SSC Higher Math

অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট-২০২৩

অধ্যায়-১২: সমতলীয় ভেক্টর

প্রয়োজনীয় তথ্য:

- AB একটি ভেক্টর হলে একে $\overline{AB}$ বা $\underline{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য একক হলে তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। $\underline{a}$ একটি একক ভেক্টর হলে একে $\underline{a}$ আকারে লেখা হয়।
- কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য শূন্য হলে তাকে শূন্য ভেক্টর বলা হয়। একে $\underline{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- দুটি ভেক্টরের দিক একই এবং তাদের ধারক রেখা একই রেখা বা সমান্তরাল রেখা হলে তাদের সদৃশ ভেক্টর বলে।
- সমজাতীয় দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া না করে তবে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে।
- যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই, দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের ধারক রেখা একই হয় বা সমান্তরাল হয় তাহলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।
- $\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর হলে যদি অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ নির্ণয় করা যায় যাতে $\underline{v} = -\underline{u}$ হয় তাহলে v বা $-\underline{u}$ কে $\underline{u}$ ভেক্টরের বিপরীত ভেক্টর বলে।
- $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে এদের যোগফল বা লব্ধিকে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়। এটি ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি।
- দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধি বলে।
- দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয় কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সব ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।
- যেকোনো দুটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ এটি ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি।
- যেকোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ এটি ভেক্টর যোজনের সংযোগ বিধি।
- যেকোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে $\underline{v} = \underline{w}$ হবে। এটি ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি।
- m, n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$, $\underline{v}$ দুটি ভেক্টর হলে,
- $(m + n)\underline{v} = m\underline{v} + n\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)
- $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)
- **অবস্থান ভেক্টর সংক্রান্ত কতিপয় প্রতিজ্ঞা :**

  (i) দুইটি বিন্দু A, B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ হলে $\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ হয়।

  (ii) A,B,C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c হলে A, B, C সমরেখা হবে যদি ও কেবল যদি $\overline{AC} = k.\overline{AB}$ হয়।

  (iii) A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে, C বিন্দু যদি AB রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে

  $C = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ হবে। যদি বহির্বিভক্ত হয়, তবে $C = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ হবে।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. **AB || DC হলে–**

i. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{DC}$, যেখানে m একটি স্কেলার রাশি

ii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ iii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

● i ⓖ ii

ⓖ i ও ii ⓖ i, ii ও iii

২. **দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে–**

i. এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য

ii. এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য

iii. এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

ⓚ i ● ii ⓖ i ও ii ⓖ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : (i) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিকের বিধি প্রযোজ্য নয়। সুতরাং এটি সঠিক নয়।

(ii) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য না হলেও ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য। সুতরাং এটি সঠিক।

(iii) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের দৈর্ঘ্য সমান হতেও পারে আবার নাও হতে পারে। সুতরাং এটি সঠিক নয়।

৩. **AB = CD এবং AB || CD হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

● $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ⓖ $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ যেখানে $m > 1$

ⓖ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < 0$

ⓖ $\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{CD} = 0$ যেখানে $m > 1$

ব্যাখ্যা : $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ দুইটি ভেক্টর এবং AB = CD ও AB || CD হলে অবশ্যই $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

যেমন : একটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহু AD ও BC দুইটি ভেক্টরের জন্য $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

কারণ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও এরা পরস্পর সমান্তরাল।

নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেৰে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$।

৪. **C বিন্দুটি AB রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক?**

ⓚ $\underline{c} = \dfrac{\underline{a} + 2\underline{b}}{5}$ ⓖ $\underline{c} = \dfrac{2\underline{a} + \underline{b}}{5}$

● $\underline{c} = \dfrac{3\underline{a} + 2\underline{b}}{5}$ ⓖ $\underline{c} = \dfrac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5}$

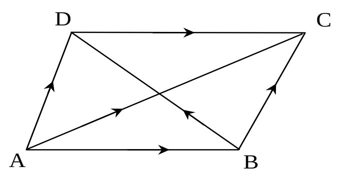
৫. **ভেক্টর মূলবিন্দুটি O হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

ⓚ $\overrightarrow{OA} = \underline{a} - \underline{b}$ ⓖ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$

● $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ⓖ $\overrightarrow{OC} = \underline{c} - \underline{b}$

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুটিকে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে এবং দেখাতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

প্রমাণ : ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ ....(i)

আবার, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলে $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ ....(ii)

বা, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ **(দেখানো হলো)**

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

আবার, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}$ [(ii) নং এর উভয় পাশে $(-\overrightarrow{BD})$ যোগ করে]

$= 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD}$

$= 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})$

$= 2\overrightarrow{AB}$ ....[(i) নং হতে পাই]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$

(খ) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

সমাধান :

(ক) এখানে, $-(\underline{a} + \underline{b})$

$= (-1)(\underline{a} + \underline{b})$

$= (-1)(a) + (-1)(\underline{b})$

$= -\underline{a} - \underline{b}$ [স্কেলার ও ভেক্টর গুণন অনুসারে]

$\therefore -(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেওয়া আছে,

$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{c} + (-\underline{b})$

[উভয়পক্ষে $(-\underline{b})$ যোগ করে]

বা, $\underline{a} + (1 - 1)\underline{b} = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + 0 = \underline{c} - \underline{b}$

$\therefore \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ (ক) দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$

সমাধান : বামপক্ষ $= \underline{a} + \underline{a}$

$= 1\underline{a} + 1\underline{a}$ [সংখ্যা গুণিতকের নিয়মানুযায়ী]

$= (1 + 1)\underline{a}$ [সংখ্যা গুণিতকের নিয়মানুযায়ী]

$= 2\underline{a}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেখাও যে, $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

সমাধান : বামপক্ষ = $(m - n)\underline{a}$

$= \{m + (-n)\}a$

$= m\underline{a} + (-n)\underline{a}$ [সংখ্যা গুণিতকের নিয়মানুযায়ী]

$= m\underline{a} + (-n\underline{a})$ [$\because (-n)\underline{a} = -n\underline{a}$]

$= m\underline{a} - n\underline{a}$ = ডানপক্ষ

$\therefore (m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

(গ) **দেখাও যে, $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$**

সমাধান : বামপক্ষ = $m(\underline{a} - \underline{b})$

$= m\{\underline{a} + (-\underline{b})\}$

$= m\underline{a} + m(-\underline{b})$ [সংখ্যা গুণিতকের বন্টন সূত্র]

$= m\underline{a} - m\underline{b}$ [$\because m(-\underline{b}) = -m\underline{b}$]

= ডানপক্ষ

$\therefore m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ (ক) $\underline{a}, \underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি a, b এর সমান্তরাল হয়।

সমাধান : যেকোনো অশূন্য ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিবেচনা করি।

মনে করি, $\underline{a}, \underline{b}$ সমান্তরাল ভেক্টর। তাহলে $\underline{a}, \underline{b}$ এর ধারক অভিন্ন বা সমান্তরাল এবং $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিক অভিন্ন বা বিপরীত।

ধরি, $m = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}$

এখানে, $m > 0$, ফলে $\underline{a}, \underline{b}$ এর ধারক অভিন্ন এবং তাদের দিকও অভিন্ন

তদুপরি, $|m\underline{b}| = m|\underline{b}| = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}.|\underline{b}| = |\underline{a}|$

এখন $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক অভিন্ন হলে, $\underline{a} = m\underline{b}$

এবং $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিক বিপরীত হলে, $\underline{a} = -m\underline{b}$ কেননা,

(i) $|m\underline{b}| = |\underline{a}|$, $|-m\underline{b}| = |m\underline{b}| = |\underline{a}|$

(ii) $m\underline{b}$ বা, $-m\underline{b}$ এর ধারক $\underline{b}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন হলে তা $\underline{a}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন বা সমান্তরাল

(iii) $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিকও অভিন্ন হলে $\underline{a}, m\underline{b}$ এর দিক ও অভিন্ন। অপরদিকে $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিক বিপরীত হলে, $\underline{a}, m\underline{b}$ এর দিকও অভিন্ন। সুতরাং $\underline{a} = m\underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) **$\underline{a}, \underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে, দেখাও যে, $m = n = 0$**

সমাধান : যেহেতু $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

সুতরাং $n\underline{b} = -m\underline{a}$

ফলে $m\underline{a}, n\underline{b}$ উভয়ে শূন্য ভেক্টর অথবা $n\underline{b}, m\underline{a}$ এর বিপরীত হতে পারে না।

সুতরাং $m\underline{a} = 0$ এবং $n\underline{b} = 0$

$\underline{a}, \underline{b}$ অশূন্য বলে $m = 0$

এবং $n = 0$

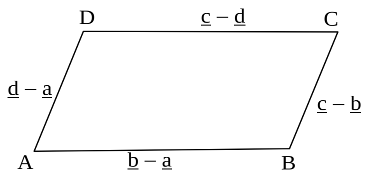
$\therefore m = n = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।



A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}.$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে, AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও CD রেখা দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল

অর্থাৎ ABCD একটি সামান্তরিক।

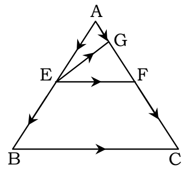
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

ফলে $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

সমাধান : ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্য বিন্দুগামী।



প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের E, AB -এর মধ্যবিন্দু এবং EF || BC

প্রমাণ করতে হবে যে, F, AC এর মধ্যবিন্দু।

F, AC–এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি, G, AC–এর মধ্যবিন্দু

তাহলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী পাই,

$\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EG}$

$\therefore 2(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{EG}$

বা, $2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EG}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$ এবং $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EG}$

আবার, ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী পাই,

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EG}$

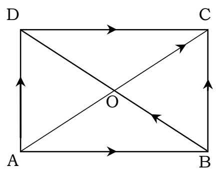
কিন্তু BC || EF

$\therefore$ EG ও EF অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ G ও F অভিন্ন বিন্দু।

অর্থাৎ F, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

সমাধান : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C এবং D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$।

AC-এর মধ্যবিন্দু O হওয়ায়, O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}$ ($\underline{a}$ + $\underline{c}$)। আবার DB এর মধ্যবিন্দ O হওয়ায় O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}$ ($\underline{b}$ + $\underline{d}$)।

উভয়ই একই O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

বা, $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

বা, $\underline{b} + \underline{d} = \underline{a} + \underline{c}$

বা, $(\underline{b} + \underline{d}) - (\underline{a} + \underline{d}) = (\underline{a} + \underline{c}) - (\underline{a} + \underline{d})$

[উভয়পক্ষ থেকে $\underline{a} + \underline{d}$ বিয়োগ করে]

বা, $(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{d} - \underline{d}) = (\underline{c} - \underline{d}) + (\underline{a} - \underline{a})$

বা, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

সুতরাং $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

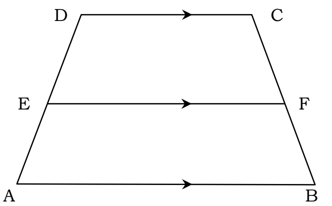
$\therefore$ AB || DC এবং AB = DC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

সমাধান : মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয় AD ও BC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। E, F যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, EF বাহু AB ও CD এর সমান্তরাল এবং EF = $\frac{1}{2}$ (AB + DC)



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূল বিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$।

তাহলে E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}$ ($\underline{a}$ + $\underline{d}$)

F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}$ ($\underline{b}$ + $\underline{c}$)

সুতরাং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{d})$

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

এবং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

এখন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান্তরাল বলে $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর সমান্তরাল।

এবং $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|)$

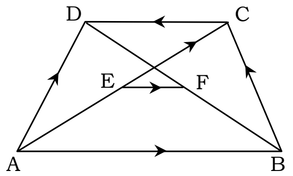
$\therefore$ EF = $\frac{1}{2}$ (AB + DC)

সুতরাং $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ ভেক্টরের সমান্তরাল

এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

সমাধান : মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও DC সমান্তরাল বাহু (AB > DC) এবং AC ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। প্রমাণ করতে হবে যে, EF রেখা AB ও DC এর সমান্তরাল এবং $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$।



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

তাহলে $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

এখন, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

সুতরাং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{c}) = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a} + \underline{d} - \underline{c})$

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{d} - \underline{c}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$

এখন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$ ভেক্টর ও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর সমান্তরাল

এবং $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}|$

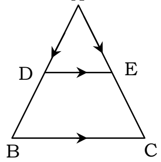
বা, $EF = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{DC}|\right)$

$\therefore EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

সুতরাং EF, AB ও DC এর সমান্তরাল এবং $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥



∆ABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

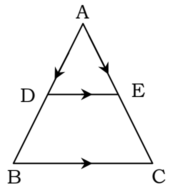
ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BC || DE এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

সমাধান :

ক.



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E,

চিত্র অনুযায়ী ΔADE এ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

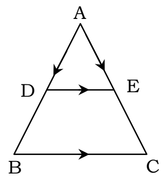
[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [E, AC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$

খ. মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E এবং D, E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$



প্রমাণ : ভেক্টরের বিয়োগ ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ ....(i)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$

[$\because$ D ও E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ থেকে পাই,

$2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

$\therefore 2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [i হতে]

আবার $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

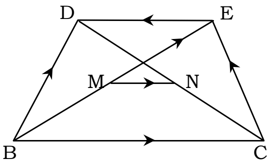
$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$

সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়

সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, BCDE ট্রাপিজিয়ামের BC ও DE সমান্তরাল বাহু (BC > DE) এবং BE ও CD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। প্রমাণ করতে হবে যে, MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{d}$

তাহলে $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

সুতরাং, $MN = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e}) = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b} + \underline{d} - \underline{c})$

কিন্তু, $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

এখন $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}$ ভেক্টর $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তরাল।

এবং $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}|$

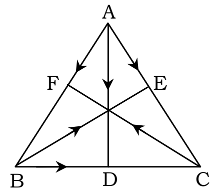
বা, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{DE}|\right)$

$\therefore MN = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

সুতরাং, MN, DE ও BC এর সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.



ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

সমাধান :

ক. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ [চিত্রানুযায়ী]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BE}$ [$\because \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$)

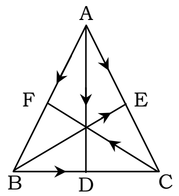
বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{4}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

খ.



