SSC Higher Math

অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট-২০২৩

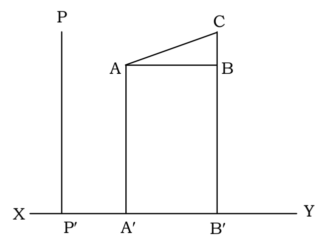
অধ্যায়-০৩: জ্যামিতি

প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **পিথাগোরাসের উপপাদ্য :** একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
- **বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ :** কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বোঝায়।

  মনে করি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P যেকোনো একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব PP′ এবং লম্ব PP′ এর পাদবিন্দু P′ (চিত্রে)।

  সুতরাং, P′ বিন্দু XY রেখার ওপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।



- **রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ :** ধরি, AB রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A ও B। এখন A ও B বিন্দু থেকে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AA′ ও BB′। AA′ লম্বের পাদবিন্দু A′ এবং BB′ লম্বের পাদবিন্দু B′। এই A′B′ রেখাংশই হচ্ছে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

  সুতরাং, দেখা যাচ্ছে লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। তাই A′B′ রেখাংশকে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলা হয়।
- **ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য :** এই অংশে ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হয়েছে।
- **লক্ষণীয় :**

  ১. (অতিভুজ)^২ = (লম্ব)^২ + (ভূমি)^২; এটি পিথাগোরাসের উপপাদ্য।

  ২. ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গ অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গের সমষ্টির সমান হলে একটি কোণ অবশ্যই সমকোণ হবে।

  ৩. কোনো রেখার ওপর কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

  ৪. কোনো রেখার ওপর ঐ রেখার লম্ব রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। যার দৈর্ঘ্য শূন্য।

  ৫. কোনো নির্দিষ্ট রেখার সমান্তরাল রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ ঐ রেখাংশের সমান হবে।

  ৬. সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বিধায় তাদের প্রয়োজনীয় লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য।

  ৭.সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান।

৩.২ সম্পর্কিত তথ্য

১. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

২. ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান।

৩. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাতের সমান।

৪. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।

৫. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয়। ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

৬. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখ-কত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলা হয়। এই বিন্দু ত্রিভুজে পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

৭. ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র বা লম্ববিন্দু বলা হয়। লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় সংযোজন

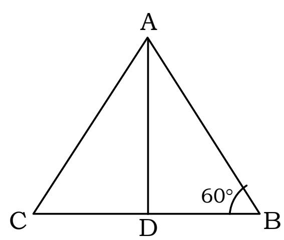
করে উৎপন্ন ত্রিভুজকে মূল ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ বলা হয়।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

অনুশীলনী ৩.১

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ ΔABC এর $\angle B = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC-এ $\angle B = 60°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

অঙ্কন : A বিন্দু থেকে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔABD-এ $\cos 60° = \frac{BD}{AB}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BD}{AB}$ $\left[\because \cos 60° = \frac{1}{2}\right]$

বা, $AB = 2BD$

এখন, ΔADC-এ $\angle ADC$ সমকোণ।

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

বা, $AC^2 = AD^2 + (BC - BD)^2$

বা, $AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BD.BC$

বা, $AC^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 - AB.BC [\because 2BD = AB]$

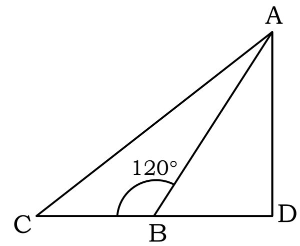
আবার, ΔABD-এ $\angle ADB$ সমকোণ।

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

অতএব, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ ΔABC এর $\angle B = 120°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B = 120°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

অঙ্কন : CB এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব টানি।

প্রমাণ : ΔABC এর, $\angle ABC = 120°$ অর্থাৎ একটি স্থূলকোণ

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD.$ ....(i)

CD সরলরেখার উপর $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ দুইটি সন্নিহিত কোণ

$\therefore \angle ABC + ABD = 180°$

বা, $120° + \angle ABD = 180°$

বা, $\angle ABD = 180° - 120°$

$\therefore \angle ABD = 60°$

এখন সমকোণী ΔABD এর ভূমি = BD এবং অতিভুজ = AB।

$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \frac{BD}{AB}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \frac{1}{2}AB$

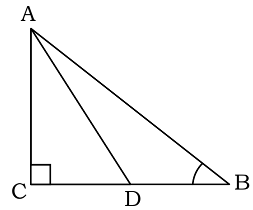
(i) নং-এ BD এর মান বসিয়ে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.\frac{1}{2}AB$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle C = 90°$ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু । প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ : ΔABC-এর $\angle C = 90°$

অর্থাৎ সমকোণী ΔABC এর অতিভুজ AB

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$ [$\because$ BC = BD + CD]

$= AC^2 + BD^2 + 2BD.CD + CD^2$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD.BD$

[$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় BD = CD]

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

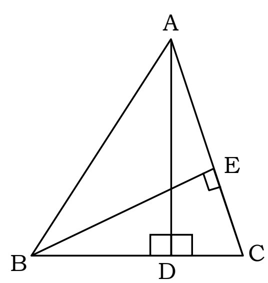
$= AD^2 + 3BD^2$[$\because$ ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ হওয়ায়

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ ΔABC-এ AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, BC.CD = AC.CE

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC-এ AD, BC বাহুর ওপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, BC.CD = AC.CE

প্রমাণ : ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

পিথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী, $AB^2 = BD^2 + AD^2$

$= (BC - CD)^2 + AD^2$

$= BC^2 + CD^2 - 2BC.CD + AD^2$

$= BC^2 + (CD^2 + AD^2) - 2BC.CD$

$= BC^2 + AC^2 - 2BC.CD$ .... (i)

[$\because$ ACD সমকোণী ত্রিভুজ তাই, $AC^2 = CD^2 + AD^2$]

আবার, ΔABE সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2$

বা, $AB^2 = (CA - CE)^2 + BE^2$

বা, $AB^2 = CA^2 + CE^2 - 2CA.CE + BE^2$

বা, $AB^2 = AC^2 + (CE^2 + BE^2) - 2AC.CE$ [$\because$ AC = CA]

বা, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$ .... (ii)

[$\because$ BCE সমকোণী ত্রিভুজ তাই, $BC^2 = CE^2 + BE^2$]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$BC^2 + AC^2 - 2BC.CD = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$

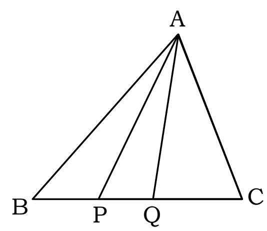
বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$

বা, $BC.CD = AC.CE$ [-2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ BC.CD = AC.CE. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। অর্থাৎ BP = PQ = QC; A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔABQ এর মধ্যমা AP [$\because$ BP = PQ]

$\therefore AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AQ^2 = 2AP^2 + 2PQ^2$ ....(i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ [$\because$ PQ = QC]

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AP^2 + AC^2 = 2AQ^2 + 2PQ^2$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

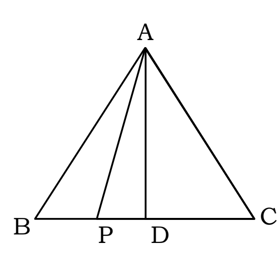
$AB^2 + AC^2 + AQ^2 + AP^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 - AP^2 + 2AQ - AQ^2 + 4PQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ ΔABC এর AB = AC। ভূমি BC এর ওপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর $AB = AC$ এবং ভূমি BC এর ওপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

অঙ্কন : A হতে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে $AB = AC$ এবং AD, শীর্ষ A থেকে ভূমি BC এর ওপর লম্ব বলে D, BC এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং, $BD = DC$

এখন পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

সমকোণী ΔABD-এ, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ ....(i)

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

এবং সমকোণী ΔAPD-এ, $AP^2 = PD^2 + AD^2$ ....(ii)

সমীকরণ (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = BD^2 + AD^2 - PD^2 - AD^2$

$= BD^2 - PD^2$

$= (BD - PD)(BD + PD)$

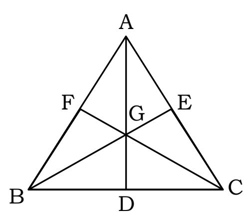
$= BP.(DC + PD)$ $[\because BD = DC]$

$= BP.PC$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP.PC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

সমাধান :



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর ওপর অঙ্কিত মধ্যমা AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং সমপাত বিন্দুতে প্রত্যেক মধ্যমা $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

ΔABC এর BC বাহুর ওপর অঙ্কিত মধ্যমা AD।

$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC$

এবং $GA = 2GD$

বা, $GA = 2(AD - GA) = 2AD - 2GA$

বা, $2AD = GA + 2GA$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2AD = 3GA$

$\therefore AD = \frac{3}{2}GA$

সুতরাং $AB^2 + CA^2 = 2BD^2 + 2AD^2$

$$= 2\left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}GA\right)^2$$

$$\left[\because BD = \frac{1}{2}BC, AD = \frac{3}{2}GA\right]$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}BC^2 + 2\cdot\frac{9}{4}GA^2$$

$$= \frac{1}{2}BC^2 + \frac{9}{2}GA^2 \text{ .... (i)}$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$AB^2 + BC^2 = \frac{1}{2}CA^2 + \frac{9}{2}GB^2 \text{ ....(ii)}$$

$$AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{9}{2}GC^2 \text{ ....(iii)}$$

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) + \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) - \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

বা, $\frac{3}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

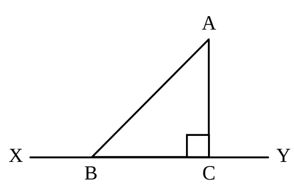
বা, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

অনুশীলনী ৩.২

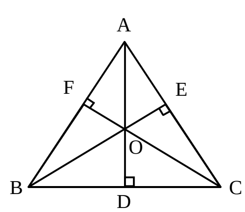
১.



XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?

ক AB ● BC গ AC ঘ XY

২.



উপরের চিত্রে কোনটি লম্ববিন্দু?

ক D খ E গ F ● O

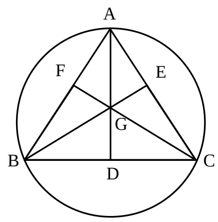
৩. i. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে

ii. ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে 3 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে

iii. সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii ● i ও iii ⓖ i, ii ও iii



D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু হলে ওপরের চিত্রের আলোকে ৪–৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪. G বিন্দুর নাম কী?

ⓚ লম্ববিন্দু ⓚ অন্তঃকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র ⓖ পরিকেন্দ্র

৫. ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কী?

● পরিবৃত্ত ⓚ অন্তর্বৃত্ত ⓖ বহির্বৃত্ত ⓖ নববিন্দু বৃত্ত

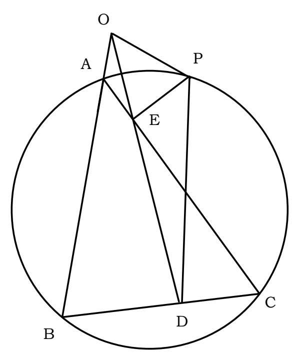
৬. ΔABC এর ৰেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

ⓚ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

ⓖ $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$ ⓖ $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর ওপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর ওপর লম্ব। অর্থাৎ PO ⊥ AB.

সমাধান :



P, ΔABC-এর পরিবৃত্তস্থ যেকোনো একটি বিন্দু। PD ⊥ BC ও PE ⊥ CA এবং ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, PO ⊥ AB।

প্রমাণ : আমরা জানি, পরিবৃত্তস্থ কোনো বিন্দু হতে কোনো ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দুগুলো সমরেখ।

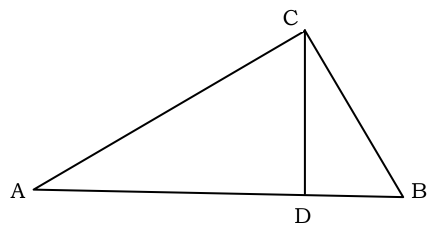
এখানে, PD ⊥ BC ও PE ⊥ CA হওয়ায় এবং ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করায় D, E O সমরেখ।

সুতরাং O বিন্দু অবশ্যই P হতে AB এর উপর লম্বের পাদবিন্দু হবে।

∴ PO ⊥ AB (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ ΔABC এর ∠C সমকোণ। C থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.BD$

সমাধান :



মনে করি, ΔABC এ $\angle C = 1$ সমকোণ এবং C বিন্দু থেকে অতিভুজ AB এর উপর CD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.\ BD$

প্রমাণ : ΔABC এ $\angle C = 90°$

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90°$ ....(i)

আবার, ΔADC-এ $\angle ADC = 90°$ [$\because CD \perp AB$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle ACD + \angle BCD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle BCD = \angle CAD$

এখন, ΔADC ও ΔBDC -এ

$\angle ADC = \angle BDC = 90°$

এবং $\angle CAD = \angle BCD$

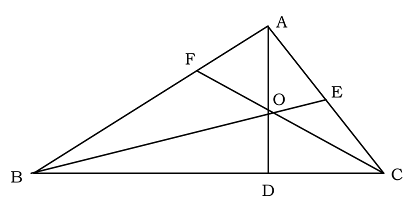
সুতরাং ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী; অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$\therefore CD^2 = BD.\ AD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর AD, BE, CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AO.OD = BO. OE = CO.OF

প্রমাণ : ΔAOE ও ΔAOD এর মধ্যে

$\angle AOE$ = বিপ্রতীপ $\angle BOD$

এবং $\angle AEO = \angle BDO$

[প্রত্যেকে সমকোণ, কারণ $BE \perp AC$ এবং $AD \perp BC$]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং তারা সদৃশ।

$\therefore \frac{AO}{BO} = \frac{OE}{OD}$ [দুটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

$\therefore$ AO. OD = BO. OE ....(i)[বজ্রগুণন করে]

আবার, ΔBOF ও ΔCOE এর মধ্যে

$\angle BOF$ = বিপ্রতীপ $\angle COE$

এবং $\angle BFO = \angle CEO = 90°$ [$BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}$

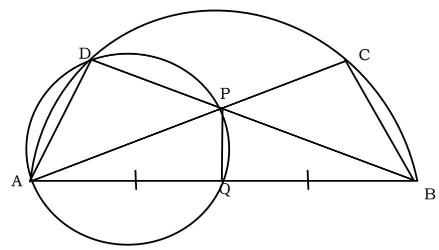
$\therefore$ BO.OE = CO.OF ....(ii) [বজ্রগুণন করে]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

AO. OD = BO. OE = CO.OF (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AB^2 = AC.AP + BD.BP

সমাধান :



দেওয়া আছে, AB ব্যাসের উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AB^2 = AC.AP + BD.BP।

অঙ্কন : AB বাহুর উপর P বিন্দু থেকে PQ লম্ব আঁকি। উহা AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। A, D ও B, C যোগ করি।

প্রমাণ : ADPQ চতুর্ভুজে $\angle D = \angle AQP = 90°$

[$\therefore$ D অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং $PQ \perp AB$]

$\therefore$ ADPQ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

উক্ত বৃত্তের AQ ও DP জ্যাদ্বয় বৃত্তের বহিঃস্থ B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

$\therefore$ AB.BQ = BD.BP ....(i)

[কারণ, বৃত্তের জ্যা দুটি বহিঃস্থ কোনো বিন্দুতে ছেদ করলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান]

আবার, BCPQ চতুর্ভুজে, $\angle C = \angle BQP = 90°$ [C অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং $PQ \perp AB$]

$\therefore$ BCPQ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ AB.AQ = AC.AP ....(ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

AB.BQ + AB.AQ = BD.BP + AC.AP

বা, AB (BQ + AQ) = AC.AP + BD.BP

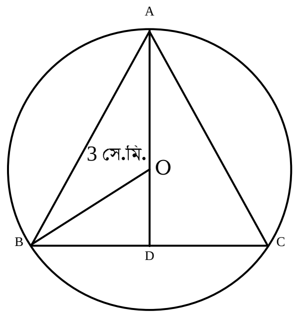
$\therefore$ AB.AB = AC.AP + BD.BP

$\therefore$ AB^2 = AC.AP + BD.BP (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.0 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.।



আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। সুতরাং চিত্রে, AB.AC = 2R.AD

[এখানে AD লম্ব ও 2R পরিবৃত্তের ব্যাস]

$AB^2 = 2R.AD$............................(i)

ΔABC-এর BO = AO = 3 সে.মি.

AO যোগ করে বর্ধিত করায় AD মধ্যমা।

এখন, যেহেতু BO = AO = 3 সে.মি.

$\therefore$ OD = $\frac{3}{2}$ সে.মি. [$\because$ O সম্পাত বিন্দু]

$\therefore$ AD = AO + OD

= $3 + \frac{3}{2}$ সে.মি.

[$\because$ মধ্যমাত্রয় সম্পাত বিন্দুতে পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে]

= $\frac{9}{2}$ সে.মি.

এখন, সমীকরণ (i) এ সংশ্লিষ্ট মান বসিয়ে পাই,

$AB^2 = 2R.AD$

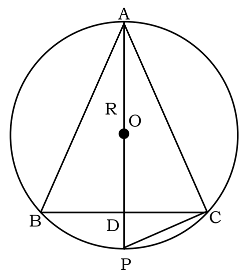
$= 2 \times 3 \times \frac{9}{2} = 27$

$\therefore AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\therefore \Delta ABC$ এর বাহুর দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ সে.মি.

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R.AD$ [ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যে AB = AC]

সমাধান :



দেওয়া আছে, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A থেকে BC এর উপর লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R। প্রমাণ করতে হবে যে, $2R.AD = AB^2$

অঙ্কন : O, ΔABC এর পরিকেন্দ্র। A, O যোগ করে P পর্যন্ত বর্ধিত করি, যা পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে $AO + OP = 2R$

বা $AP = 2R$। C, P যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD এবং ΔACP-এ

$\angle ADB = \angle ACP$ [উভয়ে এক সমকোণ]

$\angle ABD = \angle APC$ [একই জ্যা AC এর উপর অবস্থিত]

অবশিষ্ট $\angle BAD$ = অবশিষ্ট $\angle CAP$

$\therefore$ ΔABD ও ΔACP সদৃশকোণী ও সদৃশ।

তাহলে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$ [$\because$ অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

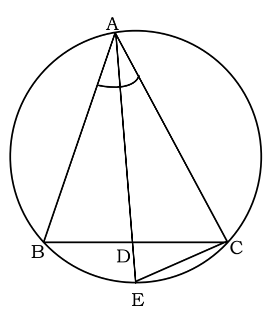
বা, $AB.AC = AD.AP$

বা, $AB.AB = 2R.AD$ [$\because AB = AC$ ও $AP = 2R$]

$\therefore$ $AB^2 = 2R.AD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ BC কে D বিন্দুতে এবং ΔABC-এর পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$

অঙ্কন : C, E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔAEC এ

$\angle BAD = \angle CAE$ [স্বীকার]

এবং $\angle ABD = \angle AEC$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ বলে]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, অর্থাৎ সদৃশ।

সুতরাং এদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$

বা, $AB.AC = AE.AD$ ....(i)

আবার, ΔABD ও ΔCDE এ

$\angle ABD = \angle CED$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ বলে]

এবং $\angle ADB$ = বিপ্রতীপ $\angle CDE$

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী; সুতরাং তারা সদৃশ।

বা, $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE}$

বা, $AD.DE = BD.DC$ ....(ii)

সমীকরণ (i) হতে, $AB.\ AC = AE.AD$

$= (AD + DE)\ AD$

$= AD.AD + AD.DE$

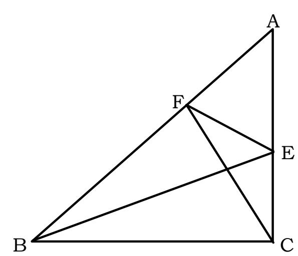
$= AD^2 + AD.DE.$

বা, $AB.AC = AD^2 + BD.DC$ [(ii) হতে মান বসিয়ে]

বা, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর ওপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC ও $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$. E ও F যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$

প্রমাণ : $\angle BEC = 90° = <BEB[\because BE \perp AC, CF \perp AB]$

BC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি E ও F বিন্দু দিয়ে যাবে।

কারণ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

$\therefore$ BCEF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

CF বাহুকে বর্ধিত করায় উৎপন্ন বহিঃস্থ কোন $<AEF$.

$\therefore <AEF = <ABC$ [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান]

অনুরূপভাবে $<AEF = <ACB$ [একই কারণে]

ΔABC ও ΔAEF এর মধ্যে

$<ABC = <AEF.\ <ACB = <AFE$

এবং $<A$ সাধারণ

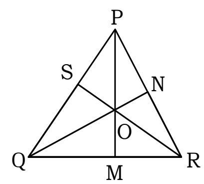
সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী অর্থাৎ সদৃশ।

কিন্তু AB ও AE তাদের অনুরূপ বাহু।

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \frac{AB^2}{AE^2}$$

$\therefore \Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$ (**দেখানো হলো**)

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ ΔPQR–এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



ক. O বিন্দুটির নাম কী? O বিন্দু PM কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

খ. ΔPQR হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

গ. দেখাও যে, ΔPQR–এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।

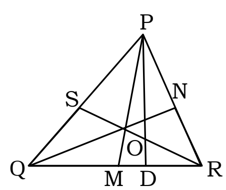
সমাধান :

ক. এখানে PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় বিন্দুতে ছেদ করেছে।

অতএব, O বিন্দুর নাম ভরকেন্দ্র।

O বিন্দু PM কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

খ. ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। QR বাহুর উপর PD লম্ব আঁকি।



এখন ΔPQM-এ $\angle PMQ$ স্থূলকোণ

$\therefore PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM$ ....(i)

[স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

আবার, ΔPRM-এ $\angle PMR$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore PR^2 = PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$ ....(ii)

[সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM + PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$

$= 2PM^2 + 2QM^2 + 2QM.DM - 2QM.DM$

[মধ্যমা বলে RM = QM]

$= 2(PM^2 + QM^2)$

সুতরাং $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

গ. 'খ' হতে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ ....(i)

$PQ^2 + QR^2 = 2(QN^2 + RN^2)$ ....(ii)

এবং $QR^2 + PR^2 = 2(RS^2 + QS^2)$ ....(iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2PQ^2 + 2QR^2 + 2PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2 + 2QN^2 + 2RN^2 + 2RS^2 + 2QS^2$

বা, $2(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 2(PM^2 + QN^2 + RS^2) + 2(QM^2 + RN^2 + QS^2)$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + 4(QM^2 + RN^2 + QS^2$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + (2QM)^2 + (2RN)^2 + (2QS)^2$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + QR^2 + PR^2 + PQ^2$.

[$\therefore$ M, N, S যথাক্রমে QR, RP এবং PQ এর মধ্যবিন্দু বলে, $2QM = QR$, $2RN = PR$ এবং $2QS = PQ$]

বা, $3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2)$ ....(iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সম্পাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{PO}{OM} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OM}{PO} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{OM + PO}{PO} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{PM}{PO} = \frac{3}{2}$

বা, $2PM = 3PO$

বা, $4PM^2 = 9PO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে $4QN^2 = 9QO^2$

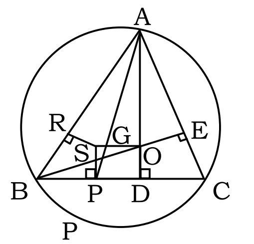
এবং $4RS^2 = 9RO^2$

সুতরাং (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই

$3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 9PO^2 + 9QO^2 + 9RO^2$

$\therefore PQ^2 + QR^2 + PR^2 = 3(PO^2 + QO^2 + RO^2)$ [3 দ্বারা ভাগ করে] **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC = a, AC = b এবং AB = c

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত।

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $a.CD = b.CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

সমাধান :

ক. আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে তার যেকোনো শীর্ষের দূরত্ব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।

ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং S থেকে BC বাহুর উপর লম্ব দূরত্ব SP, O থেকে A এর দূরত্ব S থেকে BC এর দূরত্বের দ্বিগুণ।

$\therefore$ OA = 2SP

এটিই OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক।

খ. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং BC এর মধ্যবিন্দু D; A, D এবং S, O যোগ করি। S, O রেখাংশ AD কে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ এটা প্রমাণ করলেই হবে যে, G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

প্রমাণ : যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু AD || SP.

AD এবং AP এদের ছেদক হওয়ায় $\angle PAD = \angle SPG$

[একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$

এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AGO$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore$ ΔAGO ও ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ ['ক' হতে]

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ AG : GP = 2 : 1

অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

∴ G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

∴ S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(প্রমাণিত)**

গ. ΔABC এর AD, BC এর উপর এবং BE, AC এর উপর লম্ব এবং BC = a, AC = b। প্রমাণ করতে হবে যে, BC.CD = AC.CE অর্থাৎ a. CD = b.CE

প্রমাণ : $AD \perp BC$ হওয়ায় ΔABC এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ হওয়ায় $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ....(i)

আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$ ....(ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই

$AC^2 + BC^2 - 2BC.CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$

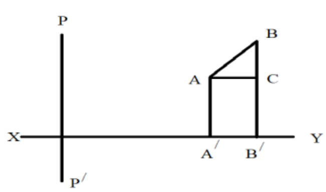
বা, -2 BC.CD = -2 AC.CE

বা, BC.CD = AC.CE[উভয়পক্ষকে (-2) দ্বারা ভাগ করে]

∴ a.CD = b.CE সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

MCQ 2016 to 2023

১. [ঢা. বো. ২০]



XY এর উপর AA′ এর লম্ব অভিক্ষেপ হলো-

ⓚ A′ ⓑ AA′

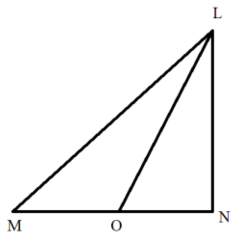
ⓖ A′B′ ⓓ B′C ক

২. **কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস 6 সে.মি. হলে, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?** [রা. বো. ২০]

ⓚ 6 সে.মি. ⓑ 4.5 সে.মি

ⓖ 3 সে.মি. ⓓ 1.5 সে.মি. ঘ

৩. [য. বো. ২০]



Δ **LMN এ $\angle LOM = 103°$, LO = 10, MO = 7, NO = 5 হলে LM এর দৈর্ঘ্যকত?**

(ক) 8.88　　(খ) 14.79

(গ) 79　　(ঘ) 219　　খ

৪. **Δ PQR এর মধ্যবিন্দু এবং PM $\perp$ QR হলে অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক?** [কু. বো. ২০]

(ক) $PQ^2 + PR^2 = 2QM^2$

(খ) $PQ^2 + PR^2 = 2RM^2+2PS^2$

(গ) $PQ^2 + PR^2 = 2QS^2+ 2MS^2$

(ঘ) $PQ^2+ PR^2 = 2\ QS^2 + 2\ PS^2$　　ঘ

৫. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ6 সে.মি. হলে পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত?** [কু. বো. ২০]

(ক) 144 πবর্গ সে.মি.　　(খ) 36 πবর্গ সে.মি.

(গ) 12 πবর্গ সে.মি.　　(ঘ) 9 πবর্গ সে.মি.　　ক

৬. **ত্রিভূজের একটি মধ্যকার দৈঘ্য 10 সে.মি. হলে ভরকেন্দ্রে কত অনুপাতে বিভক্ত হবে?** [চ. বো. ২০]

(ক) 5 : 2　　(খ) 6 : 4

(গ) 6.67 : 3.33　　(ঘ) 7 : 3　　গ

৭. **5 সেমি, 12 সেমি ও 13 সেমি বাহুবিশিষ্ট ত্রিভূজের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?** [চ. বো. ২০]

(ক) 1 সে.মি　　(খ) 2 সে.মি

(গ) 3 সে.মি　　(ঘ) 4 সে.মি.　　খ

৮. **একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্যa সে.মি. এবং প্রতিটি মধ্যকার দৈর্ঘ্য2 সে.মি. হলে, a এর মান নিচের কোনটি?** [সি. বো. ২০]

(ক) 1.37 সে.মি (প্রায়)　　(খ) 2.31 সে.মি. (প্রায়)

(গ) 4.30 সে.মি. (প্রায়) (ঘ) 5.30 সে.মি. (প্রায়) খ

৯. একটি সমবাহু ত্রিভূজের প্রতিটি মধ্যকার দৈর্ঘ্য3 সে.মি. হলে প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.? [ব. বো. ২০]

(ক) $2\sqrt{3}$ (খ) $3\sqrt{2}$

(গ) $4\sqrt{3}$ (ঘ) $9\sqrt{2}$ ক

১০. Δ MNR এ $\angle$MRN স্থূলকোণ হলে- [দি. বো. ২০]

(ক) $MN^2 > MR^2 + RN^2$ (খ) $MN^2 < MR^2 + RN^2$

(গ) $MN^2 = MR^2 + RN^2$ (ঘ) $MR^2 > MN^2 + RN^2$ ক

১১. 2 একক বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভূজের মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত একক? [ম. বো. ২০]

(ক) 4 (খ) 9

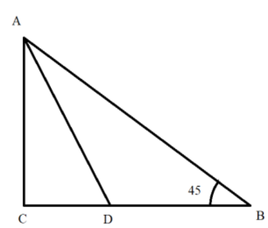
(গ) 16 (ঘ) 36 খ

১২. ত্রিভূজের পরিবৃত্তের ব্যাস 4 সে.মি. হলে, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? [ম. বো. ২০]

(ক) 1 সে.মি (খ) 2 সে.মি

(গ) 4 সে.মি (ঘ) 8 সে.মি ক

১৩. নিচের চিত্রটি লক্ষ কর:



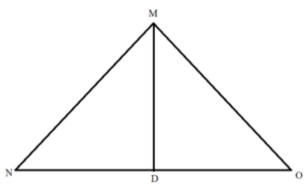
AD = 5 সে.মি., CD = 3 সে.মি.। [ম. বো. ২০]

BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপের মান কত?

(ক) 1 সে.মি (খ) 3 সে.মি

(গ) 4 সে.মি (ঘ) 7 সে.মি গ

১৪. [রা. বো. ১৯]



MD বাহুতে MO এর লম্ব অভিক্ষেপ-

ⓚ DO ⓚ MD

(ক) DO (খ) MD

(গ) MN (ঘ) ND **খ**

১৫. ΔMNO এর MN = MO = NO, MD $\perp$ NO এবং MD = 6 cm হলে, ΔMNO এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?

[রা. বো. ১৯]

(ক) 2 সে.মি. (খ) $2\sqrt{3}$সে.মি.

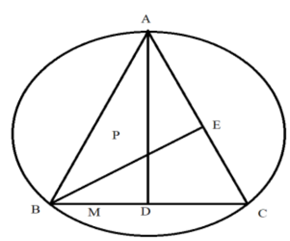
(গ) 4 সে.মি. (ঘ) $4\sqrt{3}$সে.মি. **গ**

১৬. ΔDEF –এর পরিকেন্দ্র O এবং DM $\perp$ EF । DE = 5 সে.মি. DF = 3.5 সে.মি., DM = 2 সে.মি. হলে, ত্রিভূজটির নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? [য. বো. ১৯]

(ক) 8.75 সে.মি. (খ) 4.38 সে.মি.

(গ) 2.19 সে.মি. (ঘ) 1.50 সে.মি. **গ**

১৭. [চ. বো. ১৯]

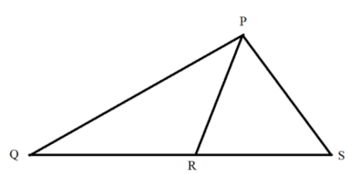


বৃত্তটির কেন্দ্র p এবং M, BC এর মধ্যবিন্দু হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) AQ = $\frac{1}{2}$PM (খ) AQ = 2PM

(গ) AD = 2PM (ঘ) PM = PE **খ**

১৮. [সি. বো. ২০]

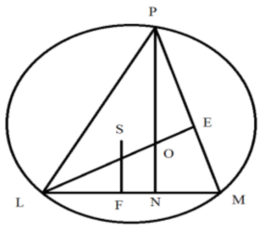


চিত্রে QS এর উপর PR এর লম্ব অভিক্ষেপ RS; QS = 3RS, PS = 4 সে.মি. এবং PR = 5 সে.মি. হলে PQ এর মান কত?

ⓚ 14 সে.মি. ⓛ 13 সে.মি.

ⓜ $\sqrt{106}$সে. মি. ⓝ$\sqrt{97}$সে.মি. ঘ

১৯. [সি. বো. ১৯]



চিত্রে পরিকেন্দ্র S এবং SF = 3 সে.মি. হলে $\frac{1}{3}$ OP^{2}এর মান কত?

ⓚ 36 বর্গ সে.মি. ⓛ18 বর্গ সে.মি.

ⓜ 12 বর্গ সে.মি. ⓝ6 বর্গসে.মি. গ

২০. একটি সমবাহু ত্রিভূজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ6 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভূজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত? [দি. বো. ১৯]

ⓚ $3\sqrt{3}$সে.মি. ⓛ $6\sqrt{3}$সে.মি.

ⓜ $6\sqrt{6}$সে.মি. ⓝ$9\sqrt{3}$সে.মি. খ

২১. একটি সমবাহু ত্রিভূজের প্রতিটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. হলে প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত? [সকল. বো. ১৮]

ⓚ 3.46 সে.মি. ⓛ4.62 সে.মি

ⓜ 6.92 সে.মি. ⓝ21.33 সে.মি. খ

২২. একটি ত্রিভূজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ2 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভূজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত? [সকল. বো. ১৮]

ⓚ 2πবর্গ সে.মি. ⓛ4πবর্গ সে.মি.

ⓜ 8πবর্গ সে.মি. ⓝ16πবর্গ সে.মি. ঘ

২৩. সমকোণী ত্রিভূজের ΔDEF এর ক্ষেত্রে $\angle$DEF সমকোণ হলে-

i. $DE^2 > DF^2 + EF^2$

ii. $DF^2 = DE^2 + EF^2$

iii. $DE^2 < DF^2 + EF^2$

নিচের কোনটি সঠিক? [চ. বো. ২০]

ⓚi ও ii ⓛ i ও iii ⓜii ও iii ⓝi, ii ও iii গ

২৪. ΔDEF এ-

i. $\angle$E সূক্ষ্মকোণ হলে $DF^2 < DE^2 + EF^2$

ii. $\angle E$ **সমকোণ হলে** $DF^2 = DE^2 + EF^2$

iii. $\angle E$ **স্থূলকোণ হলে** $DF^2 > DE^2 + EF^2$

নিচের কোনটি সঠিক? [ম. বো. ২০]

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii ঘ

২৫. ΔPQR এর $\angle PRQ$-

i. **স্থূলকোণ হবে, যখন** $PQ^2 > PR^2 + QR^2$

ii. **সূক্ষ্মকোণ হবে, যখন,** $PQ2 > PR^2 + QR^2$

iii. **সমকোণ হবে, যখন,** $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

নিচের কোনটি সঠিক? [রা. বো. ১৯]

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i,ii ও iii খ

২৬. ΔPQR এর মাধ্যমাত্রয় PM, QN এবং RL হলে-

i. $PR^2 > PQ^2 + QR^2$ যখন $\angle Q$ স্থূলকোণ

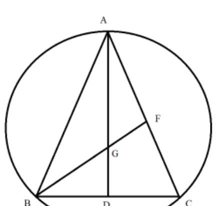
ii. $PR^2 < PQ^2 + QR^2$ যখন $\angle Q$ সূক্ষ্মকোণ

iii. $4(PQ^2 + QR^2 + RP^2) = 3(PM^2 + QN^2 + RL^2)$

নিচের কোনটি সঠিক? [য. বো. ১৯]

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii ক

২৭. [কু. বো. ১৯]



সমবাহু ত্রিভূজ ABC এর ভরকেন্দ্র G হলে-

i. $AG = \frac{2}{3} AD$

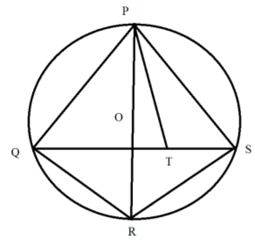
ii. $AG : GF = 3 : 2$

iii. $AC^2 - CD^2 = AD^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii   (খ) i ও iii   (গ) ii ও iii   (ঘ) i, ii ও iii   খ

নিচের তথ্যের আলোকে ২৮ ও ২৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভূজের **PR** কেন্দ্রগামী এবং **PT ⊥ QS, PQ = 8, PS = 5, PT = 4.** [য. বো. ২০]

২৮. বৃত্তটির ব্যাসার্ধকত?

