1 + u_2$

৩য় আংশিক সমষ্টি, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ ইত্যাদি। এভাবে n তম আংশিক সমষ্টি হচ্ছে ধারাটির প্রথম n সংখ্যক (যেখানে $n \in N$) পদের সমষ্টি।

যেমন : $1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots\dots\dots$ ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি, $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি, $S_2 = 1 + 2 = 3$

৩য় আংশিক সমষ্টি, $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

....

....

n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

■ অসীম গুণোত্তর ধারা (Infinite Geometric Series) :

$a + ar + ar^2 + \dots\dots\dots\dots$ একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r, পদগুলোকে $u_1, u_2, u_3, \dots\dots \dots\dots$ ইত্যাদি ধরে দেখা যায় যে, $u_1 = a$, $u_2 = ar$, $u_3 = ar^2$, $\dots\dots\dots\dots$ ইত্যাদি এবং সাধারণভাবে $u_n = ar^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$, $r \neq 1$ হলে, এই গুণোত্তর ধারার n তম আংশিক সমষ্টি,

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 \dots\dots\dots\dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, যখন $r > 1 = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, যখন $r < 1$

$S_n = |r| < 1$ হলে, r^n এর প্রান্তীয় মান 0 হয়। ফলে, $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$

সুতরাং, এক্ষেত্রে $a + ar + ar^2 + \dots\dots\dots\dots$ অনন্ত ধারার সমষ্টি $S = \frac{a}{1 - r}$