ΔABE এ ভেক্টরযোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

বা, $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$ ....(i)

এবং $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) - \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ ....(ii)

আবার, ΔABD এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

এবং $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ [$\because \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

বা, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE})$ [(ii) নং হতে]

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

Δ ACF এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$ [(i) নং হতে]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}$

এখন, বামপক্ষ $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$

$= \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) + \overrightarrow{BE} + \left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}\right)$

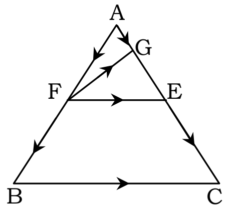
$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{BE}$

$= \underline{0}$ = ডানপক্ষ

সুতরাং $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ABC ত্রিভুজে F, AB এর মধ্যবিন্দু এবং EF || BC। প্রমাণ করতে হবে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ : E, AC এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি, G, AC এর মধ্যবিন্দু। তাহলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী পাই,

$\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FG}$

$\therefore 2(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{FG}$

বা, $2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FG}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{FG}$

আবার, ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{FG}$

কিন্তু, BC || FE

অতএব, EG ও FE অভিন্ন রেখা। তাই G ও E অভিন্ন বিন্দু।

অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

MCQ 2015 to 2020

১. ΔBCD এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ = ? [ঢা. বো. ২০]

ⓚ $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ⓛ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ⓜ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ⓝ $\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

খ

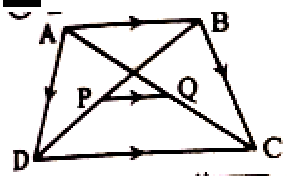
২. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $2\underline{a} - \underline{b}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a} - 2\underline{b}$ হলে AB = কত? [রা. বো. ২০]

ⓚ $\underline{a} - \underline{b}$ ⓛ $-\underline{a} - \underline{b}$

ⓜ $\underline{a} + \underline{b}$ ⓝ $\underline{a} - 2\underline{b}$

খ

৩. [য. বো. ২০]



চিত্রে P ও Q যথাক্রমে BD ও AC এর মধ্যবিন্দু, যেখানে $AB \parallel CD$ এবং AB = 5 cm, CD = 7 cm তাহলে PQ এর মান কত?

ⓚ 6 cm ⓛ 8 cm

ⓜ 2 cm ⓝ 1 cm

ঘ

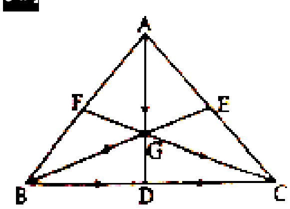
৪. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $9\underline{a} - 4\underline{b}$ এবং $3\underline{a} - \underline{b}$ হলে $\overrightarrow{PQ}$ = কত? [চ. বো. ২০]

ⓚ $6\underline{a} - 5\underline{b}$ ⓛ $-6\underline{a} + 3\underline{b}$

ⓜ $12\underline{a} - 9\underline{b}$ ⓝ $12\underline{a} - 3\underline{b}$

খ

৫. [সি. বো. ১৯]



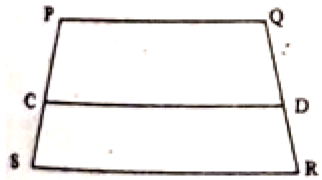
ΔABC এর G ভরকেন্দ্রে হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ ⓛ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

ⓜ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF}$ ⓝ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

খ

৬. [ব. বো. ২০]



PQRS ট্রাপিজিয়াম $\overrightarrow{PS}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে C ও D হলে $\overrightarrow{CD}$ = কত?

ⓚ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{SR})$ ⓛ $(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{SR})$

ⓜ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{SR})$ ⓝ $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{SR})$

গ

৭. $(5\underline{p} - 3\underline{q})$ এর বিপরীত ভেক্টর কোনটি? [দি. বো. ২০]

ⓚ $\frac{1}{5\underline{p} - 3\underline{q}}$ ⓛ $\frac{1}{3\underline{q} - 5\underline{p}}$

ⓜ $3\underline{q} - 5\underline{p}$ ⓝ $5\underline{q} - 3\underline{p}$

গ

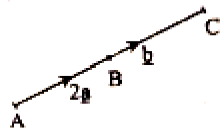
৮. $|\overrightarrow{AB}| = x$ হলে, $|3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA}| + 2$ এর মান কত? [ম. বো. ২০]

ⓚ x ⓛ 5x

ⓜ x + 2 ⓝ 5x + 2

গ

৯. চিত্রে $\overrightarrow{AC}$ = কত? [ঢা. বো. ১৯]

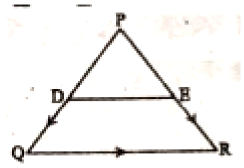


ⓚ $2\underline{a} + \underline{b}$ ⓛ $2\underline{a} - \underline{b}$

ⓜ $\underline{b} - 2\underline{a}$ ⓝ $-\underline{b} - 2\underline{a}$

ক

১০. [কু. বো. ১৯]



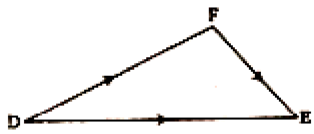
D ও E যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR})$ ⓛ $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD})$

ⓜ $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE})$ ⓝ $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PD})$

ঘ

১১. [কু. বো. ১৯]



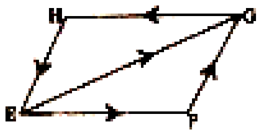
$\overrightarrow{DF}$ ভেক্টরের মান কত ?

(ক) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}$ (খ) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$

(গ) $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}$ (ঘ) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$

খ

১২. [সি. বো. ১৯]



উপরের চিত্রের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GE}$

(খ) $\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GE}$

(গ) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EH} = \underline{0}$

(ঘ) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EH} = 0$

ঘ

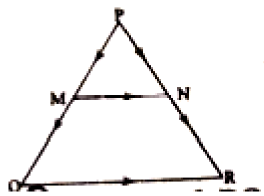
১৩. M ও N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $7\underline{a}+5\underline{b}$ এবং $3\underline{a}-2\underline{b}$ হলে $\overline{MN}$ = কত? [দি. বো. ১৯]

(ক) $10\underline{a}+3\underline{b}$ (খ) $-4\underline{a}-7\underline{b}$

(গ) $4\underline{a}+7\underline{b}$ (ঘ) $10\underline{a}-3\underline{b}$

খ

১৪. [ব. বো. ১৯]



যদি ΔPQR -এ PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথক্রমে M ও N হয়, তবে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM})$

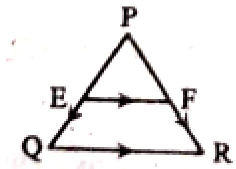
(খ) $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN})$

(গ) $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PM})$

(ঘ) $\overrightarrow{QR} = 2(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})$

ক

১৫. [রা. বো. ২০]



ΔPQR এর PQ ও PR এর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে E F হলে– i. EF ∥ QR

ii. $EF = \frac{1}{2}QR$

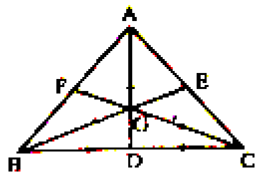
iii. $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EF}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

ঘ

১৬. পাশের চিত্রে G, ΔABC এর ভরকেন্দ্র হলে– [কু. বো. ২০]



i. AG : GD = 1 : 2

ii. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

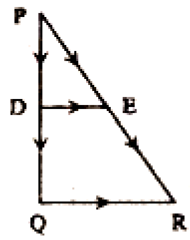
iii. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}=\underline{0}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

গ

১৭. নিচের চিত্রটি লক্ষ কর: [ম. বো. ১৯]



PQ এর মধ্যবিন্দু D এবং QR ∥ DE হলে-

i. $\overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{PD})$

ii. $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PE}$

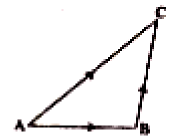
iii. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

ঘ

১৮. [ঢা. বো. ১৯]



ΔABC এর ক্ষেত্রে-

i. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

ii. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

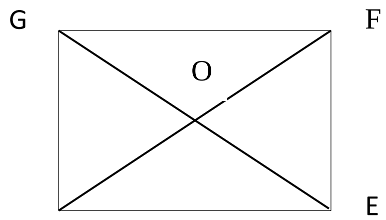
iii. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

নিচের কোনটি সঠিক

ⓚi ও ii ⓦii ও iii ⓖi ও iii ⓘi, ii ও iii

খ

১৯.



DEFG সামান্তরিকের দুইটি কর্ণDF এবং EG হলে-

i. $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

ii. $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

iii. $\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EF}$

নিচের কোনটি সঠিক? [দি. বো. ১৯]

ⓚi ও ii ⓦii ও iii ⓖi ও iii ⓘi, ii ও iii

ঘ

২০. $\overrightarrow{MN} = b\overrightarrow{TS}$ হলে-

i. $MN \parallel TS$

ii. MN ও TS এর দৈর্ঘ্য অসমান, যখন $b \neq 1$

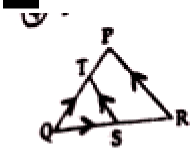
iii. $\overrightarrow{MN}$ ও $\overrightarrow{TS}$ এর দিক বিপরীত, যখন $b<0$

নিচের কোনটি সঠিক? [চ. বো. ১৯]

ⓚi ও ii ⓦii ও iiiⓖi ও iii ⓘi, ii ও iii

ঘ

২১. [দি. বো. ১৯]



চিত্রে QR এবং QP এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T হলে-

i. $ST \parallel RP$

ii. $ST = \frac{1}{2}RP$

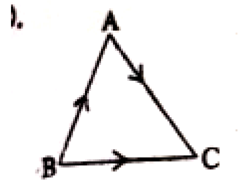
iii. $\overrightarrow{QT} - \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{ST}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚi ও ii ⓦii ও iii ⓖi ও iii ⓘi, ii ও iii

ঘ

২২. [সকল. বো. ১৮]



ΔABC এ-

i. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

ii. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = 0$

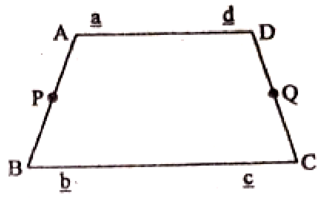
iii. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚi ও ii ⓦii ও iii ⓖi ও iii ⓘi, ii ও iii

ক

উদ্দীপকটি পড়ে ২৩ ও ২৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



P,Q যথাক্রমে AB ও DC এর মধ্যবিন্দু। [রা. বো. ১৯]

২৩. P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

ⓚ $\frac{a+b+c}{2}$ ⓦ $\frac{b-c}{2}$

ⓖ $\frac{a-b}{2}$ ⓘ $\frac{a+b}{2}$

ঘ

২৪. $\overrightarrow{PQ}$ এর ক্ষেত্র–

i. $PQ \parallel BC \parallel AD$

ii. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$

iii. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚi ও ii ⓦii ও iii ⓖi ও iii ⓘi, ii ও iii

খ

২৫.

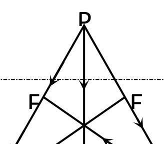
DF ভেক্টরের মান কত? [কু. বো. ১৭]

KDF − FE L DE − EF

MDE + EF N EF + ED

গ

২৬.



Δ**PQR এ D, E, F যথাক্রমে QR, RP ও PQ এর মধ্যবিন্দু হলে নিচের কোনটি সঠিক?** *[রা. বো. ১৭]*

K $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RP}$

L $\overrightarrow{PD} = \dfrac{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}}{2}$

M $\overrightarrow{QE} = \dfrac{\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR}}{2}$

N $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{RF} = 0$

ঘ

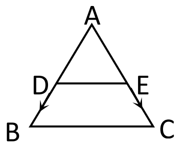
২৭. **A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে ঘ⃗, ন⃗, প⃗ এবং C বিন্দুতে AB রেখাংশ 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে নিচের কোনটি সঠিক?** *[য. বো. ১৭]*

K $\vec{c} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$ L $\dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

M $\vec{c} = \dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$ N $\dfrac{2\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$

খ

২৮.



D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু হলে, নিচের কোনটি সঠিক? *[ঢা. বো. ১৬]*

K $\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right)$

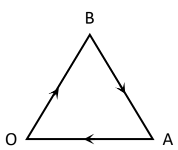
L $\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}\right)$

M $\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}\right)$

N $\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

ক

২৯.



চিত্র $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}$ = কত? *[দি. বো. ১৬]*

K $-\overrightarrow{OA}$ L $\overrightarrow{OA}$

M $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO}$ N $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA}$

ঘ

৩০. কোনো নির্দিষ্ট ভেক্টর মূলবিন্দু **O** এর সাপেক্ষে**A** ও **B** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ও$\underline{b}$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? *[দি. বো. ১৭]*

K $\overrightarrow{OA} = \underline{a} - \underline{b}$ L $\overrightarrow{OB} = \underline{b} - \underline{a}$

M $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ N $\overrightarrow{AB} = \underline{a} - \underline{b}$

গ

৩১. ভেক্টর $3\underline{a} - 2\underline{b}$ এর সমান্তরাল ভেক্টর কোনটি? *[ঢা. বো. ১৭]*

K $2\underline{a} + 3\underline{b}$ L $-3\underline{a} + 2\underline{b}$

M $2\underline{a} - 3\underline{b}$ N $\underline{a} + 3\underline{b}$

খ

৩২. **P** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ এবং **Q** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b}$ হলে $\overrightarrow{PQ}$ = কত? *[কু. বো. ১৬; দি. বো. ১৬]*

K $\underline{b} - \underline{a}$ L $\underline{b} + \underline{a}$

M $\underline{a} + \underline{b}$ N $\underline{a} - \underline{b}$

ক

৩৩. **AB** রেখাংশ **C** বিন্দুতে **m : n** অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, **[A, B ও C** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$**]** *[ঢা. বো. ১৬]*

K $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}$ L $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{m + n}$

M $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m - n}$ N $\underline{c} = \dfrac{m\underline{a} + n\underline{b}}{m + n}$

ক

৩৪. **A, B, C** এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$এবং **C, AB** কে **5 ঃ 11** অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে $\underline{c}$ = ? *[চ. বো. ১৭]*

K $\dfrac{5\underline{b} + 11\underline{a}}{16}$ L $\dfrac{11\underline{b} + 5\underline{a}}{16}$

M $\dfrac{5\underline{b} - 11\underline{a}}{16}$ N $\dfrac{11\underline{b} - 5\underline{a}}{16}$

ক

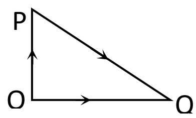
৩৫. **A, B, C** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$এবং **C** বিন্দুটি **AB** রেখাংশকে **1 : 2** অনুপাতে অন্তবির্ভক্ত করলে কোনটি সঠিক? *[রা. বো. ১৬]*

K $\hat{c} = \dfrac{\hat{a} + \hat{b}}{3}$ L $\hat{c} = \dfrac{2\hat{a} + \hat{b}}{3}$

M $\hat{c} = \dfrac{\hat{a} + 2\hat{b}}{3}$ N $\hat{c} = \dfrac{2\hat{a} + 2\hat{b}}{3}$

খ

৩৬.