(ক) 3   (খ) 5

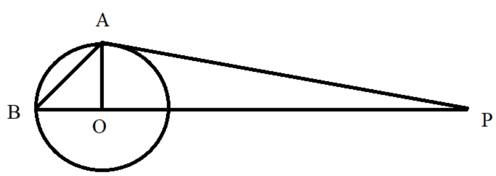
(গ) 10   (ঘ) 20   খ

২৯. **OR – 6** হলে **PQR** ত্রিভূজের নববিন্দুবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত?

(ক) 3 π (খ) 6 π

(গ) 9 π (ঘ) 36 π গ

নিচের তথ্যের আলোকে ৩০ ও ৩১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে, **O** বৃত্তের কেন্দ্র, **BD = 8** সে.মি. এবং **OP = 12** সে.মি. । [কু. বো. ২০]

৩০. **AB** এর লম্ব অভিক্ষেপের মান কত?

(ক) 3 সে.মি   (খ) 4 সে.মি

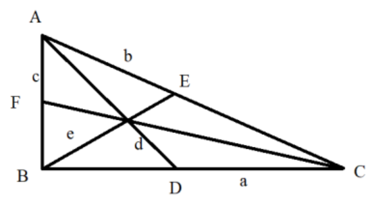
(গ) 6 সে.মি   (ঘ) 8 সে.মি   খ

৩১. **PA** এর দৈর্ঘ্য কত?

(ক) 8 সে.মি   (খ) 11.31 সে.মি

(গ) 12 সে.মি   (ঘ) 12.65 সে.মি   খ

নিচের তথ্যের আলোকে ৩২ ও ৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



[চ. বো. ২০]

৩২. Δ ABC এ AD, BE, CE মধ্যমা, $\angle$ABC সমকোণ এবং AC অতিভূজের ক্ষেত্রে-

i. $$d^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

ii. $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

iii. $a^2 = b^2 - c^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

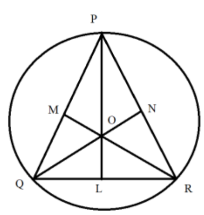
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

৩৩. a = 20 একক, b = 25 একক এবং c = 15 একক হলে d^2 এর মান কত?]

(ক) 25 একক (খ) 225 একক

(গ) 325 একক (ঘ) 650 একক

নিচের তথ্যের আলোকে ৩৪ ও ৩৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে O ত্রিভূজের ভরকেন্দ্র [ব. বো. ২০]

৩৪. PO : OL নিচের কোনটি?

(ক) 1 : 1 (খ) 2 : 1

(গ) 3 : 1 (ঘ) 3 : 2 **খ**

৩৫. PQR ত্রিভূজের নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল 20 πবর্গ একক হলে উক্ত ত্রিভূজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

[সকল. বো. ১৮]

(ক) 20 π (খ) 40 π

(গ) 80 π (ঘ) 400 π **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে ৩৬ ও ৩৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

ΔPQR এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে PA, QB ও RC;

মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4 ও 5 সে.মি. এবং

মধ্যমাত্রয় পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করে । [দি. বো. ২০]

৩৬. PMএর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক $\frac{2}{3}$ খ 1

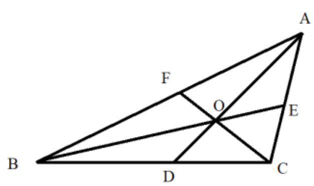
গ $\frac{3}{2}$ ঘ 2 ঘ

৩৭. Δ PQR এর বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি কত বর্গ সে.মি.

ক 37.5 খ 66.67

গ 75 ঘ 150 খ

উদ্দীপকটি পড়ে ৩৮ ও ৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ΔABC এর মধ্যমাত্রয় AD = 6 সে. মি., BE = 5 সে.মি. CF = 4.5 সে.মি. পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে ।

[ঢা. বো. ১৯]

৩৮. OA = কত?

ক 225 সে.মি. খ 2.5 সে.মি.

গ 3 সে.মি. ঘ 4 সে.মি. ঘ

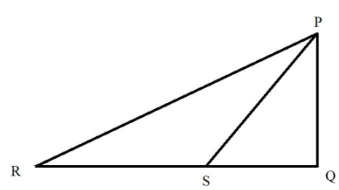
৩৯. AB, BC, এবং AC বাহুর বর্গের সমষ্টি কত?

ক 27.08 বর্গ সে.মি. খ 60.94 বর্গ সে.মি.

গ 81.25 বর্গ সে.মি. ঘ 108.33 বর্গ সে.মি. ঘ

নিচের চিত্রের আলোকে ৪০ ও ৪১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

[কু. বো. ১৯]



৪০. PS এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

ক PQ   খ QR

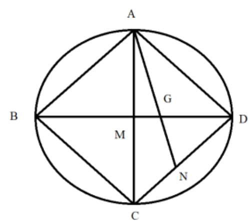
গ QS   ঘ RS   গ

৪১. ∠R সূক্ষ্মকোণ হলে PS^2এর মান কোনটি?

ক $PR^2+RS^2-2RS.SQ$ খ $PR^2+RS^2-2RS.RQ$

গ $PR^2+RS^2+2PR.SQ$ ঘ $PR^2+RS^2+2PR.PQ$ খ

নিচের তথ্যের আলোকে ৪২ ও ৪৩ নং উত্তর দাও:



৪২. AB = AD = 3 সে.মি., BC = 25 সে.মি., CD = 3.5 সে.মি. ও AM = 2 সে.মি. হলে, BD = কত? [সকল. বো. ১৮]

ক 4.0 সে.মি.   খ 4.5 সে.মি.

গ 5.5 সে.মি.   ঘ 6.5 সে.মি.

M ও N যথাক্রমে AC ও CD এর মধ্যবিন্দু। [সকল. বো. ১৮]

৪৩. ΔACD-এ AN : AG = কত?

ক 2 : 1   খ 1 : 2

গ 3: 2   ঘ 3 : 2   গ

৪৪. AB = AD = 3 সে.মি., BC = 25 সে.মি., CD = 3.5 সে.মি. ও AM = 2 সে.মি. হলে, BD = কত? [সকল. বো. ১৮]

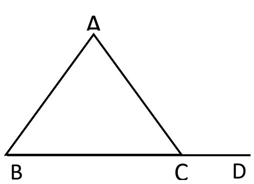
ক 4.0 সে.মি.   খ 4.5 সে.মি.

গ 5.5 সে.মি.   ঘ 6.5 সে.মি.   খ

৪৪. সমবাহু ত্রিভুজের একটি বহিঃস্থ কোণের মান কত? *[চ. বো. ১৭]*

K120° L 180°M270°   N360°   ক

৪৫.



ABC সমবাহু ত্রিভুজের ∠ACD এর অর্ধেক কত ডিগ্রী?

[রা. বো. ১৭]

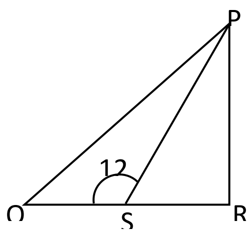
K30° L60° M90° N120° (খ)

৪৬. ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য (সে.মি.) দেওয়া থাকলে কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা যায়? [দি. বো. ১৬]

K 12, 15, 19 L6, 7, 8

M 3, 4, 5 N5, 6, 7 (গ)

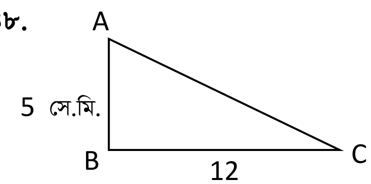
৪৭. [কু. বো. ১৬]



QS = 8 সে.মি., PS = 5 সে.মি. এবং PR = 3 সে. মি. হলে PQ এর মান কত সে. মি.?

K$\sqrt{55}$ L $\sqrt{73}$ M$\sqrt{135}$ N $\sqrt{153}$ (ঘ)

৪৮.



ABC ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত বর্গ সে.মি.?

[দি. বো. ১৭]

K507 L253.50

M169 N112.67 (খ)

৪৯. **ABC ত্রিভুজে ∠B সূক্ষ্মকোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

[দি. বো. ১৭]

K$AC^2 < AB^2 + BC^2$

L$BC^2 < AB^2 + AC^2$

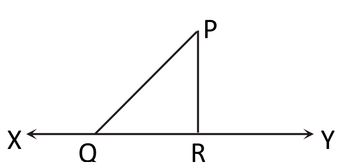
M$AB^2 > AC^2 + BC^2$

N$AB^2 < AC^2 + BC^2$ (ক)

৫০. **ΔABC এ ∠C = 120°, BC = 2 সে. মি. এবং AC = 5 সে. মি. হলে AB এর দৈর্ঘ্য কত সে. মি.?** [রা. বো. ১৭]

K$\sqrt{9}$ L$\sqrt{19}$ M$\sqrt{39}$ N$\sqrt{49}$ (গ)

৫১.



XY রেখাংশে **PQ** এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?

[রা. বো. ১৬]

KPQ L QR MPR NXY খ

৫২. কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয় **3, 4** ও **5** সে.মি. হলে, মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত বর্গ সে.মি.? [ঢা. বো. ১৬; সি. বো. ১৬]

K 6.12 L 12.5 M 37.5 N150 গ

৫৩. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস **D** হলে, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?

[কু. বো. ১৭]

K $\frac{D}{4}$ L $\frac{D}{2}$ M2D N4D ক

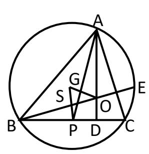
৫৪. একটি ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রফল **25**π বর্গ একক হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [দি. বো. ১৭]

K 25π L50π M100π N625π গ

৫৫. মধ্যমাত্রয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে কি বলে? [চ. বো. ১৬]

Kভরকেন্দ্র Lপরিকেন্দ্র

Mনববিন্দু Nঅন্তঃকেন্দ্র ক



৫৬. কোন ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী? [চ. বো. ১৬]

KΔABP ও ΔADP

L ΔAOG ও ΔSPG

MΔADC ও ΔAOG

NΔADP ও ΔADC খ

৫৭. একটি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু যোগ করলে কোনটি গঠিত হয়?

[কু. বো. ১৬]

Kসরলরেখা Lত্রিভুজ

Mআয়তক্ষেত্র Nকোণক ক

৫৮. "বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান"– এই উপপাদ্যটিকে বলা হয়– [য. বো. ১৬]

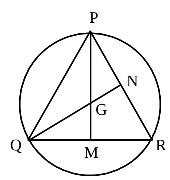
Kপীথাগোরাসের উপপাদ্য

Lঅ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য

Mটলেমির উপপাদ্য

Nব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য গ

৫৯.



PQR সমবাহু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হলে–

i. QG ঃ GN = 2 ঃ 3

ii. $PG = \frac{2}{3} PM$

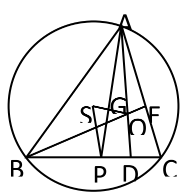
iii. $PQ^2 = PM^2 + QM^2$

নিচের কোনটি সঠিক? *[সি. বো. ১৭]*

Ki ও ii Li ও iii

Mii ও iii Ni, ii ও iii গ

৬০.



চিত্রে S পরিকেন্দ্র, G ভরকেন্দ্র এবং O লম্ববিন্দু হলে–

i. AG ঃ GP = 2 ঃ 1

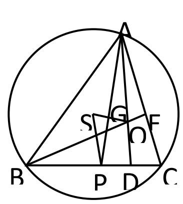
ii. AP ঃ AG = 3 ঃ 1

iii. $SP = \frac{1}{2} AO$

নিচের কোনটি সঠিক? *[য. বো. ১৭; য. বো. ১৫]*

Ki ও ii Li ও iii

Mii ও iii Ni, ii ও iii খ



৬১. **নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রে —**

i. ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে

ii. ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র

iii.নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান

নিচের কোনটি সঠিক? *[সি. বো. ১৬]*

Ki ও ii Li ও iii

Mii ও iii Ni, ii ও iii ঘ

৬২. **বৃত্তের ক্ষেত্রে–**

i. বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান

ii. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ

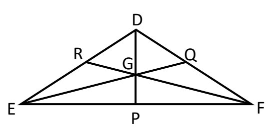
iii.বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পূরক কোণ

নিচের কোনটি সঠিক? *[সি. বো. ১৭]*

Ki ও ii Li ও iii

Mii ও iii Ni, ii ও iii ক

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৩ ও ৬৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে P, Q ও R হল যথাক্রমে EF, DF ও DE এর মধ্যবিন্দুত্রয়।

৬৩. **যদি ΔDEF এর শীর্ষবিন্দুত্রয় দিয়ে একটি বৃত্ত আঁকা হয়, তাহলে এটি কী ধরনের বৃত্ত হবে?** *[ব. বো. ১৭]*

Kপরিবৃত্ত Lঅন্তর্বৃত্ত

Mবহির্বৃত্ত Nনববিন্দুবৃত্ত ক

৬৪. **নিচের কোনটি সঠিক?** *[ব. বো. ১৭]*

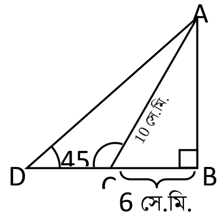
KDG ঃ GP = 2 ঃ 1

LDG ঃ GP = 1 ঃ 2

MDG ঃ GP = 3 ঃ 2

NDG ঃ GP = 2 ঃ 3 ক

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৫ ও ৬৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ



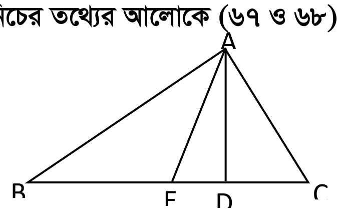
৬৫. **BD** এর উপর **AC** এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? *[সি. বো. ১৬]*

KBD L CD MAB NBC ঘ

৬৬. **DC** = কত সে.মি.? *[সি. বো. ১৬]*

K2 L 4 M6 N8 ক

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৭ ও ৬৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে BE = CE এবং AD ⊥ BC

৬৭. **AE** রেখার লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? *[সি. বো. ১৭]*

KCD L DE MBENBD খ

৬৮. নিচের কোন সম্পর্কটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে? *[সি. বো. ১৭]*

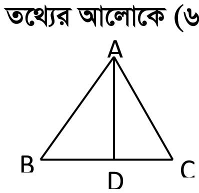
K$AB^2 + AC^2 = 2BD^2$

L$AC^2 + AB^2 = 2CD^2 + 2AE^2$

M$AB^2 + AC^2 = 2BE^2 + 2AE^2$

N$AB^2 + AD^2 = 2BE^2 + 2DE^2$ গ

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৯ ও ৭০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে ΔABC- এ AB = AC = 6 cm,

∠ADC = 90° এবং BC = 4 cm

৬৯. **AD** এর দৈর্ঘ্য কত? *[রা. বো. ১৬]*

K$4\sqrt{2}$ cm L$3\sqrt{2}$ cm

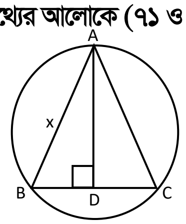
M$3\sqrt{2}$ cm N$\sqrt{2}$ cm ক

৭০. **ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?** [রা. বো. ১৬]

K$4\sqrt{2}$ cm^2 L$6\sqrt{2}$ cm^2

M$8\sqrt{2}$ cm^2 N$10\sqrt{2}$ cm^2 গ

নিচের তথ্যের আলোকে (৭১ ও ৭২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।



চিত্রে ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

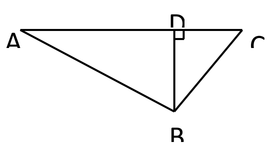
৭১. **নিচের কোনটি AD এর মান?** [সি. বো. ১৭]

K$\frac{\sqrt{3}}{2}$x L $\frac{3}{4}$x^2 M$\sqrt{3}$x^2 Nx^2 ক

৭২. **x = 2 হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?** [য. বো. ১৭]

K$\sqrt{3}$ L3 M$3\sqrt{3}$ N $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ক

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৩ ও ৭৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



AB =12 সে.মি., BC =5 সে.মি. এবং AC = 13 সে.মি.।

৭৩. **ABC ত্রিভুজের–**

i. অর্ধপরিসীমা 15 cm

ii. ক্ষেত্রফল 30cm^2

iii.sin B = $\frac{12}{13}$

নিচের কোনটি সঠিক? [ব. বো. ১৬]

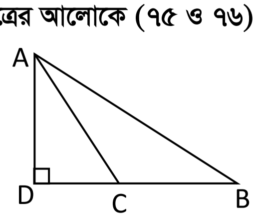
Ki ও ii L i ও iii

Mii ও iii N i, ii ও iii ক

৭৪. **BD এর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?** [ব. বো. ১৬]

K 4.62L 9.23M 10 N 24 ক

নিচের চিত্রের আলোকে (৭৫ ও ৭৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৭৫. **DB এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?** *চ. বো. ১৭*

KAD LDC MDB NCB খ

৭৬. **$\angle$B সূক্ষ্মকোণ হলে, AC^2-এর মান কোনটি?** *চ. বো. ১৭*

K$AB^2 + BC^2 - 2BC.CD$

L$AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

M$AB^2 + BC^2 + 2AC.CD$

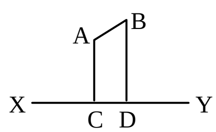
N$AB^2 + BC^2 + 2AB.AD$ খ

EXTRA MCQ SOLVED

১. **70°-এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?**

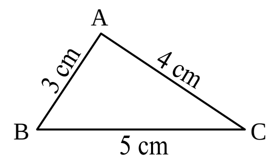
ক 110° ● 55° গ 20° ঘ 10°

২. **চিত্রে লম্ব অভিবেপ কোনটি?**



● CD খ AC গ BD ঘ AB

৩.



চিত্রে $\angle$BAC এর মান কত?

ক 45° খ 60° ● 90° ঘ 120°

৪. **ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার ছেদবিন্দুকে–বলে।**

ক অন্তঃকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র গ পরিকেন্দ্র ঘ লম্বকেন্দ্র

৫. **ΔABC এর $\angle$C = 90°, AC = BC = 3 সে.মি. হলে AB = কত?**

ক 3 সে.মি. ● $3\sqrt{2}$ সে.মি. গ 6 সে.মি. ঘ 18 সে.মি.

৬. **ΔDEF এর ৰেত্রে–**

i. $\angle D = 90°$ হলে, $EF^2 = DE^2 + DF^2$

ii. $\angle D > 90°$ হলে, $EF^2 < DE^2 + DF^2$

iii. $\angle D < 90°$ হলে, $EF^2 < DE^2 + DF^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i　　ⓚ i ও ii　　ⓖ ii ও iii　　ⓘ i, ii ও iii

৭. **ΔABC এর ক্ষেত্রে–**

i. $\angle C$ স্থূলকোণ হলে $AB^2 > AC^2 + BC^2$

ii. $\angle C$ সমকোণ হলে $AB^2 = AC^2 + BC^2$

iii. $\angle C$ সমকোণ হলে $AC^2 < AB^2 + BC^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii　　ⓚ ii ও iii　　ⓖ ii ও iii　　● i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপক থেকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

ΔABC এর মধ্যমাত্রয় AD = 3 সে.মি. BE = 4 সে.মি., CF = 5 সে.মি. এবং মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

৮. **AP এর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?**

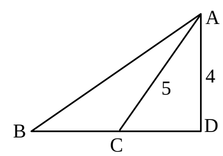
ⓚ $\frac{2}{3}$　　ⓚ 1　　ⓖ $\frac{3}{2}$　　● 2

৯. **$AB^2 + BC^2 + AC^2$ এর মান কত?**

ⓚ 37.50 বর্গ সে.মি.　　● 66.67 বর্গ সে.মি.

ⓖ 75 বর্গ সে.মি.　　ⓘ 150 বর্গ সে.মি.

নিচের উদ্দীপক থেকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে, $\angle ACB$ স্থূলকোণ এবং B বাহুর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

১০. **ΔABC এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?**

● $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$

ⓚ $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$

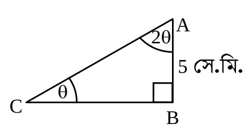
ⓖ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

ⓘ $AB^2 > AC^2 + BC^2$

১১. **CD এর মান কত?**

● 3　　ⓚ 4　　ⓖ 5　　ⓘ 6

নিচের উদ্দীপক থেকে ১২ ও ১৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১২. **AC বাহুর দৈর্ঘ্য কত?**

ⓚ 20 সে.মি.　　ⓚ 15 সে.মি.　● 10 সে.মি.　　ⓘ 5 সে.মি.

১৩. **ABC এর মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত হবে?**

ⓚ 50 সে.মি.　　ⓚ 100 সে.মি.　ⓖ 125 সে.মি.　● 150 সে.মি.

নিচের উদ্দীপক থেকে ১৪ ও ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

7, 8 ও r সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। তাদের কেন্দ্রসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তার পরিসীমা 42 সে.মি.।

১৪. r = কত সে.মি.

ⓚ 1 ⓚ 4 ● 6 ⓘ 9

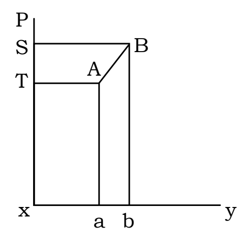
১৫. উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ⓚ 36 ⓚ 48 ● 84 ⓘ 96

১৬. কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে বোঝায় সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের– (সহজ)

● পাদবিন্দু ⓚ লম্ববিন্দু ⓖ শীর্ষবিন্দু ⓘ ঊর্ধ্বরেখা

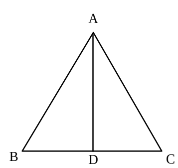
১৭.



চিত্রের xy এর ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (সহজ)

ⓚ PQ ● ab ⓖ ST ⓘ by

১৮.



চিত্রানুযায়ী AB^2 এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $AB^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ● $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

ⓖ $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ⓘ $AC^2 + CD^2 - 2BC.CD$

১৯. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজের কোণগুলো সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের–(সহজ)

● সমবিন্দু ⓚ সমান্তরাল

ⓖ ভূমির সমান্তরাল ⓘ সমান

২০. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র কোনটি?(সহজ)

ⓚ ভরকেন্দ্র ● লম্ববিন্দু ⓖ পরিকেন্দ্র ⓘ বহিঃকেন্দ্র

২১. পাদত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকগুলো যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাকে কী বলা হয়? (সহজ)

ⓚ পরিকেন্দ্র ⓚ বহিঃকেন্দ্র ● অন্তঃকেন্দ্র ⓘ ভরকেন্দ্র

২২. পিথাগোরাস ছিলেন একজন – (সহজ)

ⓚ জ্যোতির্বিদ ● গণিতবিদ ⓖ রসায়নবিদ ⓘ ডাক্তার

২৩. পিথাগোরাসের জন্ম কোথায়? (সহজ)

ⓚ ফ্রান্সে ⓚ ইরাকে ⓖ ব্রিটেনে ● গ্রিসে

২৪. সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য কে বর্ণনা করেন? (সহজ)

(ক) টলেমি (খ) ব্রহ্মগুপ্ত (গ) দেকার্তে ● পিথাগোরাস

২৫. সমকোণী ত্রিভুজের গুরবত্বপূর্ণ উপপাদ্যটি সম্পর্কে সর্বপ্রথম কাদের ধারণা ছিল? (সহজ)

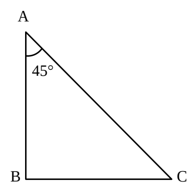
● মিশরীয়দের (খ) গ্রিকদের

(গ) ফরাসিদের (ঘ) ইতালীয়দের

২৬. একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব 5 মি. ও ভূমি 12 মি. হলে অতিভুজ কত হবে? (মধ্যম)

(ক) 4 মিটার (খ) 6 মিটার (গ) 8 মিটার ● 13 মিটার

২৭.



ΔABC-এ AB = BC হলে, **∠B = কত?** (মধ্যম)

(ক) 60° ● 90° (গ) 100° (ঘ) 120°

ব্যাখ্যা : ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অর্থাৎ AB = BC হওয়ায়

$\angle BAC = \angle ACB = 45°$

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ

$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

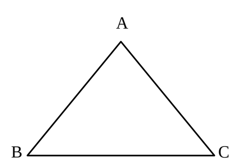
বা, $\angle ABC + 45° + 45° = 180°$

বা, $\angle ABC + 90° = 180°$

বা, $\angle ABC = 180° - 90°$

$\therefore \angle ABC = 90°$

২৮.



ΔABC-এ ∠C = 60° হলে নিচের কোনটি সঠিক?(কঠিন)

● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - AC.BC$

(খ) $AB^2 = AC^2 + BC^2 + AB.BC$

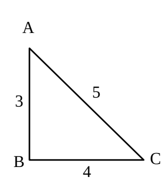
(গ) $AB^2 = AC^2 + BC^2 - AB.BC$

(ঘ) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

২৯. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে 8 একক ও 6 একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক? (মধ্যম)

● 10 (খ) 30 (গ) 64 (ঘ) 100

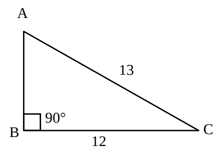
৩০.



উপরের চিত্রে $\angle$**ABC** = কত ডিগ্রি? (সহজ)

(ক) 45° (খ) 60° ● 90° (ঘ) 120°

৩১.



উপরের চিত্রে **AB** বাহুর দৈর্ঘ্য কত একক? (মধ্যম)

● 5 একক (খ) 25 একক (গ) 64 একক (ঘ) 100 একক

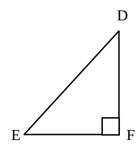
ব্যাখ্যা : $AB^2 = 13^2 - 12^2$

$= 169 - 144$

$= 25$

$\therefore AB = 5$

৩২.



ΔDEF এর –

i. DF এর লম্ব অভিক্ষেপ = O

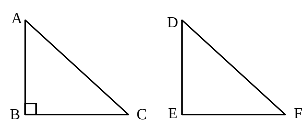
ii. $\angle EDF = 45^\circ$ হলে DF > EF

iii. EF এর লম্ব অভিক্ষেপ = O

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩৩.



ΔABC ও ΔDEF এ AB = DE, BC = EF হলে–

i. <B = একক সমকোণ

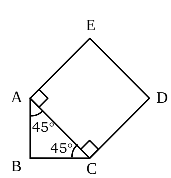
ii. ΔABC এ AC2 = $AB^2 + BC^2$

iii. BC = DF

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ৩৪ – ৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ΔABC এ $AB = 8$ সে. মি. এবং $\angle BAC = \angle ACB = 45°$।

৩৪. **BC = কত সে. মি.?** (মধ্যম)

(ক) 4 ● 8 (গ) $8\sqrt{2}$ (ঘ) 16

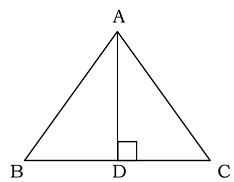
৩৫. **AC = কত সে. মি.?** (মধ্যম)

(ক) 8 ● $8\sqrt{2}$ (গ) 64 (ঘ) 128

৩৬. **ACDE চতুর্ভুজের ৰেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?** (সহজ)

(ক) 64 (খ) 96 (গ) 112 ● 128

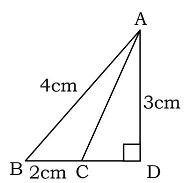
৩৭.



ΔABC এর AC বাহুর লম্ব অভিৰেপ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) BC (খ) BD ● CD (ঘ) AD

৩৮. চিত্রে AC মধ্যমার দৈর্ঘ্য কত?



(ক) 0.29cm (খ) 0.92 (গ) 1.92cm ● 2.92

ব্যাখ্যা : এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$AB^2 + AB^2 = 2\,(AC^2 + BC^2)$

বা, $4^2 + 3^2 = 2\,(4C^2 + 2^2)$

বা, $16 + 9 = 2\,(AC^2 + 4)$

বা, $2(AC^2 + 4) = 25$

বা, $AC^2 + 4 = \dfrac{25}{2}$

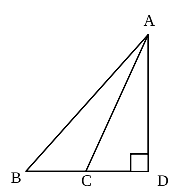
বা, $AC^2 + 4 = 12.5$

বা, $AC^2 = 12{\cdot}5 - 4$

বা, $AC^2 = 8{\cdot}5$

$\therefore\ AC = 2{\cdot}92$

৩৯. **চিত্র অনুযায়ী AB^2–এর মান নিচের কোনটি?** (কঠিন)



● $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (খ) $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

গ $AC^2 + BC^2 + 2BC.AC$ ঘ $AC^2 + BC^2 - 2BC.AC$

৪০. **ΔABC এর AD, BC এর মধ্যমা হলে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

● $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

খ $AB^2 + AD^2 = 2(AC^2 + BD^2)$

গ $AB^2 + AD^2 = 2AC^2 + 2BD^2$

ঘ $AB^2 + BC^2 = 2AD^2$

৪১. **ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ হলে কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

ক $AB^2 > BC^2 + CA^2$ খ $AB^2 < BC^2 + CA^2$

● $AB^2 = BC^2 + CA^2$ ঘ $AB^2 + BC^2 + CA^2$

৪২. **ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক?**(কঠিন)

ক $AB^2 > BC^2 + CA^2$ ● $AB^2 < BC^2 + CA^2$

গ $AB^2 = BC^2 + CA^2$ ঘ $AB^2 + BC^2 + CA^2$

৪৩. **ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক?**(কঠিন)

● $AB^2 > BC^2 + AC^2$ খ $AB^2 = BC^2 + AC^2$

গ $AB^2 < BC^2 + AC^2$ ঘ $AB^2 + BC^2 + CA^2$

৪৪. **সমদ্বিবাহু ΔABC-এ $\angle C = 120°$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

ক $AB^2 = AC^2 + BC^2$ খ $AC^2 = 3BC^2$

● $AB^2 = 3BC^2$ ঘ $BC^2 = 3AC^2$

৪৫. **ΔABC-এ $\angle C = 120°$ এবং $\angle B = 30°$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

● $AB^2 = 3BC^2$ খ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

গ $AB^2 = 2BC^2$ ঘ $AB^2 = \sqrt{3}\,BC^2$

৪৬. **ΔABC-এ BC এর মধ্যবিন্দু D, AB = AC এবং AC কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন, AC = CE হয়। CD = 1 সে.মি. এবং AD = 4 সে.মি. হলে, BE-এর মান কত?** (কঠিন)

ক 3 সে.মি. খ 4 সে.মি. গ 5 সে.মি. ● 6 সে.মি.

৪৭. **ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

● $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

খ $AB^2 + AP^2 = AC^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

গ $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + PQ^2$

ঘ $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 3PQ^2$

৪৮. **কোন ধরনের ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর ওপর লম্ব তার পাদ ত্রিভুজের কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে?**(সহজ)

● সূক্ষ্মকোণী খ সমকোণী গ স্থূলকোণী ঘ সরলকোণী

৪৯. **কোনো রেখার ওপর কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর–** (সহজ)

ক সমান্তরাল খ অভিক্ষেপ

গ লম্ব ● লম্ব অভিক্ষেপ

৫০. **লম্ব রেখার লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য–** (সহজ)

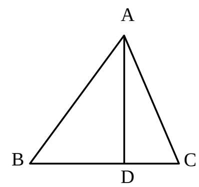
● 0 খ অসীম গ 1 একক ঘ 10 একক

৫১. **কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান্তরাল রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ ঐ রেখাংশের–** (সহজ)

● সমান   খ সমানুপাতিক

গ অসমান   ঘ ব্যস্তানুপাতিক

৫২.



ΔABC-এ $\angle$C সূক্ষ্মকোণ এবং AD বাহু BC বাহুর উপর লম্ব হলে– (কঠিন)

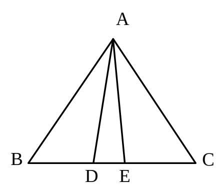
ক $AB^2 = AC^2 - BC^2 - 2BC.CD$

● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

গ $AB^2 - AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$

ঘ $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

৫৩.



ΔABC-এ AD, BC বাহুর উপর মধ্যমা। AE $\perp$ BC হলে– (কঠিন)

ক $AB^2 - AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

গ $AB^2 + AC^2 = (AD^2 + BD^2)$

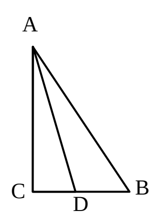
ঘ $2(AB^2 + AC^2) = AD^2 = BD^2$

৫৪. **ΔABC-এ $\angle C = 90°$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু E হলে–** (কঠিন)

● $AB^2 = AE^2 + 3BE^2$ খ $AB^2 = 3AE^2 + BE^2$

গ $AB^2 = 3AE^2 - BE^2$ ঘ $AB^2 = AE^2 - 3BE^2$

৫৫.



i. $AC^2 = AD^2 - CD^2$

ii. $AC^2 = AD^2 - BD^2$

iii. $AC^2 = AB^2 - BC^2$

চিত্রানুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

খ i ও ii   ● i ও iii   গ ii ও iii   ঘ i, ii ও iii

৫৬. **ADC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle D = 90°$ হলে–**

i. $AD^2 + CD^2 = AC^2$

ii. $AD^2 = AC^2 - CD^2$

iii. ΔADC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times DC \times AD$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৫৭. **ΔABC এর ক্ষেত্রে $AB^2 > BC^2 + CA^2$ হলে–**

i. $\angle C$ স্থূলকোণ

ii. $\angle A$ সমকোণ

iii. $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৫৮. **ΔABC এর ক্ষেত্রে $AB^2 = BC^2 + CA^2$ হলে–**

i. $\angle A$ স্থূলকোণ

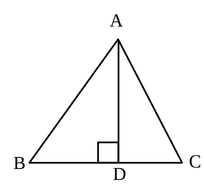
ii. $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ

iii. $\angle C$ সমকোণ

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ● ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৫৯.



ΔABC এর ক্ষেত্রে –

i. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BD.BC$

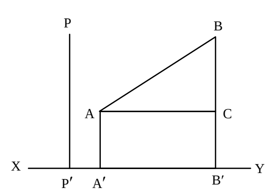
ii. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.DC$

iii. $\angle C = 60°$ হলে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - AC.BC$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ● ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ৬০ – ৬২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৬০. **XY রেখার উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?**(সহজ)

ⓚ AA' ● $A'B'$ ⓖ $B'C$ ⓖ AC

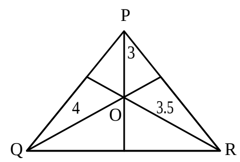
৬১. **BB′ রেখার উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য কত?**(মধ্যম)

● 0 ⓚ $\frac{1}{2}$ ⓖ 1 ⓘ 2

৬২. **BB′ রেখার উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?**(মধ্যম)

ⓚ A′B′ ⓚ B′C ⓖ AA′ ● BC

নিচের চিত্রের আলোকে ৬৩ ও ৬৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



PQR ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে 4, 3 ও 3.5 একক এবং তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

৬৩. **OP এর দৈর্ঘ্য কত?** (মধ্যম)

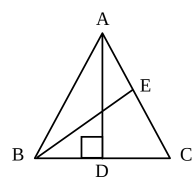
ⓚ 3 একক ⓚ $\frac{3}{2}$ একক

● 2 একক ⓘ $\frac{3}{4}$ একক

৬৪. **ত্রিভুজের বাহুগুলোর বর্গের সমষ্টি নিচের কোনটি?** (কঠিন)

ⓚ 39.69 ⓚ 40.57 ● 111.75 ⓘ 141.29

নিচের চিত্রের আলোকে ৬৫ ও ৬৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ABC ত্রিভুজে AD, BC বাহুর উপর লম্ব। BE, AC বাহুর উপর মধ্যমা।

৬৫. **AD = CD হলে AD^2 এর মান নিচের কোনটি?** (মধ্যম)

ⓚ $AB^2 + AC^2$ ● $2AE^2$

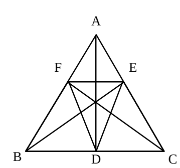
ⓖ $BD^2 + DC^2$ ⓘ $CD^2 + AC^2$

৬৬. **AD = CD হলে AB^2 এর মান হবে–** (মধ্যম)

● $BD^2 + CD^2$ ⓚ $BD^2 + BE^2$

ⓖ $BD^2 + AE^2$ ⓘ $BD^2 + AC^2$

৬৭.



