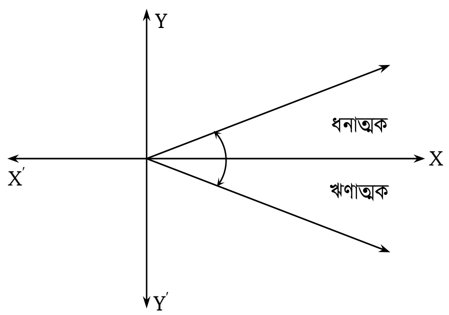
অষ্টম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি ৮.১

সাধারণভাবে ত্রিকোণমিতি বলতে তিনটি কোণের পরিমাপ বোঝায়। ব্যবহারিক প্রয়োজনে ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ এবং ত্রিভুজের সাথে সম্পর্কিত বিষয়ের আলোচনা থেকেই ত্রিকোণমিতির সূত্রপাত হয়। ত্রিকোণমিতিকে দুটি শাখায় বিভক্ত করা হয়। শাখা দুটি হচ্ছে– সমতলীয় ত্রিকোণমিতি এবং গোলকীয় ত্রিকোণমিতি।

■ **ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ :** কোনো একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরানোর ফলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাকে ধনাত্মক কোণ বলা হয়।



আবার, ঘূর্ণায়মান রশ্মিটিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরানোর ফলে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক কোণ বলা হয়।

■ **কোণ পরিমাপের একক :** কোণের পরিমাণ ও মান বর্ণনায় সাধারণত দুই ধরনের একক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। যথা : (১) ষাটমূলক একক পদ্ধতি এবং (২) বৃত্তীয় একক পদ্ধতি।

১. **ষাটমূলক পদ্ধতি :** ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এক সমকোণকে সমান 90 ভাগে বিভক্ত করলে প্রতি ভাগকে এক ডিগ্রি বলা হয়। আবার, এক ডিগ্রিকে 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক মিনিট এবং এক মিনিটকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড বলা হয়।

$60''$ (সেকেন্ড) $= 1'$ (মিনিট)

$60'$ (মিনিট) $= 1^\circ$ (ডিগ্রি)

90° (ডিগ্রি) $= 1$ সমকোণ।

২. **বৃত্তীয় পদ্ধতি :** বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ান কোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে, তাকেই এক রেডিয়ান বলা হয় এবং রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।

কোণের ডিগ্রি পরিমাপ ও রেডিয়ান পরিমাপের সম্পর্ক :

1 রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ। অর্থাৎ $1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ

$\therefore 1$ সমকোণ $= \frac{\pi^c}{2}$

$\therefore 90° = \frac{\pi^c}{2}$

$1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$ এবং $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

$\therefore 90° = 1$ সমকোণ $= \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

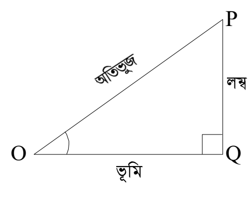
অর্থাৎ $180° = 2$ সমকোণ $= \pi$ রেডিয়ান।

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি ৮.২

■ **সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ :**

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করার জন্য আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ OPQ বিবেচনা করি। ΔOPQ এ $\angle OQP$ সমকোণ।

$\angle POQ$ এর সাপেক্ষে : OP ত্রিভুজের অতিভুজ, OQ ভূমি, PQ লম্ব এবং $\angle POQ = \theta$ (সূক্ষ্মকোণ)। OPQ সমকোণী ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণ θ এর জন্য ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত যথাক্রমে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

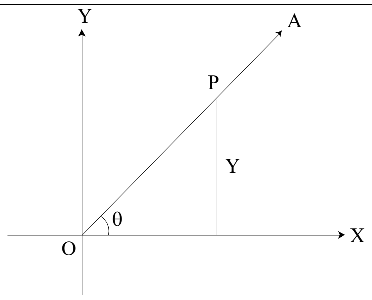


$\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$ $\quad \text{cosec}\theta = \frac{OP}{PQ}$ $\quad \cos\theta = \frac{OQ}{OP}$ $\quad \sec\theta = \frac{OP}{OQ}$