P এবং **Q** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর **(**$\underline{a} - \underline{b}$**)** এবং **(**$\underline{a} + \underline{b}$**)** হলে, $\overrightarrow{PQ}$ = কত? *[য. বো. ১৬]*

K $2\underline{a}$ L $2\underline{b}$

M $\underline{a} + \underline{b}$ N $\underline{a} - \underline{b}$

খ

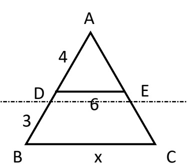
৩৭. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে**P** ও **Q** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **$9\underline{a} - 4\underline{b}$** এবং **$-3\underline{a} - \underline{b}$** হলে $\overrightarrow{PQ}$ = কত? *[ব. বো. ১৬]*

K $6\underline{a}$ ত $5\underline{b}$ L $12\underline{a} - 3\underline{b}$

M $-12\underline{a} + 3\underline{b}$ N $\dfrac{9\underline{a} - 4\underline{b}}{-3\underline{a} - \underline{b}}$

গ

৩৮.



উপরের চিত্রে DE || BC হলে x এর মান কত? ঢা. বো. ১৭

K5.5 L10.5 M12 N14

(খ)

যে কোন ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.AB রেখাংশ C বিন্দুতে 3 ঃ 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।

উদ্দীপকের আলোকে (৩৯ ও ৪০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৩৯. C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? ন. প্র. চ. বো.

K$3\underline{b}-2\underline{a}$ L$2\underline{a}-3\underline{b}$

M$3\underline{b}+2\underline{a}$ N$5\underline{a}$

(ক)

৪০. $\overrightarrow{AC}$ = কোনটি? ন. প্র. চ. বো.

K$3(\underline{b}-\underline{a})$ L $3(\underline{a}-\underline{b})$

M$3\underline{b}-\underline{a}$ N $\underline{a}-3\underline{b}$ (ক)

৪১. $\underline{u}$ যে কোনো অশূন্য ভেক্টর এবং m ∈∇, m > 0 হলে– দি. বো. ১৬

i. $m\underline{u}$এর দিক $\underline{u}$এর বিপরীত দিকে

ii. $m\underline{u}$এর দিক $\underline{u}$এর দিকের সাথে একমুখী

iii. $m\underline{u} \neq 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

K i ও ii Li ও iii Mii ও iii Ni, ii ও iii

(গ)

৪২. যে কোনো $\underline{a}$, $\underline{b}$ও $\underline{c}$ভেক্টরের জন্য– রা. বো. ১৭

i. $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি

ii. $m(\underline{b}+\underline{c})=m\underline{b}+m\underline{c}$, ভেক্টর বণ্টন বিধি

iii. $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ ভেক্টর যোগের সংযোগ বিধি

নিচের কোনটি সঠিক?

Ki ও ii Li ও iii Mii ও iii Ni, ii ও iii

(ঘ)

৪৩. $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর $\underline{v}$ হবে যদি— ন. প্র. কু. বো.; চ. বো. ১৬

i. $|\underline{v}|=|\underline{u}|$

ii. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল

iii. $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর বিপরীত দিক

উপরে তথ্যানুসারে নিচের কোনটি সঠিক?

Ki ও iiLii ও iiiMi ও iiiNi, ii ও iii (ঘ)

৪৪. যদি PQ || RS হয়, তাহলে —

i. $\overrightarrow{PQ}=n\overrightarrow{RS}$; যেখানে n হল অদিক রাশি

ii. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$

iii. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$

নিচের কোনটি সঠিক? ব. বো. ১৭

Ki Lii Mi ও ii Ni ও iii

(ক)

৪৫. শূন্য ভেক্টরের ক্ষেত্রে — কু. বো. ১৬

i. পরমমান শূন্য

ii. ধারকরেখা নেই

iii. দিক নির্ণয় করা যায়

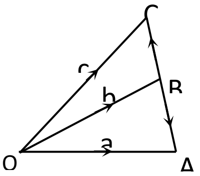
নিচের কোনটি সঠিক?

Ki ও ii Lii ও iii

Mi ও iii Ni, ii ও iii

(ক)

নিচের চিত্রের আলোকে (৪৬ ও ৪৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৪৬. $\overrightarrow{AB}$ = কত? সি. বো. ১৭

K $\frac{1}{2}(\underline{a}-\underline{b})$ L$\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$

M $\underline{a}+\underline{b}$ N $\underline{b}-\underline{a}$

(ঘ)

৪৭. যদি C বিন্দুটি AB এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে নিচের কোনটি সঠিক? সি. বো. ১৭

K $\underline{c}=\frac{1}{2}(\underline{b}-\underline{a})$ L$\underline{c}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$

M $\underline{c}=-\frac{1}{2}(\underline{b}-\underline{a})$ N$\underline{c}=-\frac{1}{2}(\underline{a}-\underline{b})$

(খ)

গুরবত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. **যেকোনো ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}==\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$ হলে, এটা ভেক্টর যোগের–**

(ক) বিনিময় বিধি ● সংযোগ বিধি (গ) সামান্তরিক বিধি (ঘ) ত্রিভুজ বিধি

২. **– ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক এবং ধারকরেখা নেই।**

(ক) একক ● শূন্য (গ) সমান (ঘ) অবস্থান

৩. **A এবং C বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ হলে, $\overrightarrow{CA}$ = কোনটি?**

● $\underline{a}-\underline{b}$ (খ) $-\underline{a}-\underline{b}$ (গ) $\underline{a}+\underline{b}$ (ঘ) $-\underline{a}+\underline{b}$

৪. **$\overrightarrow{AB}$ যেকোনো ভেক্টর হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

(ক) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ (খ) $\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|$ ● $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}=-|\overrightarrow{AB}|$

৫. **$P(\underline{m}+\underline{n})$ = কত?**

(ক) $P\underline{m}\,\underline{n}$ ● $P\underline{m}+P\underline{n}$ (গ) $P\hat{\underline{m}}+P\hat{\underline{n}}$ (ঘ) $P|\underline{m}|+P|\underline{n}|$

৬. **ABCD আয়তক্ষেত্রের–**

i. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ii. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ iii. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৭. $\overrightarrow{AA}$ **একটি–**

i. বিন্দু ভেক্টর ii. এর দৈর্ঘ্য শূন্য

iii. এটি অদিক রাশি

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii ● i, ii ও iii

৮. **শূন্য ভেক্টরের–**

i. দিক নির্ণয় করা যায় ii. পরমমান শূন্য

iii. ধারক রেখা নেই

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ৯ ও ১০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$।

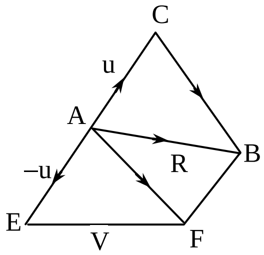
৯. **C বিন্দুটি AB রেখাংশকে 5 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে কোনটি সঠিক?**

(ক) $\underline{c} = \dfrac{3\underline{a} - 5\underline{b}}{2}$ ● $\underline{c} = \dfrac{-3\underline{a} + 5\underline{b}}{2}$ (গ) $\underline{c} = \dfrac{3\underline{a} + 5\underline{b}}{8}$ (ঘ) $\underline{c} = \dfrac{3\underline{a} - 5\underline{b}}{8}$

১০. **ভেক্টর মূলবিন্দুটি O হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

(ক) $\overline{OA} = a - b$ (খ) $\overline{OA} + \overline{OC} = AC$ ● $\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ (ঘ) $OC = \underline{c} - \underline{b}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১১ ও ১২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১১. **ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী $\overrightarrow{AF}$ = ?**

(ক) $\underline{u} - \underline{v}$ ● $\underline{v} - \underline{u}$ (গ) $\underline{u} + \underline{v}$ (ঘ) $2\underline{n} + \underline{v}$

১২. **AEFB চতুর্ভুজ ভেক্টর যোগের কোন বিধি মেনে চলে?**

(ক) ত্রিভুজবিধি (খ) রম্বসবিধি ● সামান্তরিক বিধি (ঘ) বর্গবিধি

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩ ও ১৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$. AB রেখাংশ C বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।

১৩. **C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?**

● $3\underline{b} - 2\underline{a}$ (খ) $2\underline{a} - 3\underline{b}$ (গ) $3\underline{b} + 2\underline{a}$ (ঘ) $5\underline{a}$

১৪. **$\overrightarrow{AC}$ = কোনটি**

● $3(\underline{b} - \underline{a})$ (খ) $3(\underline{a} - \underline{b})$ (গ) $3\underline{b} - \underline{a}$ (ঘ) $\underline{a} - 3\underline{b}$

১২·১ : স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৫. **রাশি কত প্রকার?** (সহজ)

● ২ (খ) ৩ (গ) ৪ (ঘ) ৬

১৬. **স্কেলার রাশি প্রকাশের জন্য প্রয়োজন–** (সহজ)

● শুধু মান (খ) শুধু দিক (গ) মান অথবা দিক (ঘ) মান ও দিক উভয়ই

১৭. **নিচের কোনটি ভেক্টর রাশি?** (সহজ)

(ক) ভর (খ) আয়তন (গ) তাপমাত্রা ● বল

১৮. **যে রাশির শুধু মান আছে দিক নেই সে রাশিকে কী বলে?** (সহজ)

(ক) ভেক্টর রাশি ● স্কেলার রাশি (গ) মৌলিক রাশি (ঘ) যৌগিক রাশি

১৯. **যে রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে তাকে কী বলে?** (সহজ)

(ক) স্কেলার রাশি (খ) মৌলিক রাশি ● ভেক্টর রাশি (ঘ) যৌগিক রাশি

২০. **যে ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক ও ধারক রেখা নেই তাকে কী বলে?** (সহজ)

(ক) একক ভেক্টর ● শূন্য ভেক্টর (গ) আয়তন ভেক্টর (ঘ) অবস্থান ভেক্টর

২১. **কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে কী বলে?** (সহজ)

● আদিবিন্দু (খ) অন্তবিন্দু (গ) প্রান্তবিন্দু (ঘ) নির্দেশক

২২. **দিক নির্ভরতা অনুসারে রাশিকে কয়ভাগে ভাগ করা যায়?** (সহজ)

(ক) ৫ (খ) ৪ (গ) ৩ ● ২

২৩. **নিচের কোনটি অদিক রাশি?** (সহজ)

● আয়তন (খ) বল (গ) ওজন (ঘ) সরণ

২৪. **নিচের কোনটি স্কেলার রাশি?** (সহজ)

(ক) সরণ (খ) ত্বরণ (গ) ওজন ● দৈর্ঘ্য

২৫. **নিচের কোনটি ভেক্টর রাশি?** (সহজ)

(ক) আয়তন (খ) দৈর্ঘ্য ● সরণ (ঘ) সময়

২৬. **কোনো রেখাংশের দুই প্রান্তবিন্দু চিহ্নিত করলে তাকে কী রেখাংশ বলে?** (সহজ)

(ক) অদিক (খ) নির্দিক ● দিক নির্দেশক (ঘ) বিপরীত

২৭. **যেসব রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে তাকে কোন রাশি বলে?** (সহজ)

(ক) মৌলিক (খ) যৌগিক ● ভেক্টর (ঘ) স্কেলার

২৮. **AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য A ও B বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের পরিমাণের সমান হলে নিচের কোনটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়?** (মধ্যম)

(ক) $|BA|$ ● $|\overrightarrow{AB}|$ (গ) $|AB|$ (ঘ) $|\vec{A}| + |\vec{B}|$

২৯. **নিচের কোনটি স্কেলার রাশি?** (সহজ)

(ক) সরণ (খ) বেগ (গ) ত্বরণ ● দ্রুতি

৩০. **2 টাকা, 3cm, 5 ইত্যাদি কোন জাতীয় রাশি?** (সহজ)

(ক) একক (খ) যৌগিক ● স্কেলার (ঘ) মৌলিক

৩১. **কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য একক হলে, তাকে কী ভেক্টর বলে?** (সহজ)

● একক (খ) সমান্তরাল (গ) বিপরীত (ঘ) শূন্য

৩২. **ভেক্টর রাশির অপর নাম কী?** (সহজ)

ⓚ অদিক ⓚ নির্দিক ⓖ স্কেলার ● সদিক

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩৩. **ভেক্টর রাশি–**

i. এর অপর নাম সদিক রাশি

ii. এর মান ও দিক আছে

iii. এর উদাহরণ– বেগ, বল

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৩৪. **স্কেলার রাশির–**

i. মান আছে কিন্তু দিক নাই

ii. কেবলমাত্র মান আছে

iii. কেবলমাত্র দিক আছে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১২·২ : ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩৫. **কোনো ভেক্টর যে অসীম সরলরেখা অংশ বিশেষ, তাকে ঐ ভেক্টরের কী বলা হয়?** (সহজ)

ⓚ সরলরেখা ⓚ সমান্তরাল রেখা ⓖ বক্ররেখা ● ধারক রেখা

৩৬. **$\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ এবং $m > 0$ হলে AB ও CD সম্পর্কে কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)

ⓚ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমান ⓚ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীত

ⓖ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী ● $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী

৩৭. **$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ কে কী ভেক্টর বলা হয়?** (মধ্যম)

ⓚ সমান ● সমান্তরাল ⓖ অসমান ⓘ সদৃশ

৩৮. **$|\underline{u}|$ একটি শূন্য ভেক্টর হলে নিচের কোনটি সত্য?** (সহজ)

● $|\underline{u}| = 0$ ⓚ $|\underline{u}| = 2$ ⓖ $o.\underline{u} = 1$ ⓘ $|\underline{u}| = 1$

৩৯. **যদি দুটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান, ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল এবং দিক একই হয় তাকে কী বলে?** (মধ্যম)

● সমান ভেক্টর ⓚ সদৃশ ভেক্টর ⓖ বিপরীত ভেক্টর ⓘ একক ভেক্টর

৪০. **ভেক্টর রাশি প্রকাশের জন্য কী প্রয়োজন?** (সহজ)