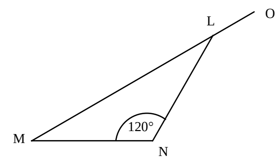
ΔABC এর AD, BE ও CF যথাক্রমে BC, AC ও AB এর ওপর লম্ব।

ΔABC এর পাদত্রিভুজ কোনটি? (সহজ)

ⓚ ΔBDF ⓚ ΔCED

(গ) ΔAEF ● ΔDEF

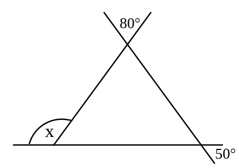
৬৮.



LMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হলে ∠ NLO এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

● 150° (খ) 130° (গ) 120° (ঘ) 30°

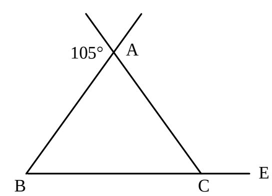
৬৯.



চিত্রে ∠x এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

● 130° (খ) 120° (গ) 105° (ঘ) 100°

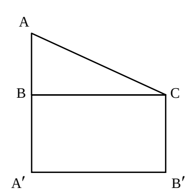
৭০.



ΔABC-এ AB = BC হলে ∠ACE এর মান নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) 150° (খ) 120° ● 105° (ঘ) 100°

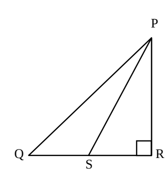
৭১.



AC এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) A′ ● A′B′ (গ) B′ (ঘ) B′C

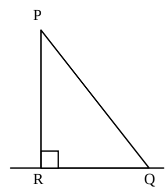
৭২.



চিত্রে QR রেখার উপর PS রেখার লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?(মধ্যম)

(ক) QS (খ) QR (গ) PR ● SR

৭৩.



চিত্রে P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (সহজ)

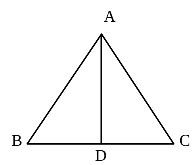
ⓚ Q ● R ⓖ PQ ⓖ PR

৭৪. **পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তার হতে যে উপপাদ্যটি বর্ণিত হয়েছে সেটা কার উপপাদ্য?** (সহজ)

ⓚ টলেমির ⓦ ব্রহ্মগুপ্তের

● এ্যাপোলোনিয়াসের ⓖ ফিশারের

৭৫.

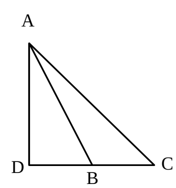


ΔABC-এ $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং AD, BC বাহুর লম্ব হলে– (কঠিন)

$AB^2 = AC^2 - BC^2 - 2BC.CD$ ● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

$AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$ $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

৭৬.



ΔABC-এ $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং AD, BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব হলে– (কঠিন)

$AB^2 = AC^2 - BC^2 - 2BC.CD$ ● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

$AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$ $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

৭৭. **ΔABC এর মধ্যমায় G বিন্দুতে মিলিত হলে $AB^2 + BC^2 + CA^2$ = কত ?** (মধ্যম)

ⓚ $GA^2 + GB^2 + GC^2$ ⓦ $2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

● $3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ⓖ $\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

৭৮. **ABC ত্রিভুজের মধ্যমা AD = 5 সে.মি. এবং BC = 6 সে.মি. হলে, $AB^2 + AC^2$ = কত বর্গ সে.মি.?** (মধ্যম)

ⓚ 34 বর্গ সে. মি. ● 68 বর্গ সে. মি.

ⓖ 78 বর্গ সে. মি. ⓖ 122 বর্গ সে. মি.

৭৯. **সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে 6, 7 ও 8 একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক?** (মধ্যম)

ⓚ 9 একক ● 10·1 একক

ⓖ 14·2 একক ⓖ 14·95 একক

৮০. **কোনো সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যদি p, q, r এবং অতিভুজ d হয়, তাহলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?** (সহজ)

ⓚ $p^2 + q^2 + r^2 = d^2$ ⓦ $p^2 + q^2 + r^2 = 2d^2$

● $2(p^2 + q^2 + r^2) = 3d^2$ (ঘ) $3(p^2 + q^2 + r^2) = 5d^2$

৮১. **ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি 25.75 হলে, ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত?** (কঠিন)

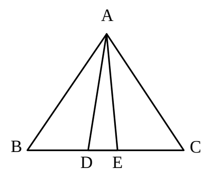
● 34·34 বর্গ সে.মি. (খ) 34·94 বর্গ সে.মি.

(গ) 34·43 বর্গ সে.মি. (ঘ) 43·43 বর্গ সে.মি.

ব্যাখ্যা : $(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4}{3} \times 25{\cdot}75$

$= 34{\cdot}34$

৮২.



i. $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$

ii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$

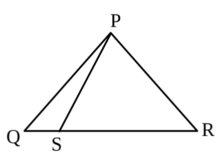
iii. $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + AD^2$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii (গ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৮৩.

ΔABC–এ



ΔPQR ও ΔPQS-এ

i. $PQ^2 < PS^2 + QS^2$

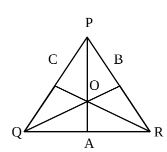
ii. $PR^2 < PQ^2 + QR^2$

iii. $PQ^2 < PR^2 + QR^2$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৮৪.



PQR ত্রিভুজে PA, QB ও CR তিনটি মধ্যমাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে–

i. $OA = \frac{3}{2} OP$

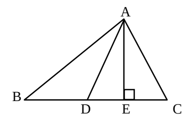
ii. $OQ = \frac{2}{3} QB$

iii. $CO = \frac{1}{3} OR$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓜ ii ও iii ● i, ii ও iii

৮৫.



ΔABC এ AD মধ্যম হলে–

i. $AB^2 + AC^2 = BE^2 + CE^2$

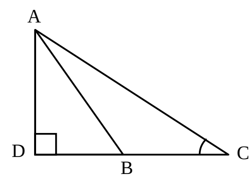
ii. $AB^2 = AE^2 + (BD + DE)^2$

iii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ● ii ও iii ⓝ i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৬ ও ৮৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



উপরের চিত্রে B, CD এর মধ্যবিন্দু এবং AC = 6.5 সে.মি. এবং BC = 2.5 সে.মি.।

৮৬. **AC এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?** (সহজ)

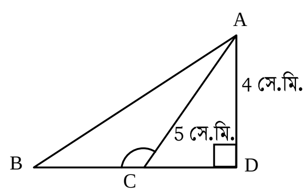
ⓚ BC ⓛ BD ⓜ AD ● CD

৮৭. **$AD^2 + AC^2$ = কত বর্গ সে. মি.?** (মধ্যম)

ⓚ 17 .25 বর্গ সে. মি. ⓛ 45.25 বর্গ সে. মি.

● 59.5 বর্গ সে. মি. ⓝ 84.5 বর্গ সে. মি.

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৮ – ৯০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে AC = 5 সে. মি. এবং BD = 10 সে. মি.।

৮৮. **AC এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?** (সহজ)

ⓚ BC ● CD ⓜ AD ⓝ AB

৮৯. **$\angle$ACB স্থূলকোণ হলে AB^2 = কত?** (মধ্যম)

● $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ⓛ $AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$

ⓜ $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ⓝ $AC^2 + BC^2 - 2(BC + CD)$

৯০. **AB = কত সে. মি.?** (কঠিন)

ⓚ $\sqrt{74}$ ● $\sqrt{116}$

ⓜ 74 ⓝ 110

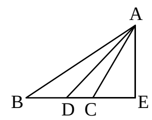
৯১. **ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 8 সে.মি হলে, ঐ ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত সে.মি?**

● 4 (খ) 8 (গ) 12 (ঘ) 16

৯২. **পিথাগোরাস কোন দেশের পণ্ডিত ছিলেন?**

(ক) রাশিয়া (খ) ভারত (গ) জাপান ● গ্রিক

৯৩.



ΔABC এ AD, BC বাহুর মধ্যমা এবং AE,BC এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব হবে–

● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

(খ) $AB^2 - AC^2 = 2(AD^2 - BD^2)$

(গ) $AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2$

(ঘ) $2(AB^2 + AC^2) = AD^2 + BD^2$

৯৪. **বৃত্তের পরিধির কোনো বিন্দুতে কয়টি স্পর্শক আঁকা সম্ভব?**

(ক) অসংখ্য ●1 (গ) 2 (ঘ) 3

৯৫. **সমবাহু ত্রিভুজে যেকোনো বাহুর বহিঃস্থ কোণ কত হবে?**

(ক) 130° (খ) 100° (গ) 160° ● 120°

৯৬. **ΔABC -এ $AB = BC$ হলে কোনটি সঠিক?**

(ক) $\angle ABC = \angle ACB$ (খ) $\angle ABC = \angle BCA$

● $\angle ACB = \angle BAC$ (ঘ) $\angle ACB = \angle ABC$

৯৭. **ΔABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ = স্থূলকোণ, তাহলে কোন সম্পর্কটি সঠিক?**

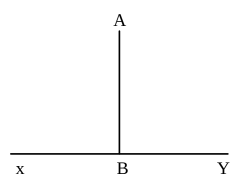
● $BC^2 > AC^2 + AB^2$ (খ) $BC^2 < AC^2 + AB^2$

(গ) $AB^2 > AC^2 + BC^2$ (ঘ) $AC^2 > AB^2 + BC^2$

৯৮. **কোনো নির্দিষ্ট রেখার ওপর লম্ব অভিৰেপের দৈর্ঘ্য কিরূ প হয়?**

● একক (খ) দ্বিগুণ (গ) শূন্য (ঘ) অসীম

৯৯.



XY রেখায় AB এর লম্ব অভিৰেপ–

(ক) AB (খ) BX (গ) BY ● শূন্য

১০০. **ΔABC-এর $\angle C$ স্থূলকোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

(ক) $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (খ) $AB^2 < AC^2 + BC^2$

● $AB^2 > AC^2 + BC^2$ (ঘ) $AB^2 > 2(AC^2 + BC^2)$

১০১. **একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে 8 একক ও 6 একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক?**

● 10 (খ) 36 (গ) 64 (ঘ) 100

১০২. কোনো নির্দিষ্ট রেখার উপর কোনো বিন্দু হতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে ঐ বিন্দুর কী বলে?

ⓚ লম্ব ⓚ অভিক্ষেপ ● লম্ব অভিক্ষেপ ⓖ মধ্যমা

১০৩. ΔABC-এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে নিচের কোনটি এ্যাপোলিনিয়াসের উপপাদ্য?

ⓚ $AB^2 + AC^2 = AD^2$

● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

ⓖ $2(AB^2 + AC^2) = AD^2 + BD^2$

ⓖ $AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2$

১০৪. ΔABC- এর $\angle C = 60°$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.AC$ $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.AC$

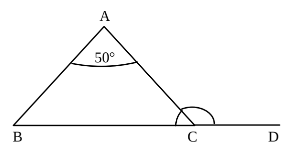
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + BC.AC$ ● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - BC.AC$

১০৫. ΔABC এর BC বাহুর উপর AD মধ্যমা। BC = 8 সে.মি., AD = 5 সে.মি. হলে, $AB^2 + AC^2$ এর মান কত?

● 82 বর্গ সে.মি. ⓚ 41 সে.মি.

ⓖ 89 বর্গ সে.মি. ⓖ 178 বর্গ সে.মি.

১০৬.



উপরের চিত্রে AB = AC হলে–

i. $\sin\angle ACD = \cos 35°$ ii. $\sin\angle ABC = \cos 25°$

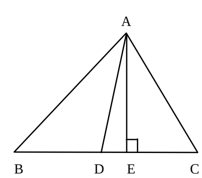
iii. $\cos\angle BAC = \sin 40°$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

● i, ii ও iii ⓖ ii ও iii

১০৭.



ΔABC এ AD মধ্যমা হলে–

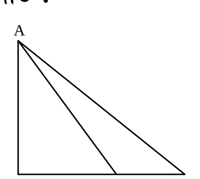
i. $AB^2 = AE^2 + (BD + DE)^2$ ii. $AB^2 + AC^2 = BE^2 + CE^2$

iii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১০৮ ও ১০৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $AB \perp BC$, D, BC এর মধ্যবিন্দু এবং BD = 2 সে. মি., AD = 3 সে. মি.।

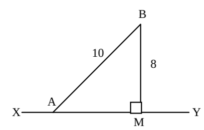
১০৮. BC এর উপর AC এর লম্ব অভিৰেপ কোনটি?

(ক) AB ● BC (গ) BD (ঘ) CD

১০৯. $AB^2 + AC^2$= কত বর্গ সে. মি.?

● 26 (খ) 13 (গ) 5 (ঘ) 25

নিচের চিত্রের আলোকে ১১০ – ১১২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১১০. XY সরলরেখার উপর AB এর লম্ব অভিৰেপ কোনটি?

(ক) XY (খ) BM ● AM (ঘ) AX

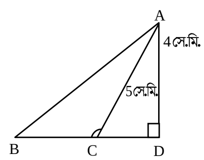
১১১. AM এর দৈর্ঘ্য কত?

● 6 (খ) 8 (গ) 10 (ঘ) 12

১১২. ΔABM এর ৰেত্রফল কত বর্গ একক?

(ক) 12 ● 24 (গ) 32 (ঘ) 48

নিচের তথ্যের আলোকে ১১৩ – ১১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে AC = 5 সে. মি. এবং BD = 10 সে. মি.

১১৩. AC এর লম্ব অভিৰেপ কোনটি?

(ক) BC ● CD (গ) AD (ঘ) AB

১১৪. $\angle ACB$ স্থূলকোণ হলে, AB^2 = কত?

● $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (খ) $AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$

(গ) $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ (ঘ) $AC^2 + BC^2 - 2(BC + CD)$

১১৫. AB = কত সে.মি?

(ক) $\sqrt{74}$ ● $\sqrt{116}$ (গ) 74 (ঘ) 110

ΔABC-এ $\angle C$ স্থূলকোণ এবং AD, BC রেখার উপর লম্ব।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের ১১৬ ও ১১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১১৬. উপরের তথ্যের ভিত্তিতে–

i. $AB^2 > AC^2 + BC^2$

ii. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

iii. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC.CD$

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১৭. BC এর উপর AB বাহুর লম্ব অভিৰেপ কোনটি?

● CD (খ) AD (গ) AC (ঘ) BD

১. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের–**

ⓚ সমান ⓚ দ্বিগুণ ● অর্ধেক ⓖ এক–চতুর্থাংশ

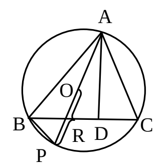
২. **একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ 9π একক হলে, ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত একক?**

ⓚ 9π ● 18π ⓖ 36π ⓖ 81π

৩. **একটি ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি. হলে, ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?**

ⓚ $\frac{25\pi}{4}$ ⓚ 20π ⓖ 25π ● 100π

৪. **ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং AP ব্যাস হলে ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য কোনটি?**



● AB.AC = 2R.AD ⓚ AB.AD = 2R.AC

ⓖ AB.BP = 2R.AP ⓖ AB.AC = 2R.BP

৫. **একটি ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 cm হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত?**

ⓚ $25\ \pi$ ⓚ $50\ \pi$ ● $100\ \pi$ ⓖ $150\ \pi$

৬. **2 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বহিঃস্থ কোনো বিন্দুর দূরত্ব 6 সে.মি. হলে, ঐ বিন্দু হতে বৃত্তের ওপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত?**

ⓚ 6.32 সে.মি. ⓚ 5.91 সে.মি.

● 5.66 সে.মি. ⓖ 4.47 সে.মি.

৭. **একটি ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 7 সে.মি. ঐ ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত সে.মি.?**

● 3.5 ⓚ 7 ⓖ 14 ⓖ 49

৮. **দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূ প বাহুর বিপরীত কোণগুলোর মধ্যে সম্পর্ক হবে–**

ⓚ একটি ছোট ⓚ দুইটি বড়

ⓖ অসমান ● সমান

৯. **দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে–**

i. অনুরূপ কোণগুলো সমান

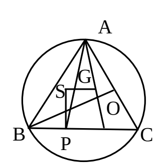
ii. অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক

iii. ত্রিভুজদ্বয় সর্বদা সর্বসম

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii ⓚ ii ও iii ⓖ i ও iii ⓖ i, ii ও iii

১০.



চিত্রে S পরিকেন্দ্র, G ভরকেন্দ্র ও O লম্ববিন্দু হলে–

i. AG : GP = 2 : 1

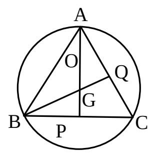
ii. AP : AG = 3 : 1

iii. $SP = \frac{1}{2} AO$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii ● i ও iii ⓖ i, ii ও iii

১১. চিত্রে ΔABC এর পরিকেন্দ্র O, ভরকেন্দ্র G হলে–



i. $AG : \frac{2}{3} AP$

ii. BG : GQ = 2 : 1

iii. লম্ব বিন্দু, O এবং G সমরেখ

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii ● ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১২. নববিন্দু বৃত্তের ক্ষেত্রে–

i. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান

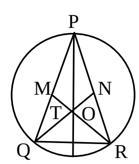
ii. লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্রের সংযোজক রেখার উপর বৃত্তের কেন্দ্র অবস্থিত

iii. সর্বমোট নয়টি বিন্দু এই বৃত্তের উপর অবস্থান করে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ১৩ ও ১৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



L, M, N বিন্দু তিনটি স্ব–স্ব বাহুর মধ্যবিন্দু।

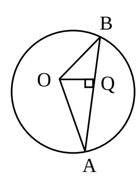
১৩. চিত্রের আলোকে PO : OL নিচের কোনটি?

ক 1 : 1 ● 2 : 1 গ 3 : 1 ঘ 3 : 2

১৪. ত্রিভুজটি পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে উহার নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত হবে?

ক 8 সে.মি. খ 6 সে. মি. গ 3 সে.মি. ● 1.5 সে.মি.

নিচের চিত্রের আলোকে ১৫ ও ১৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে OA = OB = 5 একক OQ = 4 একক।

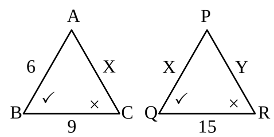
১৫. **AB এর দৈর্ঘ্য কত একক?**

(ক) 3 ● 6 (গ) $\sqrt{41}$ (ঘ) 41

১৬. **ΔOAB এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?**

(ক) 3 (খ) 6 ● 12 (ঘ) 24

নিচের চিত্রের আলোকে ১৭ – ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ΔABC ও ΔPQR সাদৃশ্য।

১৭. **x- এর মান কত?**

(ক) 9 ● 10° (গ) 15 (ঘ) 24

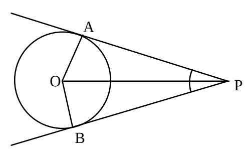
১৮. **y এর মান কত?**

(ক) $10\frac{2}{3}$ (খ) $12\frac{2}{3}$ (গ) $15\frac{2}{3}$ ● $16\frac{2}{3}$

১৯. **ΔABC ও ΔPQR এ BC : QR = কত?**

● 9 : 15 (খ) 15 : 9 (গ) 9 : 25 (ঘ) 25 : 9

নিচের চিত্রের আলোকে ২০ ও ২১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $\angle$AOB = 130°, OP = 5 cm, PA = 4 cm

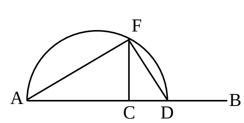
২০. **ΔAPB এর মান কত ডিগ্রি?**

(ক) 25° (খ) 60° ● 50° (ঘ) 30°

২১. **ΔAOP এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?**

(ক) 9 ● 6 (গ) 18 (ঘ) 3

নিচের চিত্রের আলোকে ২২ ও ২৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



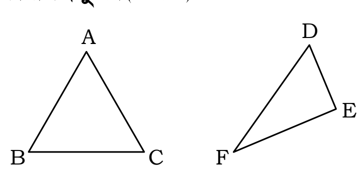
২২. **$\angle$AFD = কত?**

(ক) 60° ● 90° (গ) 120° (ঘ) 180°

২৩. **$\angle$ACF = এর মান কত?**

(ক) 70° ● 90° (গ) 145° (ঘ) 180°

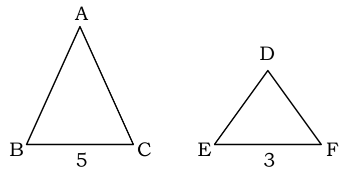
২৪. **নিচের চিত্র ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী ত্রিভুজ।**(মধ্যম)



(ক) $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DF}$ (খ) $\frac{AC}{AB} = \frac{EF}{DE}$

(গ) $\frac{BC}{AC} = \frac{DF}{EF}$ ● $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

২৫. নিচের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে, $\Delta ABC : \Delta DEF$ = কত? (মধ্যম)



(ক) 5 : 3 (খ) 3 : 5 ● 25 : 9 (ঘ) 9 : 25

২৬. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? (সহজ)

● 0 (খ) 1

(গ) 10 (ঘ) 11

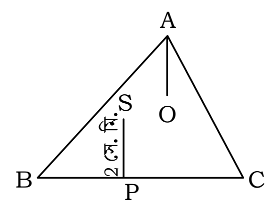
২৭. একটি ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 9 সে.মি.। ঐ ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত সে. মি.? (মধ্যম)

● 4.5 (খ) 9 (গ) 18 (ঘ) 81

২৮. একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ক্ষেত্রফল 25π। ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত? (মধ্যম)

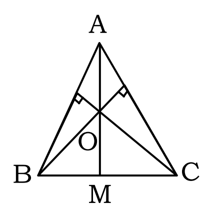
(ক) 25π (খ) 50π ● 100π (ঘ) 525π

২৯. ΔABC এর O লম্ববিন্দু এবং পরিকেন্দ্র S। SP = 2 সে. মি. হলে, AO = কত সে. মি.? (মধ্যম)



(ক) 1 (খ) 2 ● 4 (ঘ) 6

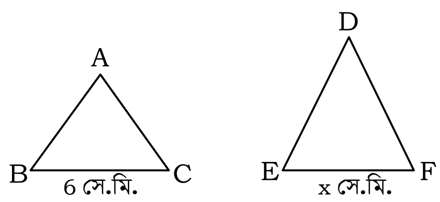
৩০.



O বিন্দুটিকে ΔABC-এর কী বলে? (সহজ)

(ক) বহিঃকেন্দ্র (খ) ভরকেন্দ্র ● লম্ববিন্দু (ঘ) পরিকেন্দ্র

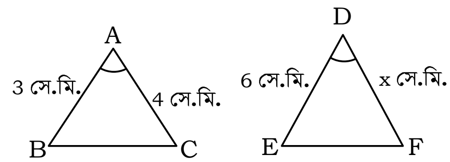
৩১.



ΔABC ও ΔDEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ। ΔABC এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ সে. মি. এবং ΔDEF এর ক্ষেত্রফল 32 বর্গ সে.মি. হলে, x এর মান কত সে.মি. হবে? (কঠিন)

(ক) 5 (খ) 6 (গ) 7 ● 8

৩২.



উপরের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশ এবং ∠A = ∠D হলে, x = কত সে. মি.? (কঠিন)

(ক) 4 (খ) 6 ● 8 (ঘ) 10

৩৩. **দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তাদের অনুরূ প বাহুগুলোর কী হবে?** (সহজ)

(ক) সমান ● সমানুপাতিক

(গ) অসমান (ঘ) ব্যস্তানুপাতিক

৩৪. **দুইটি ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ হলে, ত্রিভুজ দুইটি কী হবে?**(সহজ)

(ক) সমান ● সদৃশকোণী (গ) সমকোণী (ঘ) সুক্ষ্মকোণী

৩৫. **ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় কত অনুপাতে বিভক্ত হয়?** (সহজ)

● 2 : 1 (খ) 2 : 3 (গ) 3 : 1 (ঘ) 3 : 2

৩৬. **দুইটি ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে, ৰেত্রফল কী হবে?** (সহজ)

(ক) ব্যস্তানুপাতিক (খ) সমান

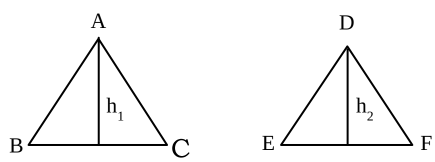
● সমানুপাতিক (ঘ) অসমান

৩৭. **দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ৰেত্রফল কী হবে?** (সহজ)

(ক) সমান ● সমানুপাতিক

(গ) অসমান (ঘ) ব্যস্তানুপাতিক

৩৮.



ΔABC ও ΔDEF সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়ের BC = EF হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $h_1 = h_2$ (খ) $\frac{h_1}{h_2} = BC$ (গ) $\frac{h_1}{h_2} = 1$ ● $\frac{h_1}{h_2} =$ ধ্রুব

৩৯. **a : b = c : d হলে নিচের কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)

● $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (খ) $\frac{a}{b} = cd$ (গ) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$ (ঘ) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

৪০. **ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল রেখা যদি AB ও AC কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে তবে নিচের কোনটি হবে?** (কঠিন)

(ক) $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$ (খ) AB.AE = AC.CD

(গ) $\frac{AB}{AD} = AC^2$ ● AB : AD = AC : AE

৪১. **বৃত্তের ৰেত্রে পরিসীমাকে কী বলে?** (সহজ)

● পরিধি ⓦ ব্যাস ⓖ ব্যাসার্ধ ⓖ জ্যা

৪২. **ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে তার যেকোনো শীর্ষের দূরত্ব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের কতগুণ?** (সহজ)

ⓚ সমান ⓦ অর্ধেক ● দ্বিগুণ ⓖ তিনগুণ

৪৩. **ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দুকে কী বলা হয়?** (সহজ)

ⓚ পরিকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র ⓖ অন্তঃকেন্দ্র ⓖ লম্ববিন্দু

৪৪. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরি ব্যাসার্ধের –** (সহজ)

ⓚ সমান ⓦ দ্বিগুণ ⓖ তিনগুণ ● অর্ধেক

৪৫. **ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং AD ⊥ BC হলে, নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

ⓚ $AB.AC = \frac{1}{2} R.AD$ ● $AB.AC = 2R.AD$

ⓖ $AB.AC = 3R.AD$ ⓖ $AB.AC = RAD$

৪৬. **ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান–এটি কার উপপাদ্য?** (সহজ)

ⓚ টলেমির ● ব্রহ্মগুপ্তের

ⓖ পিথাগোরাসের ⓖ ইউক্লিডের

৪৭. **বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ABCD এবং AC ও BD কর্ণ হলে AC.BD = AB.CD + BC. AD। এটি কার উপপাদ্য?** (সহজ)

● টলেমির ⓦ পিথাগোরাসের

ⓖ ইউক্লিডের ⓖ ব্রহ্মগুপ্তের

৪৮. **বৃত্তের দুটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে ছেদবিন্দুর অবস্থান কোথায়?** (মধ্যম)

ⓚ বৃত্তের বাইরে ⓦ বৃত্তের উপরে

● বৃত্তের মধ্যে ⓖ বৃত্তের পরিধিতে

৪৯. **বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা কী?** (সহজ)

ⓚ ব্যাসার্ধ ⓦ অর্ধব্যাসার্ধ

● ব্যাস ⓖ কেন্দ্র হতে দূরবর্তী জ্যা

৫০. **বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুটি কর্ণ হলে, টলেমির উপপাদ্য অনুসারে কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)

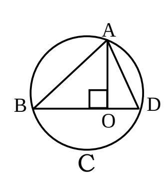
● $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

ⓦ $AC.BD = AB.BC + CD.AD$

ⓖ $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

ⓖ $AC.BD = AB.BC – CD.AD$

৫১.



AB, AD ও AO এর মান যথাক্রমে 4, 3 ও 2 একক হলে ABCD বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত একক? (মধ্যম)

ⓚ 2 ● 3 ⓖ 4 ⓘ 5

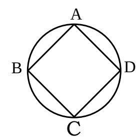
ব্যাখ্যা : ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে,

AB.AD = 2R.AD [R = পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

বা, $2R = \frac{Ab.AD}{AD}$

বা, $R = \frac{4 \times 3}{2 \times 2} = 3$

৫২.

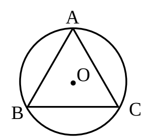


ABCD একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ হলে AC.BD = কত? (মধ্যম)

● AB.CD + BC.AD ⓖ AC.BD + AB.CD

ⓖ AB.CD – BC.AD ⓘ AC.BC – AB.CD

৫৩.



ΔABC বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে O কে বলা হয়– (মধ্যম)

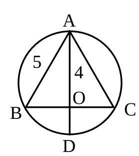
ⓚ ভরকেন্দ্র ⓖ অন্তঃকেন্দ্র ● পরিকেন্দ্র ⓘ সমরেখ

৫৪. **বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো বর্গের কর্ণদ্বয়ের গুণফল 250 বর্গসেন্টিমিটার হলে এর ক্ষেত্রফল কত?** (সহজ)

ⓚ 50 বর্গ সে.মি. ⓖ 75 বর্গ সে.মি.

ⓖ 100 বর্গ সে.মি. ● 125 বর্গ সে.মি.

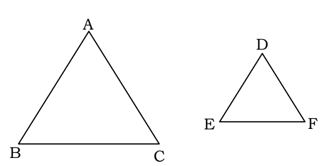
৫৫.



ΔABC সমবাহু হলে OD এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ⓚ 2·25 ● 2·50 ⓖ 2·75 ⓘ 3·50

৫৬.



ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে–

i. অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে

ii. অনুরূপ বাহুগুলোর আনুপাতিক হবে

iii. ক্ষেত্রফলের অনুপাত অনুরূপ বাহুদ্বয়ের বর্গের অনুপাতের সমান হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৫৭. দুইটি বহুভুজের কোণগুলো সমান হলে–

i. বহুভুজদ্বয় সদৃশকোণী

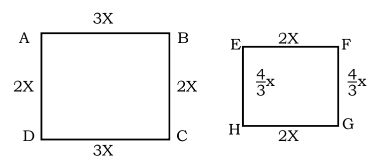
ii. বহুভুজদ্বয় সদৃশ অথবা অসদৃশ

iii. বহুভুজদ্বয় সর্বদা সর্বসম

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৫৮.



চিত্রে ABCD ও EFGH দুইটি আয়ত–

i. ABCD ও EFGH পরস্পর সদৃশ

ii. ABCD ও EFGH পরস্পর সদৃশকোণী

iii. তাদের অনুরূপ বাহুর অনুপাত সর্বদা $\frac{2}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৫৯. দুইটি ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশকোণী হলে–

i. তারা সদৃশ

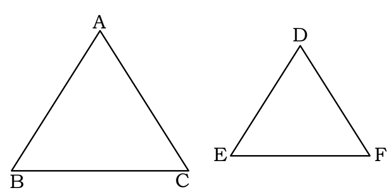
ii. তারা সর্বদা সর্বসম

iii. বাহুগুলোর অনুপাত সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii ● i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬০.



ΔABC ও ΔDEF পরস্পর সদৃশ হলে–

i. $\Delta ABC : \Delta DEF = AB^2 : DE^2$

ii. $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC^2}{EF^2}$

iii. ΔABC ও ΔDEF এর ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬১. **একটি ত্রিভুজের—**

i. পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লক্ষবিন্দু সমরেখ

ii. মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে নববিন্দু বলে

iii. শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬২. **দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের—**

i. সমান কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোন বলে

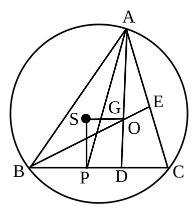
ii. অনুরূপ বাহুগুলো সমান নাও হতে পারে

iii. অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটি অনুরূপ বাহু

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৩.



চিত্রে S পরিকেন্দ্র, G ভরকেন্দ্র, O লম্ববিন্দু ও AP, ABC এর মধ্যমা হলে—

i. OA = 2SP

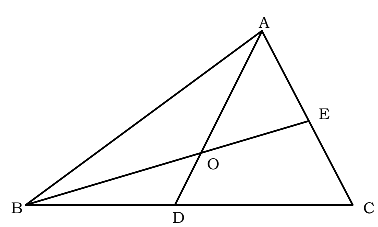
ii. S, G ও O একই সরলরেখায় অবস্থিত

iii. G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৪.



উপরের চিত্রে, AD ও BE যথাক্রমে BC ও AC এর উপর মধ্যমা হলে—

i. AD = AE

ii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DC^2)$

iii. O, ABC এর ভরকেন্দ্র

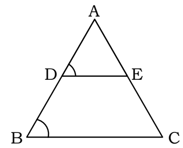
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ● ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬৫. **পাশের চিত্রে AC = 25 সে. মি.**

এবং AE = 16 সে.মি.

এবং BC || DE হলে–



i. $\frac{AB}{AD} = \frac{25}{16}$

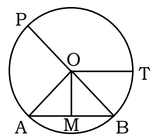
ii. $\frac{AD}{BD} = \frac{16}{9}$

iii. $\frac{AB}{BD} = \frac{5}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬৬. **OM ⊥ AB হলে–**



i. AM = BM

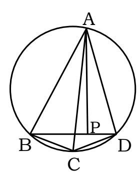
ii. OA = OT

iii. AB = BP

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ ii ও iii

৬৭.



উপরের চিত্র সম্পর্কে সঠিক মন্তব্যগুলো হলো–

i. ΔABP ও ΔACD সদৃশকোণী হলে AC . BP = AB.CD

ii. ΔABC ও ΔAPD সদৃশকোণী হলে AC.BP = AD.PD

iii. AC.BD = AB.CD + BC.AD

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬৮. **ADC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle D = 90°$ হলে–**

i. $AD^2 + CD^2 = AC^2$

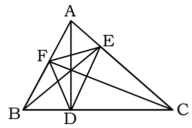
ii. $AD^2 = AC^2 - CD^2$

iii. ΔADC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times DC \times AD$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৯. **চিত্রে পাদ ত্রিভুজ হলো–**



i. ABC

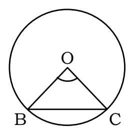
ii. DEF

iii. BOD

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ● ii ⓖ i ও iii ⓘ ii ও iii

৭০. **নিচের চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $\angle BOC = 80°$ এবং $\angle OCB = 50°$। ত্রিভুজটি সম্পর্কে ফারহানা আক্তার নিচের মন্তব্যগুলো করলেন–**



i. OC = OB

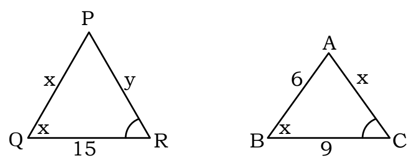
ii. $\angle OBC = 50°$

iii. BOC একটি সমকোণী ত্রিভুজ

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্রদ্বয়ের আলোকে ৭১ – ৭৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ΔABC ও ΔPQR সদৃশ।

৭১. **x এর মান কত?** (মধ্যম)

(ক) 9 ● 10 (গ) 15 (ঘ) 24

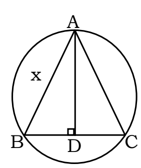
৭২. **y এর মান কত?** (সহজ)

(ক) $10\frac{2}{3}$ (খ) $12\frac{2}{3}$ (গ) $15\frac{2}{3}$ ● $16\frac{2}{3}$

৭৩. **ΔABC ও ΔPQR এর ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?** (মধ্যম)

● 25 : 9 (খ) 16 : 9 (গ) 15 : 9 (ঘ) 10 : 9

নিচের চিত্রের আলোকে ৭৪ – ৭৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে. মি.।

৭৪. **AD কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে?** (মধ্যম)

● $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ (খ) $\frac{3}{4}x^2$ (গ) $\sqrt{3x^2}$ (ঘ) x^2

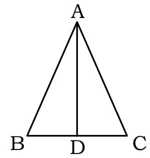
৭৫. **x = কত সে. মি.?** (কঠিন)

(ক) 1.5 (খ) 3 ● $3\sqrt{3}$ (ঘ) $4\sqrt{2}$

৭৬. **AD = কত সে. মি.?** (সহজ)

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) 3 ● 4.5 (ঘ) 6

নিচের চিত্রের আলোকে ৭৭ – ৭৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ΔABC-এ $AB = AC = 6$ সে. মি., $\angle ADC = 1$ সমকোণ এবং $BC = 4$ সে. মি.।

৭৭. **AD এর দৈর্ঘ্য কত?** (মধ্যম)

● $4\sqrt{2}$ সে. মি. ⓦ $3\sqrt{3}$ সে. মি.