$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$ $\quad \cot\theta = \frac{OQ}{PQ}$

■ **ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক :**

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সংজ্ঞা থেকে আমরা লক্ষ করি যে,



$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{1}{\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \text{ এবং } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

অনুরূপভাবে $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$, $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{1}{\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}} = \frac{1}{\cos\theta}$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

একইভাবে, $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

■ সহজভাবে মনে রাখার জন্য :

২য় চতুর্ভাগ	১ম চতুর্ভাগ
sin (+ve) cosec (+ve)	All (+ve)
tan (+ve) cot (+ve)	cos (+ve) sec (+ve)
৩য় চতুর্ভাগ	৪র্থ চতুর্ভাগ

■ গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি :

▶▶ $\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ ▶▶ $\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

▶▶ $\tan\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ ▶▶ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$

▶▶ $\sec\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$ ▶▶ $\cot\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$

▶▶ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ▶▶ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

▶▶ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ ▶▶ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

▶▶ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ ▶▶ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

▶▶ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ▶▶ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

▶▶ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ▶▶ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

▶▶ $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ ▶▶ $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

▶▶ $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ ▶▶ $1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

▶▶ $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ ▶▶ $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

■ শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের তালিকা :

কোণ	$0°$	$\frac{\pi}{6} =$ 30°	$\frac{\pi}{4} =$ 45°	$\frac{\pi}{3} =$ 60°	$\frac{\pi}{2} = 90°$

sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি ৮.৩

■ যেকোনো কোণের অর্থাৎ $(n \times \frac{\pi}{2} \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের পদ্ধতি $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$.

নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

ধাপ–১ : প্রথমে প্রদত্ত কোণকে দুইভাগে ভাগ করতে হবে। যার একটি অংশ $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{\pi}{2}$ এর n গুণিতক এবং অপরটি সূক্ষ্মকোণ। অর্থাৎ প্রদত্ত কোণকে $(n \times \frac{\pi}{2} \pm \theta)$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

ধাপ–২ : n জোড় সংখ্যা হলে অনুপাতের ধরন একই থাকবে অর্থাৎ sine অনুপাত sine থাকবে cosine অনুপাত cosine থাকবে ইত্যাদি।

n বিজোড় হলে sine, tangent ও secant অনুপাতগুলো cosine, cotangent ও cosecant এ পরিবর্তিত হবে। একইভাবে এর বিপরীত পরিবর্তন ঘটবে।

ধাপ–৩ : $(n \times \frac{\pi}{2} \pm \theta)$ কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে সেটা জানার পর ঐ চতুর্ভাগে প্রদত্ত অনুপাতের যে চিহ্ন সেই চিহ্ন ধাপ–২ থেকে নিরূপিত অনুপাতের পূর্বে বসাতে হবে।

■ **$(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

■ **$(90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$	$\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$	$\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

■ **$(90° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$	$\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$	$\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$	$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

■ **$(180° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$	$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

■ **$(180° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$
$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$	$\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta$

■ **$(270^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin (270^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\mathrm{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$
$\cos (270^\circ - \theta) = -\sin\theta$	$\sec(270^\circ - \theta) = -\mathrm{cosec}\theta$
$\tan (270^\circ - \theta) = \cot \theta$	$\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$

■ **$(270^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\mathrm{cosec}(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$
$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$	$\sec(270^\circ + \theta) = \mathrm{cosec}\theta$
$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot\theta$	$\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta$

■ **$(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$	$\mathrm{cosec}(360^\circ - \theta) = -\mathrm{cosec}\theta$
$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$
$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$	$\cot(360^\circ - \theta) = -\cot\theta$

■ **$(360^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :**

$\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$	$\mathrm{cosec}(360^\circ + \theta) = \mathrm{cosec}\theta$
$\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$	$\sec(360^\circ + \theta) = \sec\theta$
$\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta$	$\cot(360^\circ + \theta) = \cot\theta$