ⓚ শুধু মান ⓚ শুধু দিক

ⓖ মান অথবা দিক ● মান ও দিক উভয়ই

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

$\overrightarrow{AB}$ একটি দিক রেখাংশ।

ওপরের তথ্যের আলোকে ৪১ – ৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪১. **রেখাংশের B কে কী বলে?** (সহজ)

● অন্তঃবিন্দু ⓚ প্রান্তঃবিন্দু ⓖ মধ্যবিন্দু ⓘ পাদবিন্দু

৪২. **রেখাংশের আদিবিন্দু কোনটি?** (সহজ)

ⓚ $\overrightarrow{A}$ ⓚ $\overrightarrow{B}$ ● A ⓘ B

৪৩. **রেখাংশটির মান কত?** (মধ্যম)

ⓚ $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ ⓚ $\overrightarrow{AB}$ ⓖ $\overrightarrow{AB}$ ● $|\overrightarrow{AB}|$

১২·৩ : ভেক্টরের সমতা; বিপরীত ভেক্টর

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪৪. **ভেক্টর যোগের কোন বিধি অনুসারে $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ হয়?**(সহজ)

● বিনিময় ⓚ সংযোগ ⓖ বর্জন ⓘ বণ্টন বিধি

৪৫. **কোন বিধি অনুসারে $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ হয়?** (সহজ)

ⓚ বর্জন ● সংযোগ ⓖ বণ্টন ⓘ বিনিময় বিধি

৪৬. **কোন বিধি অনুসারে $(\underline{u} + \underline{v}) = (\underline{u} + \underline{w})$ হলে $(\underline{v} + \underline{w})$ হয়?** (সহজ)

ⓚ বিনিময় ⓚ বণ্টন ● বর্জন ⓘ সংযোগ

৪৭. **$\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{v} = w$ হলে–** (মধ্যম)

ⓚ $\underline{u} > \underline{w}$ ⓚ $\underline{u} \neq \underline{w}$ ● $\underline{u} = \underline{w}$ ⓘ $\underline{u} < \underline{w}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪৮. **$\underline{u}, \underline{v}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ প্রকাশ করে –**

i. যোজন বিধি

ii. বিয়োজন বিধি

iii. গুণন বিধি

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ⓚ ii ⓖ i ও ii ⓘ ii ও iii

৪৯. **$\underline{u}, \underline{v}$ $\underline{w}$-এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ প্রকাশ করে –**

i. যোজন বিধি

ii. বিয়োজন বিধি

iii. সহযোজন বিধি

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৫০. **একটি ভেক্টর $\underline{u}$, অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান হলে–**

i. $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য

ii. $\underline{u}$ $\underline{v}$ এর সমান্তরাল

iii. $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সাথে একই

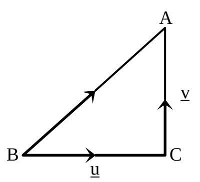
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ⓚ i ও ii ⓖ i ও iii ● i, ii ও iii

১২·৪ : ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

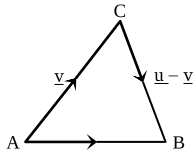
৫১.



চিত্রে $\overrightarrow{AB}$ এর মান ও দিক সূচিত হয় কোন ভেক্টর দ্বারা? (মধ্যম)

ⓚ $\underline{u}$ ⓚh $\underline{v}$ ⓖ $\underline{u} - \underline{v}$ ● $\underline{u} + \underline{v}$

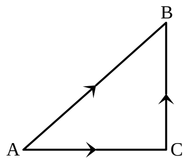
৫২. $\overrightarrow{\mathbf{CB}} = \underline{u} - \underline{v}$ এবং $\overrightarrow{\mathbf{AC}} = \underline{\mathbf{v}}$ হলে, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ = কত?



(মধ্যম)

● $\underline{u}$ ⓚh $\underline{v}$ ⓖ $\underline{u} - \underline{v}$ ⓖh $\underline{u} + \underline{v}$

৫৩.

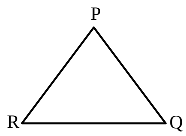


$\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}}, \overrightarrow{\mathbf{CB}}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ● $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

গ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ঘ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

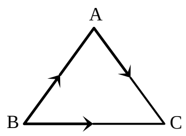
৫৪.



চিত্রে $\overrightarrow{\mathbf{RP}} + \overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ = কত? (সহজ)

ক $\overrightarrow{PR}$ খ $\overrightarrow{PQ}$ ● $\overrightarrow{RQ}$ ঘ $\frac{1}{2}\overrightarrow{RQ}$

৫৫. (সহজ)

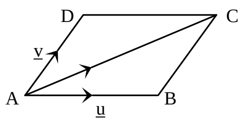


ত্রিভুজ **ABC** এর জন্য নিচের কোনটি সত্য?

ক $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ খ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$

গ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 1$ ● $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

৫৬.



ABCD সামান্তরিকের **AC** ভেক্টর কোনটি? (সহজ)

ক $\underline{u}$ খ $\underline{v}$ গ $\underline{u} - \underline{v}$ ● $\underline{u} + \underline{v}$

৫৭. সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট **O** বিন্দু সাপেৰে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু **P** এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)

● $\overrightarrow{OP}$ খ $\overrightarrow{PO}$ গ $\overrightarrow{P}$ ঘ $\overrightarrow{O}$

৫৮. **Δ ABC**-এর **AB** বাহুর মধ্যবিন্দু **D** হলে **CD** এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ● $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ গ $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ঘ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

৫৯. শূন্য ভেক্টর বলতে কী বোঝায়? (সহজ)

● যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য খ যে ভেক্টর রাশির মান এক একক

গ যে রাশির মান অসীম ঘ যে রাশির মান ২

৬০. দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে কী বলা হয়? (সহজ)

ক আয়তন খ ওজন ● লব্ধি ঘ ত্বরণ

৬১. ভেক্টরকে স্কেলার দ্বারা গুণ করলে গুণফল হয়– (মধ্যম)

ক শূন্য ● ভেক্টর গ ধ্রুবক ঘ ফাঁকা

৬২. $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ দিক নির্দেশক রেখাংশের মান কত? (সহজ)

● BA খ $\overrightarrow{BA}$ গ $\overrightarrow{AB}$ ঘ AB + BA

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৬৩. **ABC** ত্রিভুজের **AB** বাহুর মধ্যবিন্দু **D** দিয়ে **BC** এর সমান্তরাল রেখা **A**-কে **E** বিন্দুতে ছেদ করলে–

i. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ ii. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

iii. $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

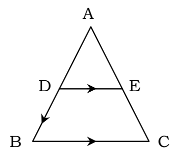
ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ● i, ii ও iii

৬৪.

i. DE || BC

ii. $DE = \frac{1}{2}$ BC

iii. DE = DA + AE



নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬৫. যেকোনো ভেক্টর **a**, **b**, **c**-এর জন্য–

i. $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$

ii. a + b + c = a + c + b

iii. $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৬. শূন্য ভেক্টরের –

i. পরমমান শূন্য

ii. দিক অনির্ণেয়

iii. দৈর্ঘ্য শূন্য

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৭. ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি অনুসারে যেকোনো **r, s, t**–এর মধ্যে–

i. $\underline{r} + \underline{s} = \underline{r} + \underline{t}$ হলে $\underline{s} = \underline{t}$

ii. $\underline{s} + \underline{t} = \underline{r} + t$ হলে $\underline{s} = \underline{r}$

iii. $\underline{r} + \underline{s} = t + \underline{s}$ হলে $\underline{r} = \underline{s}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৬৮ ও ৬৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে,

৬৮. নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ ● $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

গ $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ ঘ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

৬৯. $|\overrightarrow{DE}| = 6$ সে. মি. হলে $|\overrightarrow{BC}|$ এর মান কত সে. মি.? (মধ্যম)

ক 6 সে. মি. খ 9 সে. মি. ● 12 সে. মি. ঘ 15 সে. মি.

১২.৫ : ভেক্টরের যোগের বিধিসমূহ

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭০. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ তিনটি ভেক্টর হলে ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি কোনটি? (মধ্যম)

● $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$ খ $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

গ $(\underline{u} + \underline{v})(\underline{v} + \underline{w})$ ঘ $(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$

৭১. $\underline{u} = -\underline{v}$ ও $\underline{v} = \underline{w}$ হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$ খ $\underline{u} + \underline{v} = 0$ ● $\underline{u} + \underline{w} = 0$

ঘ $\underline{v} + \underline{w} = 0$

৭২. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল না হলে এদের সাথে নিচের কোন ভেক্টরটি অবশ্যই ত্রিভুজ উৎপন্ন করবে? (সহজ)

ক $\underline{u} - \underline{v}$ খ $\underline{v} - \underline{u}$ গ $\underline{uv}$ ● $\underline{u} + \underline{v}$

৭৩. $|\hat{A}|$ = কত? (সহজ)

● 1 খ 0 গ $\frac{1}{2}$ ঘ 2

৭৪. $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ দুটো ভেক্টর হলে– (মধ্যম)

ক $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ খ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

● $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ঘ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭৫. $\underline{u} = \underline{v}$ হলে–

i. $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্যের সমান

ii. $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সাথে একমুখী

iii. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৭৬. m ও n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি ভেক্টর হলে–

i. $(m - n)\underline{b} = m\underline{b} - n\underline{b}$

ii. $|\underline{a} + \underline{b}| = a + b$

iii. $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii ● i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৭৭. $m\underline{u} + n\underline{u}$ হলে–

i. $m(\underline{u} - \underline{u})$

ii. $\underline{u}\ (m + n)$

iii. $(m + n)\underline{u} + \underline{u}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ● ii গ iii ঘ ii ও iii

৭৮. $m\underline{u} + m\underline{v} - m(\underline{u} - \underline{v})$ সত্য হবে যদি–

i. m-এর সকল মানের জন্য সত্য হয়

ii. v-এর সকল মানের জন্য সত্য হয়

iii. u-এর সকল মানের জন্য সত্য হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i খ ii গ iii ঘ ii ও iii

১২.৬ : ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭৯. m ও n উভয়ই ঋণাত্মক হলে $(m + n)\underline{v}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরের দিকের সম্পর্ক কী? (মধ্যম)

ক সমান্তরাল ● বিপরীত

গ সমান্তরাল ও একই দিক ঘ একই দিক

৮০. m একটি স্কেলার রাশি এবং $\underline{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর হলে $(-m)\underline{a}$ = কত? (মধ্যম)

● $-m\underline{a}$ খ $m\underline{a}$ গ $(-\underline{a})(-m)$ ঘ $(-m)(-\underline{a})$

৮১. m > n হলে $(n - m)\underline{v}$ ভেক্টরের দিক ও $\underline{v}$ ভেক্টরের মধ্যে সম্পর্ক হবে– (মধ্যম)

ক সমান্তরাল খ সমান গ সমমুখী ● বিপরীত

৮২. ভেক্টর রাশির বর্ণনায়– (সহজ)

ক পরিমাণ উল্লেখ করতে হয়

খ দিক উল্লেখ করতে হয়

● পরিমাণ ও দিক উভয়ই উল্লেখ করতে হয়

ঘ ত্বরণ উল্লেখ করতে হয়

১২.৭ : ভেক্টরের সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত বণ্টসূত্র

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮৩. m ও n ধনাত্মক হলে $(m + n)\underline{u}$ ভেক্টরটির মান কোনটি? (মধ্যম)

● $|m + n||\underline{u}|$ খ $|m + n|\underline{u}$

গ $|mn|\underline{u}$ ঘ $mn|\underline{u}|$

৮৪. $\overrightarrow{AB} = 1$ একক হলে তাকে কী ভেক্টর বলা হয়? (সহজ)

● একক খ লব্ধি গ শূন্য ঘ অশূন্য

৮৫. যে ভেক্টরের মান 1 একক তাকে কী বলে? (সহজ)

ক শূন্য খ লব্ধি ● একক ঘ অশূন্য

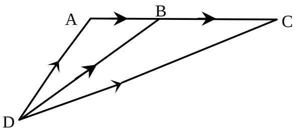
৮৬. m = 0 হলে $m\underline{u}$ = নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $\underline{u}$ ● $\underline{0}$ গ 0 ঘ $\underline{mu}$

১২.৮ : অবস্থান ভেক্টর

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮৭.



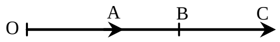
চিত্রে $\overrightarrow{AB}$ এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)

● $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$ (খ) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}$ (গ) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$ (ঘ) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

৮৮. **তিনটি ভেক্টর কিরূ প হলে ত্রিভুজ উৎপন্ন করা সম্ভব?** (সহজ)

(ক) সমমুখী (খ) অভিন্ন ● সমান্তরাল (ঘ) অসমান্তরাল

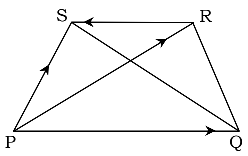
৮৯.



OB = A এবং BC = OB হলে OC কোনটি? (মধ্যম)

(ক) P (খ) $\frac{1}{2}$P ● 2P (ঘ) 4P

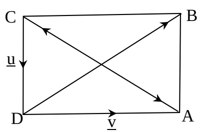
৯০.



চিত্রে $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$ = কত? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{PQ}$ (খ) $\overrightarrow{PR}$ ● $\overrightarrow{PS}$ (ঘ) $\overrightarrow{QS}$

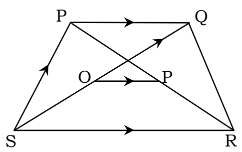
৯১.



চিত্রে $\overrightarrow{CA}$ = কত? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$ (খ) $-\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$ (গ) $-\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ ● $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$

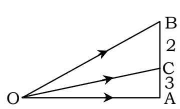
৯২.



PQRS ট্রাপিজিয়ামে $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ কর্ণের মধ্যবিন্দু O ও P হলে, $\overrightarrow{OP}$ = কত? (মধ্যম)

● $\frac{1}{2}$(SR – PQ) (খ) $\frac{1}{2}$(SR + PQ) (গ) $\frac{1}{2}$(SR – OP) (ঘ) $\frac{1}{2}$(OP – PQ)

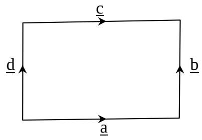
৯৩.



চিত্রে A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c হলে C এর অবস্থান ভেক্টর হবে– (মধ্যম)

(ক) $\frac{2\underline{a} - 3\underline{b}}{5}$ ● $\frac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5}$ (গ) $\frac{\underline{a} - \underline{b}}{5}$ (ঘ) $\frac{2(\underline{a} + \underline{b})}{5}$

৯৪.