ⓖ $3\sqrt{2}$ সে. মি. ⓓ $2\sqrt{3}$ সে. মি.

৭৮. **ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?** (মধ্যম)

ⓚ $4\sqrt{2}$ ব. সে. মি. ⓦ $6\sqrt{2}$ ব. সে. মি.

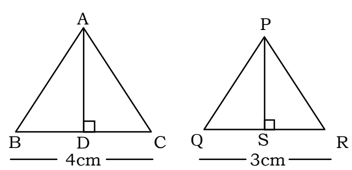
● $8\sqrt{2}$ ব. সে. মি. ⓓ $10\sqrt{2}$ ব. সে. মি.

৭৯. **BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল কত?** (সহজ)

ⓚ 4 ব. সে. মি. ⓦ 8 ব. সে. মি.

ⓖ 12 ব. সে. মি. ● 16 ব. সে. মি.

ত্রিভুজদ্বয়ের আলোকে ৮০ – ৮২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী

৮০. **$\angle B = 60°$ হলে $\angle Q$ = কত?** (সহজ)

ⓚ 40° ● 60° ⓖ 70° ⓓ 90°

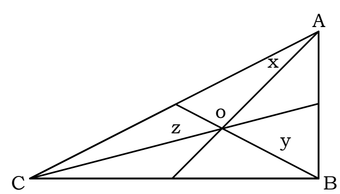
৮১. **$\Delta ABC : \Delta PQR$ এর মান নিচের কোনটি?** (মধ্যম)

ⓚ 3 : 4 ● 16 : 9 ⓖ 9 : 16 ⓓ 4 : 3

৮২. **ΔABC ও ΔPQR এর AB ও PQ অনুরূপ বাহু হলে AB : PQ এর মান নিচের কোনটি?** (কঠিন)

ⓚ 2.5 : 1.5 ⓦ 3 : 4 ● 4 : 3 ⓓ 5 : 3

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৩ – ৮৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং x, y, z মধ্যমা

৮৩. **ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র নিচের কোনটি?** (সহজ)

ⓚ A ⓦ C ● O ⓓ B

৮৪. **ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)

● $z = \frac{3}{2}OC$ ⓦ $y = \frac{3}{2}OC$ ⓖ $x = \frac{3}{2}OC$ ⓓ $f = e$

৮৫. **ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

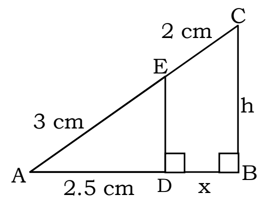
ক $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

খ $2(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 3AC^2$

● $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3AC^2$

ঘ $2(x^2 + y^2 + z^2) = AC^2$

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৬ – ৮৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৮৬. **x-এর মান নিচের কোনটি?** (মধ্যম)

ক 2.5 খ 2.67 গ 3.76 ● 1.67

৮৭. **z এর মান নিচের কোনটি?** (মধ্যম)

● 1.66 খ 1.21 গ 1.56 ঘ 2.66

৮৮. **h-এর মান নিচের কোনটি?** (কঠিন)

ক 2.18 খ 3.92 গ 3.18 ● 2.76

৮৯. **ΔABC এর AD ও DE মধ্যদ্বয় পরস্পরকে 0 বিন্দুতে ছেদ করলে AD : AO = কত?**

● 3 : 2 খ 3 : 1 গ 2 : 1 ঘ 1 : 2

৯০. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?**

ক 2 সে.মি খ 4 সে .মি গ 8 সে.মি ● 16 সে.মি

৯১. **∠ABC–এ ∠A = এক সমকোণ এবং AD, BC বাহুর উপর D বিন্দুতে লম্ব হলে, নিচের কোনটি সত্য?**

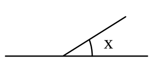
● $AB^2 = BC.AD$ খ $AB^2 = BC.AB$

গ $AB^2 = BC.BD$ ঘ $AD^2 = CD.AD$

৯২. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের কিরূ প?**

ক সমান ● অর্ধেক গ দ্বিগুণ ঘ চারগুণ

৯৩.



x = 40° হলে ∠x এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?

● 70° খ 60° গ 80° ঘ 40°

৯৪. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 cm হলে ঐ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ কত সে. মি.?**

ক 4 খ 8 গ 12 ● 16

৯৫. **PQR অর্ধবৃত্তস্থ ত্রিভুজের ভূমি 6cm ও বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?**

ক 48 বর্গ সে. মি. ● 24 বর্গ সে.মি.

গ 30 বর্গ সে .মি. ঘ 15 বর্গ সে.মি.

৯৬. ΔABC ও ΔDEF এর ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 5cm ও 6 cm এবং 7 cm ও 8 cm হলে $\Delta ABC : \Delta DEF$ এর মান নিচের কোনটি?

ⓚ 7 : 3 ⓚ 15 : 17 ⓖ 15 : 29 ● 15 : 28

৯৭. যেকোনো ত্রিভুজ ABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ হলে–

● $AB^2 > BC^2 + CA^2$ ⓚ $AB^2 = BC^2 + CA^2$

ⓖ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ⓘ $AB^2 < BC^2 + CA^2$

৯৮. ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে $AB^2 + BC^2 + CA^2$ = কত?

ⓚ $GA^2 + GB^2 + GC^2$ ⓚ $2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

● $3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ⓘ $\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

৯৯. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ–

ⓚ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের সমান

● ত্রিভুজের পরিব্যসার্ধের অর্ধেকের সমান

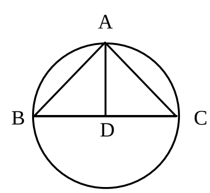
ⓖ পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখার সমান

ⓘ পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্রের সংযোজক রেখার সমান

১০০. বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো বর্গের কর্ণদ্বয়ের গুণফল 200 বর্গ সে.মি. হলে এর ৰেত্রফল কত বর্গ সে.মি. হবে?

ⓚ 10 ⓚ 20 ⓖ 50 ● 100

১০১. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?



ⓚ $AB. AC = \frac{1}{2} R.AD$ ● $AB.AC = 2R.AD$

ⓖ $AB.AC = 3R. AD$ ⓘ $AB.AC = 4R. AD$

১০২. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র, লম্ববিন্দু–

● সমরেখ ⓚ সমবিন্দু ⓖ সমান্তরাল ⓘ সমতল

১০৩. ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং BC ও EF অনুরূ প বাহু হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ $\Delta ABC : \Delta DEF = AB^2 : DF^2$

ⓚ $\Delta ABC : \Delta DEF = AB^2 : EF^2$

● $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$

ⓘ $\Delta ABC : \Delta DEF = EF^2 : BC^2$

১০৪. কোনো বৃত্তের–

i. একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ

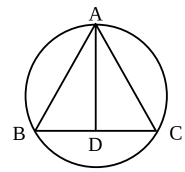
ii. শুধুমাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়

iii. বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাস পরস্পর লম্ব

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও iii ⓚ i ও ii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ১০৫ ও ১০৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে ABC সমবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য = 3 সে. মি.। BC এর উপর মধ্যমা AD।

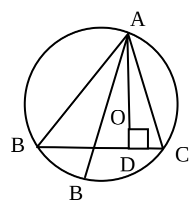
১০৫. AD = কত সে. মি. (প্রায়)?

● 2·6 ⓚ 3 ⓖ 6·75 ⓘ 45·65

১০৬. ΔABC এর পরিবৃত্তে ব্যাসার্ধ কত সে. মি.?

● 1·73 ⓚ 3 ⓖ 5·2 ⓘ 6·75

নিচের চিত্রের আলোকে ১০৭ ও ১০৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১০৭. AB. AC = AP. AD নিচের কোন উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

ⓚ টলেমি ● ব্রহ্মগুপ্ত

ⓖ এ্যাপোলেনিয়াস ⓘ পিথাগোরাস

১০৮. চিত্রে কয়টি সমকোণী ত্রিভুজ আছে?

ⓚ 1 ⓚ 2 ⓖ 3 ● 4

১০৯. **নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :**

i. দুইটি বিন্দুর দুরত্ব নির্ণয়ে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্য নেওয়া হয়

ii. $y - 2x + 5 = 0$ রেখার ঢাল -2

iii. $3x + 5y = 0$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ⓚ ii ও iii ● i ও iii ⓖ i, ii ও iii

১১০. **নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর–**

i. যে কোন দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না

ii. শুধু মাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়

iii. বৃত্তের কোন বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শ আঁকা যায়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● ii ও iii ⓖ i ও iii ⓖ i, ii ও iii

১১১. **কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং 3 সে.মি। ত্রিভুজটিকে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে–**

i. উৎপন্ন ঘনবস্তুটি একটি সবৃত্তভূমিক কোণক হবে

ii. ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার হবে

iii. উৎপন্ন ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল হবে 9π বর্গ সে.মি.

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ⓚ ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii

১১২. **নিচের তথ্যগুলো লৰ কর –**

i. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে

ii. দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে

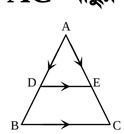
iii. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলেই ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও iii ⓚ ii ও iii ● i ও ii ⓖ i, ii ও iii

১১৩. **চিত্রে ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে –**

i. $DE \parallel BC$ হবে



ii. $DE = \frac{1}{2} BC$ হবে

iii. $\vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$

হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১১৪. **একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4, 5 একক হলে–**

i. ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা = 12 একক

ii. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক

iii. ত্রিভুজটি সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১৫. ΔABC এর ক্ষেত্রে $AB^2 > BC^2 + CA^2$ হলে–

i. $\angle C$ স্থূলকোণ

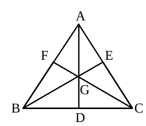
ii. $\angle A$ সমকোণ

iii. $\angle B$ সূক্ষকোণ

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (গ) i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ১১৬ ও ১১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



D,E,F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু হলে–

১১৬. G বিন্দুর নাম কী? (সহজ)

(ক) লম্ববিন্দু (খ) অন্তঃকেন্দ্র (গ) পরিকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র

১১৭. ΔABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে? (মধ্যম)

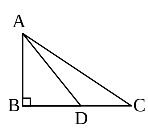
(ক) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

(গ) $AB^2 + AC^2 = 2(GA^2 + GD^2)$

(ঘ) $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

নিচের তথ্য থেকে ১১৮ ও ১১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $AB \perp BC$। D, BC এর মধ্যবিন্দু এবং $AD = 2$ সে.মি. $BD = 3$. সে.মি.

১১৮. BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (সহজ)

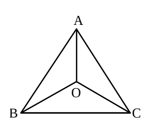
(ক) AB ● BC (গ) BD (ঘ) CD

১১৯. $AB^2 + AC^2$ = কত বর্গ সে.মি.? (মধ্যম)

● 26 (খ) 13 (গ) 5 (ঘ) 35

নিচের তথ্য থেকে ১২০ ও ১২১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থিত।



১২০. O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের– (সহজ)

(ক) পরিবৃত্ত ● অন্তর্বৃত্ত (গ) বহির্বৃত্ত (ঘ) বৃত্তে অন্তর্লিখিত

১২১. নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

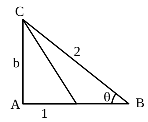
(ক) OA + OB + OC > AB + BC + AC

(খ) OA + OC < BC

● OA + OB + OC < AB + BC + AC

(ঘ) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle O$

নিচের তথ্যের আলোকে ১২২ – ১২৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে BC = AC

১২২. BD এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (সহজ)

(ক) BC ● BD (গ) CD (ঘ) AC

১২৩. AD এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

(ক) 5 ● $\sqrt{5}$ (গ) 4 (ঘ) $\sqrt{2}$

১২৪. AB এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

(ক) 3.74 (খ) 5 (গ) 5.48 ● 6.48

নিচের তথ্যের আলোকে ১২৫ ও ১২৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

ΔABC এ AB = BC = CA = 5 সে. মি. এবং AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

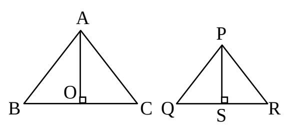
১২৫. ΔABC এর মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত সে. মি.? (মধ্যম)

(ক) 225 ● 75 (গ) 56 (ঘ) 7.5

১২৬. $AD^2 + BD^2$ = কত? (মধ্যম)

(ক) 50 (খ) $\sqrt{50}$ ● 25 (ঘ) $\sqrt{25}$

নিচের তথ্য থেকে ১২৭ ও ১২৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী এবং BC = 4cm ও QR = 3cm

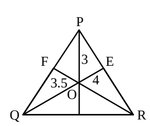
১২৭. ΔABC : ΔPQR এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 3 : 4 (খ) 9 : 16 ● 16 : 9 (ঘ) 4 : 3

১২৮. AB ও PQ অনুরূপ বাহু হলে AB : PQ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 2 : 1 (খ) 3 : 4 (গ) 3 : 5 ● 4 : 3

নিচের তথ্য থেকে ১২৯ – ১৩১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ΔPQR এর মধ্যমাত্রয় 4, 3 এবং 3.5 একক এবং তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। (মধ্যম)

১২৯. OP এর দৈর্ঘ্য কোনটি?

ⓚ 3 একক ● 2 একক ⓖ 1 একক ⓖ $\frac{1}{2}$ একক

১৩০. ত্রিভুজের বাহুগুলো বর্গের সমষ্টি নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ 49.67 বর্গ একক ⓚ 41.29 বর্গ একক

● 40.57 বর্গ একক ⓖ 39.69 বর্গ একক

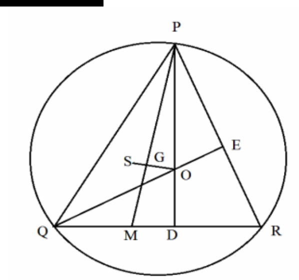
১৩১. $\angle P = 90°$ হলে, QR = ? (কঠিন)

● 3.92 একক ⓚ 4.72 একক

ⓖ 4.98 একক ⓖ 5.68 একক

সৃজনশীল প্রশ্নঃ

১. ঢাকা বোর্ড ২০২০



চিত্রে $S, \triangle PQR$ এর পরিকেন্দ্র এবং M, QR এর মধ্যবিন্দু।

ক. $(5,-4)$ও$(-9,-6)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $G, \triangle PQR$এর ভরকেন্দ্র। ৪

⇨১নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. $(5,-4)$ ও $(-9,-6)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \sqrt{(-9-5)^2 + \{-6-(-4)\}^2}$ একক

$= \sqrt{(-14)^2 + (-6+4)^2}$ একক

$= \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2}$ একক

$= \sqrt{196+4}$ একক

$= \sqrt{200}$ একক

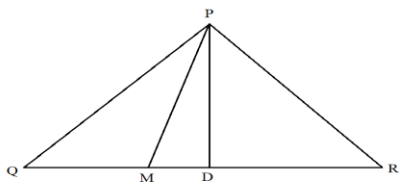
$= \sqrt{100 \times 2}$ একক $= 10\sqrt{2}$ একক

নির্ণেয় দূরত্ব $10\sqrt{2}$ একক।

খ. এখানে, $\triangle$PQR এ QR বাহুর মধ্যবিন্দু M অর্থাৎ PM মধ্যমা QR বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। QR বাহুর উপর লম্ব PD।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2\,(PM^2 + QM^2)$

অঙ্কন QR বাহুর উপর PD লম্ব আঁকি।



প্রমাণ : ΔPQMএর $\angle PMQ$ স্থূলকোণ এবং QM এর বর্ধিতাংশের উপর PM রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $MD.$

∴ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.MD ....(i)$

আবার, $\triangle PMR$ এর $\angle PMR$ সূক্ষকোন এবং MR রেখার উপর PM রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $MD.$

∴ সূক্ষকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PR^2 = PM^2 + MR^2 - 2MR.MD ....(ii)$

এখন সমীকরণ (i) ও (ii)যোগ করে পাই,

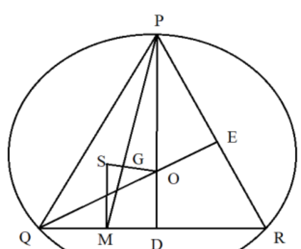
$$PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.MD + PM^2 + MR^2 - 2MR.MD$$

$= 2PM^2 + 2QM^2 + 2QM.MD - 2QM.MD[\because QM = MR]$

$= 2PM^2 + 2QM^2$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ (প্রমাণিত)

গ. এখানে, $\triangle PQR$ এর পরিকেন্দ্র S এবং QR এর মধ্যবিন্দু M অর্থাৎ QR বাহুর উপর PM একটি মধ্যমা। PR বাহুর উপর লম্বQE এবং QR বাহুর উপর লম্ব PD। PD এবং QE পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে অর্থাৎ লম্ব বিন্দু O। লম্ব বিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S এর সংযোগ রেখা PM মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। S, M যোগ করলে SM রেখা QR এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle PQR$এর ভরকেন্দ্র G।



প্রমাণ : $\triangle PQR$ এর লম্ব বিন্দু O থেকে P শীর্ষের দূরত্ব OP এবং পরিকেন্দ্র S থেকে P শীর্ষের বিপরীত বাহু QR এর দূরত $SM.$

$\therefore OP = 2SM$[∵ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভূজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বীপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ]

এখন যেহেতু PD এবং SM উভয়ই QR এর উপর লম্ব।

সেহেতু $PD \parallel SM$

এখন, $PD \parallel SM$ এবং PM এদের ছেদক

$\therefore \angle MPD = \angle PMS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ $\angle OPG = \angle SMG$

এখন,$\triangle PGO$ এবং $\triangle MGS$ এ

$\angle PGO = \angle MGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OPG = \angle SMG$ [একান্তর কোণ]

∴অবশিষ্ট $\angle POG$ = অবশিষ্ট $\angle MSG$

$\varDelta PGO$ এবং $\varDelta MGS$ সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{PG}{GM} = \frac{OP}{SM}$

বা, $\frac{PG}{GM} = \frac{2SM}{SM}$ $[\because OP = 2SM]$

বা, $\frac{PG}{GM} = \frac{2}{1}$

$\therefore PG : GM = 2 : 1$

অর্থাৎ G বিন্দু PM মধ্যমা কে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore \varDelta PQR$ এর ভরকেন্দ্র G. **(প্রমাণিত)**

২. যশোর বোর্ড ২০২০

$\varDelta PQR$-এ $PQ > PR$ এবং PA মধ্যমা QR বাহুকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ক. সমবাহু $\varDelta DEF$ এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. $\angle Q = 60$ হলে প্রমাণ কর যে,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PA^2 + QA^2)$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, DEF সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ, $R = OD = OE = 7$ সে.মি.।

আবার, DEF সমবাহু ত্রিভুজের DG রেখা EF বাহুকে এবং EH রেখা DF বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অতএব, DG এবং EH উভয়েই DEF সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা।

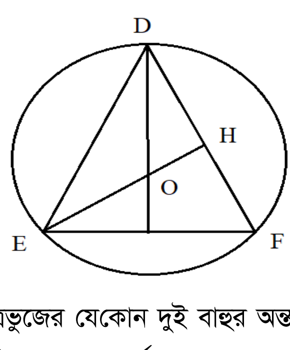
DG এবং EH মধ্যমাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করায় O হচ্ছে ভরকেন্দ্র।

$\therefore DG = \frac{3}{2}OD$

$= \frac{3}{2} \times 7$ সে.মি.

$= \frac{21}{2}$ সে,মি,

$= 10.5$ সে.মি.



আমরা জানি, কোন ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

অতএব, $DE.DF = 2R.DG$

বা, $DE.DE = 2 \times 7 \times 10.5$ $[\because$ DEF সমবাহু ত্রিভুজ]

বা, $DE = 147$

বা, $DE = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$

$\therefore DE = 12.124$ সে.মি. (প্রায়)

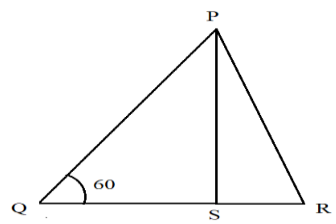
নির্ণেয় ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য 12.124 সে.মি. (প্রায়)।

খ. এখানে, $\varDelta PQR$ এ $PQ > PR$ এবং $\angle Q = 60$

প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$

অঙ্কন : P হতে QR এর উপর PS লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : $\varDelta PRS$-এ $\angle PSR =$ এক সমকোণ



$\therefore PR^2 = PS^2 + RS^2 ....(i)$

[পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

চিত্র হতে, $RS = QR - QS$

$\therefore RS^2 = (QR - QS)^2$ [বর্গ করে]

$\therefore RS^2 = QR^2 + QS^2 - 2QR.QS ....(ii)$

সমীকরণ (i)ও(ii) নং হতে পাই,

$PR^2 = PS^2 + QR^2 + QS^2 - 2QR.QS$

$\therefore PR^2 = PS^2 + QR^2 + QS^2 - 2QR.QS ....(iii)$

আবার, $\varDelta PQS$ হতে, $\angle PSQ =$এক সমকোণ

$\therefore PQ^2 = PS^2 + QS^2 ....(iv)$

(iii)ও(iv) নং হতে পাই, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.QS$

বা, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.\frac{QS}{PQ}PQ ....(v)$

এখন, যেহেতু $\angle Q = 60$ এবং $\angle PSD =$ এক সমকোণ

$\therefore \frac{QS}{PQ} = cos\angle Q = cos60$

$\therefore \frac{QS}{PQ} = \frac{1}{2}$

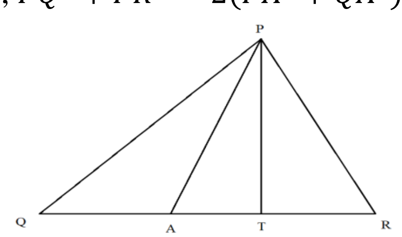
এখন, (v) নং এ $\frac{QS}{PQ} = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.\frac{1}{2}PQ$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - QR.PQ$ (প্রমাণিত)

গ. এখানে, $\varDelta PQR$ এ $PQ > PR$ এবং এর PA মধ্যমা QR বাহুকে A বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^3 = 2(PA^3 + QA^3)$



অঙ্কন: QR বাহুর উপর PT লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔPQA এর $\angle PAQ$ স্থুলকোণ এবং QA রেখার বর্ধিতাংশের ওপর PA রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $AT.$

$\therefore$স্থুলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি আনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PA^2 + QA^2 + 2QA.AT$.................$(i)$

এখানে, ΔPRA এর $\angle PAR$ সূক্ষকোন এবং AR রেখার উপর PA রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $AT.$

$\therefore$সূক্ষকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি আনুসারে আমরা পাই,

$PR^2 = PA^2 + AR^2 + 2AR.AT$.................$(ii)$

এখন সমীকরণ $(i), (ii)$ যোগ করে পাই,

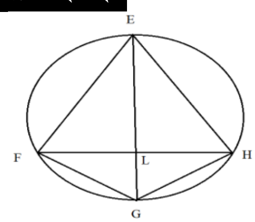
$$PQ^2 + PR^2 = PA^2 + QA^2 + 2QA.AT + PA^2 + AR^2 + 2AR.AT$$
$$= 2PA^2 + QA^2 + QA^2 + 2QA.AT - 2QA.AT$$

$[\because AR = QA]$

$$= 2PA^2 + 2QA^2$$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PA^2 + QA^2)$(প্রমাণিত)

৩. কুমিল্লা বোর্ড ২০২০



বৃত্তে অন্তলিখিত $EFGH$ একটি চতুর্ভুজ।

ক. ΔEFL এ $FL = 3$ সে.মি., $LE = 4$ সে.মি.এবং $\angle ELF = 120$ হলে, EF এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. ΔEFH-এ EL একটি মধ্যমা হলে দেখাও যে,

$EF^2 + EH^2 = 2(EL^2 + FL^2)$ ৪

গ. দেখাও যে, $EF.GH + EH.FG = EG.FH$ ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে ΔEFL এ $FL = 3$সে.মি., $LE = 4$ সে.মি. এবং

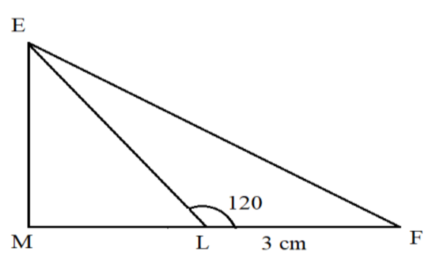
$$\angle ELF = 120$$

FL এর বর্ধিতাংশের উপর EM লম্ব।

$$\angle ELM = 180 - \angle ELF = 180 - 120 = 60$$

যেহেতু ΔEFL এর $\angle ELF = 120$ যা একটি স্থুলকোণ।

সেহেতু ΔEFL একটি স্থুলকোণী ত্রিভুজ।



স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$EF^2 = FL^2 + LE^2 + 2FL.LM$

$= FL^2 + LE^2 + 2FL.\frac{1}{2}LE$

$$[\because cos60 = \frac{LM}{LE} \text{ or}, \frac{1}{2} = \frac{LM}{LE} \text{ or}, \text{LM} = \frac{1}{2}\text{LE}]$$

$= FL^2 + LE^2 + FL.LE$

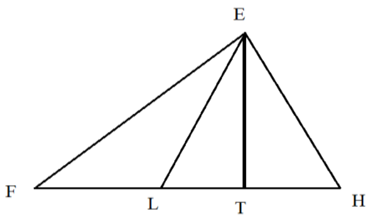
$= 3^2 + 4^2 + 3 \times 4 = 9 + 16 + 12 = 37$

বা, $EF = \sqrt{37} = 6.08$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$নির্ণেয় EF এর মান 6.08 সে.মি. (প্রায়)।

খ. এখানে, $\varDelta EFH$ এ EL মধ্যমা FH বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। দেখাতে হবে যে, $EF^2 + EH^2 = 2(EL^2 + FL^2)$

অঙ্কন : E বিন্দু হতে FH বাহুর ওপর ET লম্ব আঁকি।



প্রমাণ : $\varDelta EFL$ এর $\angle ELF$ স্থূলকোণ এবং FL রেখার বর্ধিতাংশের ওপর EL রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $LT.$

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$EF^2 = EL^2 + FL^2 + 2FL.LT .... (i)$

আবার, $\varDelta EHL$ এর $\angle ELH$ সূক্ষকোণ এবং LH রেখার ওপর EL রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $LT.$

সূক্ষকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$EH^2 = EL^2 + LH^2 - 2LH.LT .... (ii)$

এখন, (i)নং ও (ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$EF^2 + EH^2 = EL^2 + FL^2 + 2FL.LT + EL^2 + LH^2 - 2LH.LT$

$= 2EL^2 + FL^2 + LH^2 + 2FL.LT - 2LH.LT$

$= 2EL + FL + FL + 2FL.LT - 2FL.LT [\because LH = FL]$

$= 2EL^2 + 2FL^2$

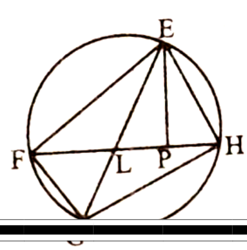
$= 2(EL^2 + FL^2)$

$\therefore EF^2 + EH^2 = 2(EL^2 + FL^2)$ (দেখানো হলো)

গ. এখানে, বৃত্তে অর্ন্তলিখিত $EFGH$চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে EFওGH এবং EH ওFG । EGও FH চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $EF.GH + EH.FG = EG.FH$

অঙ্কন : $\angle FEG$ কে $\angle HEG$ এর ছোট ধরে নিয়ে E বিন্দুতে EH রেখাংশের সাথে $\angle FEG$ এর সমান করে $\angle HEP$ আকি যেন EP রেখা কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে।



প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, $\angle FEG = \angle HEP$

বা, $\angle FEG + \angle GEP = \angle HEP + \angle GEP$

[উভয়পক্ষে যোগ করে]

$\therefore \angle FEP = \angle GEH$

এখন, $\triangle EFP$ এবং $\triangle EGH$ এ

$\angle FEP = \angle GEH$

$\angle EFP = \angle EGH$ [$\because$একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট$\angle EPF =$ অবশিষ্ট$\angle EHG$

$\therefore \triangle EFP$ এবং $\triangle EGH$ সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{FP}{GH} = \dfrac{EF}{EG}$

অর্থাৎ, $EF.GH = EG.FP$...........(i)

আবার, $\triangle EFG$ এবং $\triangle EPH$ এ

$\angle FEG = \angle HEP$[অঙ্কন অনুসারে]

$\angle EGF = \angle EHP$[$\because$একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

অবশিষ্ট$\angle EFG =$ অবশিষ্ট $\angle EPH$

$\therefore \triangle EFG$এবং $\triangle EPH$ সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{EG}{EH} = \frac{FG}{PH}$

অর্থাৎ, $EH.FG = EG.PH$..................(ii)

এখন, (i)ও(ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

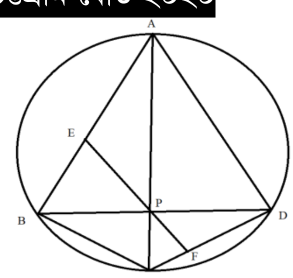
$EF.GH + EH.FG = EG.FP + EG.PH$

$= EG(FP + PH)$

$= EG.FH[\because FP + PH = FH]$

$\therefore EF.GH + EH.FG = EG.FH$(প্রমাণিত)

📖 ৪. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২০



চিত্রে, PD = 3 সে.মি, PF = 1 সে.মি।

ক. CD রেখাংশের উপর PD এর লম্ব অতিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।

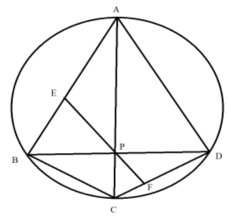
খ. প্রমাণ কর যে, AE=BE

গ. $\triangle ABD$ এ AB =AD এবং ত্রিভুজের পরিবৃত্তের পরিব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে $AB^2 = 2R.AP$.

<u>৪ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক. এখানে, PD = 3 সে. মি এবং PF = 1 সে. মি CD এর উপরPF লম্ব।

∴ CD রেখাংশের উপর PD এর লম্ব অভিক্ষেপ DF।



DFP সমকোণী ত্রিভুজে

$$DF^2 + PF^2 = PD^2$$

বা, $DF^2 = PD^2 - PF^2$

$$= 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$\therefore DF = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

∴CD রেখাংশের উপর PD এর লম্ব অতিক্ষেপের মান $2\sqrt{2}$ সে.মি।

খ. এখানে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় ACএবং BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P হতে CD বাহুর উপর PF লম্ব এবং বর্ধিত FP বিপরীত AB বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ, করতে হবে যে, $AE = BE$

প্রমাণ : একই চাপ BC এর উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BDC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$

$\therefore \angle BDC = \angle BAC$ [∴বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]

$\therefore \angle CDP = \angle EAP$

আবার, $\angle CDP = CPF$[∵উভয়ই একই $\angle DPF$এর পূরক রকান

$\angle CPF = \angle APE$ [∵বিপ্রতিপ কোন পরস্পর সমান]

$\therefore \angle EAP = \angle APE$

ফলে ΔAEP এ $AE = EP$

অনুরপভাবে দেখানো যায় যে, $\angle EBP = \angle DCP = \angle DPF = \angle BPE$

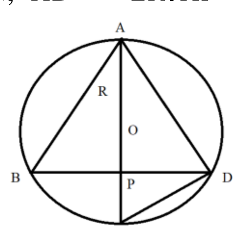
ফলে, ΔBEP এ, $BE = EP$

অতএব, $AE = BE$ (প্রমানিত)

গ. এখানে, ΔABD এ $AB = AD$ এবং $AP \perp BD$; ΔABD

এর পরিকেন্দ্র O এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $R = OA$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2R.AP$



প্রমাণঃ ΔAPB ও ΔACD এ

$\angle APB = \angle ADC$ [উভয়ে এক সমকোণ]

$\angle ABP = \angle ACD$ [একই চাপ AD এর উপর অবস্থিত]

অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle DAC$

∴ ΔABP ও ΔACD সদৃশকোণী ও সদৃশ।

তাহল, $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AD}$ [দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে এদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

বা, $AB.AD = AC.AP$

বা, $AB.AB = (OA + OC).AP$ [$\because AB = AD$ এবং $AC = OA + OC$]

বা, $AB^2 + (OA + OA).AP$ [$\because OA = OC$]

বা, $AB^2 = 2 \times OA.AP$

$\therefore AB^2 = 2R.AP$ (প্রমাণিত)

🕮 ৫. সিলেট বোর্ড ২০২০

A এবং B যথাক্রমে $\varDelta LMN$ এর পরিকেন্দ্র এবং লম্ববিন্দু। LP মধ্যমা, A এবং B এর সংযোগ রেখা LP কে G বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. $3, 4, 5$ একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি বর্ণনা কর।

খ. প্রমাণ কর যে, A, G, B বিন্দু তিনটি সমরেখ।

গ. $\angle N$ সূক্ষকোণ হলে প্রমাণ কর যে, $MN.DN = LN.EN$

<u>৫ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক. এখানে, $\varDelta ABC$ এর বাহুত্রয়, $a = BC = 3$ একক

$b = AC = 4$ একক

$c = AB = 5$ একক

এবং মধ্যমাত্রয়, $d = AE, e = BF, f = CG$

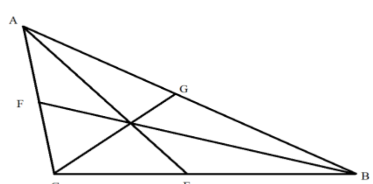
এখন, $AC^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9 = 25 = 5^2 = AB^2$

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\therefore ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং অতিভুজ $c = AB = 5$ একক।

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের 3 গুণ এর সমান।



অর্থাৎ $2\,(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

বা, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{3}{2} \times c^2 = \frac{3}{2} \times 5^2$

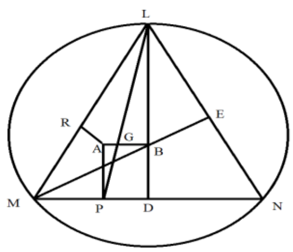
$= \frac{3}{2} \times 25 = 37.5$ বর্গ একক

∴ নির্ণয়ে ত্রিভুজ এর মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি 37.5 বর্গ একক।

খ. এখানে, ΔLMN এর পরিকেন্দ্র A,লম্ব বিন্দু B এবং LP একটি মধ্যমা। পরিকেন্দ্র A এবং লম্ব বিন্দু B এর সংযোগ রেখা LP মধ্যমা কে G বিন্দুতে ছেদ করে। A, P যোগ করলে AP রেখা MN এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে,

A, G, B বিন্দু তিনটি সমরেখ। অর্থাৎ G বিন্দুটি $\varDelta$LMN এর ভর কেন্দ্র, এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।



প্রমাণ ঃ ΔLMN এর লম্ববিন্দু B থেকে L শীর্ষের দূতত্ব BL

এবং পরিকেন্দ্র A থেকে L শীর্ষের বিপরীত বাহু MN এর দূরত্ব AP

$\therefore BL = 2AP$ [$\because$ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভূজের পরিকেন্দ্র থেকে ওই শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ]

এখন, যেহেতু LD ও AP উভয় MN এর উপর লম্ব সেহেতু $LD \parallel AP$ এবং LP এদের ছেদক।

$\angle PLD = \angle LPA$ [একান্তরকোণ]

অর্থাৎ, $\angle BLG = \angle APG$

এখন, ΔLGB এই এবং ΔPGA এর মধ্যে

$\angle LGB = \angle PGA$ [বিপ্রতীপ কোন]

$\angle BLG = \angle APG$ [একান্তরকোণ]

$\therefore$অবশিষ্ট$\angle LBG =$ অবশিষ্ট $\angle PAG$

$\therefore \Delta LBG$ এই এবং ΔPGA সদৃশকোনী।

সুতরাং, $\frac{LG}{GP} = \frac{BL}{AP}$

বা, $\frac{LG}{GP} = \frac{2AP}{AP}$ [$\because$ BL=2AP]

বা, $\frac{LG}{GP} = \frac{2}{1}$.

