নবম অধ্যায়

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি ৯.১

বাস্তব সংখ্যা : সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মূলদ সংখ্যা : p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ হলে $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়।

অমূলদ সংখ্যা : যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকার প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ সে সংখ্যাক অমূলদ সংখ্যা বলে।

পূর্ণসংখ্যা : শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখন্ড সংখ্যাসমূহকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। পূর্ণসংখ্যার সেটকে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

স্বাভাবিক সংখ্যা : $1, 2, 3, 4$ .... ইত্যাদি সাধারণত গণনামূলক সংখ্যাগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যাকে ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা বলা হয়।

স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে N দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সূচকীয় রাশি : সূচক ও ভিত্তি সম্বলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়।

সূচক সম্পর্কিত সূত্র (Laws of Exponent) :

সূত্র ১ : $a \in R$ এবং $n \in N$ হলে, $a^1 = a, a^{n+1} = a^n.a$

সূত্র ২ : $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে, $a^m. a^n = a^{m+n}$

সূত্র ৩ : $a \in R, a \neq 0$ এবং $m, n \in N, m \neq n$ হলে,

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \text{ যখন } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} \text{ যখন } m < n \end{cases}$$

সূত্র ৪ : $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$

সূত্র ৫ : $a, b \in R$ এবং $n \in N$ হলে, $(a.b)^n = a^n.b^n$

সূত্র ৬ : $a \neq 0, b \neq 0$ এবং $m, n \in Z$ হলে,

(ক) $a^m.a^n = a^{m+n}$

(খ) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(গ) $(a^m)^n = a^{mn}$

(ঘ) $(ab)^n = a^n.b^n$

(ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

সূত্র ৭ : $a < 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$, n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[-n]{|a|}$

সূত্র ৮ : $a > 0, m \in Z$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

সূত্র ৯ : যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p \in Z$ এবং

$n, q \in N, n > 1, q > 1$ তবে, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $a > 0$ এবং $n, k \in N, n > 1$ হয়, তবে $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

মূলদ ভগ্নাংশ সূচক

সংজ্ঞা : $a \in R$ এবং $n \in N, n > 1$ হলে, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ যখন $a > 0$ অথবা
$a < 0$ এবং বিজোড়।

সংজ্ঞা : $a > 0, m \in Z$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে (৬) $a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)^m}$

সংজ্ঞা : $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ যেখানে, $a > 0, m \in Z, n \in \mathbf{N}, n > 1$

সুতরাং $p \in Z, q \in Z, n > 1$ যদি এমন হয় যে, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, তবে সূত্র–৯ থেকে দেখা যায় যে, $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$

সূত্র ১০ : $a > 0, b > 0$ এবং $r, s \in Q$ হলে,

(ক) $a^r.a^s = a^{r+s}$ (খ) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (গ) $(a^r)^s = a^{rs}$

(ঘ) $(ab)^r = a^r b^r$ (ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় তথ্য :

(i) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$, এবং $a \neq 1$, তাহলে $x = 0$

(ii) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $x \neq 0$, তাহলে $a = 1$

(iii) যদি $a^x = a^y$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তাহলে $x = y$

(iv) যদি $a^x = b^x$ হয়, যেখানে $\frac{a}{b} > 0$ এবং $x \neq 0$, তাহলে $a = b$

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি ৯.২

■ **লগারিদম :** *Logos* এবং *arithmas* নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে লগারিদম শব্দটির উৎপত্তি। Logos অর্থ আলোচনা এবং arithmas অর্থ সংখ্যা অর্থাৎ, বিশেষ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা।

সংজ্ঞা : যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ, $x = \log_a b$

অতএব, $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

বিপরীতক্রমে, যদি $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$ হবে।

এক্ষেত্রে b সংখ্যাটিকে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে x এর প্রতিলগ (*anti*-log *arithm*) বলে এবং আমরা লিখি $b = anti \log_a x$

যদি $\log a = n$ হয়, তবে a কে n এর প্রতিলগ বলা হয় অর্থাৎ, $\log a = n$ হলে $a = anti \log n$.

■ **লগারিদমের সূত্রাবলি**

১. $\log_a a = 1$ এবং $\log_a 1 = 0$

২. $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$

৫. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

৩. $\log_a(M)^N = N \log_a M$

৪. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

■ **পরমমান :** একটি রাশি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত মানকে ঐ রাশির পরমমান বলা হয়। যেমন : যে কোনো বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক। x এর পরমমানকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরমমান নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

যেমন: $|0| = 0$, $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$

পরমমান ফাংশন : যদি $x \in R$ হয়, তবে

$$= \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

$y = f(x) = |x|$ কে পরমমান ফাংশন বলা হয়।

$\therefore$ ডোমেন $= R$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty]$

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় :

যেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়। সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জকেই বোঝাবে।

অতএব $y = f(x)$ ফাংশনের (x, y) ক্রমোজোড়গুলোর x এর এর মনকে ডোমেন এবং y এর মানকে রেঞ্জ বলে।

বিকল্প পদ্ধতিতে ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় :

সাধারণভাবে ডোমেন নির্ণয় অধিকতর সহজ। কোনো ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ ও ডোমেন।

অর্থাৎ, মূল ফাংশনের ডোমেন = বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ

আবার, মূল ফাংশনের রেঞ্জ = বিপরীত ফাংশনের ডোমেন।