চিত্রানুসারে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) + \underline{d}$

(খ) $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = (\underline{a} + \underline{d}) + (\underline{b} + \underline{c})$

(গ) $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = (\underline{a} + \underline{d}) + \underline{c} + \underline{d}$

(ঘ) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} + \underline{d}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৯৫. **$\underline{a}$ যেকোনো অশূন্য ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা m > o হলে–**

i. m$\underline{a}$ এর দিক $\underline{a}$ এর দিকের বিপরীত

ii. m $\underline{a}$ ≠ o

iii. m $\underline{a}$ এর দিক a এর দিকের সাথে একমুখী

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৯৬. **BC = QR হলে BC ও QR এর–**

i. ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল

ii. দৈর্ঘ্য সমান ও দিক একই

iii. দৈর্ঘ্য অসমান ও দিক বিপরীত

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৯৭. **$\underline{u}$ কোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে a = m$\underline{u}$, u এর সমান্তরাল হলে–**

i. m > o

ii. m = o

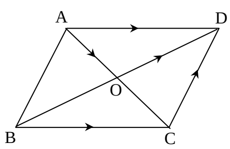
iii. m < o

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i (খ) i ও ii (গ) i ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের চিত্রের আলোকে ৯৮ – ১০০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

৯৮. **$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ এর সমান কোনটি?** (কঠিন)

(ক) $\overrightarrow{BC}$ ● $2\overrightarrow{BC}$ (গ) $\overrightarrow{AB}$ (ঘ) $2\overrightarrow{AB}$

৯৯. **$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ এর সমান ভেক্টর কোনটি?** (মধ্যম)

ক $\overrightarrow{BC}$ খ $2\overrightarrow{BC}$ গ $\overrightarrow{AB}$ ● $2\overrightarrow{AB}$

১০০. নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ খ $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ গ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$ ঘ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১০১ – ১০৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.

১০১. **AD** এর সমান কোনটি ? (সহজ)

● $\underline{b} - \underline{a}$ খ $\underline{b} + \underline{a}$ গ $\frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$ ঘ $\frac{1}{2}|\underline{b} + \underline{a}|$

১০২. **D** বিন্দুটি **AB**-কে **m : n** অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে **D** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)

● $\frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ খ $\frac{m\underline{a} - n\underline{b}}{m - n}$ গ $\frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ ঘ $\frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m + n}$

১০৩. **C** বিন্দুটি **AB**-এর মধ্যবিন্দু হলে **C** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (সহজ)

ক $\underline{a} + \underline{b}$ খ $\underline{a} - \underline{b}$ ● $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ ঘ $\frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$

নিচের তথ্যের আলোকে ১০৪–১০৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

১০৪. **AB** = কত? (সহজ)

ক $\frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$ খ $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ গ $\underline{a} - \underline{b}$ ● $\underline{b} - \underline{a}$

১১০. যদি দুটি অশূন্য ভেক্টর সমান হয় তবে নিচের কোনটি সঠিক?

ক ভেক্টরদ্বয় অসমান্তরাল ● ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল

গ ভেক্টরদ্বয় শূন্য ঘ ভেক্টরদ্বয় লম্ব

১১১. $\overrightarrow{AA}$ কী ধরনের ভেক্টর?

● বিন্দু ভেক্টর খ একক ভেক্টর

গ স্বাধীন ভেক্টর ঘ সীমাবদ্ধ ভেক্টর

১১২. $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ হলে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ = কোনটি?

ক $2\underline{b}$ খ $\underline{b}$ ● $\underline{0}$ ঘ $-2b$

১১৩. একটি ভেক্টর **a** এর অধিক বরাবর একক ভেক্টর কোনটি?

ক $\hat{a}$ ● $\underline{a}$ গ $\frac{\hat{a}}{|a|}$ ঘ $\frac{\bar{a}}{a}$

১১৪. ভেক্টরের মূলবিন্দু **O** হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক $\overline{OA}$ খ $\underline{a} - \underline{b}$

গ $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{AC}$ ● $\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

১১৫. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$ হলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরদ্বয় কিরূ প?

ক লম্ব খ সমান

১০৫. **A, B, C** সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি– (সহজ)

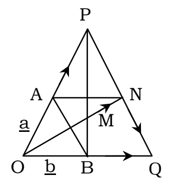
● $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ খ $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$ গ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ ঘ $\overrightarrow{BC} = k.\overrightarrow{AB}$

১০৬. **C** বিন্দুটি **AB** রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে– (সহজ)

● $C = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ খ $C = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

গ $C = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$ ঘ $C = \frac{1}{2}\underline{b} + \underline{a}$

নিচের চিত্রের আলোকে ১০৭–১০৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ} = 3\overrightarrow{OB}$ এবং N, $\overrightarrow{PQ}$ এর মধ্যবিন্দু।

১০৭. $\overrightarrow{AB}$ = কত? (সহজ)

● $-\underline{a} + \underline{b}$ খ $\underline{a} - \underline{b}$ গ $-\underline{a} - \underline{b}$ ঘ $\underline{a} + \underline{b}$

১০৮. $\overrightarrow{AN}$ = কত? (সহজ)

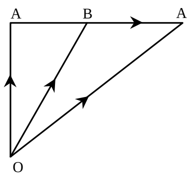
ক $\underline{b}$ খ $3\underline{b}$ গ $4\underline{b}$ ● $2\underline{b}$

১০৯. $\overrightarrow{PN}$ = কত? (মধ্যম)

ক $\underline{a} - 2\underline{b}$ খ $\underline{a} + 2\underline{b}$ ● $-\underline{a} + 2\underline{b}$ ঘ $-\underline{a} - 2\underline{b}$

গ সমান্তরাল ও দিক একই ● সমান্তরাল ও দিক বিপরীতমুখী

১১৬.



$\overrightarrow{AB}$ এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

ক $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ● $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ গ $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ ঘ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

১১৭. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ = কত?

ক $2\overrightarrow{AB}$ খ $2\overrightarrow{BA}$ ● 0 ঘ 1

১১৮. **5** সে. মি. ধার বিশিষ্ট ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি.?

ক 25 খ 30 গ 125 ● 150

১১৯. **A, B** ও **C** বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a, b** ও **c. C** বিন্দুতে **AB** রেখা **5 : 2** অনুপাতে বর্হিবিভক্ত হলে **C** এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

ক $\frac{2\underline{b} + 5\underline{b}}{3}$ খ $\frac{5\underline{b} + 2\underline{a}}{3}$

(গ) $\frac{5\underline{a} + 2\underline{b}}{3}$ ● $\frac{5\underline{b} + 2\underline{a}}{3}$

১২০. $\underline{a} - 5\underline{b}$ ভেক্টরটির সমান্তরাল কোনটি?

(ক) $\underline{a} + 5\underline{b}$ (খ) $5\underline{a} - \underline{b}$ (গ) $\underline{b} - 5\underline{a}$ ● $2\underline{a} - 10\underline{b}$

১২১. C বিন্দু AB রেখাংশকে 3 : 5 অনুপাতে বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\frac{5\underline{a} - 3\underline{b}}{8}$ ● $\frac{5\underline{a} + 3\underline{b}}{8}$

(গ) $\frac{5\underline{a} + 3\underline{b}}{2}$ (ঘ) $\frac{3\underline{a} + 5\underline{b}}{8}$

১২২. $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ হলে, $\underline{u} - \underline{v}$ = কত?

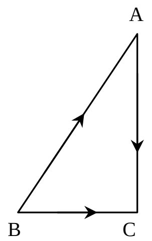
(ক) $\overrightarrow{BA}$ (খ) $\overrightarrow{CA}$ (গ) $\overrightarrow{BC}$ ● $\overrightarrow{CB}$

১২৩. মূলবিন্দু O এর সাপেৰে P এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে

$9\underline{a} - 4\underline{b}$ ও $-3\underline{a} - \underline{b}$ হলে, $\overrightarrow{PQ}$ এর মান কত?

(ক) $6\underline{a} - 5\underline{b}$ (খ) $12\underline{a} - 3\underline{b}$ ● $-12\underline{a} + 3\underline{b}$ (ঘ) $12\underline{a} - 3\underline{b}$

১২৪.



ABC ত্রিভুজের ৰেত্রে –

i. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$

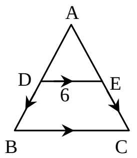
ii. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

iii. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১২৫. ΔABC এর $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে D ও E



হলে–

i. DE || BC

ii. $DE = \frac{1}{2} BC$

iii. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

১২৬. PQ দিক নির্দেশক রেখাংশ –

i. একটি ভেক্টর রাশি

ii. এর দৈর্ঘ্য $|\overrightarrow{PQ}|$

iii. এর দিক P বিন্দু থেকে Q এর দিকে

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii ● i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১২৭ ও ১২৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ C বিন্দুটি AB কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

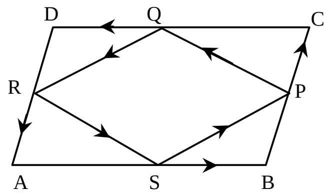
১২৭. নিচের কোনটি $\overrightarrow{AB}$?

● $\underline{b} - \underline{a}$ (খ) $\underline{a} - \underline{b}$ (গ) $\frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$ (ঘ) $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

১২৮. C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

(ক) $\frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b})$ (খ) $\frac{1}{3}(2\underline{a} - \underline{b})$ ● $\frac{1}{3}(\underline{a} - \underline{b})$ (ঘ) $\frac{1}{3}(\underline{a} + 2\underline{b})$

নিম্নোক্ত তথ্যের আলোকে ১২৯ ও ১৩০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের মধ্যবিন্দু S, P, Q, R এবং AB = $\underline{a}$, BC = $\underline{b}$,
CD = $\underline{c}$, DA= $\underline{d}$।

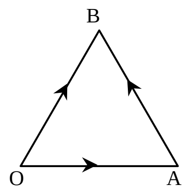
১২৯. RS এর অবস্থান ভেক্টর নিচের কোনটি?

(ক) $\frac{\underline{c} + \underline{d}}{2}$ ● $\frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$ (গ) $\frac{\underline{c} - \underline{d}}{2}$ (ঘ) $\frac{\underline{d} - \underline{c}}{2}$

১৩০. PQRS চতুর্ভুজটি কী?

(ক) আয়তক্ষেত্র (খ) রম্বস ● সামান্তরিক (ঘ) বর্গক্ষেত্র

নিম্নোক্ত তথ্যের আলোকে ১৩১ ও ১৩২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



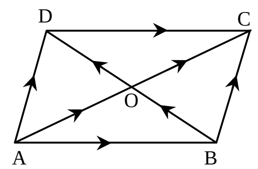
১৩১. O বিন্দুর প্রেৰিতে A বিন্দুর অবস্থ্যান ভেক্টর কোনটি?

(ক) OA (খ) AO ● $\overrightarrow{OA}$ (ঘ) $\overrightarrow{AO}$

১৩২. $\overrightarrow{AB}$ = কত?

(ক) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (খ) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ ● $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (ঘ) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩৩ ও ১৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১৩৩. AB কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে কী হয়?

(ক) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$ ● $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$ (গ) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$ (ঘ) $\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

১৩৪. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ = কত?

● $2\overrightarrow{AB}$ (খ) $2\overrightarrow{BC}$ (গ) $2\overrightarrow{CD}$ (ঘ) $2\overrightarrow{AD}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৩৫. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ দুইটি সমান ভেক্টরের ক্ষেত্রে–

i. $|\underline{u}|=|\underline{v}|$

ii. $\underline{u}$ -এর ধারক $\underline{v}$ -এর ধারকের অভিন্ন অথবা সমান্তরাল

iii. $\underline{u}$ -এর দিক $\underline{v}$ -এর দিকের সঙ্গে একমুখী

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

১৩৬. $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$, $\overrightarrow{BO}=\underline{b}$ হলে–

i. $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}$ ii. $\overrightarrow{AB}=\underline{a}-\underline{b}$

iii. $\overrightarrow{AB}=-(\underline{b}-\underline{a})$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i (খ) ii (গ) i ও iii (ঘ) ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩৭– ১৩৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$.

১৩৭. ABCD সামান্তরিক হলে কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}+\underline{d}$ ● $\underline{b}-\underline{a}=\underline{c}-\underline{d}$

(গ) $\underline{a}+\underline{c}=\underline{b}+\underline{d}$ (ঘ) $\underline{b}-\underline{a}=\underline{c}+\underline{d}$

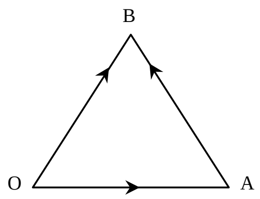
১৩৮. $\underline{b}-\underline{a}=\underline{c}-\underline{d}$ হলে ABCD কী? (সহজ)

(ক) বর্গক্ষেত্র (খ) ত্রিভুজ ● সামান্তরিক (ঘ) রম্বস

১৩৯. AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে ABCD কী? (সহজ)

● সামান্তরিক (খ) বৃত্ত (গ) রম্বস (ঘ) রেখা

নিচের চিত্রের আলোকে ১৪০–১৪২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হলে

১৪০. O বিন্দুর প্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (সহজ)

(ক) OA ● $\overrightarrow{OA}$ (গ) $\overrightarrow{AO}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}$

১৪১. $\overrightarrow{AB}$ = কত? (মধ্যম)

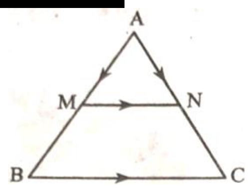
(ক) $\underline{ab}$ ● $\underline{b}-\underline{a}$ (গ) $\underline{a}-\underline{b}$ (ঘ) $\underline{a}+\underline{b}$

১৪২. $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ কোন ধরনের ভেক্টর? (সহজ)

(ক) শূন্য ● একক (গ) বিপরীত (ঘ) লম্ব

সৃজনশীল প্রশ্ন:

১. ঢাকা বোর্ড ২০২০



চিত্রে M, AB এর মধ্যবিন্দু এবং $MN \parallel BC$.