সুতরাং AL : GP = 2:1

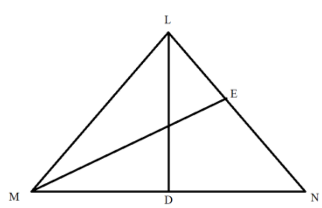
অর্থাৎ G বিন্দু LP মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore G$ বিন্দু ΔLMN এর ভরকেন্দ্র ।

অর্থাৎ A, G, B বিন্দু তিনটি সমরেখ। (প্রমাণিত)

গ. এখানে, ΔLMN এর LN সূক্ষ্মকোণ। MN ও LN এর উপর লম্ব যথাক্রমে LD ও ME ।প্রমাণ করতে হবে যে,

$$MN.DN = LN.EN$$



প্রমাণ ঃ যেহেতু LMN ত্রিভুজ এর$\angle N$ সূক্ষ্মকোণ এবং MN বাহুর উপর LD লম্ব।

সেহেতু, $LM^2 = LN^2 + MN^2 - 2MN.DN.........(i)$

একইভাবে যখন LN বাহুর উপর ME লম্ব তখন

$LM^2 = LN^2 + MN^2 - 2LN.EN$............ (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে,

$$LN^2 + MN^2 - 2MN.DN = LN^2 + MN^2 - 2LN.EN$$

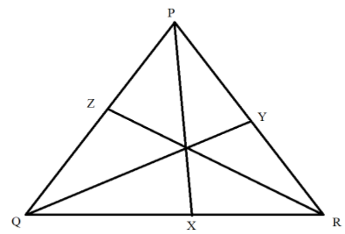
বা, $LN^2 + MN^2 - LN^2 - MN^2 - 2MN.DN = -\,2LN.EN$

বা, $-2MN.DN = -\,2LN.EN$

সুতরাং $MN.DN \ = \ LN.E.$ (প্রমানিত)

[বি:দ্রঃ উদ্দীপকে D এবং E এর কোনো উল্লেখ না থাকায় 'খ' নং এর চিত্র অনুযায়ী MN এবং LN এর উপর লম্ব যথাক্রমে LD এবং ME ধরে সমাধান করা হয়েছে।]

🕮 ৬. বরিশাল বোর্ড ২০২০



$\triangle PQR$ এর PX, QY, RZ তিনটি মধ্যমা

ক. 8 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গলোকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, PQ^2+ PR^2 = 2($PX^2 + QX^2$)

গ, প্রমাণ কর যে, $3(PQ^2 + \ PR^2 \ + \ QR^2) \ = \ 4\ (PX^2 + QY^2 \ + \ RZ^2).$

⇨৬নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. এখানে, গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = 8$ সে.মি.

গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$= 4 \times 3.1416 \ \times 8^2$ বর্গ সে.মি.

$= 4 \times 3.1416 \ \times 64$ বর্গ সে.মি.

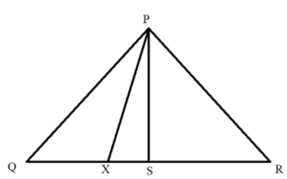
$= \ 804.25$ বর্গ সে.মি. (প্রায়ঃ)

নির্ণেয় গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ৮০৪.২৫ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

খ. এখানে, $\triangle PQR$ এর PX মধ্যমা QR বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 \ + \ PR^2 \ = \ 2\ (PX^2 \ + \ QX^2)$

অঙ্কন :P বিন্দু হতে QR-এর উপর PS লম্ব আঁকি।



প্রমাণ : $\triangle PQD$-এ $\angle PDQ$ স্থূলকোণ এবং QD রেখার বর্ধিতাংশের উপর PX রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $XS.$

∴ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই;

$PQ^2 \ = \ PX^2 \ + \ QX^2 \ + \ 2QX\ .XS \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

আবার, $\triangle PXR$-এ $\angle PXR$ সূক্ষ্কোণ এবং XR রেখার উপর PX রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $XS.$

সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 \ = \ PX^2 \ + \ XR^2 - 2XR.XS \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(১) ও (২) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$PQ^2 + PR^2 \ = \ PX^2 \ + \ QX^2 \ + \ 2QX\ .XS + PX^2 \ + \ XR^2 - 2XR.XS$$

$$= \ 2PX^2 \ + QX^2 + 2QX.XS \ + QX^2 - QX.XS \ [\because QX \ = XR]$$

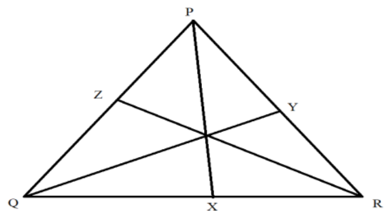
$= 2PX^2 + 2QX^2$

$PQ^2 + PR^2 = 2(PX^2 + QX^2)$. (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, $\triangle PQR$ এর বাহুদ্বয় $QR = a, PR = b, PQ = c$ এবং মধ্যমাদ্বয় $PX = d, QY = e$ ও $RZ = f$.

প্রমাণ করতে হবে যে,

$3(PQ^2 + PR^2 + QR^2) = 4(PX^2 + QY^2 + RZ^2)$।



প্রমাণ : $\triangle PQR$ এর PD একটি মধ্যমা।

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PX^2 + QX^2)$ ['খ' হতে]

বা, $c^2 + b^2 = 2\{d^2 + \left(\frac{1}{2^a}\right)^2\}[\because QD = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}a]$.

$$= 2d^2 + 2 \times \frac{1}{4}a^2$$

$$= 2d^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{4d^2 + a^2}{2}$$

বা, $2(b^2 + c^2) = 4d^2 + a^2$

বা, $4d^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ ....(৩)

অনুরূপভাবে, $4e^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2$ .... (৪)

এবং $4f^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$ .... (৫)

(৩), (৪) ও (৫) নং যোগ করে পাই,

$$4d^2 + 4e^2 + 4f^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2$$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

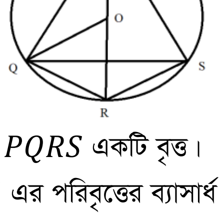
বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

বা, $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

বা, $3(QR^2 + PR^2 + PQ^2) = 4(PX^2 + QY^2 + RZ^2)$

$\therefore 3(QR^2 + PR^2 + PQ^2) = 4(PX^2 + QY^2 + RZ^2)$ (প্রমাণিত)

৭. দিনাজপুর বোর্ড ২০২০



চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $PQRS$ একটি বৃত্ত।

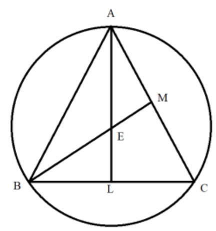
ক. সমবাহু $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ ৫ সে.মি.হলে ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + QR^2 = 2(OQ^2 + OP^2)$

গ. প্রমাণ কর যে, $PR.QS = PQ.RS + QR.PS.$

➪৭নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. এখানে, ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র Eএবং ব্যাসার্ধ, $R = AE = BE = 5$ সে.মি.।
আবার, ABC সমবাহু ত্রিভুজে AL রেখা BC বাহুকে এবং BM রেখা AC বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করে।
অতএব, AL এবং BM উভয়েই ABC সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা।



AL এবং BM মধ্যমাদ্বয়ের E বিন্দুতে ছেদ করায় E হচ্ছে ভরকেন্দ্র।

$\therefore AL = \frac{3}{2}AE$

$= \frac{3}{2} \times 5$ সে.মি.

$= \frac{15}{2}$ সে.মি.= 7.5 সে.মি.

আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

অতএব, $AB.AC = 2R.AL$

বা, $AB.AB = 2 \times 5 \times 7.5$[$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

বা, $AB^2 = 75$

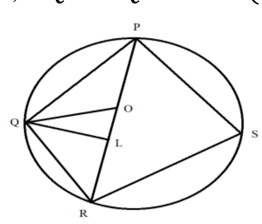
বা, $AB = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$

$\therefore AB = 8.66$ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য 8.66 সে.মি. (প্রায়)।

খ. এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $PQRS$ একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত $PQRS$ একটি চতুর্ভুজ ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + QR^2 = 2\,(OQ^2 + OP^2)$



অঙ্কন : PR এর উপর QL লম্ব অঙ্কন করি

প্রমাণ : $\triangle POQ$ এ $OP = OR$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\triangle POQ$ এ $\angle POQ$ স্থূলকোণ এবং PO রেখার বর্ধিতাংশের ওপর OQ রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $OL.$

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 + 2.OP.OL$ ....(i)

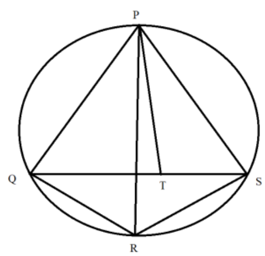
আবার, QOR এ $\angle QOR$ সূক্ষ্মকোণ এবং OR রেখার

ওপর OQ রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OL।
সূক্ষকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,
$QR^2 = OQ^2 + OR^2 \ + 2.OR.OL$ ....(ii)
এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যগেগ করে পাই,
$PQ^2 + QR^2 = OP^2 + OQ^2 + 2.OP.OL + OQ^2 + OR^2 - 2.OR.OL$
$= \ 2OQ^2 + OP^2 + OR^2 \ + \ 2.OP.OL - 2.OR.OL$
$= 2OQ^2 + OP^2 + OP^2 \ + \ 2.OP.OL - 2.OP.OL$

$[\because OP = OR]$

$= \ 2OQ^2 + 2OP^2 = \ 2(OQ^2 + OP^2)$
$\therefore PQ^2 + QR^2 = 2(OQ^2 + \ OP^2)$. (প্রমাণিত)

গ. এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $PQRS$ একটি বৃত্ত এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত $PQRS$ চতুর্ভুজের PR ও QS দুইটি কর্ণ ।
$PQRS$ চতুর্ভুজেঁর বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবংQR ও PS।প্রমাণ করতে হবে যে,
$PR.QS = PQ.RS + QR.PS$।



অঙ্কন : $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPR$এর সমান করে $\angle SPT$ আঁকি যেন PT রেখা QS কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle QPR \ = \angle SPT$
বা, $\angle QPR + \angle RPT = \angle SPT + \angle RPT$ [$\angle RPT$ যোগ করে]
$\therefore \angle QPT \ = \ ZRPS$
এখন, $\triangle PQT$ ও $\triangle PRS$ এর মধ্যে

$$\angle QPT \ = \ \angle RPS, \angle PQS = \angle PRS$$

[∵একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PTQ$ =অবশিষ্ট $\angle PSR$
$\therefore \triangle PQT$ ও $\triangle PRS$ সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$$

অর্থাৎ $PR.QT = PQ.RS$ ....(i)
আবার, $\triangle PQR$ ও $\triangle PTS$ এর মধ্যে
$\angle QPR \ = \ \angle SPT$ (অঙ্কন অনুসারে]
$\angle PRQ = \angle PST$ [:: একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]
এবং অবশিষ্ট $\angle PQR$ = অবশিষ্ট $\angle PTS$
$\therefore \triangle PQR$ ও $\triangle PTS$ সদৃশকোণী ।
$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$
অর্থাৎ $PR : \ ST \ = \ QR.PS$ ....;...(ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PR.QT + PR.ST = PQ.RS + QR.PS$

বা, $PR(QT + ST) = PQ.RS + QR.PS$

$\therefore PR.QS = PQ.RS + QR.PS$ [$\because QT + ST = QS$]

$\because PR.QS = PQ.RS + QR.PS.$ (প্রমাণিত)

৮. ঢাকা বোর্ড ২০১৯

$PQRS$ চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত এবং PR ও QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ ।

ক. ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $AC = 2$ সে.মি. হলে ত্রিভুজের মধ্যমাসমূহের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, PR ও QS এর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুদ্বয়ের আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

গ. PR ব্যাস এবং Q হতে PR এর উপর QF লম্ব হলে, প্রমাণ কর যে, $QF^2 = PF.RF.$

⇨৮নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $AC = 2$ সে.মি.

$\therefore ABC$ সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাসমুহ বর্গের সমষ্টি

$= \frac{3}{2}AC^2$ বর্গ একক

$= \frac{3}{2} \times 2^2$ বর্গ সে.মি.

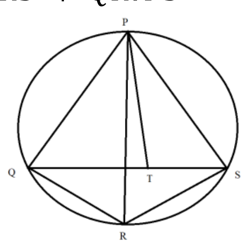
$= \frac{3}{2} \times 4$ বর্গ সে.মি.

$= 6$ বর্গ সে,মি.

খ. মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত $PQRS$ চতুর্ভুজের PR ও QS দুইটিকর্ণ।

$PQRS$ চতুভুর্জের বিপরীত বাহুগুপলা যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS ।প্রমাণ করতে হবে যে,

$PR.QS = PQ.RS + QR.PS$



অঙ্কন : $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছটেভ ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে $\angle QPRG$ এর সমান করে $\angle SPT$ আঁকি যেন PT রেখা QS কর্ণকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle QPR = \angle SPT$

বা, $\angle QPR + \angle RPT = \angle SPT + \angle RPT$ [$\angle RPT$ যগে করে]

$\therefore \angle QPT = \angle RPS$

এখন, $\triangle PQT$ ও $\triangle PRS$ এর মধ্যে

$$\angle QPT = \angle RPS, \angle PQS = \angle PRS$$

[$\because$একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PTQ =$ অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore \triangle PQT$ ও $\triangle PRS$ সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{QT}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ $PR.QT = PQ.RS$...................... (i)

আবার, $\triangle PQR$ ও $\triangle PTS$ এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPT$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle PRQ = \angle PST$ [$\because$একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR =$ অবশিষ্ট $\angle PTS$

$\therefore \Delta PQR$ ও ΔPTS সদৃশকোণী ।

$\therefore \frac{PS}{PR} = \frac{ST}{QR}$

বা, $PR.ST = QR.PS$......................(ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

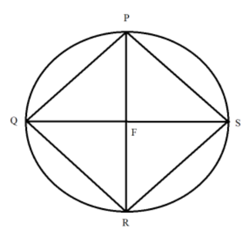
$$PR.QT + PR.ST = PQ.RS + QR.PS$$

বা, $PR(QT + ST) = PQ.RS + QR.PS$

$$\therefore PR.QS = PQ.RS + QR.PS \; [\because QT + ST = QS]$$

(প্রমাণিত)

গ. মনে করি, $PQRS$ বৃত্তে PR ব্যাস। Q হতে PR এর উপর QF লম্ব টানি। প্রমাণ করতে হবে যে, $QF^2 = PF.RF$



প্রমানঃ $\angle PQR = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

বা, $\angle PQF + \angle FQR = 90°$.........$(i)$

আবার, $QF \perp PR$ বলে, $\angle PFQ = \angle QFR = 90°$

ΔPQF-এ $\angle PFQ + \angle PQF + \angle QPF = 180°$

[$\because$ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$]

বা, $90° + \angle PQF + \angle QPF = 180°$

$\therefore \angle PQF + \angle QPF = 90°$...................$(ii)$

(i) ও (ii) হতে পাই,

$$\angle PQF + \angle FQR = \angle PQF + \angle QPF$$

$\therefore \angle FQR = \angle QPF$

ΔPQF এবং ΔQFR-এ,

$\angle PFQ = \angle QFR, \angle QPF = \angle FQR$

এবং অবশিষ্ট $\angle PQF =$ অবশিষ্ট $\angle FRQ$

$\therefore \Delta PQF$ এবং ΔQFR সদৃশকোণী।

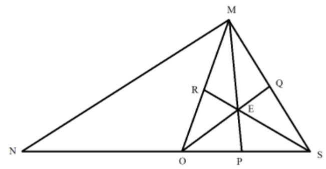
$\therefore \frac{PQ}{QR} = \frac{QF}{RF} = \frac{PF}{QF}$

অর্থাৎ, $\frac{QF}{RF} = \frac{PF}{QF}$

$\therefore QF^2 = PF.RF.$ (প্রমাণিত)

৯. রাজশাহী বোর্ড ২০১৯

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাওঃ



চিত্র OS, MS, MO এবং NS এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, O

ক. $PE = 3$ সে.মি. হলে PM এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

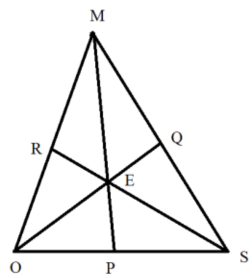
খ. প্রমাণ কর যে, $MO^2 + NO^2 = \frac{1}{2}(MN^2 + MS^2)$

গ. ΔMOS হতে প্রমাণ কর যে, $3(ME^2 + OE^2 + SE^2) = MO^2 + MS^2 + SO^2$.

⇨৯নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. এখানে, $PE = 3$ সে.মি. ΔMOS এর ভরকেন্দ্র E।

যেহেতু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র মধ্যমাত্রয়কে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।



সেহেতু

$\frac{ME}{PE} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{ME+PE}{PE} = \frac{2+1}{1}$ [যোজন করে]

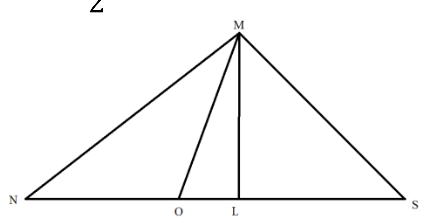
বা, $\frac{PM}{PE} = 3$

বা, $\frac{PM}{3} = 3$

$\therefore PM = 9$সে.মি.

খ. এখানে, ΔMNS এর NS এর মধ্যবিন্দু O হওয়ায় MO একটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$MO^2 + NO^2 = \frac{1}{2}(MN^2 + MS^2)$$



অঙ্কন : M বিন্দু হতে NS এর উপর ML লম্ব আঁকি

প্রমাণ : ΔMNO এর $\angle MON$ স্থূলকোণ এবং MO এর লম্ব অভিক্ষেপ OL.

$\therefore$স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$MN^2 = MO^2 + NO^2 + 2\, NO.OL$ ....(i)

আবার, ΔMOS এর $\angle MOS$ সূক্ষ্মকোণ এবং MO এর লম্ব অভিক্ষেপ OL.

∴সূক্ষকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$MS^2 = MO^2 + OS^2 - 2OS.OL$...............$(ii)$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$MN^2 + MS^2 = MO^2 + NO^2 + 2NO.OL + MO^2 + OS^2 - 2OS.OL$$
$$= 2MO^2 + NO^2 + 2NO.OL + NO^2 - 2NO.OL$$

$[\because OS = NO]$

বা, $MN^2 + MS^2 = 2MO^2 + 2NO^2$

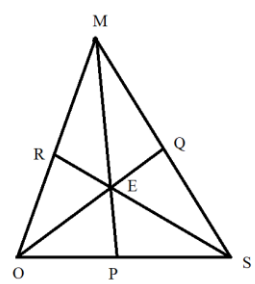
বা, $2(MO^2 + NO^2) = MN^2 + MS^2$

$\therefore MO^2 + NO^2 = \frac{1}{2}(MN^2 + MS^2)$ (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, ΔMOS এর SO, MS ও MO বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c এবং মধ্যমাত্রয় $MP = d, OQ = e$ ও $SR = f$ পরস্পর E বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$3(ME^2 + OE^2 + SE^2) = MO^2 + MS^2 + SO^2$$

প্রমাণ : ΔMOS এর MP একটি মধ্যমা



$\therefore MO^2 + MS^2 = 2(MP^2 + OP^2)$

(এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে)

বা, $c^2 + b^2 = 2\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\}$

বা, $c^2 + b^2 = 2(d^2 + \frac{1}{4}a^2)$

বা, $c^2 + b^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}a^2$

বা, $2(c^2 + b^2) = 4d^2 + a^2$

বা, $4d^2 = 2(c^2 + b^2) - a^2$

বা, $d^2 = \frac{2(c^2+b^2)-a^2}{4}$ ....(i)

অনুরূপভাবে, $e^2 = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$.............$(ii)$

এবং, $f^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$..............$(iii)$

$(i), (ii)$ও(iii) নং যোগ করে পাই,

$d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(c^2 + b^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2c^2 + 2b^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

বা, $3(SO^2 + MS^2 + MO^2) = 4(MP^2 + OQ^2 + SR^2)$

বা, $MO^2+MS^2+SO^2 = \frac{4}{3}(MP^2+OQ^2+SR^2)$

$= \frac{4}{3} \times \frac{9}{4}\{\left(\frac{2MP}{3}\right)^2 + \left(\frac{2OQ}{3}\right)^2 + \left(\frac{2SR}{3}\right)^2\}$

$= 3\{\left(\frac{2MP}{3}\right)^2 + \left(\frac{2OQ}{3}\right)^2 + \left(\frac{2SR}{3}\right)^2\}$............$(iv)$

ΔMOS এর ভরকেন্দ্র E মধ্যমাত্রয়কে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{EM}{EP} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{EP}{EM} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{EP+EM}{EM} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{MP}{ME} = \frac{3}{2}$ [$\because EP+EM = MP$]

$\therefore ME = \frac{2MP}{3},$

একইভাবে $OE = \frac{2OQ}{3}, SE = \frac{2SR}{3}$

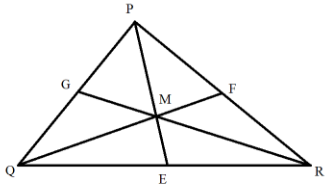
(iv) নং হতে পাই,

$$MO^2+MS^2+SO^2 = 3(ME^2+OE^2+SE^2)$$
$$\therefore 3(ME^2+OE^2+SE^2) = MO^2+MS^2+SO^2$$

(প্রমাণিত)

১০. যশোর বোর্ড ২০১৯

ΔPQR-এ PE, QF ও RG মধ্যমা তিনটি M বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।



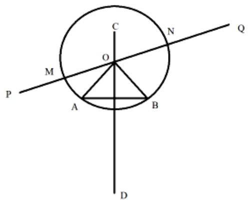
ক. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত।

খ. চিত্র হতে, এ্যাপলোনিয়াসের উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

গ. যদি $\angle PQR$ সমকোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$2(PE^2+QF^2+RG^2) = 3PR^2.$

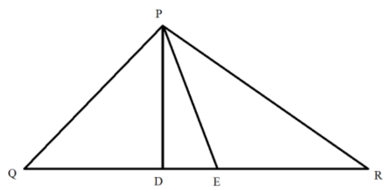
⇨১০নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. মনে করি A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।



এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হলো যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র PQ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

খ. মনে করি, ΔPQR এর PE মধ্যমা QR বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2\,(PE^2 + QE^2)$.



অঙ্কন : QR বাহুর উপর PD লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔPER এর $\angle PER$ স্থূলকোণ এবং RE রেখার উপর PE এর লম্ব অভিক্ষেপ DE ।

$\therefore$স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$$PR^2 = PE^2 + RE^2 + 2RE\,.DE\,...............(i)$$

আবার, ΔPQE এর $\angle PEQ$ সূক্ষ্মকোণ এবং QE রেখার উপর PE এর লম্ব অভিক্ষেপ DE।

$\therefore$সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$$PQ^2 \;=\; PE^2 + QE^2 - 2QE.DE\,............(ii)$$

এখন, (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

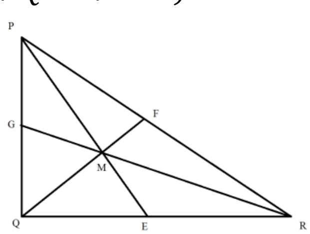
$$PR^2 + PQ^2 = PE^2 + RE^2 + 2RE.DE + PE^2 + QE^2 - 2QE.DE$$
$$= 2PE^2 + QE^2 + 2QE.DE + QE^2 - 2QE.DE$$
$$[\because QE \;=\; RE]$$

$= \; 2PE^2 + 2QE^2$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PE^2 + QE^2)$. (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, ΔPQR-এ PE, QF ও RG মধ্যমা তিনটি পরস্পর M বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করেছে এবং $\angle PQR =$ এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

$2(PE^2 + QF^2 + RG^2) = 3PR^2$.



প্রমাণ : মনে করি, $QR = a, PR = b, PQ = c$

এবং $PE = d, QF = e, RG = f$.

ΔPQR এর PE একটি মধ্যমা

$$\therefore PR^2 + PQ^2 = 2\,(PE^2 + QE^2)$$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $b^2+c^2=2\{d^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2\}$ $[\because QE=\frac{1}{2}QR=\frac{1}{2}a]$

বা, $2d^2+2\times\frac{1}{4}a^2=2d^2+\frac{1}{2}a^2$

বা, $2(b^2+c^2)=4d^2+a^2$

বা, $4d^2=2(b^2+c^2)-a^2$

বা, $d^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ ....(i)

অনুরূপভাবে, $e^2=\frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$.............$(ii)$

এবং, $f^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$..............$(iii)$

$(i),(ii)$ও(iii) নং যোগ করে পাই,

$d^2+e^2+f^2=\frac{2(c^2+b^2)-a^2}{4}+\frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}+\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

বা, $4(d^2+e^2+f^2)=2c^2+2b^2-a^2+2c^2+2a^2-\quad b^2+2a^2+2b^2-c^2$

বা, $4(d^2+e^2+f^2)=3(a^2+b^2+c^2)$

বা, $4(PE^2+QF^2+RG^2)=3(PR^2+PQ^2+QR^2)$ .....(iv)

আবার, যেহেতু $\angle PQR=$ এক সমকোণ এবং অতিভুজ $=PR$

$\therefore PR^2=PQ^2+QR^2$..........$(v)$

এখন, (iv) ও (v) নং হতে পাই,

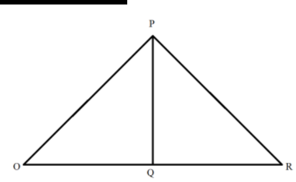
$$4(PE^2+QF^2+RG^2)=3(PR^2+PR^2)$$

বা, $4(PE^2+QF^2+RG^2)=3\times 2PR^2$

বা, $4(PE^2+QF^2+RG^2)=6PR^2$

$\therefore 2(PE^2+QF^2+RG^2)=3PR^2$ (প্রমাণিত)

১১. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৯



ক. $\varDelta OPR$ এর মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3\ cm, 4\ cm,$ $5\ cm$ হলে অতিভুজ OR এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $PR^2=PO^2+OR^2-2OR.OQ.$

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2=OQ.QR.$

⇨১১নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. দেওয়া আছে, $\varDelta POR$ এ $\angle OPR=90°$ এবং অতিভুজ$=OR$

ধরি, $\varDelta OPR$ এর মধ্যমাত্রয়ের যথাক্রমে $d=3\ cm, e=4\ cm, f=5\ cm$ এবং অতিভুজ $OR=c$ সে.মি.

$\therefore 2\,(d^2+e^2+f^2)=3c^2$

[∵সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমায়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান]

বা, $c^2 = \frac{2}{3}(d^2 + e^2 + f^2)$

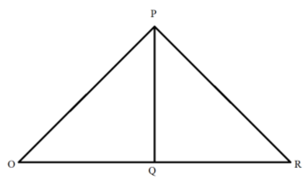
বা, $c^2 = \frac{2}{3}(3^2 + 4^2 + 5^2)$

$= \frac{2}{3}(9 + 16 + 25) = \frac{100}{3}$

বা, $c = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5.77$(প্রায়)

∴অতিভুজ OR এর দৈর্ঘ্য 5.77 সে.মি.।

খ. এখানে, $\varDelta OPR$-এ $\angle OPR = 90°$ এবং $\angle POR$ সূক্ষকোণ এবং সূক্ষকোণের বিপরীত বাহু PR, অপর দুই বাহু PO ও OR। OR এর উপর OP এর লম্ব অভিক্ষেপ OQ।প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$



প্রমাণ : $\varDelta PQR$-এ $\angle PQR = 1$ সমকোণ

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে)

বা, $PR^2 = PQ^2 + (OR - OQ)^2$ [$\because QR = OR - OQ$]

বা, $PR^2 = PQ^2 + OR^2 + OQ^2 - 2OR.OQ.......(i)$

আবার, $\varDelta PQO$-এ $\angle PQO = 1$ সমকোণ

$OP^2 = PQ^2 + OQ^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

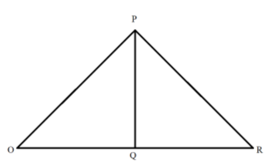
বা, $PQ^2 = OP^2 - OQ^2.............(ii)$

এখন, (i) ও (ii) নং হতে পাই,

$$PR^2 = OP^2 - OQ^2 + OR^2 + OQ^2 - 2OR.OQ$$

$\therefore PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$ (প্রমাণিত)

গ. এখানে, $\varDelta POR$-এ $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$।প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = OQ.QR$



প্রমাণ : $\angle OPR = 90°$

$\angle OPQ + \angle QPR = 90° .....(i)$

আবার, $PQ \perp OR$ বলে, $\angle PQO = \angle PQR = 90°$

$\varDelta OPQ$ এ $\angle PQO + \angle OPQ + \angle POQ = 180°$

[∵ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $90° + \angle OPQ + \angle POQ = 180$ [$\because \angle PQO = 90°$]

বা, $\angle OPQ + \angle POQ = 90°$...................... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$$\angle OPQ + \angle QPR = \angle OPQ + \angle POQ$$

$\therefore \angle QPR = \angle POQ$

$\varDelta POQ$ও $\varDelta PRQ$ - এ

$\angle PQO = \angle PQR, \angle POQ = \angle QPR$
অবশিষ্ট $\angle OPQ$= অবশিষ্ট $\angle PRQ.$
$\therefore \varDelta POQ$ ও $\varDelta PRQ$ সদৃশ
$\therefore \frac{OP}{PR} = \frac{PQ}{QR} = \frac{OQ}{PQ}$
অর্থাৎ, $\frac{PQ}{QR} = \frac{OQ}{PQ}$ $PQ^2 = OQ.QR$ (প্রমাণিত)

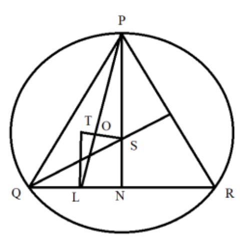
১২. সিলেট বোর্ড ২০১৯

$\varDelta PQR$ এর Q এবং P বিন্দু হতে PR ও QR এর উপর লম্ব QM ও PN এর ছেদবিন্দু S। পরিকেন্দ্র T ও S এর সংযোগকারী রেখা PL মধ্যমাকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
ক. দেখাও যে, $A\ (1,2), B\ (4,3)$ এবং $C\ (7,4)$বিন্দু তিনটি সমরেখ।
খ. দেখাও যে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $O.$
গ. $PL \perp QR$ হলে প্রমাণ কর যে, $QS.SM = RS.SN = PS.SL$

⇨১২নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. এখানে, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A\ (1,2), B\ (4,3)$ এবং $C\ (7,4)$
A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি AB ও BC রেখার ঢাল পরস্পর সমান হয়।
এখন, AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$
BC রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{7-4} = \frac{1}{3}$
যেহেতু $m_1 = m_2$
$\therefore A, B, C$ বিন্দু তিনটি সমরেখ। (দেখানো হলো)

খ. এখানে, $\varDelta PQR$ এর Q এবং P বিন্দু হতে PR ও QR এর উপর লম্ব QM ও PN এর ছেদবিন্দু S। পরিকেন্দ্র T ও S এর সংযোগকারী রেখা PL মধ্যমাকে O বিন্দুতে ছেদ করে। T, L যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\varDelta PQR$ এর ভরকেন্দ্র O।



প্রমাণ :$\varDelta PQR$ এর লম্ববিন্দু S থেকে শীর্ষের দূরত্ব SP এবং পরিকেন্দ্র T থেকে P শীর্ষের বিপরীতবাহু QR এর দূরত্ব TL।
$\therefore SP = 2TL$ ....(i)
[$\because$ ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকে থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্বদূরত্বের দ্বিগুণ]
যেহেতু PN ও TL উভয় QR এর ওপর লম্ব সেহেতু $PN \parallel TL.$
এখন, $PN \parallel TL$ এবং PL এদের ছেদক।
$\therefore \angle LPN = \angle PLT$ [একান্তর কোণ]
অর্থাৎ $\angle SPO = \angle TLO$
এখন, $\varDelta POS$ ও $\varDelta LOT$ এর মধ্যে
$\angle POS = \angle LOT$ [বিপ্রতীপ কোণ]
$\angle SPO = \angle TLO$ [একান্তর কোণ]
এবং অবশিষ্ট $\angle PSO =$ অবশিষ্ট $\angle LTO$

$\therefore \angle POS$ ও $\angle LOT$ সদৃশকোণী ।

$\therefore \dfrac{PO}{OL} = \dfrac{SP}{TL}$

বা, $\frac{PO}{OL} = \frac{2TL}{TL}$ $[\because SP = 2TL]$

বা, $\frac{PO}{OL} = \frac{2}{1}$

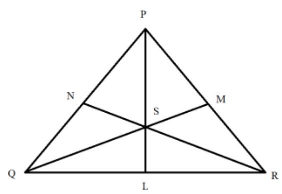
$\therefore PO : OL = 2 : 1$

অর্থাৎ 0 বিন্দু PL মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore \varDelta PQR$ এর ভরকেন্দ্র $O.$ (দেখানো হলো)

গ. এখানে, $\varDelta PQR$ এর $PL \perp QR, QM \perp PR$ এবং $RN \perp PQ$ অর্থাৎ PL, QM ও RN লম্বত্রয় পরস্পর S বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$QS.SM = RS.SN = PS.SL$ ।



প্রমাণ : $\varDelta QSN$ ও $\varDelta RSM$-এ

$\angle SNQ = \angle SMR = 90°$ $[\because RN \perp PQ, QM \perp PR]$

$\angle QSN = \angle RSM$ (বিপ্রতীপ কোণ)

এবং অবশিষ্ট $\angle SQN$ = অবশিষ্ট $\angle SRM$

$\therefore \varDelta QSN$ ও $\varDelta RSM$ সদৃশকোণী ।

$\therefore \dfrac{QS}{RS} = \dfrac{SN}{SM}$

বা, $OS.SM = RS.SN$..............(i)

আবার, $\varDelta QSL$ ও $\varDelta PSM$-এ

$\angle SLQ = \angle SMP = 90°$ $[\because PL \perp QR, QM \perp PR]$

$\angle QSL = \angle PSM$ (বিপ্রতীপ কোণ)

অবশিষ্ট $\angle SQL$ = অবশিষ্ট $\angle SPM$

$\therefore \varDelta QSL$ ও $\varDelta PSM$ সদৃশকোণী।

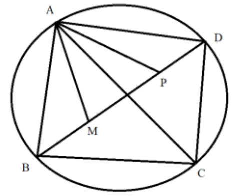
$\therefore \dfrac{QS}{PS} = \dfrac{SL}{SM}$

$\therefore QS.SM = PS.SL$................(ii)

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

$QS.SM = RS.SN = PS.SL.$ (প্রমাণিত)

১৩. বরিশাল বোর্ড ২০১৯



চিত্রে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু M এবং $AP \perp BD.$

ক, দেখাও যে, $AM^2 - AD^2 = PM^2 - PD^2.$

খ, দেখাও যে, $AB^2 + AD^2 = 2(BM^2 + AM^2).$

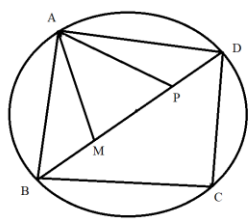
গ. প্রমাণ কর যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD.$

➪১৩নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. এখানে, ΔAPM-এ $\angle APM = 90°$ এবং অতিভুজ AM

$$\therefore AM^2 = AP^2 + PM^2 \ldots\ldots(i)$$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]