ক. $P(t,3t)$ ও $Q(t^2,2t)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল -1 হলে, t এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, N, AC এর মধ্যবিন্দু। ৪

গ. $BCMN$ ট্রাপিজিয়ামের BN এবং CM কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, $PQ \parallel MN \parallel BC$ এবং $PQ=\frac{1}{2}(BC-MN)$. ৪

⇨১নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. দেওয়াআছে, $P(t,3t)$ ও $Q(t^2,2t)$

PQরেখারঢাল$=\frac{2t-3t}{t^2-t}=\frac{-t}{t^2-t}$

$$=\frac{-t}{t(t-1)}=-\frac{1}{t-1}$$

প্রশ্নমতে, $-\frac{1}{t-1}=-1$

বা, $\frac{1}{t-1}=1$

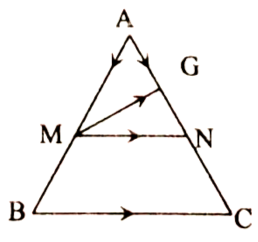
বা, $t-1=1$

বা, $t=1+1$

$\therefore t=2$

নির্ণেয়মান, $t=2$

খ. এখানে, $\varDelta ABC$ এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত MN রেখাংশ BC এর সমান্তরাল। প্রমান করতে হবে যে, N, AC এর মধ্যবিন্দু।



N, AC এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি G, AC এর মধ্যবিন্দু। তাহলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী পাই,

$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MG}$

বা, $2(\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM})=2\overrightarrow{MG}$

বা, $2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MG}$

কিন্তু, $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AG}$ এবং $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$

$\therefore \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MG}$

আবার ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধিঅনুযায়ী, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

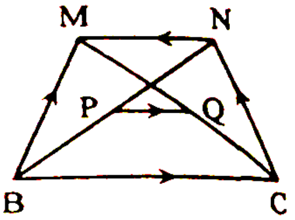
$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MG}$

কিন্তু,$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{MG}$

$\therefore MG$ ও MN অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ G ও N অভিন্ন বিন্দু।

অতএব, N, ACএরমধ্যবিন্দু।(প্রমানিত)

গ. এখানে, $BCNM$ ট্রাপিজিয়ামের BN ও CM কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P, Q যোগ করি। প্রমান করতে হবে যে, $PQ \parallel MN \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - MN)$



প্রমাণ: মনে করি কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতেB, C, N ও M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{c}, \underline{n}$ ও $\underline{m}$

তাহলে $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

এখন, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{n})$

এবং Qবিন্দুরঅবস্থান ভেক্টর$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{m})$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{m}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{n})$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b} + \underline{m} - \underline{n})$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NM})$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN})$$

এখন,$\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{MN}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN}$ ভেক্টরও $\overrightarrow{BC}$ও $\overrightarrow{MN}$ এর সমান্তরাল

আবার, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN}|$

বা, $PQ = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{MN}|)$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}(BC - MN)$$

$\therefore PQ \parallel MN \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - MN)$ (প্রমানিত)

২. রাজশাহী বোর্ড ২০২০

$\varDelta PQR$এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T

ক.$(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST})$ কে $\overrightarrow{PR}$এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

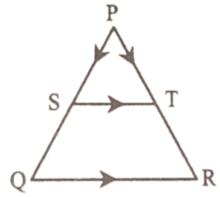
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, $QR \parallel ST$এবং$ST = \frac{1}{2}QR$ ৪

গ. $QRTS$ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু M ও Nহলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে,

$MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$ ৪

⇨২নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. এখানে, $\varDelta PQR$ এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T এখন, $\varDelta PST$ হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে পাই,

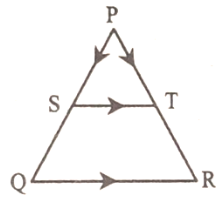


$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$

$\therefore \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ [PR এর মধ্যবিন্দু T]

খ. এখানে, $\varDelta PQR$ এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T। প্রমাণ করতে হবে যে, $QR \,||\, ST$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$

প্রমাণ : যেহেতু PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T.



$\therefore \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

এবং $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

এখন, $\varDelta PST$ হতে ভেক্টর বিয়োগবিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PS}$

বা, $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

$\therefore \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ})$.........................(1)

আবার, $\varDelta PQR$-হতে ভেক্টরের ত্রিভুজের বিয়োগবিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$............(2)

(1) ও (2) নং হতে পাই, $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

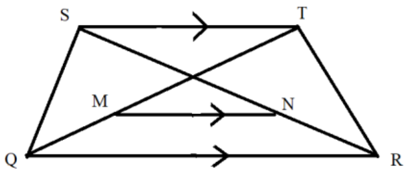
বা, $|\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

$$\therefore ST = \frac{1}{2}QR$$

যেহেতু ST, QR এর অর্ধেক। অতএব ST এবং QR একই ধারক রেখা অথবা সমান্তরাল হবে। চিত্রে, যেহেতু ST ও QR একই ধারক রেখা নয়। তাই ST ও QR পরস্পর সমান্তরাল। অর্থাৎ $QR \,||\, ST$

সুতরাং $QR \,||\, ST$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, $QRTS$ ট্রাপিজিয়ামের QT ও SR কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে Q, R, T ও S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{t}$ ও $\underline{s}$

তাহলে, $\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ এবং $\overrightarrow{ST} = \underline{t} - \underline{s}$

এখন, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t})$

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

সুতরাং $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) - \frac{1}{2}\left(\underline{q} + \underline{t}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{r} + \underline{s} - \underline{q} - \underline{t}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{r} - \underline{q} + \underline{s} - \underline{t}\right)$

কিন্তু $\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ এবং $\overrightarrow{TS} = \underline{s} - \underline{t}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{TS}\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST})$

এখন, $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}$ ভেক্টরও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ এর সমান্তরাল।

এবং $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}|$

বা, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{ST}|)$

$\therefore MN = \dfrac{1}{2}(QR - ST)$

$\therefore MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$ (প্রমাণিত)

৩. যশোর বোর্ড ২০২০

চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $P(0, -1)$, $Q(8,3)$, $R(6,7)$ এবং $S(-2,3)$.

ক. PR রেখার সমীকরননির্ণয় কর। ২

খ. $PQRS$ একাট আয়ত কি না যাচাই কর। ৪

গ. PQ, QR, RS ও SP এরমধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, $DEFG$ একটিসামান্তরিক। ৪

⇨৩নং প্রশ্নের সমাধান⇦

ক. দেওয়া আছে, $P(0, -1)$ এবং $R(6, 7)$

$\therefore PR$ রেখার সমীকরণ, $\frac{x-0}{0-6} = \frac{y+1}{-1-7}$

বা, $\frac{x}{-6} = \frac{y+1}{-8}$

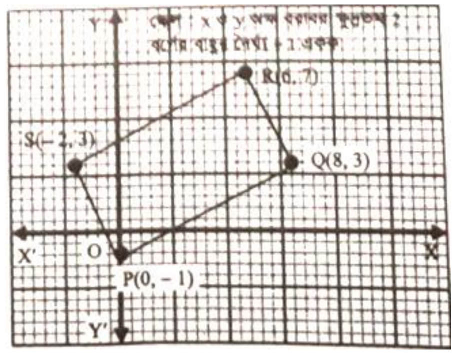
বা, $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{4}$

বা, $4x = 3y + 3$

$\therefore 4x - 3y = 3$

নির্ণেয় সমীকরণ, $4x - 3y = 3$.

খ. এখানে, $PQRS$ চতুর্ভুজের চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $P(0, -1), Q(8, 3), R(6, 7)$ এবং $S(-2, 3)$



$PQ = \sqrt{(0-8)^2 + (-1-3)^2}$ একক

$= \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2}$ একক

$= \sqrt{64 + 16}$ একক

$= \sqrt{80}$ একক $= 4\sqrt{5}$ একক

$SR = \sqrt{(-2-6)^2 + (3-7)^2}$ একক

$= \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2}$ একক

$= \sqrt{64 + 16}$ একক

$= \sqrt{80}$ একক $= 4\sqrt{5}$ একক

$SP = \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2}$ একক

$= \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$ একক

$= \sqrt{4 + 16}$ একক

$= \sqrt{20}$ একক $= 2\sqrt{5}$ একক

$QR = \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2}$ একক

$= \sqrt{(2)^2 + (-4)^2}$ একক

$= \sqrt{4 + 16}$ একক

$= \sqrt{20}$ একক $= 2\sqrt{5}$ একক

কর্ণ, $PR = \sqrt{(0-6)^2 + (-1-7)^2}$ একক

$= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}$ একক

$= \sqrt{36 + 64}$ একক

$= \sqrt{100}$ একক $= 10$ একক

এবং কর্ণ, $QS = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2}$ একক

$= \sqrt{(10)^2 + (0)^2}$ একক

$= \sqrt{100 + 0}$ একক

$= \sqrt{100}$ একক $= 10$ একক

যেহেতু, $PQRS$ চতুর্ভূজের বাহু $PQ =$ বাহু SR

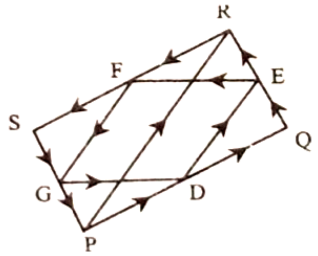
বাহু $SP =$ বাহু QR

এবং কর্ণ $PR =$ কর্ণ QS

$\therefore PQRS$ একটি আয়ত

গ. মনে করি, $PQRS$ চতুর্ভুজের PQ, QR, RS, SP বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F, G। D ও E, E ও F, F ও G এবং G ও D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে, $DEFG$ একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}, \overrightarrow{QR} = \underline{q}, \overrightarrow{RS} = \underline{r}, \overrightarrow{SP} = \underline{s}$

তাহলে, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\underline{q} + \underline{r}\right)$, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\left(\underline{r} + \underline{s}\right)$

এবং $\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\left(\underline{s} + \underline{p}\right)$

কিন্তু $\left(\underline{p} + \underline{q}\right) + \left(\underline{r} + \underline{s}\right) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

অর্থাৎ $\underline{p} + \underline{q} = -\left(\underline{r} + \underline{s}\right)$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\underline{p} + \underline{q}\right) = -\frac{1}{2}\left(\underline{r} + \underline{s}\right) = -\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GF}$$

$\therefore$ DE এবং GF সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, EF এবং DG সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ $DEFG$ একটি সামান্তরিক।

৪. কুমিল্লা বোর্ড ২০২০

একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $P(-4,4)$, $Q(-3,-5)$, $R(5,-4)$ এবং $S(6,3)$.

ক. P ও R বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. $PQRS$ চতুর্ভুজের যে অংশ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. PQ, QR, RS এবং SR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C, D হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমান কর যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক। ৪

⇨৪নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. দেওয়া আছে, $P(-4,4)$ এবং $R\ (5,-4)$

P ও R এর মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$PR = \sqrt{(-4-5)^2 + (4+4)^2}$ একক

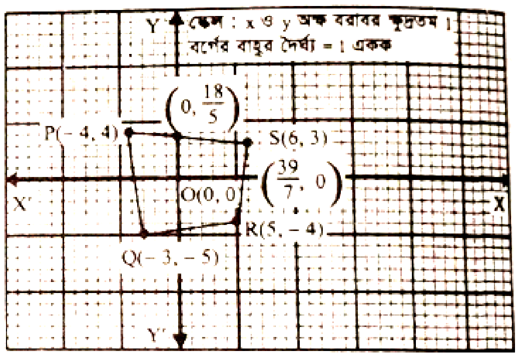
$= \sqrt{(-9)^2 + (8)^2}$ একক

$= \sqrt{81\ +\ 64}$ একক

$= \sqrt{145}$ একক

নির্ণেয় P ও R বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $\sqrt{145}$ একক।

খ. এখানে, $PQRS$ চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $P(-4,4)$, $Q(-3,-5), R(5,-4)$ এবং $S(6,3)$



SR রেখার সমীকরণ, $\frac{y-3}{x-6} = \frac{3+4}{6-5}$

বা, $\frac{y-3}{x-6} = 7$

বা, $7x - 42 = y - 3$

বা, $7x - y = -3 + 42$

বা, $7x - y = 39$

SR রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করলে $y = 0$

অর্থাৎ, $7x - 0 = 39$

বা, $7x = 39$

$\therefore x = \frac{39}{7}$

x অক্ষ ও SR রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{39}{7}, 0)$.

SP রেখার সমীকরণ, $\frac{y-3}{x-6} = \frac{3-4}{6+4}$

বা, $\frac{y-3}{x-6} = \frac{-1}{10}$

বা, $-(x-6) = 10y - 30$

বা, $-x + 6 = 10y - 30$

বা, $-x - 10y = -30 - 6$

বা, $-x - 10y = -36$

$\therefore\ x\ +\ 10y\ =\ 36$

SP রেখাটি y অক্ষকে ছেদ করলে $x = 0$

অর্থাৎ, $0 + 10y = 36$

বা, $y = \frac{36}{10}$

$\therefore y = \frac{18}{5}$

y অক্ষ ও Sp রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, \frac{18}{5})$.

এখন, ১ম চতুর্ভাগের $(6,3), \left(0, \frac{18}{5}\right), (0,0)$ এবং $\left(\frac{39}{7}, 0\right)$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

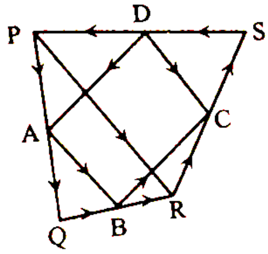
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & \frac{39}{7} & 6 \\ 3 & \frac{18}{5} & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(\frac{108}{5} + 0 + 0 + \frac{117}{7} - 0 - 0 - 0 - 0)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times \frac{1341}{35} = \frac{1341}{70} = 19\frac{11}{70}$ বর্গ একক

$\therefore$ $PQRS$ চতুর্ভুজের যে অংশ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল $19\frac{11}{70}$ বর্গ একক।

গ. এখানে, $PQRS$ চতুর্ভুজের PQ, QR, RS, SP বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু A, B, C, D। A ও B, B ও C, C ও D এবং D ও A যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}, \overrightarrow{QR} = \underline{q}, \overrightarrow{RS} = \underline{r}, \overrightarrow{SP} = \underline{s}$

তাহলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\underline{q} + \underline{r}\right)$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

এবং $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\left(\underline{s} + \underline{p}\right)$

কিন্তু $\left(\underline{p} + \underline{q}\right) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

অর্থাৎ $\underline{p} + \underline{q} = -(\underline{r} + \underline{s})$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\underline{p} + \underline{q}\right) = -\frac{1}{2}\left(\underline{r} + \underline{s}\right) = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$$

$\therefore AB$ এবং DC সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক।

৫. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০২০

ΔPQR এ D, Eএবং F যথাক্রমে QR, PR এবং PQএরমধ্যবিন্দু।

ক. ΔABCএকটি সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহুর দৈর্ঘ্য a সে.মি. এবং মধ্যমার দৈর্ঘ্য 3 সে.মি.। a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, $FE \parallel QR$ এবং $FE = \frac{1}{2}QR$ ৪

গ. প্রমান কর যে,
$3(QR^2 + PR^2 + PQ^2) = 4(PD^2 + QE^2 + RF^2)$ ৪

⇨৫নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. মনে করি, কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয় যথাক্রমে a, b ও c এবং মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে d, e ও f.

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, $a = b = c$

এবং $d = e = f$

এখানে, ABC সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a সে.মি. এবং মধ্যমা, $d = 3$ সে.মি.।

আমরা জানি,

$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

বা, $3(a^2 + a^2 + a^2) = 4(d^2 + d^2 + d^2)$ [∵সমবাহু ত্রিভুজ]

বা, $3.3a^2 = 4.3d^2$

বা, $9a^2 = 12d^2$

বা, $9a^2 = 12 \times (3)^2$ [$\because d = 3$ সে.মি]

বা, $9a^2 = 12 \times 9$

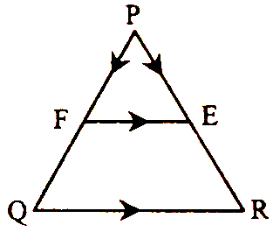
বা, $a^2 = 12$

বা, $a = \sqrt{12}$

$\therefore a = 2\sqrt{3}$ সে.মি.

নির্ণেয় মান $a = 2\sqrt{3}$ সে.মি. ।

খ. এখানে, ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, $FE \parallel QR$ এবং $FE = \frac{1}{2}QR$



প্রমাণ : ΔPFE হতে ভেক্টরের বিয়োগের ত্রিভূজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PF}$..................(1)

এবং $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

কিন্তু $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PF}$

[∵F ও E যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR}$ থেকে পাই

$2\overrightarrow{PE} - 2\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{QR}$

বা, $2\left(\overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PF}\right) = \overrightarrow{QR}$

বা, $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{QR}$ [(1) হতে]

$\therefore \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$.

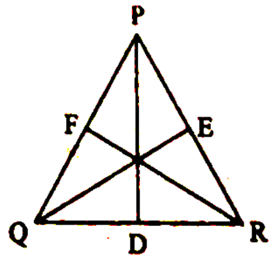
আবার, $\left|\overrightarrow{FE}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right|$ বা, $FE = \frac{1}{2}QR$

সুতরাং $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু এখানে, ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ FE ও QR সমান্তরাল।

$\therefore FE \parallel QR$ এবং $FE = \frac{1}{2}QR$. (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, ΔPQR এর বাহুত্রয় $PQ = c, QR = a$ এবং $PR = b$। D, E এবং F যথাক্রমে QR, PR এবং PQ এর মধ্যবিন্দু। P, D; Q, E এবং R, F যোগ করি। তাহলে PD, QE এবং RF হলো ত্রিভুজটির মধ্যমা।



ধরি, $PD = d, QE = e$ এবং $RF = f$

প্রমান করতে হবে যে, $3(QR^2 + PR^2 + PQ^2) = 4(PD^2 + QE^2 + RF^2)$

প্রমাণঃ ΔPQR এর PD একটি মধ্যমা।

∴ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right\} [\because QD = \frac{1}{2}QR = \frac{1}{2}a]$

$= 2d^2 + 2 \times \frac{1}{4}a^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{4d^2+a^2}{2}$

বা, $2(b^2 + c^2) = 4d^2 + a^2$

বা, $4d^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$..................$(i)$

অনুরূপভাবে, $4e^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2$......$(ii)$

এবং $4f^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$................$(iii)$

$(i), (ii)$ ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$$4d^2 + 4e^2 + 4f^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2$$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

বা, $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

$\therefore 3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$ (প্রমাণিত)

৬. সিলেট বোর্ড ২০২০

$P(3,4), Q(-4,2), R(-10,-3), S(10,-2)$ বিন্দু চারটি ঘড়ির কাঁটার বীপরিত দিকে আবর্তিত।

ক. PR রেখার ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজের সূত্র প্রয়োগ করে $PQRS$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ, QR, RS, SP এর মধ্যবিন্দুসমুহ পর্যায়ক্রমে যোগ করলে উৎপন্ন চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। ৪

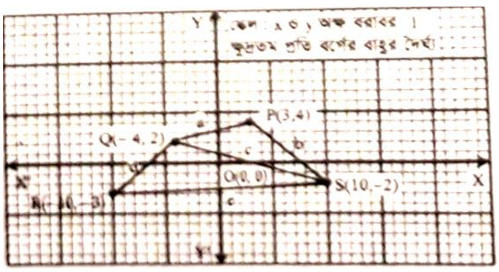
➩৬নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. দেওয়া আছে, $P(3,4)$ ও $R(-10,-3)$

$\therefore PR$ রেখার ঢাল $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-4}{-10-3} = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$

নির্ণেয় PR রেখার ঢাল $\frac{7}{13}$।

খ. এখানে, $P(3,4), Q(-4,2), R(-10,-3)$ এবং $S(10,-2)$ বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ।



বাহু, $PQ = a = \sqrt{(3+4)^2 + (4-2)^2}$ একক

$= \sqrt{(7)^2 + (2)^2}$ একক

$= \sqrt{49 + 4}$ একক $= \sqrt{53}$ একক

বাহু, $PS = b = \sqrt{(3-10)^2 + (4+2)^2}$ একক

$= \sqrt{(-7)^2 + (6)^2}$ একক

$= \sqrt{49 + 36}$ একক $= \sqrt{85}$ একক

কর্ণ, $QS = c = \sqrt{(-4-10)^2 + (2+2)^2}$ একক

$= \sqrt{(-14)^2 + (4)^2}$ একক

$= \sqrt{196 + 16}$ একক

$= \sqrt{212}$ একক $= 2\sqrt{53}$ একক

বাহু, $QR = d = \sqrt{(-4+10)^2 + (2+3)^2}$ একক

$= \sqrt{(6)^2 + (5)^2}$ একক

$= \sqrt{36 + 25}$ একক $= \sqrt{61}$ একক

বাহু, $RS = e = \sqrt{(-10-10)^2 + (-3+2)^2}$ একক

$= \sqrt{(-20)^2 + (-1)^2}$ একক

$= \sqrt{400 + 1}$ একক $= \sqrt{401}$ একক

$\triangle PQS$ এ

$2s = a + b + c = (\sqrt{53} + \sqrt{85} + 2\sqrt{53})$ একক

$= (7.2801 + 9.2195 + 14.5602)$ একক

$= 31.0598$ একক

$\therefore s = \frac{31.0598}{2}$ একক $= 15.5299$ একক

ΔPQS এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{\begin{matrix} 15.5299 \times (15.5299 - 7.2801) \times \\ (15.5299 - 9.2135) \times (15.5299 - 14.5602) \end{matrix}}$ বর্গ একক

$= \sqrt{15.5299 \times 8.2498 \times 6.3104 \times 0.9697}$ বর্গ একক

$= \sqrt{783.9824916}$ বর্গ একক

$= 27.999$ বর্গ একক

≈ 28 বর্গ একক

আবার, ΔQRS এ, $2s = c + d + e$

$= (2\sqrt{53} + \sqrt{61} + \sqrt{401})$ একক

$= (14.5602 + 7.8102 + 20.0249)$ একক

$= 42.3953$ একক

$\therefore s = \frac{42.3953}{2}$ একক $= 21.1976$ একক

ΔQRS এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s-c)(s-d)(s-e)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{\begin{matrix} 21.1976 \times (21.1976 - 14.5602) \times \\ (21.1976 - 7.8102) \times (21.1976 - 20.0249 \end{matrix}}$ বর্গ একক

$= \sqrt{21.1976 \times 6.6374 \times 13.3874 \times 1.1727}$ বর্গ একক

$= \sqrt{2208.858261}$ বর্গ একক

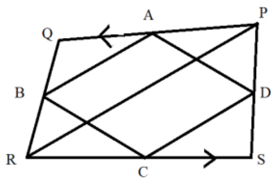
$= 46.998 \approx 47$ বর্গ একক

$\therefore PQRS$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \Delta PQS$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta QRS$ এর ক্ষেত্রফল $= (28 + 47)$ বর্গ একক

$= 75$ বর্গ একক

নির্ণেয় $PQRS$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 75 বর্গ একক।

গ. এখানে, $PQRS$ চতুর্ভুজের PQ, QR, RS, SP এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D।



এখন, A, B; B, C; C, D এবং D, A যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}, \overrightarrow{QR} = \underline{q}, \overrightarrow{RS} = \underline{r}, \overrightarrow{SP} = \underline{s}$

তাহলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$$= \frac{1}{2}\underline{p} + \frac{1}{2}\underline{q} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\underline{q} + \underline{r}\right)$,

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$$

$$\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\left(\underline{s} + \underline{p}\right)$$

কিন্তু $\left(\underline{p} + \underline{q}\right) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

বা, $\underline{p} + \underline{q} = -(\underline{r} + \underline{s})$

বা, $\frac{1}{2}\left(\underline{p} + \underline{q}\right) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

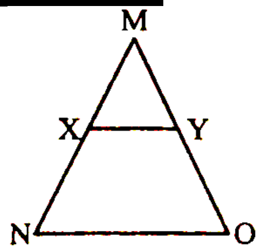
$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore AB$ এবং DC সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD এবং BC সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)

৭. বরিশাল বোর্ড ২০২০



ΔMNO এর MN ও MOবাহুরমধ্যবিন্দু যথাক্রমে Xও Y

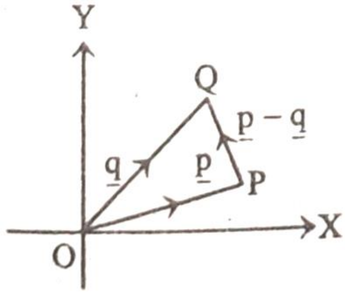
ক. ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}$ ও $\underline{q}$ হলে চিহ্নিত চিত্রসহ $\overrightarrow{PQ}$ কে $\underline{p}$ ও $\underline{q}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর । ২

খ. ভেক্টরের পদ্ধতিতে প্রমান কর যে, $XY = \frac{1}{2}NO$ এবং $XY \parallel NO$. ৪

গ. NY ও OX এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A ও B হলে ভেক্টর সাহায্যে প্রমান কর যে, $AB = \frac{1}{2}(NO - XY)$ এবং $AB \parallel XY \parallel NO$.৪

⇨৭নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে p ও q. মনে করি, $\overrightarrow{OP} = \underline{p}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \underline{q}$



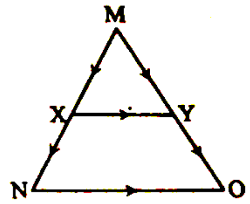
তাহলে, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OQ}$

বা, $\underline{p} + \overrightarrow{PQ} = \underline{q}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{PQ}$ কে $\underline{p}$ও $\underline{q}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

খ. দেওয়া আছে, ΔMNO এর MN ও MO বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y.



প্রমাণ করতে হবে যে, $XY = \frac{1}{2}NO$ এবং $XY \parallel NO$.

প্রমাণ : X ও Y যথাক্রমে MN ও MO এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{MX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ এবং $\overrightarrow{MY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$

ΔMXY হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{MY}$$

বা, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{MY} - \overrightarrow{MX}$

বা, $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

বা, $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN})$.................(1)

আবার, ΔMNO হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$$

বা, $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN}$............(2)

(1) ও (2) হতে পাই,

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$$

বা, $|\overrightarrow{XY}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{NO}|$

$\therefore XY = \frac{1}{2}NO$

আবার, XY ও NO ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{XY}$ ও $\overrightarrow{NO}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় XY ও NO সমান্তরাল।

$\therefore XY = \frac{1}{2}NO$ এবং $XY \parallel NO$. (প্রমাণিত)

প্রমাণ : X ও Y যথাক্রমে MN ও MO এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{MX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ এবং $\overrightarrow{MY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$

ΔMXY হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{MY}$$

বা, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{MY} - \overrightarrow{MX}$

বা, $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

বা, $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN})$..................(1)

আবার, ΔMNO হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$$

বা, $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN}$.............(2)

(1) ও (2) হতে পাই,

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$$

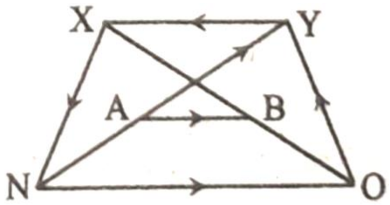
বা, $|\overrightarrow{XY}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{NO}|$

$\therefore XY = \frac{1}{2}NO$

আবার, XY ও NO ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{XY}$ ও $\overrightarrow{NO}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় XY ও NO সমান্তরাল।

$\therefore XY = \frac{1}{2}NO$ এবং $XY \parallel NO$. (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $XNOY$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণ NY ও কর্ণ OX এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A ও B।



A, B যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = \frac{1}{2}(NO - XY)$ এবং $AB \parallel XY \parallel NO$.

প্রমাণ : মনে করি, কোনো মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে X, N, O ও Y বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{x}, \underline{n}, \underline{o}$ ও $\underline{y}$।

তাহলে, $\overrightarrow{NO} = \underline{o} - \underline{n}$

$\overrightarrow{XY} = \underline{y} - \underline{x}$

এখন, A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{n} + \underline{y})$

এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{o} + \underline{x})$

সুতরাং, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\underline{o} + \underline{x}) - \frac{1}{2}(\underline{n} + \underline{y})$

$= \frac{1}{2}(\underline{o} + \underline{x} - \underline{n} - \underline{y})$

$= \frac{1}{2}(\underline{o} - \underline{n} + \underline{x} - \underline{y})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{YX}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NO} - \overrightarrow{XY})$

এখন, $\overrightarrow{XY}$ ও $\overrightarrow{NO}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং $(\overrightarrow{NO} - \overrightarrow{XY})$ ভেক্টরও $\overrightarrow{XY}$ ও $\overrightarrow{NO}$ এর সমান্তরাল।

আবার, $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{NO} - \overrightarrow{XY}|$

বা, $AB = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{NO}| - |\overrightarrow{XY}|)$

$\therefore AB = \frac{1}{2}(NO - NX)$

$\therefore AB = \frac{1}{2}(NO - XY)$ এবং $AB \parallel XY \parallel NO$. (প্রমাণিত)

৮. দিনাজপুর বোর্ড ২০২০

$PQRS$ একটি চতুর্ভুজ যার PQ, QR, RS ও SP বাহু গুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G ও H.