আবার, ΔAPD-এ $\angle APD = 90°$ এবং অতিভুজ AD

$$\therefore AD^2 = AP^2 + PD^2 \ldots\ldots(ii)$$

(i) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

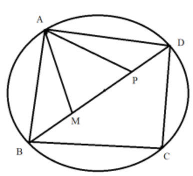
$AM^2 - AD^2 = (AP^2 + PM^2) - (AP^2 + PD^2)$

$$= AP^2 + PM^2 - AP^2 - PD^2$$

$\therefore AM^2 - AD^2 = PM^2 - PD^2.$ (দেখানো হল)

খ. এখানে, ΔABD এর M, BD এর মধ্যবিন্দু এবং AM মধ্যমা BD কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। $AP \perp BD.$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AD^2 = 2(BM^2 + AM^2)$



প্রমাণ : ΔABM এর $\angle AMB$স্থূলকোণ এবংAMএর অভিক্ষেপ PM

$\therefore$স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2BM.PM$.............$(i)$

আবার, ΔAMD এর $\angle AMD$ সূক্ষকোণ এবং AM এর লম্ব অভিক্ষেপ $PM.$

$\therefore$সূক্ষকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AD^2 = AM^2 + DM^2 - 2DM.PM$...............$(ii)$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$AB^2 + AD^2 = AM^2 + BM^2 + 2BM.PM + AM^2 + DM^2 - 2DM.PM$$

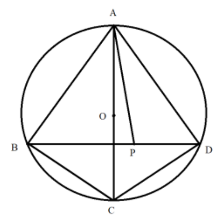
বা, $AB^2 + AD^2 = 2AM^2 + BM^2 + 2BM.PM + BM^2 - 2BM.PM$ [$\therefore BM = DM$]

$$= 2AM^2 + 2BM^2 = 2(BM^2 + AM^2)$$

$\therefore AB^2 + AD^2 = 2(BM^2 + AM^2)$. (দেখানো হলো)

গ. মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD। AC ও BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD$$



অঙ্কন : $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখার সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ আঁকি যেন AP রেখা BD কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAC = \angle DAP$

বা, $\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$

[উভয়পক্ষে $\angle CAP$ যোগ করে]

বা, $\angle BAP = \angle CAD$

এখন, ΔABP ও ΔACD এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle CAD$ এবং $\angle ABD = \angle ACD$

[একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$

$\therefore \Delta ABP$ ও ΔACD সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{BP}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore AC.BP = AB.CD$....................(i)

আবার, ΔABC ও ΔAPD এর মধ্যে,

$\angle BAC = \angle PAD$ (অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ACB = \angle ADP$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle APD$

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔAPD সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{PD}{BC}$

বা, $AC.PD = BC.AD$.................(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

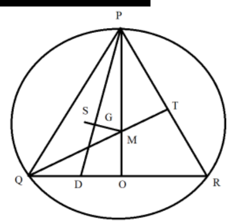
$AC.BP + AC.PD = AB.CD + BC.AD$

বা, $AC(BP + PD) = AB.CD + BC.AD$

বা, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ [$\because BP + PD = BD$]

(প্রমাণিত)

📖 ১৪. দিনাজপুর বোর্ড ২০১৯



চিত্রে, $\varDelta PQR$ এর পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দুM এবং PDএকটি মধ্যমা।

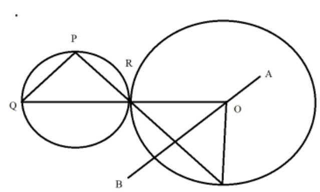
ক. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা PQR বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

খ. প্রমাণ কর যে, G, $\varDelta PQR$ এর ভরকেন্দ্র।

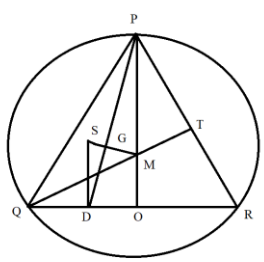
গ. $\varDelta PQR$ এর অপর মধ্যমাদ্বয় QE এবং RF হলে, প্রমাণ কর যে, $3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PD^2 + QE^2 + RF^2)$

⇨১৪নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. দেওয়া আছে, PQR বৃত্তের উপরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু R এবং N ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হলো যাPQR বৃত্তকে Rবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বহিঃস্থ Nবিন্দু দিয়ে যায়।



খ. এখানে, $\varDelta PQR$ এর পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু M এবং PD একটি মধ্যমা। S, D যোগ করি। ফলে SD রেখা QR এর উপর লম্ব ।প্রমাণ করতে হবে যে, G, $\varDelta PQR$ এর ভরকেন্দ্র।



প্রমাণ : $\varDelta PQR$ এর লম্ববিন্দু M থেকে P শীর্ষের দূরত্ব MP এবং পরিকেন্দ্র S থেকে P শীর্ষের বিপরীত বাহু QR এর দূরত্ব SD। $\therefore MP = 2SD$ [কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্বদূরত্বের দ্বিগুণ]

এখন যেহেতু PO ও SD উভয়ই QR এর ওপর লম্ব।

সেহেতু $PO \parallel SD.$

এখন, $PO \parallel SD$ এবং PD এদের ছেদক।

$\therefore \angle DPO = \angle PDS$ [একান্তর কোণ)

অর্থাৎ, $\angle MPG = \angle SDG$

এখন, $\varDelta PGM$ ও $\varDelta DGS$ এর মধ্যে

$\angle PGM = \angle DGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle MPG = \angle SDG$ [একান্তর কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle PMG = \angle DSG$

$\therefore \varDelta PGM$ ও $\varDelta DGS$ সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{PG}{GD} = \dfrac{MP}{SD}$

বা, $\frac{PG}{GD} = \frac{2SD}{SD}$ $[\because MP = 2SD]$

বা, $\frac{PG}{GD} = \frac{2}{1}$

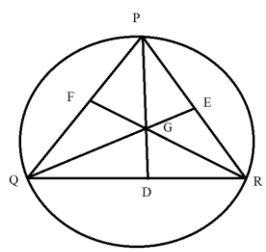
$\therefore PG : GD = 2:1$

অর্থাৎ, G বিন্দু PD মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore G, \varDelta PQR$ এর ভরকেন্দ্র। (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, $\varDelta PQR$ এর বাহুত্রয় $PQ = c, QR = a$ ও $PR = b$ এবং মধ্যমাত্রয় $PD = d, QE = e$ ও $RF = f$.
প্রমাণ করতে হবে যে,

$$3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PD^2 + QE^2 + RF^2)$$



প্রমাণ : $\varDelta PQR$ এর PD একটি মধ্যমা।

$\therefore$এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$PQ^2 + PR^2 = 2\,(PD^2 + QD^2)$$

বা, $c^2 + b^2 = 2\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\}$ $[\because QD = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}a]$

$$= 2d^2 + 2 \times \frac{1}{4}a^2$$

$$= 2d^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{4d^2 + a^2}{2}$$

বা, $2(b^2 + c^2) = 4d^2 + a^2$

বা, $4d^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ ....(i)

অনুরূপভাবে, $4e^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2$.............$(ii)$

এবং, $4f^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$..............$(iii)$

$(i), (ii)$ও(iii) নং যোগ করে পাই,

$4d^2 + 4e^2 + 4f^2 = 2(c^2 + b^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2c^2 + 2b^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

বা, $3(QR^2 + PR^2 + PQ^2) = 4(PD^2 + QE^2 + RF^2)$

বা, $3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PD^2 + QE^2 + RF^2)$

(প্রমাণিত)

১৫. সকল বোর্ড ২০১৮

ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু যথাক্রমে S, G ও O

ক. চিত্রসহ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপের সংজ্ঞা দাও।

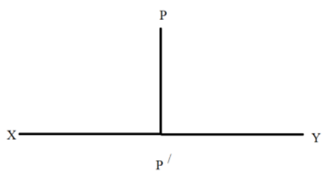
খ. প্রমাণ কর যে, S, G ও O বিন্দু তিনটি সমরেখ ।

গ. উদ্দীপকের ত্রিভুজটির মধ্যমা তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে AD, BE ও CF হলে, প্রমাণ কর যে,

$$3(AB^2+BC^2+CA^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$$

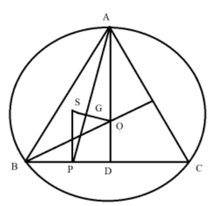
⇨১৫নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ: কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়।



মনে করি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব PP' এবং এই লম্বের পাদবিন্দু P'। সুতরাং P' বিন্দু XY রেখার ওপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

খ. $\triangle ABC$ এর লম্ব বিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং ভরকেন্দ্র G। প্রমাণ করতে হবে যে, S, G এবংO বিন্দু তিনটি সমরেখ।



প্রমাণ : G বিন্দু ভরকেন্দ্র না হলে ধরে নিই, G বিন্দু AP মধ্যমার ওপর অন্য একটি বিন্দু। $\triangle ABC$ এর লম্ব বিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP

$\therefore OA = 2SP$..................(i)

এখন, যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব,

সেহেতু $AD \parallel SP$.

এখন $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$

এখন, $\triangle AGO$ এবং $\triangle PGS$ এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ)

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ)

$\therefore$অবশিষ্ট $\angle AOG =$ অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \triangle AGO$ এবং $\triangle PGS$ সদৃশকোণী ।

$\therefore \dfrac{AG}{GP} = \dfrac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ [(i)নং হতে]

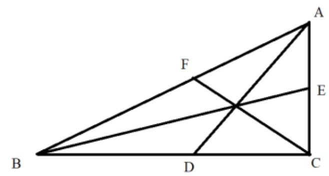
বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$

$\therefore AG : GP = 2:1$ অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore G$ বিন্দু $\varDelta ABC$ এর ভরকেন্দ্র। সুতরাং S, G এবং O বিন্দু তিনটি সমরেখ। (প্রমাণিত)

গ. এখানে, $\varDelta ABC$ এর BC, CA ও AB বাহুর ওপর মধ্যমা যথাক্রমে AD, BE ও CF। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$$



প্রমাণ: $\varDelta ABC$এর মধ্যমা AD হলে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$...........$(i)$

$\varDelta ABC$এর মধ্যমা AD হলে,

$AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$............$(ii)$

$\varDelta ABC$এর মধ্যমা AD হলে,

$BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + AF^2)$.............$(iii)$

$(i), (ii)$এবং (iii) যোগ করে পাই,

$$2(AB^2 + CA^2 + BC^2) = 2AD^2 + 2BD^2 + 2AE^2$$
$$+2BE^2 + 2CF^2 + 2AF^2$$

বা, $4(AB^2 + CA^2 + BC^2) = 4AD^2 + 4BD^2 + \quad 4AE^2 4BE^2 + 4CF^2 + 4AF^2$

বা, $4(AB^2 + CA^2 + BC^2) = 4AD^2 + 4.\frac{1}{4}.BC^2 + \quad 4.\frac{1}{4}.CA^2 + 4BE^2 + 4CF^2 + 4.\frac{1}{4}.AB^2$

বা, $4(AB^2 + CA^2 + BC^2) = 4AD^2 + BC^2 + CA^2 + \quad 4BE^2 + 4CF^2 + AB^2$

$$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$$

(প্রমাণিত)

১৬. ঢাকা বোর্ড ২০১৫

ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. O বিন্দুটির নাম কি? O, AD কে কি অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

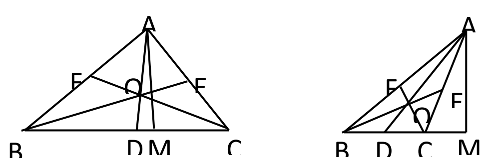
খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে দেখাও যে,
$AB^2 + AC^2 = 2\ (AD^2 + BD^2)$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$. ৪

<u>১৬ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
$\therefore$ O বিন্দু হচ্ছে ΔABC এর ভরকেন্দ্র এবং O, AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর মধ্যমা AD.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2\ (BD^2 + AD^2)$

অঙ্কন: A থেকে BC অথবা, BC-এর বর্ধিতাংশের উপর AM লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: মনে করি, $\angle$ADB স্থূলকোণ,

অতএব, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DM$..... (i)

$\angle$ADC সূক্ষ্মকোণ হলে,

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.\ DM$

বা, $AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD.\ DM$ [□ BD = CD] ..... (ii)

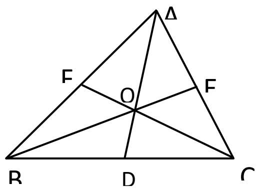
সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.\ DM + AD^2 + BD^2 - 2BD.DM$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ **(দেখানো হলো)**

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

প্রমাণ: ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ …........….(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ …..........….(ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ……..........(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2$
$+ (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্য বিন্দু বলে,
$2BD = BC$, $2CE = CA$, $2BF = AB$]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ … ... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AO$

বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে, $4BE^2 = 9BO^2$ এবং $4CF^2 = 9CO^2$

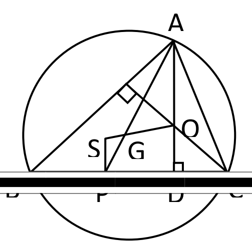
সুতরাং (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$ **(প্রমাণিত)**

১৭. রাজশাহী বোর্ড ২০১৭



ΔABC এর S পরিকেন্দ্র, O লম্ববিন্দু এবং G ভরকেন্দ্র, AP মধ্যমা। *[রা. বো. ১৭]*

ক. নববিন্দু বৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AG ঃ GP = 2 ঃ 1. ৪

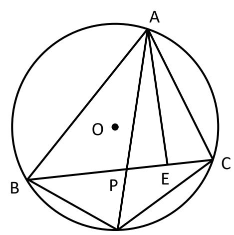
গ. AP-কে F পর্যন্ত বর্ধিত করলে যদি তা বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, AF . BC = AB. CF + AC. BF. ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **নববিন্দুবৃত্তঃ** কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলে।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য।

গ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, AP কে F পর্যন্ত বর্ধিত করায় উৎপন্ন ABFC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CF এবং AC ও BF। AF ও BC চতুর্ভুজটির দুটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, AF.BC = AB.CF + AC.BF।

অঙ্কনঃ $\angle BAF$ কে $\angle CAF$ এর চেয়ে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AC রেখাংশের সাথে $\angle BAF$ এর সমান $\angle CAE$ আঁকি যেন AE রেখাংশ BC কর্ণকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ অঙ্কন অনুসারে,

$\angle BAF = \angle CAE$

বা, $\angle BAF + \angle EAF = \angle CAE + \angle EAF$

$\therefore \angle BAE = \angle CAF$

এখন, ΔABE ও ΔACF এর মধ্যে

$\angle BAE = \angle CAF$

$\angle ABE = \angle AFC$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle AEB$ = অবশিষ্ট $\angle ACF$

$\therefore \Delta ABE$ ও ΔACF সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AB}{AF}$

অর্থাৎ, AF.BE = AB.CF ... ... (i)

আবার, ΔABF ও ΔAEC এর মধ্যে,

$\angle BAF = \angle CAE$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle AFB = \angle ACE$ [একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABF$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$

$\therefore \Delta ABF$ ও ΔAEC সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{BF}{CE}$

অর্থাৎ, AF.CE = AC.BF ... ... (ii)

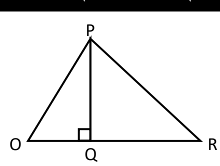
(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

AF.BE + AF.CE = AB.CF + AC.BF

বা, AF(BE + CE) = AB.CF + AC.BF

$\therefore$ AF.BC = AB.CF + AC.BF [□ BE + CE = BC] **(প্রমাণিত)**

১৮. রাজশাহী বোর্ড ২০১৬



ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$

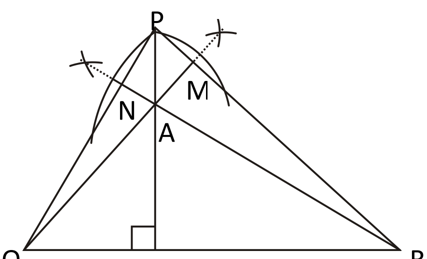
ক. ΔPOR এর লম্ববিন্দু নির্ণয় কর। [অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক] ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = OQ.QR$ ৪

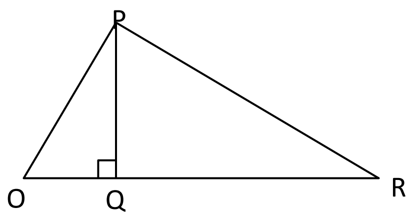
১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে $OM \perp PR$ এবং $RN \perp OP$ অংকন করা হলো। যেখানে PQ,OM ও RN লম্বত্রয় A বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং A বিন্দুই ΔPOR এর লম্ব বিন্দু।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$. প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ.$

প্রমাণ: ΔOPQ এ $\angle OQP = 90°$

$\therefore PO^2 = PQ^2 + OQ^2$ .....(i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

আবার, ΔPQR এ $\angle PQR = 90°$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$= PQ^2 + (OR - OQ)^2$ [$\therefore QR = OR - OQ$]

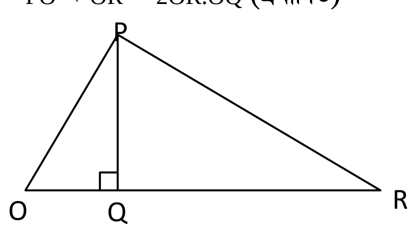
$= PQ^2 + OR^2 + OQ^2 - 2OR.OQ$

$= (PQ^2 + OQ^2) + OR^2 - 2OR.OQ$

$= PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$ [(i) নং থেকে]

$\therefore PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPOR এর $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = OQ.OR$

প্রমাণ: ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$

$\therefore \angle OPQ + \angle QPR = 90°$ .....(i)

আবার, ΔOPQ এবং $\angle OQP = 90°$ [$\therefore PQ \perp OR$]

$\therefore \angle POQ + \angle OPQ = 90°$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\angle OPQ + \angle QPR = \angle POQ + \angle OPQ$

$\therefore \angle QPR = \angle POQ$

এখন, ΔOPQ ও ΔPQR এর মধ্যে

$\angle OQP = \angle PQR = 90°$

$\angle POQ = \angle QPR$

এবং অবশিষ্ট $\angle OPQ$ = অবশিষ্ট $\angle PRQ$

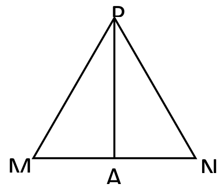
$\therefore$ ΔOQP ও ΔPQR সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{OQ}{PQ} = \frac{PQ}{QR}$ বা, $OQ.QR = PQ^2$

$\therefore$ $PQ^2 = OQ.QR$ **(প্রমাণিত)**

১৯. রাজশাহী বোর্ড ২০১৫



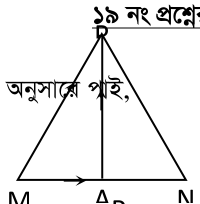
PMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে PM = PN এবং PA $\perp$ MN.

ক. ΔAPM এর ক্ষেত্রে $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{MA}$ এবং $\overrightarrow{MP}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. B, MN রেখার ওপর যে কোনো বিন্দু হলে, দেখাও যে,
$PM^2 - PB^2 = MB.BN.$ ৪

গ. PMN ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে,
$PM^2 = 2R.PA.$ ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

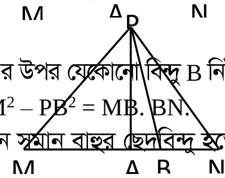


ক এখন, ΔAPM-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA} \textbf{ (Ans.)}$$

খ



বিশেষ নির্বচন: ΔPMN-এ PM = PN। MN এর উপর যেকোনো বিন্দু B নিই।
P, B যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 - PB^2 = MB.BN.$

প্রমাণ: আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর ছেদবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ΔPMN-এ PM = PN এবং PA $\perp$ MN

$\therefore$ MA = AN

APM সমকোণী ত্রিভুজে,

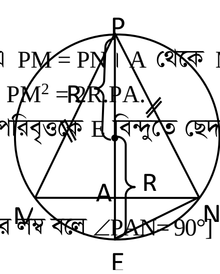
$PM^2 = PA^2 + MA^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

আবার, ΔPBA-এ সমকোণী ত্রিভুজে,

$PB^2 = PA^2 + AB^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

$\therefore$ $PM^2 - PB^2 = PA^2 + MA^2 - PA^2 - AB^2 = MA^2 - AB^2$
$= (MA + AB).(MA - AB)$
$= MB.(AN - AB)$ [□ MA = AN]
$= MB.BN$

$\therefore$ $PM^2 - PB^2 = MB.BN$ **(দেখানো হলো)**



গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, সমদ্বিবাহু ΔPMN-এ PM = PN। A থেকে MN-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব PA এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R। প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 = 2R.PA.$

অঙ্কন: PA-কে এমনভাবে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। N, E যোগ করি।

প্রমাণ: ΔPAN ও ΔPNE-এ,

$\angle PAN = \angle PNE$

[□ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle PNE = 90°$ এবং PA, MN এর ওপর লম্ব বলে $\angle PAN = 90°$]

$\angle EPN$ সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle PNA$ = অবশিষ্ট $\angle PEN$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \frac{PA}{PN} = \frac{PN}{PE}$ [□ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $PN^2 = PE.PA$

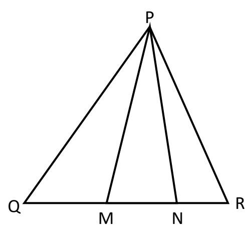
$\therefore$ $PM^2 = PE.\ PA$ [□ $PM = PN$] ………… (i)
এখন, $MA = NA$ [‘খ’ থেকে]
অর্থাৎ $PA \perp MN$ এবং PA, MN এর সমদ্বিখণ্ডক।
$\therefore$ PA, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।
[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন কোন জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
$\therefore$ PE, ΔPMN -এর পরিব্যাস।
$PE = 2R$ [□ R, ΔPMN-এর পরিব্যাসার্ধ]
তাহলে (i) হতে পাই,
$PM^2 = 2R.PA$ **(প্রমাণিত)**

📖 ২০. দিনাজপুর বোর্ড ২০১৭

ΔPQR এর QR বাহু M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।
ক. তথ্যানুযায়ী চিহ্নিত চিত্রটি আঁক। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$ ৪
গ. যদি $PQ = PR$ এবং M, QR এর উপর যে কোনো বিন্দু হলে দেখাও যে, $PQ^2 - PM^2 = QM.MR$ ৪

<u>**২০ নং প্রশ্নের সমাধান**</u>

ক

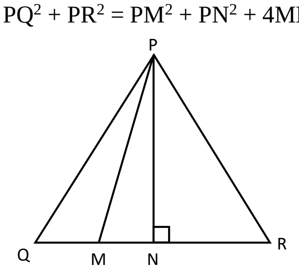


চিত্রে, ΔPQR এর QR বাহুকে M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত করা হয়েছে।

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔPQR এর QR বাহু M ও N বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত। অর্থাৎ, $QM = MN = NR$। P, M ও P, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$.

প্রমাণ: ΔPQN এর মধ্যমা PM
$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,
$PQ^2 + PN^2 = 2(PM^2 + MN^2)$ … … … (i)
আবার, ΔPMR এ মধ্যমা PN
$\therefore PM^2 + PR^2 = 2(PN^2 + MN^2)$ … … … (ii)
এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$PQ^2 + PN^2 + PM^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2MN^2 + 2PN^2 + 2MN^2$
বা, $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2PN^2 + 4MN^2 - PM^2 - PN^2$
$\therefore PQ^2 + PR^2 = PM^2 + PN^2 + 4MN^2$. **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR এ $PQ = PR$ এবং M, QR এর উপর যে কোন বিন্দু। P, M যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 - PM^2 = QM.MR$.
অঙ্কনঃ QR এর উপর PN লম্ব আঁকি।
প্রমাণ: সমকোণী ΔPQN এ PQ অতিভুজ।
$\therefore PQ^2 = QN^2 + PN^2$ … … … (i)
আবার, সমকোণী ΔPMN এ PM অতিভুজ।
$\therefore PM^2 = MN^2 + PN^2$ … … … (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$PQ^2 - PM^2 = QN^2 + PN^2 - MN^2 - PN^2$

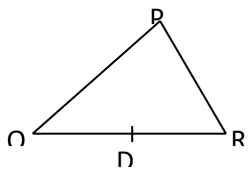
$= QN^2 - MN^2 = (QN + MN)(QN - MN)$

$= (NR + MN).QM$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে ভূমির উপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ, $QN = NR$]

$= MR.QM$

$\therefore PQ^2 - PM^2 = QM.MR.$ **(প্রমাণিত)**

📖 ২১. কুমিল্লা বোর্ড ২০১৫



ΔPQR এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু।

ক. লম্ব বিন্দু ও ভরকেন্দ্র কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$. ৪

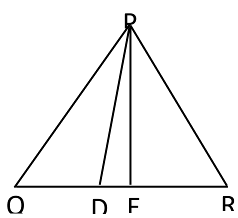
গ. $\angle Q = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$. ৪

<u>২১ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক **লম্ববিন্দু:** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে লম্ববিন্দু বলা হয়।

ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

খ



বিশেষ নির্বচন: ΔPQR-এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু। P, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

অঙ্কন: QR বাহুর উপর PE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: ΔPQD এর $\angle PDQ$ স্থূলকোণ এবং QD রেখার বর্ধিতাংশের উপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE। স্থূলকোণের ক্ষেত্রে, পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE$ .... (i)

এখানে, ΔPRD এর $\angle PDR$ সূক্ষ্মকোণ এবং DR রেখার ওপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে,

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

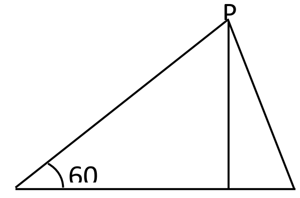
$PQ^2 + PR^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE + PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$

$= 2PD^2 + QD^2 + RD^2 + 2QD.DE - 2RD.DE$

$= 2PD^2 + QD^2 + QD^2 + 2QD.DE - 2QD.DE$ [∵ QD = RD]

$= 2PD^2 + 2QD^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$.
অঙ্কন: $PE \perp QR$ টানি।
প্রমাণ: আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

$\therefore$ ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ এবং তাহলে QE, QR এর ওপর PQ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore$ $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.QE$ ……. (i)

সমকোণী ΔPQE-এ লম্ব PE, ভূমি QE এবং অতিভুজ PQ.

$\therefore \cos \angle PQE = \frac{QE}{PQ}$ $\left[\text{□} \cos\theta = \frac{\text{f„wg}}{\text{AwZfzR}}\right]$

বা, $\cos 60° = \frac{QE}{PQ}$ [□ $\angle PQE = 60°$]

বা, $\frac{1}{2} = \frac{QE}{PQ}$

$\therefore QE = \frac{1}{2}.PQ$

এখন, (i) নং-এ QE-এর মান বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ.\frac{1}{2}QR.$

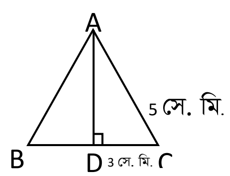
$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ **(প্রমাণিত)**

🕮 ২২. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭

ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর লম্বত্রয় AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
ক. AC = 5 সে. মি., CD = 3 সে. মি. হলে AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF. ৪
গ. দেখাও যে, BC.CD = AC.CE. ৪

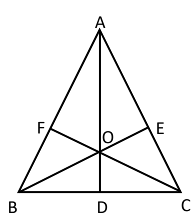
<u>**২২ নং প্রশ্নের সমাধান**</u>

ক



দেওয়া আছে, AC = 5 সে. মি. এবং CD = 3 সে. মি.
সমকোণী ত্রিভুজ ADC এ
$AC^2 = AD^2 + CD^2$
বা, $AD^2 = AC^2 - CD^2 = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$
$\therefore$ AD = 4 সে. মি. **(Ans.)**

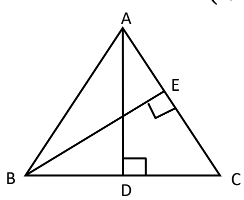
খ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের ওপর লম্ব AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,
AO. OD = BO.OE = CO.OF.
প্রমাণ: ΔBOF ও ΔCOE-এ

$\angle OFB = \angle OEC = 90°$ [$\because CF \perp AB, BE \perp AC$]
এবং $\angle BOF = \angle COE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]
ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।
$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}$
$\therefore$ BO. OE = CO. OF. .... (i)
আবার, Δ BOD ও Δ AOE-এ
$\angle ODB = \angle OEA = 90°$ [$\because AD \perp BC, BE \perp AC$]
এবং $\angle BOD = \angle AOE$. [বিপ্রতীপ কোণ]
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।
$\therefore \frac{BO}{AO} = \frac{OD}{OE}$
$\therefore$ AO.OD = BO. OE ... ... (ii)
এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,
$\therefore$ AO.OD = BO.OE = CO. OF **(প্রমাণিত)**

গ



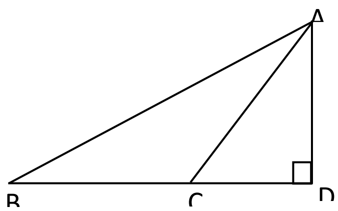
বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর AD, BC এর ওপর এবং BE, AC-এর ওপর লম্ব।
প্রমাণ করতে হবে যে, BC. CD = AC. CE.
প্রমাণ: আমরা জানি, যে কোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যে কোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।
এখন, $AD \perp BC$ হওয়ায়, ΔABC- এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ।
[$\because \angle ACB <$ সমকোণ $\angle ADC$]
এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ বলে,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ …… (i)
আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।
$\therefore$ উপরিউক্ত উপপাদ্য অনুসারে,
$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$ ……. (ii)
(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,
$AC^2 + BC^2 - 2BC.CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$
বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$
[উভয়পক্ষ হতে $AC^2 + BC^2$ বিয়োগ করে]
বা, BC.CD = AC.CE. [উভয় পক্ষকে (–2) দ্বারা ভাগ করে]
$\therefore$ BC.CD = AC.CE **(প্রমাণিত)**

২৩. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৫

ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।
ক. AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$। ৪
গ. ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

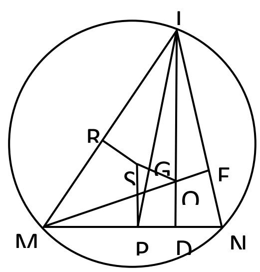


ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ
BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করে $BD \perp AD$ আঁকি।
সুতরাং BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৩ দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
[**বি. দ্র.** O এর পরিবর্তে P নিতে হবে।]

২৪. সিলেট বোর্ড ২০১৭



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে ΔLMN এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু, G ভরকেন্দ্র, LP মধ্যমা, $MN = a$, $LN = b$, $LM = c$

ক. $OL = 9$ সে.মি. হলে SP এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. $\angle N$ সূক্ষ্মকোণ হলে, প্রমাণ কর যে, $a.ND = b.NE$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $OL = 9$ সে.মি.

আমরা জানি, কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ।

$\therefore \quad OL = 2SP$

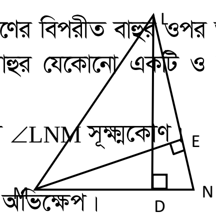
বা, $9 = 2SP$

বা, $SP = \frac{9}{2}$

$\therefore \quad SP = 4.5$ সে.মি. **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উপপাদ্য-৩.১০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭২
[বি. দ্র. A, B ও C এর পরিবর্তে যথাক্রমে L, M ও N নিতে হবে।]

গ আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অংকিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অংকিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।



এখন $LD \perp MN$ হওয়ায় ΔLMN এর $\angle LNM$ সূক্ষ্মকোণ

[$\because \angle LNM <$ সমকোণ $\angle LDN$]

এবং ND, MN বাহুতে LN বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore LM^2 = LN^2 + MN^2 - 2MN.\ ND$ .... (i)

আবার, NE, LN বাহুতে MN বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore LM^2 = MN^2 + LN^2 - 2LN.NE$ .... (ii)

(i) এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$LN^2 + MN^2 - 2MN.\ ND = MN^2 + LN^2 - 2LN\ .\ NE$

বা, $-2MN.\ ND = -2LN.\ NE$

[উভয় পক্ষ হতে $LN^2 + MN^2$ বিয়োগ করে]

বা, $MN.\ ND = LN.NE$ [উভয় পক্ষকে (-2) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ $a.\ ND = b.\ NE$ **(দেখানো হলো)**

২৫. যশোর বোর্ড ২০১৭

ΔABC এর AD, BE এবং CF মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে।

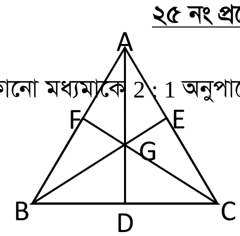
ক. GD = 2 সে.মি. হলে AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$. ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



আমরা জানি, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

এখানে, G হলো ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

$\therefore$ $AG : GD = 2 : 1$

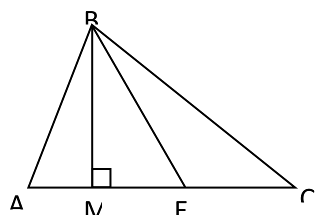
বা, $\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ বা, $AG = 2GD$

বা, $AG = 2 \times 2$ [$\because$ GD = 2 সে.মি.]

$\therefore$ $AG = 4$

$\therefore$ $AD = AG + GD = (4 + 2)$ সে.মি. = 6 সে. মি. **(Ans.)**

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর BE বাহু AC বাহুর উপর মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$

অঙ্কন: $BM \perp AC$ আঁকি।

প্রমাণ: ΔABE এ $\angle AEB$ সূক্ষ্মকোণ এবং AE বাহুর উপর BE বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ ME

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

$AB^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE.ME$ ... ... (i)

আবার, ΔBEC এ $\angle BEC$ স্থূলকোণ এবং CE বাহুর বর্ধিতাংশের উপর BE এর লম্ব অভিক্ষেপ ME.

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

$BC^2 = CE^2 + BE^2 + 2CE.ME$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণের যোগ করে পাই,

$AB^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 - 2AE.ME + CE^2 + BE^2 + 2CE.ME$

$= 2BE^2 + AE^2 + AE^2 - 2AE.ME + 2AE.ME$

$= 2BE^2 + 2AE^2$

$\therefore$ $AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত 'ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়' দ্রষ্টব্য।

২৬. যশোর বোর্ড ২০১৬

ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R।

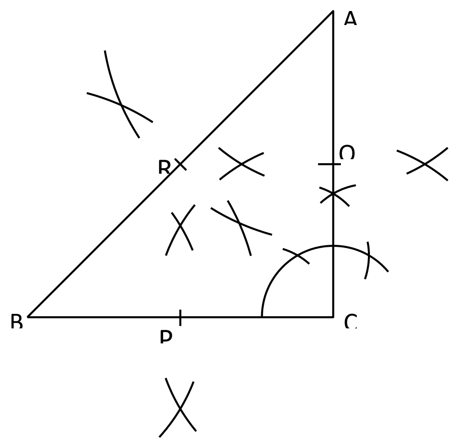
ক. উদ্দীপকের আলোকে নিখুঁত চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$. ৪

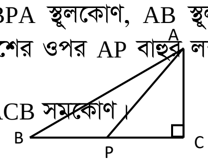
গ. প্রমাণ কর যে, $3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$. ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ **বিশেষ নির্বচনঃ** মনে করি, PAB ত্রিভুজের $\angle BPA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় PB ও PA। BP বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AP বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ PC। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2.PB.PC$



প্রমাণঃ ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ACB$ সমকোণ।

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + (PB + PC)^2$ [∵ BC = PB + PC]

$= AC^2 + PB^2 + PC^2 + 2PB.PC$ .... (i)

আবার, ΔAPC সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ACP$ সমকোণ।

$\therefore AC^2 + PC^2 = PA^2$ .... (ii)

(i) নং থেকে পাই,

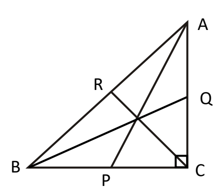
$AB^2 = AC^2 + PC^2 + PB^2 + 2PB.PC$

$= PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$ [(ii) নং হতে]

$\therefore AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচনঃ** ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R। A, P; B, Q; C, R যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$

প্রমাণঃ P, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।



সুতরাং $CP = \frac{1}{2} BC$

$\therefore CP^2 = \frac{1}{4} BC^2$

অনুরূপভাবে, $CQ^2 = \frac{1}{4} AC^2$

আবার, যেহেতু $\angle C = 90°$ এবং R, AB বাহুর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং $CR = \frac{1}{2} AB$

$\therefore CR^2 = \frac{1}{4} AB^2$.

ΔAPC হতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AC^2 + CP^2$

$\therefore AP^2 = AC^2 + \frac{1}{4} BC^2$ .... (i)

আবার, ΔBQC হতে,

$BQ^2 = BC^2 + CQ^2$

$\therefore BQ^2 = BC^2 + \frac{1}{4}AC^2$ .... (ii)

আবার, ΔABC হতে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ .... (iii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$AP^2 + BQ^2 = AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + BC^2 + \frac{1}{4}AC^2$

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + CR^2$

[উভয়পক্ষে CR^2 যোগ করে]

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + \frac{1}{4}AB^2$

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + \frac{1}{4}(AC^2 + BC^2)$

[(iii) নং থেকে]

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{5}{4}AC^2 + \frac{5}{4}BC^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BC^2$

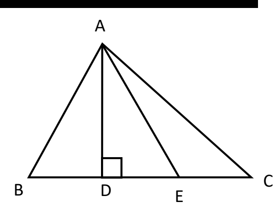
বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{6}{4}AC^2 + \frac{6}{4}BC^2$

বা, $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \frac{3}{2}(AC^2 + BC^2)$

বা, $2(AP^2 + BQ^2 + CR^2) = 3(AC^2 + BC^2)$

$\therefore 3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$ **(প্রমাণিত)**

২৭. বরিশাল বোর্ড ২০১৭



চিত্রে BD = ED = CE এবং AD ⊥ BC.

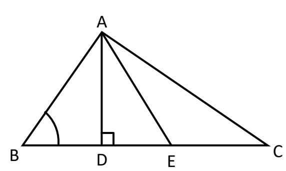
ক. DE = 2 সে.মি. এবং AD = 3 সে.মি. হলে, AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$. ৪

<u>২৭ নং প্রশ্নের সমাধান</u>

ক দেওয়া আছে, BD = ED = CE



$\therefore$ ED = CE

DE = 2 সে.মি. এবং

AD = 3 সে.মি. হলে,

সমকোণী ΔADC থেকে পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

বা, $AC^2 = AD^2 + (DE + CE)^2 = AD^2 + (DE + ED)^2$

$= AD^2 + (DE + DE)^2 = AD^2 + 4DE^2 = 3^2 + 4.2^2$

$= 9 + 4.4 = 9 + 16 = 25$

$\therefore$ AC = 5 সে.মি. **(Ans.)**

খ **বিশেষ নির্বচন:** দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC বাহু D ও E বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ BD = DE = EC।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$.

প্রমাণ: ΔABE-এর মধ্যমা AD [$\because$ BD = DE]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AE^2 = 2(AD^2 + DE^2)$ ……. (i)

আবার, ΔADC এর মধ্যমা AE [$\because$ DE = EC]

$\therefore AD^2 + AC^2 = 2(AE^2 + DE^2)$ ……. (ii)

এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AE^2 + AD^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2DE^2 + 2AE^2 + 2DE^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2AE^2 + 4DE^2 - AD^2 - AE^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$

$\therefore$ $AB^2 + AC^2 = AD^2 + AE^2 + 4DE^2$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.BC.BD$

প্রমাণঃ

ΔADC এর $\angle ADC$ সমকোণ

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 \ldots\ldots\ldots (i)$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

চিত্রে, $CD = BC - BD$

$\therefore CD^2 = (BC - BD)^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC.BD \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাওয়া যায়,

$AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC.BD$

$\therefore AC^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 - 2BC.BD \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle D$ এক সমকোণ

$AB^2 = AD^2 + BD^2 \ldots\ldots\ldots (iv)$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ **(প্রমাণিত)**

২৮. বরিশাল বোর্ড ২০১৫

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. এবং $AD \perp BC$.

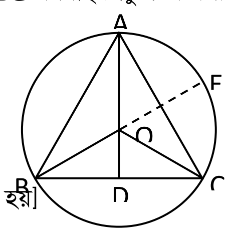
ক. AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য ব্যবহার করে ABC ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এবং বৃত্তক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে ABC সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত। পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. এবং $AD \perp BC$।



$\therefore AD = OA + OD$

$= OA + \frac{OA}{2}$

[O বিন্দুতে AD, 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়]

$= \left(4 + \frac{4}{2}\right)$ সে.মি. $= (4 + 2)$ সে.মি. $= 6$ সে.মি.

$\therefore$ নির্ণেয় AD এর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. **(Ans.)**

খ ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $AB.AC = BE.AD$

বা, $AB^2 = 8 \times 6$ বর্গ সে.মি. [ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AB = AC$

এবং $BE = 2.OB = 2.4$ সে.মি. = 8 সে.মি.]

বা, $AB^2 = 48$ বর্গ সে.মি.

বা, $AB = \sqrt{48}$ সে.মি.

$\therefore AB = 4\sqrt{3}$ সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সে.মি. **(Ans.)**

গ 'খ' হতে,

সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4\sqrt{3}$ সে.মি.।

আমরা জানি,

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2$ বর্গ সে.মি. $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 48$ বর্গ সে.মি. $= 12\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

$= 20.785$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক। (যেখানে r বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$= 3.1416 \times 4^2$ বর্গ সে.মি.   [$\because r = 4$]

$= 3.1416 \times 16$ বর্গ সে.মি.

$= 50.2656$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC ও বৃত্তক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত

$= \frac{20.785}{50.2656} = \frac{1}{2{\cdot}42} = 1 : 2.42$ **(Ans.)**

গুরবত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▶ ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।

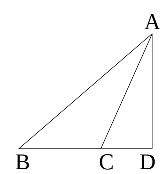
ক. AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$। ৪

গ. ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ

BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করে $BD \perp AD$ আঁকি।

সুতরাং, BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ. **প্রমাণ** : BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because BD = BC + CD$]

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$

$\therefore AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ....(i)

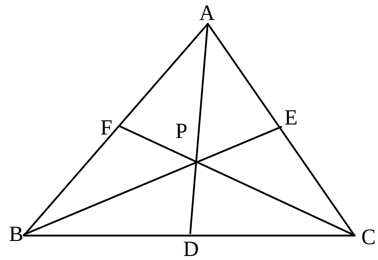
আবার, ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) হতে $AD^2 + CD^2$ এর মান (i) এ

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (প্রমাণিত)

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$

প্রমাণ : ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ....(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ....(ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে, 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore$ $3(AB^2 + BC^2 + CA2^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ ....(iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \dfrac{AP}{PD} = \dfrac{2}{1}$

বা, $\dfrac{PD}{AP} = \dfrac{1}{2}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\dfrac{PD + AP}{AP} = \dfrac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\dfrac{AD}{AP} = \dfrac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AP$

$\therefore$ $4AD^2 = 9AP^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে, $4BE^2 = 9BP^2$ এবং $4CF^2 = 9\ CP^2$

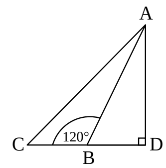
সুতরাং সমীকরণ (iv) থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9\ AP^2 + 9BP^2 + 9CP^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(PA^2 + PB^2 + PC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৮



উপরের চিত্রে $\angle ABC = 120°$ এবং $AD \perp BC$.

ক. BD ও AB এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

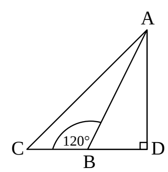
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর : ৪

$AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$

গ. BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্রে $\angle ABC = 120°$



CD সরলরেখার ওপর $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ দুইটি সন্নিহিত কোণ

$\therefore \angle ABC + \angle ABD = 180°$

বা, $120° + \angle ABD = 180°$

$\therefore \angle ABD = 60°$

এখন সমকোণী ΔABD এর ভূমি = BD এবং অতিভুজ = AB

$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভূজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \frac{BD}{AB}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \frac{AB}{2}$

খ. দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle ABC = 120°$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$

প্রমাণ : আমরা জানি, স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

এখন, ΔABC এ $\angle ABC = 120°$ অর্থাৎ স্থূলকোণ

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ....(i)

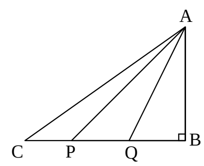
'ক' হতে পাই, $BD = \frac{1}{2}AB$

সমীকরণ (i) এ BD এর মান বসিয়ে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot \frac{1}{2} AB$

বা, $AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$ **(প্রমাণিত)**

গ.



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ, CP = PQ = QB। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔACQ–এর মধ্যমা AP [$\because CP = PQ$]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ ....(i)

আবার, ΔAPB এর মধ্যমা AQ [$\because PQ = QB$]

$\therefore AP^2 + AB^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ ....(ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AC^2 + AQ^2 + AP^2 + AB^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩ ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত।

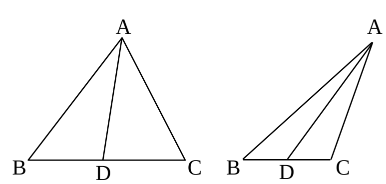
ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি লেখ এবং চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. উদ্দীপকে উল্লেখিত তথ্যের ভিত্তিতে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$। ৪

গ. উদ্দীপকের উল্লেখিত তথ্যের ভিত্তিতে অঙ্কিত ত্রিভুজটি যদি সমদ্বিবাহু হয় তবে দেখাও যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

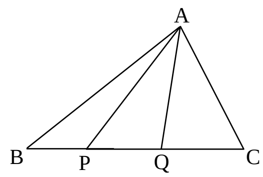
ক. **এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য :** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।



ΔABC–এর যেকোনো দুই বাহু AB ও AC অপর বাহু BC এর মধ্যবিন্দু D এবং মধ্যমা AD হলে,

$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$.

খ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। অর্থাৎ $BP = PQ = QC$। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔABQ–এর মধ্যমা AP $\quad [\because BP = PQ]$

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ .... (i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ $\quad [\because PQ = QC]$

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ ....(ii)

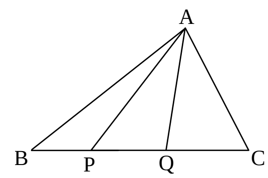
এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এ $AB = AC$। ভূমি BC–এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

অঙ্কন : $AD \perp BC$ টানি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ ....(i)

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ ....(i)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD).BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD).BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $BD = CD$]

বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP.PC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৪ ▸ এ্যাপোলোনিয়াস নামক একজন গণিতবিদ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ওপর ভিত্তি করে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ক একটি উপপাদ্য বর্ণনা করেন।

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। ২

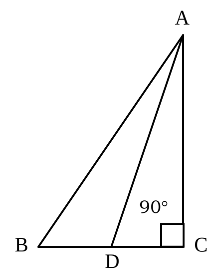
খ. ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং $BD = CD$ হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

গ. 'খ' নং প্রশ্নের চিত্রের BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো, যেন $CE = CD$ হয়। প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$ ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সৃজনশীল প্রশ্ন ৩(ক) সমাধান দেখ।

খ.



যেহেতু, ΔABC এর $\angle C = 90°$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$

$= AC^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.CD$

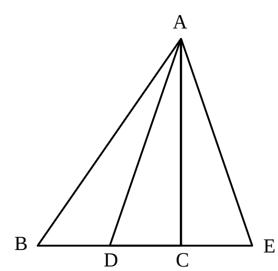
$= AC^2 + CD^2 + BD^2 + 2BD.BD [\because BD = CD]$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2 [\because AC^2 + CD^2 = AD^2]$

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC-এর $BD = CD$ দেওয়া আছে। প্রশ্নানুসারে, $CE = CD$

সুতরাং $BD = CD = CE$

এখন, A, E যোগ করি।

ΔABC-এ $BD = CD$

অর্থাৎ AD মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী–

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$ ....(i)

আবার, ΔADE-এ $CD = CE$

অর্থাৎ AC মধ্যমা

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে–

$AD^2 + AE^2 = 2(AC^2 + CD^2)$

বা, $AD^2 + AE^2 = 2AC^2 + 2CD^2$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

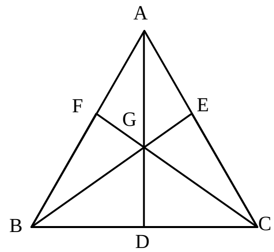
$AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 = 2AD^2 + 2CD^2 + 2AC^2 + 2CD^2$

বা, $AB^2 + AE^2 = 2AD^2 + 2CD^2 + 2AC^2 + 2CD^2 - AC^2 - AD^2$

বা, $AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$

$\therefore AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫ ▸



ABC সমবাহু ত্রিভুজের $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$

ক. সমবাহু ত্রিভুজ কাকে বলে? সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AD, BE ও CF ΔABC এর মধ্যমা। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **সমবাহু ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ 60°।

খ. যেহেতু $AD \perp BC$

সুতরাং ΔABD ও ΔACD সমকোণী

এখন, সমকোণী ΔABD ও ΔAFD-এ

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC[উভয় সমবাহু ত্রিভুজের বাহু]

এবং AD সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$

অতএব AD, ΔABC এর একটি মধ্যমা।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

BE ও CF, ΔABC এর মধ্যমা

$\therefore$ AD, BE ও CF ΔABC এর মধ্যমা। **(প্রমাণিত)**

গ. **প্রমাণ :** AD, BE ও CF, ΔABC এর মধ্যমা

যেহেতু ΔABC এর AD মধ্যমা।

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ ....(i)

অনুরূপভাবে, BE মধ্যমা

$\therefore BC^2 + AB^2 = 2CE^2 + 2BE^2$ ....(ii)

এবং CF মধ্যমা

$\therefore$ $AC^2 + BC^2 = 2AF^2 + 2CF^2$ ....(iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2BD^2 + 2AD^2 + 2CE^2 + 2BE^2 + 2BF^2 + 2CF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$ [D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু

বলে 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore$ $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ .... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{GD + AG}{AG} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AG$

$\therefore 4AD = 9AG^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

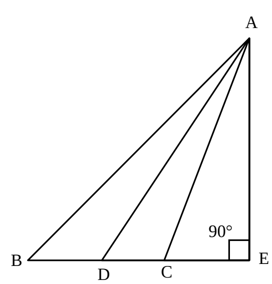
অনুরূপভাবে $4BE^2 = 9BG^2$ এবং $4CF^2 = 9CG^2$

এখন সমীকরণ (iv) থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AG^2 + 9BG^2 + 9CG^2$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3GA^2 + GB^2 + GC^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৬ ▸ জুবায়ের তার স্যারের কাছ থেকে লম্ব অভিৰেপ সম্বন্ধে জানতে চাইলে তার স্যার এভাবে বললেন যে, কোনো একটি রেখার উপর অন্য একটি রেখা অবস্থান করলে প্রথমোক্ত রেখাটির যে ছায়া দ্বিতীয় রেখার উপর পড়ে, লম্বভাবে সে ছায়া দ্বারা প্রথমোক্ত রেখার অবস্থানকৃত অংশই প্রথম রেখার উপর দ্বিতীয় রেখার লম্ব অভিৰেপ।



? ক. লম্ব অভিক্ষেপ কী? চিত্রে BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপের নাম কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CE$. ৪

গ. D, BC এর মধ্যবিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **লম্ব অভিৰেপ :** কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সে বিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু বোঝায়।

চিত্রানুযায়ী, BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BE.

খ. **প্রমাণ :** ΔACE এর $\angle E = 90°$

সুতরাং পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ ....(i)

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$= AE^2 + (BC + CE)^2$

$= AE^2 + BC^2 + CE^2 + 2BC.CE$

$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CE$ [(i) নং থেকে মান বসিয়ে]

(প্রমাণিত)

গ. **প্রমাণ :** D, BC এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং $BD = CD$

ΔABEএর $\angle E = 90°$ সুতরাং $\angle ABE < 90°$

$\therefore$ $\angle ADB$ হলো স্থূলকোণ।

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE$ ....(i)

আবার, ΔADE-এ $\angle E = 90°$

সুতরাং $\angle ADE$ হলো সূক্ষ্মকোণ

এখন সূক্ষ্মকোণী ΔACD-এ

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.CD.DE$ ....(ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE + AD^2 + CD^2 - 2.CD.DE$

$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DE - 2BD.DE$ [$\because$ BD = CD]

$= 2AD^2 + 2BD^2$

$= 2(AD^2 + BD^2)$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৭ **ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c এবং উহাদের উপর অঙ্কিত মধ্যমাগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f.**

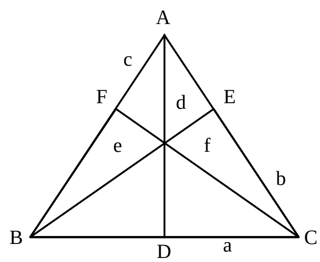
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী চিহ্নিত চিত্র আঁক এবং সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC এর $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$

এবং BC, CA এবং AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা তিনটি হলো $AD = d$, $BE = e$ এবং $CF = f$.

খ. **প্রমাণ :** ক নং প্রশ্নের চিত্র হতে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)\right\}$

বা, $b^2 + c^2 = 2\left(d^2 + \frac{1}{4}a^2\right)$

বা, $b^2 + c^2 = 2d + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2d^2$

বা, $2d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপভাবে, $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$

এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

$\therefore d^2 + e^2 + f^2 = \frac{1}{4}\{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2$

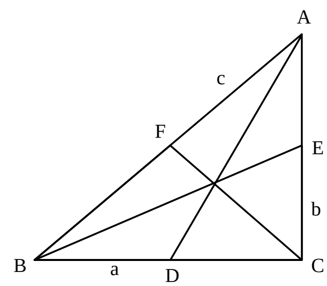
$+ 2(a^2 + b^2) - c^2\}$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$\therefore 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ. ধরি, ত্রিভুজটির $\angle C$ সমকোণ। এমতাবস্থায় চিত্রটি হয়–



$\angle C = 90°$ হলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $a^2 + b^2 = c^2$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + c^2$ [উভয়পক্ষে c^2 যোগ করে]

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$

কিন্তু (খ) নং থেকে পাই,

$4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

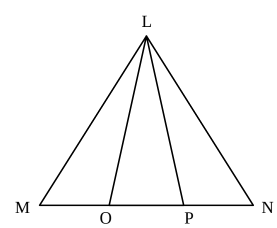
বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3.2c^2$

বা, $2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর জন্য, 2 (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি) = $3c^2$, যেখানে $\angle C = 90°$

অর্থাৎ সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৮



ΔLMN এর LM = LN এবং MO = OP = PN.

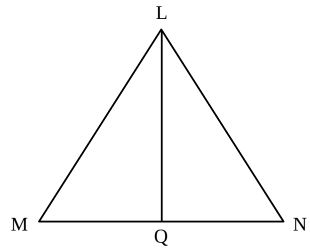
ক. ΔLMN এর MN বাহুর উপর মধ্যমা LQ হলে, দেখাও যে, $MN^2 = 4(LM^2 - LQ^2)$ ২

খ. প্রদত্ত চিত্রের MN বাহুর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $LN^2 - LP^2 = MP.NP$ ৪

গ. উদ্দীপকে প্রদত্ত তথ্য হতে প্রমাণ কর যে, $2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$ ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. যেহেতু ΔLMN একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ সুতরাং LQ মধ্যমা MN এর উপর লম্ব হবে।



ΔLQM এ–

$\therefore LQ^2 + QM^2 = LM^2$

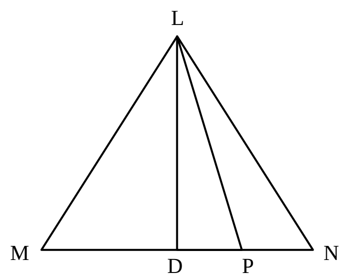
বা, $LQ^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = LM^2$ $\left[\because MQ = \frac{MN}{2}\right]$

বা, $\frac{MN^2}{4} = LM^2 - LQ^2$

বা, $MN^2 = 4LM^2 - 4LQ^2$

$= 4(LM^2 - LQ^2)$ **(দেখানো হলো)**

খ.



দেওয়া আছে, LMN সমবাহু ত্রিভুজের MN বাহুর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $LN^2 - LP^2 = MP.NP$

অঙ্কন : L থেকে ভূমি MN এর উপর LD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : LPD সমকোণী ত্রিভুজে,

$LP^2 = LD^2 + DP^2$.......(i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

আবার, LMD সমকোণী ত্রিভুজে,

$LM^2 = LD^2 + MD^2$ ....(ii)

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$LM^2 - LP^2 = LD^2 + MD^2 - LD^2 - DP^2$

$= MD^2 - DP^2$

$= (MD + DP)(MD - DP)$

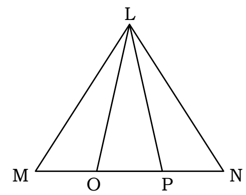
$= MP(DN - DP)$

[$\because MD + DP = MP$ এবং $DN = MD$]

$= MP.NP$

$\therefore LM^2 - LP^2 = MP.NP$ **(প্রমাণিত)**

গ. **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, LMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের LM = LN এবং ভূমি MN, P ও O বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$



প্রমাণ : ΔLMP-এ MO = OP

তাহলে, LO, ΔLMP এর মধ্যমা যা MP-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore LM^2 + LP^2 = 2LO^2 + 2OP^2$ ....(i)

আবার, LP, ΔLON এর মধ্যমা যা ON-কে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore LN^2 + LO^2 = 2LP^2 + 2OP^2$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$LM^2 + LN^2 + LP^2 + LO^2 = 2LO^2 + 2LP^2 + 4OP^2$

বা, $LM^2 + LN^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$

$\therefore 2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$ [$\because$ LM = LN]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৯ ▸ ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle$ BCA স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB। স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC, BC এবং BC রেখার উপর AC রেখার লম্ব অভিক্ষেপ CD.

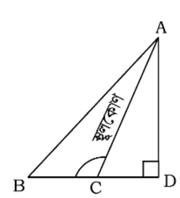
ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ উপরের তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ৪

গ. ΔABC-এ $CE \perp AB$ এবং P, CE এর উপর যেকোনো বিন্দু ও BC > AC হলে প্রমাণ কর যে, $BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$. ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle$BCA স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB। স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC রেখার উপর AC রেখার লম্ব অভিক্ষেপ CD.

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

প্রমাণ : ΔABD-এর $\angle D$ = এক সমকোণ [$\because AD \perp BD$]

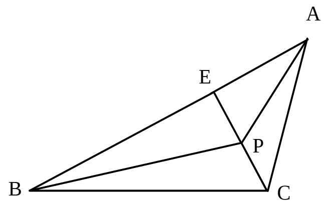
$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$
$= AD^2 + (BC + CD)^2$
$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$
$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$

আবার, ΔACD এর $\angle D$ = এক সমকোণ হওয়ায়

$AD^2 + CD^2 = AC^2$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC-এ $CE \perp AB$ এবং P, CE এর উপর যেকোনো বিন্দু ও $BC > AC$। প্রমাণ করতে হবে যে, $BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$

প্রমাণ : $CE \perp AB$ বলে $\angle BEP = \angle AEP$ = এক সমকোণ।

এখন, ΔBPE-এ $\angle BEP$ = এক সমকোণ

$\therefore BP^2 = BE^2 + PE^2$

তদ্রুপ $AP^2 = AE^2 + PE^2$

$\therefore BP^2 - AP^2 = BE^2 + PE^2 - AE^2 - PE^2$
$= BE^2 - AE^2$ ....(i)

আবার, ΔBEC-এ $\angle BEC$ = এক সমকোণ।

$\therefore BC^2 = BE^2 + CE^2$

তদ্রুপ $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$\therefore BC^2 - AC^2 = BE^2 + CE^2 - AE^2 - CE^2$
$= BE^2 - AE^2$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং তুলনা করে পাওয়া যায়,

$BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন-১০ ▸ ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC বা BC এর বর্ধিতাংশের উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

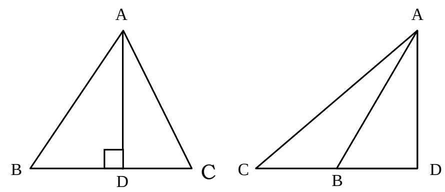
ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ৪

গ. ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$. ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র : ১ চিত্র : ২

ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC বা BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। অতএব BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

কিন্তু, $BD = BC - DC$ [চিত্র ১]

অথবা, $BD = DC - BC$ [চিত্র ২]

$\therefore BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC.CD$

$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$

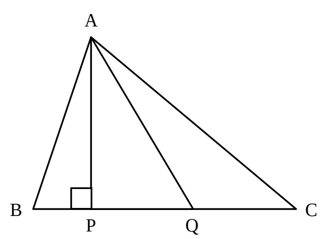
$= AD^2 + DC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

আবার, ΔADC এর $\angle D$ এক সমকোণ হওয়ায়

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC **এর** BC বাহু P ও Q সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

প্রমাণ : ΔABQ–এ AP, BQ এর উপর মধ্যমা। [$\because BP = PQ$]

$\therefore AB^2 + AQ^2 = 2AP^2 + 2PQ^2$ ....(i)

আবার, ΔAPC–এ AQ, PC এর উপর মধ্যমা [$\because PQ = QC$]

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AP^2$ ....(ii)

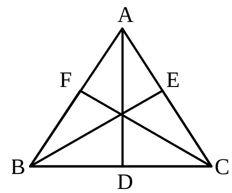
সমীকরণ (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 - AP^2 + 2AQ^2 - AQ^2 + 4PQ$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১১ ▸



চিত্রে ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমা।

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

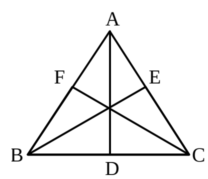
গ. প্রমাণ কর যে, $3(BC^2 + CA^2 + AB^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমা এবং $AD \perp BC$। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,
$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

খ. অনুশীলনী–৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ।

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ....(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ....(ii)

$BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2BD^2 + 2CE^2 + 2BF^2$

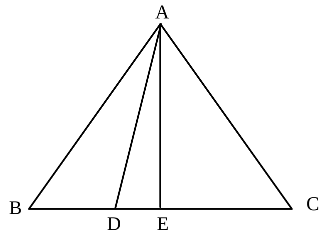
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4BD^2 + 4CE^2 + 4BF^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$ [$\because$ BD = DC, CE = AE, BF = AF]

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১২ ›



উপরিউক্ত চিত্রে AD মধ্যমা এবং AE ⊥ BC

ক. উক্ত চিত্রের আলোকে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

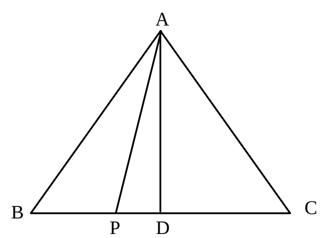
গ. ΔABC-এ $AB = AC$, $AD \perp BC$ এবং P,BC এর উপর যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে ΔABC এ AD মধ্যমা এবং $AE \perp BC$। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

খ. অনুশীলনী–৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ। বোর্ড বই পৃষ্ঠা–৬৭।

গ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এ$AB = AC$, $AD \perp BC$ এবং ভূমি BC-এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.\ PC$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ [$\because$ $AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (i)

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because$ $AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD)\ BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $BD = CD$]

বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP.PC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৩ **ΔABC-এর $\angle C$= এক সমকোণ এবং AD মধ্যমা।**

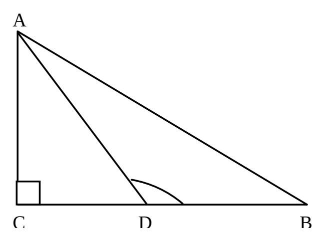
ক. উপরিউক্ত তথ্যের ভিত্তিতে চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

গ. ΔABC-এর AD, BE ও CF তিনটি মাধ্যমা হলে প্রমাণ কর যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



খ. ΔABC এর $\angle C = 90°$

অর্থাৎ, সমকোণী ΔABC এর অতিভুজ $= AB$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$ [$\because BC = BD + CD$]

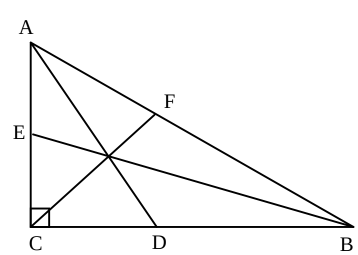
$= AC^2 + BD^2 + 2BD.CD + CD^2$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [$\because \Delta ACD$ এর $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC -এ $\angle C = 90°$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

এখন, ΔABC এ AD মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

$= 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2BC}\right)^2 [\because BD = \frac{1}{2}BC]$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD = (AB^2 + AC^2) - \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{2}$ .... (i)

অনুরূপভাবে পাই,

$2BE^2 = \frac{(AB^2 + BC^2) - AC^2}{2}$ ....(ii)

$2CF^2 = \frac{(AC^2 + BC^2) - AB^2}{2}$ ....(ii)

(i) + (ii) + (iii) নং হতে পাই,

$2(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$= \frac{4(AB^2 + BC^2 + AC^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(AB^2 + AB^{2)}}{2}$ $[\because AB^2 = AC^2 + BC^2]$

$= \frac{3.2AB^2}{2}$

$\therefore 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৪ ΔABC-এ $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

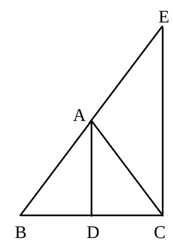
ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC ৪

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ ৪

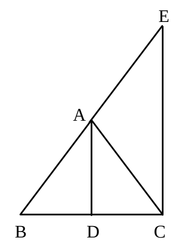
১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



প্রদত্ত তথ্যানুযায়ী চিত্রটি অঙ্কন করা হলো।

খ. মনে করি, AD রেখাংশ ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BA : AC

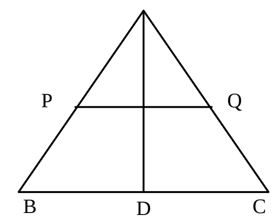


অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ :

ধাপ	**যথার্থতা**
১. যেহেতু DA ‖ CE এবং BC ও AC	[অঙ্কন]
তাদের ছেদক $\therefore \angle AEC = \angle BAD$	[অনুরূপ কোণ]
এবং $\angle ACE = \angle CAD$	[একান্তর কোণ]
২. কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$	[স্বীকার]
$\angle AEC = \angle ACE$	
$\therefore$ AC = AE	
৩. আবার, যেহেতু AD ‖ CE	[উপপাদ্য–১]
$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$	
৪. কিন্তু AE = AC	[ধাপ–২]
$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$	
অর্থাৎ BD : DC = BA : AC **(প্রমাণিত)**	

গ. মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BP : CQ



প্রমাণ : ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD

$\therefore BD : DC = AB : AC$ .... (i)

আবার, $PQ \parallel BC$

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$ [উপপাদ্য –১]

বা, $\frac{AP}{BP} + 1 = \frac{AQ}{CQ} + 1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$

বা, $AB : AC = BP : CQ$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$BD : DC = BP : CQ$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৫ ΔABC এর $\angle B = 90°$ এবং BC, AC ও AB এ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

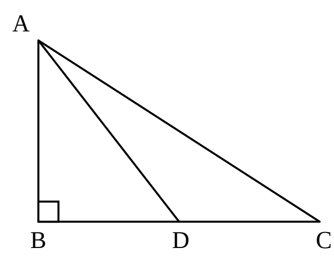
ক. প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AD^2 + 3BD^2$ ২

খ. উদ্দীপকের ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ΔABC এর $\angle B = 90°$. BC বাহুর মধ্যবিন্দু D প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AD^2 + 3BD^2$.



প্রমাণ : ΔABD এ, $\angle B = 90°$

$\therefore AD^2 = AB^2 + BD^2$........................ (i)

আবার, ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle B = 90°$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= AB^2 + (2BD)^2$ [D, BC এর মধ্যবিন্দু $\therefore BC = 2BD$)

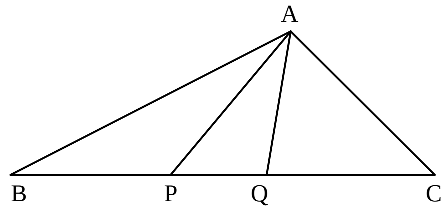
$= AB^2 + 4BD^2$

$= AB^2 + BD^2 + 3BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [(i) নং হতে]

$\therefore AC^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

খ.



দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ $BP = PQ = QC$। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

প্রমাণ : ΔABQ এর মধ্যমা AP $[\because BP = PQ]$

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ .... (i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ $[\because PQ = QC]$

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ .... (ii)

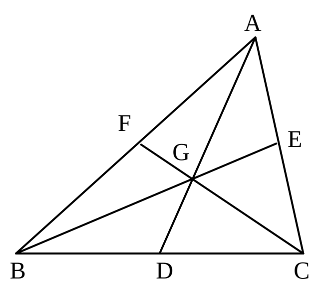
এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

প্রমাণ : ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$................. (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ .... (ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i) , (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2$

$+ 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে, 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৬ **ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AD, BC এর মধ্যমা।**

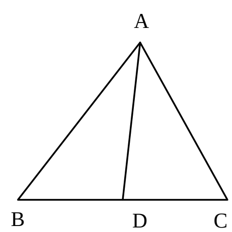
ক. উপরের তথ্যের আলোকে ত্রিভুজ অঙ্কন করে চিহ্নিত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ ৪

গ. $\angle C = 90°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

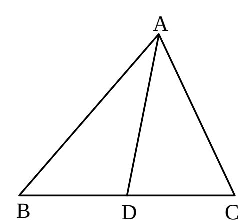
১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AD, BC বাহুর মধ্যমা।



খ. অনুশীলনী ৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৫ দেখ।

গ.



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; AD. BC এর মধ্যমা এবং $\angle C = 90°$

প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ : পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .... (i)

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $AD^2 = AC^2 + CD^2$

বা, $AD^2 = AC^2 + BD^2$ [$\because$ D. BC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $AC^2 + BD^2 = AD^2$

বা, $AC^2 = AD^2 – BD^2$

সমীকরণ (i) নং হতে, $AB^2 = AD^2 – BD^2 + BC^2$

$= AD^2 – BD^2 + (2BD)^2$

$= AD^2 – BD^2 + 4BD^2$

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গুরবত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▶ ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. O বিন্দুটির নাম কি? O, AD কে কি অনুপাত বিভক্ত করে? ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2\,(AD^2 + BD^2)$ ৪

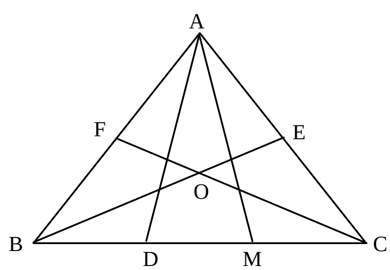
গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO + CO^2)$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. O বিন্দুটির নাম ভরকেন্দ্র।

O বিন্দু AD কে 2 : 1 অনুপাত বিভক্ত করে।

খ.



ΔABC এ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2\,(AD^2 + BD^2)$

অঙ্কন : A হতে BC এর ওপর AM লম্ব টানি।

প্রমাণ : ΔABC এ $\angle$ADB স্থূলকোণ

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DM$ ....(i)

আবার, $\angle$ABC সূক্ষ্মকোণ

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 – 2CD.DM$

$= AD^2 + BD^2 – 2BD.DM$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BD.DM – 2BD.\ DM$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ **(দেখানো হলো)**

গ. সমাধান ‘খ’ এর চিত্র হতে পাই,

ΔABC এ AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O থেকে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্ব যথাক্রমে OA, OB ও OC.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

প্রমাণ : ΔABC এ AD মধ্যমা

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$ ....(i)

অনুরূপভাবে, $AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + 2CE^2$ ....(ii)

এবং $AC^2 + BC^2 = 2CF^2 + 2AF^2$ ....(iii)

সমীকরণ, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2BC^2 + 2AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2AF^2.$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = 4AB^2 + 4BD^2 + 4BE^2 + 4CE^2 + 4CF^2 + 4AF^2.$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2AF)^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = BC^2 + AC^2 + AB^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $4AB^2 + AB^2 + 4BC^2 – BC^2 + 4AC^2 – AC^2 = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $3AB^2 + 3BC^2 + 3AC^2 = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ....(iv)

আবার, O মধ্যমা তিনটির ছেদ বিন্দু বলে মধ্যমাত্রয় ভরকেন্দ্র পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore OA = \frac{2}{3} AD$

বা, $AD = \frac{3}{2} OF$

আবার, $OB = \frac{2}{3} BE$

বা, $BE = \frac{3}{2} OB$

এবং $OC = \frac{2}{3} CF$

বা, $CF = \frac{3}{2} OC$

এখন, সমীকরণ (iv) হতে পাই,

$$3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4\left\{\left(\frac{3}{2} OA\right)^2 + \left(\frac{3}{2} OB\right)^2 + \left(\frac{3}{2} OC\right)^2\right\}$$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4\left(\frac{9}{4}OA^2 + \frac{9}{4}OB^2 + \frac{9}{4}OC^2\right)$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 9(A^2 + OB^2 + OC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. এবং $AD \perp BC$.

ক. AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

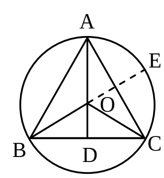
খ. ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য ব্যবহার করে ABC ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এবং বৃত্তক্ষেত্র ABC–এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, 'O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABC সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত।

পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. এবং $AD \perp BC$।



$\therefore AD = OA + OD$

$= OA + \frac{OA}{2}$ [O বিন্দুতে AD, 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়]

$= \left(4 + \frac{4}{2}\right)$ সে. মি.

$= 6$ সে. মি.

নির্ণেয় AD এর দৈর্ঘ্য 6 সে. মি.।

খ. ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $AB . AC = BE . AD$

বা, $AB^2 = 8 \times 6$ বর্গ সে. মি. [ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AB = AC$

এবং $BE = 2. OB = 2.4$ সে. মি. $= 8$ সে. মি.]

বা, $AB^2 = 48$ বর্গ সে. মি.

বা, $AB = \sqrt{48}$ সে. মি.

$\therefore AB = 4\sqrt{3}$ সে. মি.

ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সে. মি. **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে,

সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4\sqrt{3}$ সে. মি.।

আমরা জানি,

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{3})^2$ বর্গ সে. মি.

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 48$ বর্গ সে. মি.

$= 12\sqrt{3}$ বর্গ সে. মি.

$= 20.785$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক। (যেখানে r বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

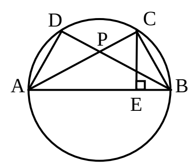
$= 3.1416 \times 4^2$ বর্গ সে. মি. [$\because$ r = 4]

$= 3.1416 \times 16$ বর্গ সে. মি.

$= 50.2656$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও বৃত্তক্ষেত্র ABC–এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{20.785}{50.2656} = \frac{1}{2.42} = 1 : 2.42$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩

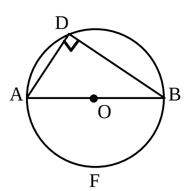


ক. দেখাও যে, $\angle ADB = 90°$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AE.BE = CE^2$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান



ক. O কেন্দ্রিক বৃত্তের AB ব্যাস। ব্যাসের যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর F বিন্দু নিই।

এখন AFB চাপের উপর দন্ডায়মান।

বৃত্তস্থ $\angle ADB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$

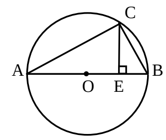
$= \frac{1}{2} \times$ এক সরল কোণ

$= \frac{1}{2} \times 180°$

$= 90°$

$\therefore \angle ADB = 90°$ **(দেখানো হলো)**

খ.



AB ব্যাস $\therefore \angle ACB = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী এবং $CE \perp AB$

এখন, ΔACE ও ΔBCE এ

$\angle AEC = \angle BEC$ [সমকোণ]

$\angle CAE = \angle BCE =$ [প্রত্যেক $\angle ACE$ এর পূরক কোণ]

অবশিষ্ট $\angle ACE$ = অবশিষ্ট $\angle CBE$

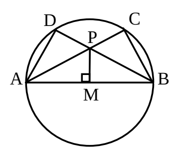
$\therefore \Delta ACE$ ও ΔBCE সদৃশকোণী তাই এরা সদৃশ

$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{AE}{CE}$

বা, $CE.CE = AE.BE$

$\therefore CE^2 = AE.BE$ **(প্রমাণিত)**

গ.



$PM \perp AB$ অঙ্কন করি।

A, M, P, D সমবৃত্তস্থ। কারণ $\angle AMP + \angle ADP = 1$ সমকোণ + 1 সমকোণ = 2 সমকোণ।

উক্ত AMPD বৃত্তের AM ও DP জ্যা বহিঃস্থ B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore AB.BM = BD.BP$...............(i)

আবার, B, M, P, C সমবৃত্তস্থ। কারণ $\angle BMP + \angle PCB = 1$ সমকোণ + 1 সমকোণ = 2 সমকোণ।

উক্ত BMPC বৃত্তের BM ও CP জ্যা বহিঃস্থ A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore AB.BM = AC.AP$...............(ii)

(i) ও (ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

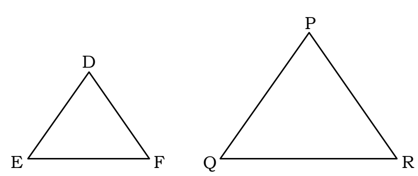
$AB.BM + AB.AM = BD.BP + AC.AP$

বা, $AB(BM + AM) = AC.AP + BD.BP$

বা, $AB.AB = AC.AP + BD.BP$

$\therefore AB^2 = AC.AP + BD.BP$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৪ ▸



ΔDEF ও ΔPQR সদৃশকোণী।

ক. ত্রিভুজের সদৃশতা বলতে কী বোঝ? ২

খ. ΔDEF ও ΔPQR সদৃশ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PQR ত্রিভুজের QR বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা PQ ও PR কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ত্রিভুজের সদৃশতার দুইটি ক্ষেত্র

১. কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা

২. বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা

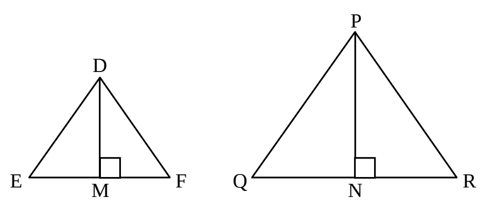
কোণের ৰেত্রে সদৃশতা : ত্রিভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলা হয়।

বাহুর অনুপাতের ৰেত্রে সদৃশতা : সমানসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের একটির শীর্ষ বিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, ত্রিভুজ দুইটির–

a. অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং

b. অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাত সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) ত্রিভুজ বলা হয়।

খ.



মনে করি, ΔDEF ও ΔPQR সদৃশ এবং তাদের দুইটি অনুরূপ বাহু EF ও QR।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$

অঙ্কন : EF ও QR এর উপর যথাক্রমে DM ও PN লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔDEF এর ভূমি = EF এবং উচ্চতা = DM

$\therefore \Delta DEF = \frac{1}{2} \times EF \times DM$

$$\left[\because \text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}\right]$$

আবার, ΔPQR এর ভূমি = QR এবং উচ্চতা = PN

$\therefore \Delta PQR = \frac{1}{2} \times QR \times PN$

$$\therefore \frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2} \times EF \times DM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{EF.DM}{QR.PN}$$

আবার, ΔDEM ও ΔPQN-এ

$\angle DME = \angle PNQ$ = এক সমকোণ

$\angle DEM = \angle PQN$

$\angle EDM = \angle QPN$

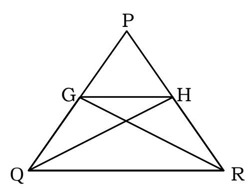
$\therefore \Delta DEM$ ও ΔPQN সদৃশকোণী তাই সদৃশ।

$\therefore \frac{EF}{QR} = \frac{DM}{PN} = \frac{EF}{QR}$

$\therefore \frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF}{QR} \times \frac{EF}{QR} = \frac{EF^2}{QR^2}$

$\therefore \frac{\Delta DEF}{PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, PQR ত্রিভুজের QR বাহুর সমান্তরাল GH রেখাংশ PQ ও PR-কে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, PG : GQ = PH : HR

অঙ্কন : G, R ও G, H যোগ করি।

প্রমাণ : ΔPGH এবং ΔGHQ একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHQ} = \frac{PG}{GQ}$

আবার, ΔPGH এবং ΔGHR একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHR} = \frac{PH}{HR}$

$\therefore \Delta GHR = \Delta GHQ$

[$\because$ একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত]

$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHQ} = \frac{\Delta PGH}{\Delta GHR}$

$\therefore \frac{PG}{GQ} = \frac{PH}{HR}$

অর্থাৎ PG : GQ = PH : HR **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫ > ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

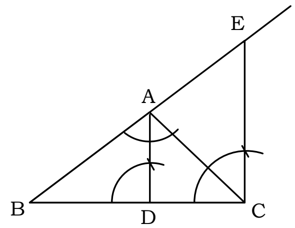
খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC ৪

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও

AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ ৪

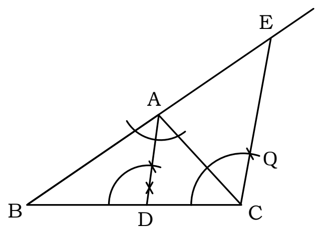
৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। তথ্য অনুসারে চিত্রটি আঁকা হলো।

খ.



ΔABC−এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BA : AC

প্রমাণ : যেহেতু AD || CE এবং AC তাদের ছেদক।

$\therefore \angle DAC = \angle ACE$ [একান্তর কোণ]

আবার, AD || CE এবং BE তাদের ছেদক

$\therefore \angle BAD = \angle AEC$

কিন্তু $\angle BAD = \angle DAC$ [কারণ AD, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$

$\therefore \Delta AEC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অর্থাৎ AE = AC.

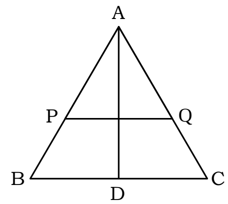
এখন, ΔBCE-এ AD || CE

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$

বা, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$ [$\because$ AE = AC]

$\therefore$ BD : DC = BA : AC **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC-এ $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BP : CQ

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে বলে,

BD : DC = AB : AC [খ অনুসারে]

বা, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .... (i)

যেহেতু PQ || BC

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$

বা, $\frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{QC}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$

বা, $\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{CQ}$ [(i) নং হতে]

সুতরাং BD : DC = BP : CQ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন–৬ ▸ ΔABC এর পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব।

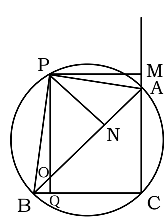
ক. চিত্র এঁকে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের নাম লেখ। ২

খ. PQ ও BN এর ছেদবিন্দু O হলে, প্রমাণ কর যে, PO.OQ = BO.ON ৪

গ. প্রমাণ কর যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ। ৪

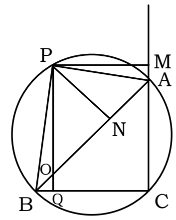
৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্রে, ΔABC-এ পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব। P, A ও P, B যোগ করি। ফলে APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ অঙ্কিত হলো।

খ.



উপরিউক্ত চিত্রে PQ এবং BN পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, PO.OQ = BO.ON

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $PN \perp AB$ এবং $PQ \perp BC$

$\therefore \angle PQB = \angle PNB$ [সমকোণ বলে]

এখন ΔPON এবং ΔBOQ এর মধ্যে $\angle PNO = \angle OQB$

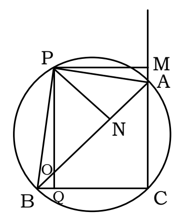
এবং $\angle PON = \angle BOQ$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{PN}{BQ} = \dfrac{PO}{BO} = \dfrac{ON}{OQ}$

$\therefore$ PO.OQ = BO.ON (**প্রমাণিত**)

গ.



প্রমাণ করতে হবে যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : Q, N; N, M এবং P, B যোগ করি।

প্রমাণ : PNAM চতুর্ভুজে $\angle PNA + \angle PMA$ = দুই সমকোণ

[$\because PN \perp AB$ এবং $PM \perp AM$]

$\therefore$ PNAM চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore$ PM চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle PAM$ = বৃত্তস্থ $\angle PNM$

আবার, $PQ \perp BC$ এবং $PN \perp AB$

$\therefore \angle PNB = \angle PQB$ = দুই সমকোণ

$\therefore$ PNQB চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore \angle PNQ + \angle PBQ = 180°$

বা, $\angle PNQ = 180° - \angle PBQ$ .... (i)

আবার, APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজটিতে

$\angle PAC + \angle PBC = 180°$

বা, $\angle PAC = 180° - \angle PBC = 180° - \angle PBQ$ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে পাই,

$\angle PNQ = \angle PAC = 180° - \angle PAM$

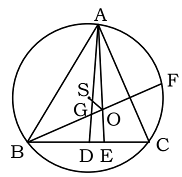
$= 180° - \angle PNM \quad [\because \angle PAM = \angle PNM]$

$\therefore \angle PNQ + \angle PNM = 180°$

$\therefore$ QN ও NM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore$ Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৭ ▶ ΔABC এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং BC এর মধ্যবিন্দু D.



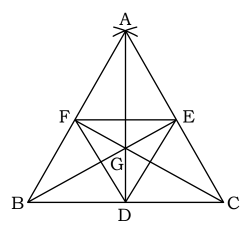
ক. ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে কত অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. দেখাও যে, G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র। ৪

গ. যদি ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর AD, BE ও CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF ৪

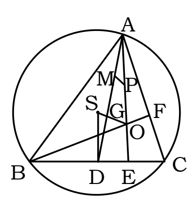
৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্রে G হলো ΔABC এর ভরকেন্দ্র। ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

খ.



অঙ্কন : AO এর মধ্যবিন্দু P বিন্দু দিয়ে OS এর সমান্তরাল PM আঁকি, যেন তা AD কে M বিন্দুতে ছেদ করে। S, D যোগ করি।

প্রমাণ : AO এর মধ্যবিন্দু P এবং MP || OS

$\therefore$ AG এর মধ্যবিন্দু M অর্থাৎ AM = MG

আবার, APM ও DGS ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle DGS$ = বিপ্রতীপ $\angle AGO = \angle AMP$

$\angle SDG = \angle MAP \qquad [\because SD \parallel AE]$

এবং $SD = \frac{1}{2} AO = AP$

$\therefore$ APM ও DGS ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

$\therefore AM = GD$

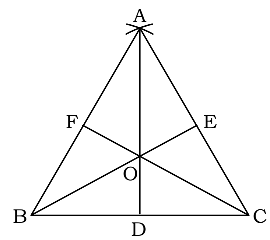
অর্থাৎ $AM = MG = GD$

$\therefore GD = \frac{1}{3} AD$, অর্থাৎ $GD = \frac{1}{2} GA$

যেহেতু AD একটি মধ্যমা এবং G বিন্দু AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

গ.



প্রমাণ : ΔBOF ও ΔCOE এ

$\angle OFB = \angle OEC = 90°$ [$\because CF \perp AB, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOF = \angle COE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}$

বা, BO.OE = CO.OF .... (i)

আবার, ΔBOD ও ΔAOE-এ

$\angle ODB = \angle OEA = 90°$ [$\because AD \perp BC, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOD = \angle AOE$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BO}{AO} = \frac{OD}{OE}$

বা, AO.OD = BO.OE .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

AO.OD = BO.OE = CO.OF (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন–৮ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় ও বাহুগুলোর মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ক একটি উপপাদ্য রয়েছে। উপপাদ্যটি টলেমির উপপাদ্য নামে পরিচিত।

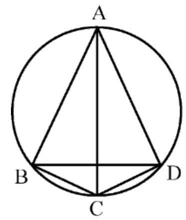
ক. টলেমির উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। ২

খ. উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণ কর। ৪

গ. AB ব্যাসের উপর অর্ধবৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

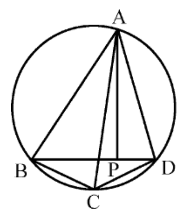
ক. **টলেমির উপপাদ্য :** কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণ হলে টলেমির উপপাদ্য অনুসারে,

$AC.\ BD = AB.CD + BC.AD$

খ.



বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

অঙ্কন : A বিন্দুতে DA রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান $\angle DAP$ অঙ্কন করি যেন AP রেখা BD কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কনানুসারে]

প্রত্যেকের সাথে $\angle PAC$ যোগ করলে

$\angle BAC + \angle PAC = \angle PAD + \angle PAC$

অর্থাৎ $\angle BAP = \angle CAD$

$\angle ABD = \angle ACD$ [যেহেতু একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলো সমান]

$\therefore \Delta ABP$ এবং ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{BP}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

[যেহেতু সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

অর্থাৎ $AC.BP = AB.CD$ .... (i)

আবার, $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ADP = \angle ACB$ [যেহেতু একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলো সমান]

$\therefore \Delta ABC$ এবং ΔAPD সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{PD}{BC}$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

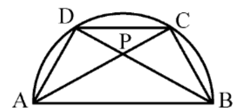
অর্থাৎ $AC\ .\ PD = AD.BC$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB.CD + BC.AD = AC.BP + AC.PD = AC(BP + PD) = AC.BD$

অর্থাৎ $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ (**প্রমাণিত**)

গ.



অঙ্কন : A, D; B, C ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCPD ও ΔAPB–এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC এর উপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$

বা, $AP.CP = BP.DP$

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$

[উভয় পক্ষে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP.(AP + CP) = BP.DP + AD^2 + DP^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$

$\because AP^2 = AD^2 + DP^2$]

বা, $AP.AC = DP\ (BP+DP) + AD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$

[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

বা, $AP.AC = AB^2 - BD\ (BD - DP)$

বা, $AP.AC = AB^2 - BD.BP$

$\therefore AB^2 = AC.AP + BD.BP$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৯ ▸ সূক্ষ্মকোণী ΔABC এর A, B, C শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। D ও E, E ও F এবং F ও D যোগ করায় পদে ত্রিভুজ DEF উৎপন্ন হয়েছে।

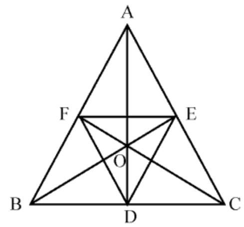
ক. বর্ণনা অনুযায়ী চিত্র অঙ্কন করে পাদ ত্রিভুজ চিহ্নিত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AD, BE ও CF পাদ ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক। ৪

গ. দেখাও যে, পাদত্রিভুজ অঙ্কনের ফলে উৎপন্ন ত্রিভুজগুলো মূল ত্রিভুজের সদৃশ। ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC–এ AD, BE ও CF যথাক্রমে শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব। D ও E, E ও F এবং F ও D যোগ করায় ΔDEF উৎপন্ন হলো। তাহলে, ΔDEF ই ΔABC ত্রিভুজের পাদ ত্রিভুজ।

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, AD, BE ও CF যথাক্রমে $\angle FDE$, $\angle DEF$ এবং $\angle EFD$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

প্রমাণ : OECD চতুর্ভুজে $\angle ODC$ + উহার বিপরীত $\angle OEC = 2$ সমকোণ, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, C, E বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই OE চাপের উপর অবস্থিত $\angle ODE = \angle OCE$

আবার, OFBD চতুর্ভুজ $\angle ODB$ + উহার বিপরীত $\angle OFB = 2$ সমকোণ। কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, B, F বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত $\angle ODF = \angle OBF$

ΔABE ও ΔACF থেকে, $\angle OBF$ ও $\angle OCE$ উভয়ই $\angle BAC$ এর পূরক কোণ।

$\therefore \angle OCE = \angle OBF$

$\therefore \angle ODE = \angle OCE = \angle OBF = \angle ODF$

$\therefore$ AD রেখাংশ $\angle FDE$ এর সমদ্বিখন্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিখন্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিণ্ডক।

গ. প্রমাণ করতে হবে যে, ΔAEF, ΔBDF, ΔCDE মূল ΔABC এর সদৃশ।

প্রমাণ : O, D, C, E সমবৃত্ত।

[$\because \angle ODC + \angle OEC = 90° + 90° = 180°$]

$\therefore \angle ODE = \angle OCE$ [একই চাপস্থিত কোণ]

$\therefore \angle EDC = 90° - \angle ODE = 90° - \angle OCE = 90° - \angle FCA$

$= \angle BAC$

[$\because \angle AFC = 90°$, $\therefore \angle BAC + \angle FCA = 90°$

অর্থাৎ, $\angle BAC = 90° - \angle FCA$]

আবার, ΔACF-এ $\angle AFC = 90°$ বলে,

$\angle ACF + \angle FAC + 90° = 180°$

বা, $\angle FCA + \angle FAC = 90°$

বা, $\angle FAC = 90° - \angle FCA$

বা, $\angle BAC = 90° - \angle FCA$

$\therefore \angle EDC = \angle BAC$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$\angle DEC = \angle BAC$

এখন, ΔABC ও ΔCDE–এ

$\angle EDC = \angle BAC$ এবং

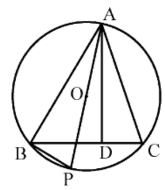
$\angle DEC = \angle ABC$

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, ΔBDF ও ΔAEF ত্রিভুজদ্বয় ও ΔABC–এর সদৃশ।

$\therefore$ ΔAEF, ΔBDF, ΔCDE ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০



ক. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। ৪

গ. চিত্র হতে দেখাও যে, $AD.BC = AB.DC + BP.AC$ ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য :** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদের ছেদবিন্দু হতে কোনো বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

খ. **অঙ্কন :** B, P যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ AB এর জন্য $\angle ADB$ ও $\angle ACB$ বা, $\angle ACB$ বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

AP বৃত্তের ব্যাস বলে $\angle APB$ অর্ধঃবৃত্তস্থ কোণ এবং BC বাহুর উপর AD লম্ব হওয়ায় $\angle ADC$ সমকোণ।

এখন ΔAPB ও ADC এর মধ্যে $\angle APB = \angle ACD$

[একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

$\angle ABP$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = $\angle ADC$

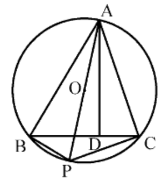
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle CAD$

$\therefore$ ΔABP ও ΔADC সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AP}{AC}$

সুতরাং $AB.AC = AP.BD$

গ.



মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABPC চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও PC এবং BP ও AC। AP এবং BC চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AP.BC = AB.PC + BP.AC$

অঙ্কন : $\angle BAP$ কে $\angle CAP$ এর ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AC রেখাংশের সাথে $\angle BAP$ এর সমান করে $\angle CAD$ আঁকি যেন AD রেখা BC কর্ণকে D বিন্দুতে ছেদ করে। P, C যোগ করি।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAP = \angle CAD$

উভয়পক্ষে $\angle PAD$ যোগ করে পাই,

$\angle BAP + \angle PAD = \angle CAD + \angle PAD$

অর্থাৎ $\angle BAD = \angle PAC$

এখন ΔABD ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle ACD = \angle APC$

$\angle ABC = \angle APC$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ADB$ = অবশিষ্ট $\angle ACP$

$\therefore$ ΔABC ও ΔAPC সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{BD}{PC} = \dfrac{AB}{AP}$

অর্থাৎ $AP.BD = AB.PC$ .... (i)

আবার, ΔABP ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle DAC$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ACD = \angle APB$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং ΔABP ও ΔADC সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{DC}{BP}$

অর্থাৎ $AP.DC = BP.AC$ .... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AP.BD + AP.DC = AB.PC + BP.AC$

বা, $AP(BD + DC) = AB.PC + BP.AC$

বা, $AP.BC = AB.PC + BP.AC$ [যেহেতু $BD + DC = BC$]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১১ ΔABC এর S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এবং AP এর মধ্যমা।

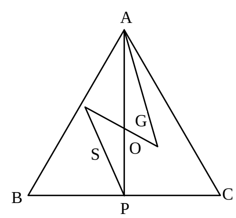
ক. ΔABC অঙ্কন কর এবং OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্কটি লেখ। ২

খ. ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র G হলে দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ হলে এবং C থেকে অতিভুজের উপর লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD \cdot BD$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক.

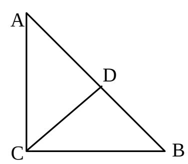


ΔABC–এর S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এবং AP এর মধ্যমা।

OA ও SP এর মধ্যে সম্পর্কটি হলো: $OA = 2SP$ **(Ans.)**

খ. অনুশীলনী ৩·২ এর উপপাদ্য–৩·১০, পৃষ্ঠা–৭২ দ্রষ্টব্য।

গ.



দেওয়া আছে ΔABC–এর $\angle C = 90°$। CD, AB এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.BD$

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle C = 90°$

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90°$ ....(i)

আবার, ΔADC-এ $\angle ADC = 90°$ [$\because CD \perp AB$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$ ....(ii)

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle ACD + \angle BCD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle BCD = \angle CAD$

এখন, ΔADC ও ΔBDC –এ

$\angle ADC = \angle BDC = 90°$

$\angle CAD = \angle BCD$

এবং অবশিষ্ট $\angle ACD$ = অবশিষ্ট $\angle CBD$

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

অর্থাৎ, $CD^2 = AD.BD$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১২ ▸ AB = 6 cm ব্যাস বিশিষ্ট অর্ধ বৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. অর্ধবৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AE. EC = BE.ED ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AE + BD.BE$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বৃত্তের ব্যাস, d = 6cm

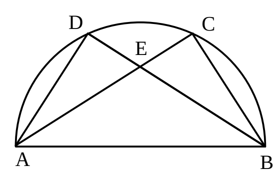
ব্যাসার্ধ, r = 3cm

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

$\therefore$ অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi r^2}{2}$

$$= \frac{3\cdot1416 \times 3^2}{2} = 14\cdot14\text{cm}^2 \textbf{ (Ans.)}$$

খ.



এখানে, ABCD একটি অর্ধবৃত্ত এবং AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AE.EC = BE.ED

অঙ্কন : A, D এবং B , C যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBCE এর মধ্যে

$\angle AED = \angle BEC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle ADE = \angle BCE$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

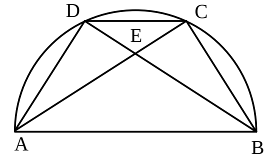
$\angle DAE = \angle CBE$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore \Delta ADE$ ও ΔBCE সদৃশ।

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{DE}{ED}$

$\therefore$ AE. EC = BE. ED (প্রমাণিত)

গ.



দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC. AE + BD. BE$

অঙ্কন : C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCED এ ΔAEB এ

$\angle EDC = \angle EAB$ [একই চাপ BC -এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DEC = \angle AEB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$$

বা, $AE.\ CE = BE.\ DE$

বা, $AE.\ CE + AE^2 = BE.\ DE + AE^2$ [উভয়পক্ষে AE^2 যোগ করে]

বা, $AE\ (CE + AE) = BE.DE + DE^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADE = \angle ADB = 90°$

$\therefore AE^2 = AD^2 + DE^2$]

বা, $AE\ AC = DE\ (BE + DE) + AD^2$

বা, $AE.AC = DE.BD + AB^2 - BD^2$

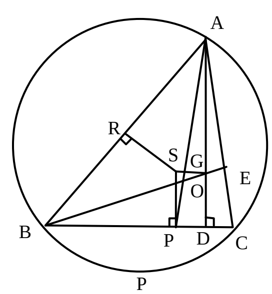
[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

বা, $AE.AC = AB^2 - BD(BD - DE)$

বা, $AE.AC = AB^2 - BD.\ BE$

$\therefore AB^2 = AE.AC + BD.\ BE$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন–১৩



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC = a, AC = b এবং AB = c.

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BP^2 + AP^2)$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ। ΔABC এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্বে OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP.

$\therefore$ OA = 2SP .... (i)

ইহাই OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক।

খ. চিত্রানুসারে ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S। AP একটি মধ্যমা। S, O যোগ করি। মনে করি, SO রেখাংশ AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

'ক' থেকে প্রাপ্ত (i) নং সমীকরণ থেকে OA = 2SP

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু AD || SP

এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$

এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore$ ΔAGO এবং ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{I}$

$\therefore$ AG : GP = 2 : 1

অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

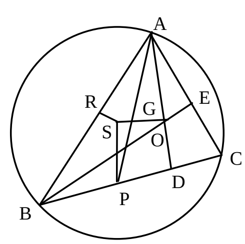
$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

অর্থাৎ S , G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(দেখানো হলো)**

গ. অনু. ৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৫ (এ্যাপোলিনিয়াসের উপপাদ্য) দেখ।

বি. দ্র. পাঠ্য বইয়ের D ও E স্থলে P ও D হবে।

প্রশ্ন-১৪



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC = a, AC = b এবং AB = c [ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিল্লা সেনানিবাস]

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $a.CD = b. CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা কর। ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অতিরিক্ত সৃজনশীল ১১(ক) সমাধান দেখ।

খ. অতিরিক্ত সৃজনশীল ১১ (খ) সমাধান দেখ।

গ. আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

এখন, $AD \perp BC$ হওয়ায় ΔABC এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ।

[$\because \angle ACB <$ সমকোণ $\angle ADC$]

এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ বলে।

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$ .... (i)

আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.\ CE$

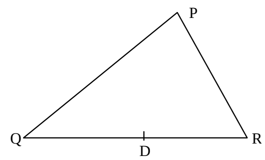
বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$ [উভয় পক্ষকে $AC^2 + BC^2$ বিয়োগ করে]

বা, $BC.CD = AC.CE$ [উভয় পক্ষকে (-2) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore a.\ CD = b.\ CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২৩



ΔPQR এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু।

ক. লম্ববিন্দু ও ভরকেন্দ্র কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ ৪

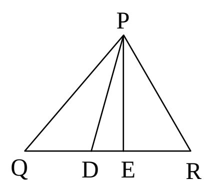
গ. $\angle Q = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ ৪

২৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **লম্ববিন্দু :** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে লম্ববিন্দু বলা হয়।

ভরকেন্দ্র : ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

খ.



ΔPQR–এ D, QR–এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

অঙ্কন : QR বাহুর উপর PE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔPQD এর $\angle PDQ$ স্থূলকোণ এবং QD রেখার বর্ধিতাংশের উপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE। স্থূলকোণের ক্ষেত্রে, পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE$ .... (i)

এখানে, ΔPRD এর $\angle PDR$ সূক্ষ্মকোণ এবং DR রেখার ওপর PD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE + PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$

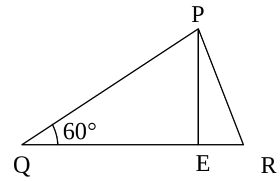
$= 2PD^2 + QD^2 + RD^2 + 2QD.DE - 2RD.DE$

$= 2PD^2 + QD^2 + QD^2 + 2QD.DE - 2QD.DE$ $[\because QD = RD]$

$= 2PD^2 + 2QD^2$

$= 2(PD^2 + QD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ.



দেওয়া আছে, ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$

অঙ্কন : $PE \perp QR$ টানি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

$\therefore$ ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ এবং তাহলে QE, QR এর ওপর PQ এর ওপর অভিক্ষেপ।

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.QE$ .... (i)

সমকোণী ΔPQE-এ লম্ব PE, ভূমি QE এবং অতিভুজ PQ

$\therefore \cos \angle PQD = \dfrac{QE}{PQ}$ $\left[\because \cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \dfrac{QE}{PQ}$ $[\because \angle PQE = 60°]$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{QE}{PQ}$

$\because QE = \dfrac{1}{2} . PQ$

এখন, (i)–এ QE এর মান বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ . \dfrac{1}{2} QR.$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ . QR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৪ ▸ ΔABC–এর $\angle A = 1$ সমকোণ এবং $AB = AC$

ক. ত্রিভুজটি আঁক। AB ও AC বাহুর বিপরীত কোণ নির্দেশ কর। ২

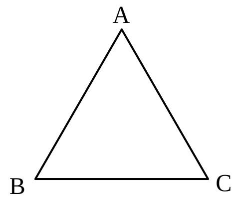
খ. BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে,

$AB^2 - AP^2 = BP.PC$ ৪

গ. A হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD হলে, প্রমাণ কর যে, $AD^2 = BD.CD$ ৪

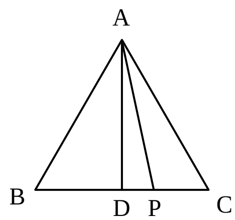
২৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



AB বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ACB$ ও AC বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ABC$

খ.



মনে করি, ΔABC–এ $AB = AC$। BC এর উপর যেকোনো বিন্দু P নিই।

A হতে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর ছেদবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ΔABC–এ $AB = AC$ এবং $AD \perp BC$

$\therefore BD = CD$

ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

আবার, APD সমকোণী ত্রিভুজে

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

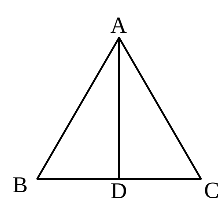
$\therefore AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

$= BD^2 - PD^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

$= BP . PC$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP . PC$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC–এ $\angle A = 90°$. AD, BC এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 = BD.CD$

প্রমাণ : $\angle A = 90°$

$\therefore \angle ABD + \angle ACD = 90°$ .... (i)

আবার, ΔADC–এ $\angle ADC = 90°$ [$\because AD \perp BC$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই

$\angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \quad \angle ABD = \angle CAD$

এখন, ΔABD ও ΔACD–এ

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$

$\angle ABD = \angle CAD$

$\therefore \quad \angle BAD = \angle ACD$ হবে

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ

$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$

বা, $AD^2 = BD.CD$

$\therefore \quad AD^2 = BD.CD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৫ ▸ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD।

ক. AD কে ত্রিভুজের মধ্যমা বলা যাবে কি? ২

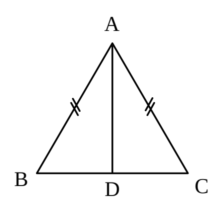
খ. BC এর উপরস্থ P যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে,

$AB^2 - AP^2 = BP . PC$ ৪

গ. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে দেখাও যে, $AB^2 = 2R . AD$ ৪

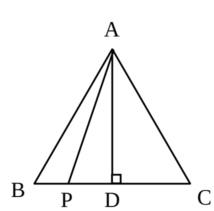
২৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. যেহেতু ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $AB = AC$।



আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে সুতরাং $BD = CD = \frac{1}{2} BC$ অর্থাৎ D, BC এর মধ্যবিন্দু। অতএব AD রেখা অবশ্যই ত্রিভুজের মধ্যমা হবে।

খ. মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। A, P যোগ করি। দেখাতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$



অঙ্কন : A হতে ভূমি BC–এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : APD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (i) [পিথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী]

আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

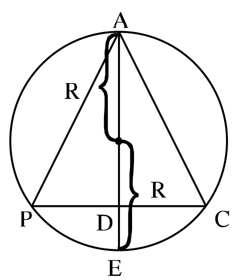
বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD) \cdot BP$ [$\because BD = CD$]

বা, $AB^2 - AP^2 = BP \cdot PC$ [$\because CD = BD$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে] **(প্রমাণিত)**

গ.



বিশেষ নির্বচন : ধরি, সমদ্বিবাহু ΔABC–এ $AB = AC$। A থেকে BC–এর উপর লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2R.AD$।

অঙ্কন : AD–কে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADC ও ΔACE–এ

$\angle ADC = \angle ACE$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ACE = 90°$ এবং AD, BC এর উপর লম্ব বলে $\angle ADC = 90°$]

$\angle EAC$ সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle ACD$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$ [$\therefore$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $AC^2 = AE.AD$

বা, $AB^2 = AE.AD$ .... (i) [$\because AB = AC$]

সমকোণী ত্রিভুজ ΔABD ও ΔACD এর মধ্যে

অতিভুজ $AB = AC$ [দেওয়া আছে]

এবং AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$

অর্থাৎ $AD \perp BC$ এবং AD, BC এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ AD, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

[কেন্দ্র থেকে জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AE, ΔABC–এর পরিব্যাস

$AE = 2R$ [$\because$ R, ΔABC–এর পরিব্যাসার্ধ]

তাহলে (i) হতে পাই,

অর্থাৎ, $AB^2 = 2R \cdot AD$ **(দেখানো হলো)**