ক. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $4cm,\ 5cm,\ 6cm$ হলে এর মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, $EFGH$ একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, $HE \parallel SQ$ এবং $HE = \frac{1}{2}SQ$ ৪

⇨৮নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. মনে করি, ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a = 4cm$, $b = 5cm$ এবং $c = 6cm$ এবং মধ্যমাগুলো যথাক্রমে d, e ও f.

আমরা জানি,

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$$

$\therefore d^2 + e^2 + f^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

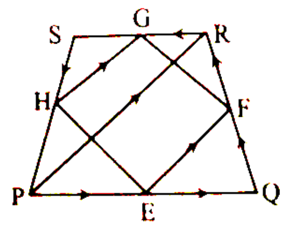
$= \frac{3}{4}(4^2 + 5^2 + 6^2)$ বর্গ সে.মি.

$= \frac{3}{4} \times 77$ বর্গ সে.মি.

$= 57.75$ বর্গ সে.মি.

নির্ণেয় মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি 57.75 বর্গ সে.মি.

খ.



এখানে, $PQRS$ চতুর্ভুজের PQ, QR, RS ও SP বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G ও $H, E, F;\ F, G;\ G, H$ এবং H, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $EFGH$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}, \overrightarrow{QR} = \underline{q}, \overrightarrow{RS} = \underline{r}, \overrightarrow{SP} = \underline{s}$

তাহলে, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{QF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{r})$, $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

এবং $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{p})$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

অর্থাৎ $\underline{p} + \underline{q} = -(\underline{r} + \underline{s})$

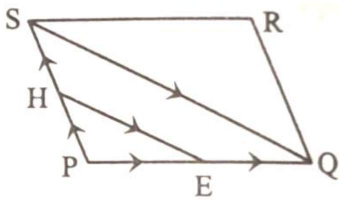
$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) = -\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HG}$$

$\therefore EF$ এবং HG সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, FG এবং EH সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore EFGH$ একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)

গ. এখানে, $PQRS$ চতুর্ভুজের PQ ও PS এর মধ্যবিন্দুযথাক্রমে E ও H। H, E ও S, Q যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, $HE \parallel SQ$ এবং $HE = \frac{1}{2}SQ.$

প্রমাণ : H ও E যথাক্রমে PS ও PQ এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{PH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PS}$ এবং $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

ΔPHE হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{PE}$

বা, $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PH}$

বা, $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PS}$

বা, $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PS})$..................(1)

আবার, ΔPSQ হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{PQ}$

বা, $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PS}$............(2)

(1) ও (2) হতে পাই,

$\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SQ}$

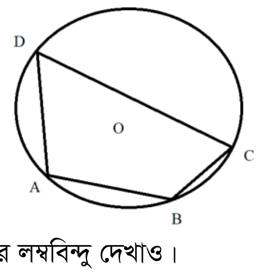
বা, $|\overrightarrow{HE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{SQ}|$

$\therefore HE = \frac{1}{2}SQ$

আবার, HE ও SQ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{HE}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় HE ও HQ সমান্তরাল।

$\therefore HE \parallel SQ$ এবং $HE = \frac{1}{2}SQ.$ (প্রমাণিত)

৯. ময়মনসিংহ বোর্ড ২০২০



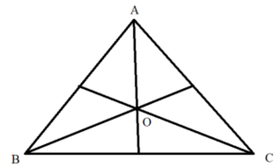
ক. চিত্র একে ত্রিভুজের লম্ববিন্দু দেখাও। ২

খ. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং এর বহিস্থ কোনো বিন্দু E দিয়ে যায়। ৪

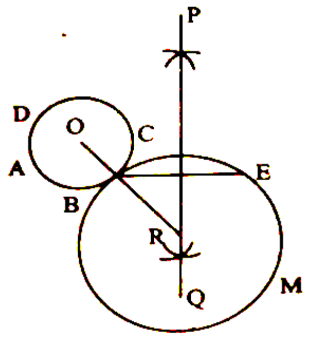
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমান কর যে, AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো পর্যায়ক্রমে যোগ করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।৪

⇨৯নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। O ত্রিভুজ ABC এর লম্ববিন্দু।



খ. দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABCD$ বৃত্তের উপর B একটি বিন্দু এবং এর বহি:স্থ কোপনা বিন্দু E। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা ঐ বৃত্তকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং E বিন্দু দিয়ে যায়।



অঙ্কনের বিবরণ :

ধাপ-১: B, E যোগ করি।

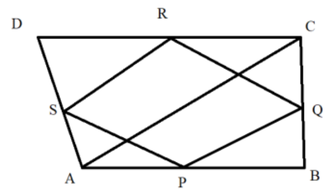
ধাপ-২: BE এর লম্বদ্বিখন্ডক PQ আঁকি।

ধাপ-৩: O, B যোগ করে বর্ধিত করি।

ধাপ-৪: বর্ধিত OB রেখাংশ PQ কে R বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৫ : R কে কেন্দ্র করে RB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত BEM বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

গ. মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S।



P ও Q; Q ও R, R ও S এবং S ও P যাগে করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \overrightarrow{CD} = \underline{c}, \overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}),\ \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = 0$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore PQ$ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore PQRS$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজের বাহুগুলারে মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যাগে করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়। (প্রমাণিত)

১০. ঢাকা বোর্ড ২০১৯

ΔPQR এর ভূমি $a = 5.3$ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণ $x = 40°$, অপর দুই বাহুর অন্তর $d = 2$ সে.মি., PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N. ২

ক. 100π বর্গ সে.মি. পৃষ্ঠতলবিশিষ্ট গোলকের আয়তন নির্ণয় কর।

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ PQR ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MR ও QN এর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা MN ও QR এর সমান্তরাল। ৪

⇨১০নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. ধরি, গোলকের ব্যাসার্ধ $= r$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ সে.মি.

শর্তমতে, $4\pi r^2 = 100\pi$

বা, $r^2 = 25$

$\therefore r = 5$

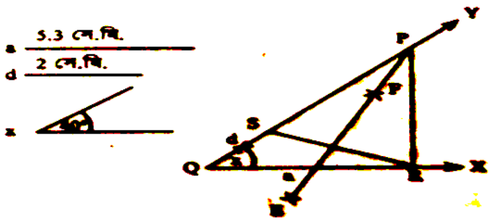
গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 5^3$ ঘন সে.মি.

$= \frac{4 \times 3.1416 \times 125}{3} = 523.6$ ঘন সে.মি.

নির্ণেয় আয়তন $= 523.6$ ঘন সে.মি.।

খ. দেওয়া আছে, ΔPQR এর ভূমি, $QR = a = 5.3$ সে.মি. ভূমি সংলগ্ন কোণ $x = 40°$এবং অপর দুই বাহুর অন্তর $d = 2$ সে.মি, অর্থাৎ $PQ - PR$ বা $PR - PQ = 2$ সে.মি. ত্রিভুজেটি আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

ধাপ ১: যেকোনো একটি রশ্মি QX থেকে ভূমি a এর সমান করে QR রেখাংশ কেটে নিই।

ধাপ ২: QR রেখাংশের Q বিন্দুতে $\angle YAR = \angle x$ আঁকি।

ধাপ ৩ : QY রেখা থেকে $QS = d$ কেটে নিই।

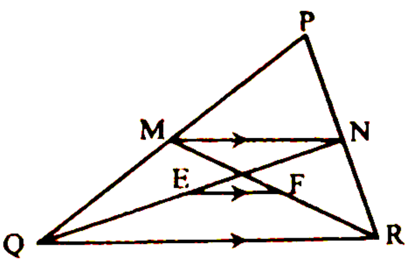
ধাপ ৪ : R, S পযাগ করি।

ধাপ ৫ : RS এর ওপর EF লম্ব দ্বিখণ্ডক আঁকি যেন QY কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৬ : P, R পযাগ করি।

তাহলে, PQR-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

গ.



প্রমাণ : দেওয়া আছে, ΔPQR -এর PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। M ও N পযাগ করি। ফলে $QRNM$ একটি ট্রাপিজিয়াম উৎপন্ন হলো।

মনে করি, $QRNM$ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় MN ও QR এবং MR ও QN কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F।

প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel MN \parallel QR$।

মনে করি, Q, R, N, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{n}$ও$\underline{m}$

এখন, E, QN এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n})$

F, MR এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m})$

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n})$

$= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m} - \underline{q} - \underline{n})$

$= \frac{1}{2}(\underline{r} - \underline{q} + \underline{m} - \underline{n})$

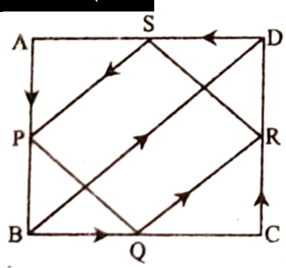
$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{n} - \underline{m})\}$

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$ [$\because \overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ এবং $\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$]

এখন, $\overrightarrow{QR}$ এবং $\overrightarrow{MN}$ সমান্তরাল বলে $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{MN}$এর সমান্তরাল।

$\therefore EF \parallel MN \parallel QR$ (প্রমাণিত)

১১. যশোর বোর্ড ২০১৯



$ABCD$ একটি বর্গ। P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA এর মধ্যবিন্দু।

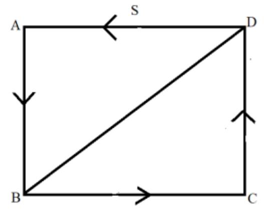
ক. $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\varDelta ABD$ –এ $PS = \frac{1}{2}BD$. ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক। ৪

⇨১১নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক.



$\varDelta ABD$ হতে পাই $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = 0$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - (-\overrightarrow{AD})$

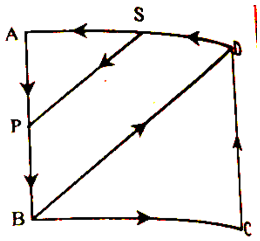
বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

অর্থাৎ $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

খ. $\varDelta ABD$ -এর AB ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও S।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PS = \frac{1}{2}BD$.



প্রমাণ : যেহেতু P ও S যথাক্রমে AB ও DA এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

বা, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$

বা, $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{SA}$

$\varDelta ABD$ হতে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = 0$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$

বা, $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{SA}$

বা, $\overrightarrow{BD} = -2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP})$

$\therefore -(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

এখন, $\varDelta SAP$ হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী

$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP}$

বা, $-\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP}$

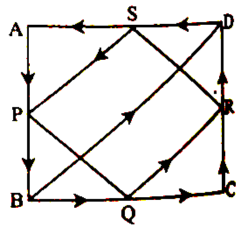
বা, $\overrightarrow{PS} = -(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP})$

বা, $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

বা, $|\overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$

$\therefore \varDelta ABD$ এ $PS = \frac{1}{2}BD$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $ABCD$ একটি বর্গ । P, Q, R ও S যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA এর মধ্যবিন্দু।



মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \overrightarrow{CD} = \underline{c}, \overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$,

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{b} + \underline{c}) + (\underline{d} + \underline{a}) = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD} = 0$

বা, $(\underline{b} + \underline{c}) = -(\underline{d} + \underline{a})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) = -\frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

বা, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{SP}$

বা, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$

বা, $|\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{PS}|$

বা, $QR = PS$

$\therefore QR$ এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore PQRS$ একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)

📖 ১২. কুমিল্লা বোর্ড ২০১৯

$\varDelta ABC$ এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে, চিহ্নিত চিত্রসহ $\overrightarrow{AB}$ কে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ ৪

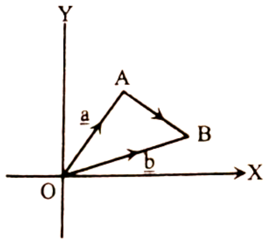
গ. BD ও CE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel MN \parallel BC$

এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$. ৪

⇨১২নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$।

অর্থাৎ, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$



এখন, ΔOAB হতে ভেক্টর পযাগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

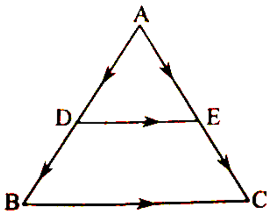
বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{AB}$ কে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

খ. এখানে, ΔABC-এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। D, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে,

$DE \parallel BC = BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$



প্রমাণ : D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ΔADE হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})..................(i)$

আবার, ΔABC হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.............(ii)$

(i) ও (ii) হতে পাই,

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

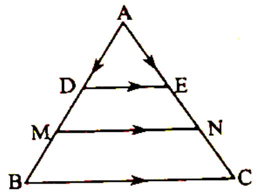
বা, $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$

আবার, $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় DE এবং BC সমান্তরাল।

$\therefore DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. (প্রমাণিত)

গ. এখানে $BCED$ ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয় BD ও CE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel MN \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে B, C, E ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}$ ও $\underline{d}$।

তাহলে, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e})$

সুতরাং, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{e} - \underline{b} - \underline{d})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE})$[$\because \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$]

বা, $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}|$

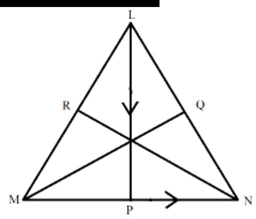
বা, $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DE}|)$

$\therefore MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$

আবার, $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ সমান্তরাল বলে $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তরাল। অর্থাৎ $DE \parallel MN \parallel BC$

$\therefore DE \parallel MN \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$. (প্রমাণিত)

১৩. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৯



ΔLMN এর MN, NL ও LM এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R এবং $MN = 14\ cm.$

ক. যদি কোন গোলকের ব্যাস MN হয় তবে তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR} = 0$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত MN এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই Q বিন্দুগামী হবে। ৪

⇨১৩নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. দেওয়া আছে, $MN = 14\ cm$

$\therefore$ গোলকের ব্যাস $= 14\ cm$

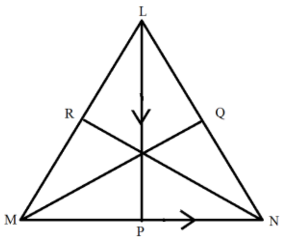
$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{14}{2} = 7 = cm$

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$= 4 \times 3.1416 \times 7^2$ বর্গ একক

$= 615.75\ cm^2$ বর্গ একক

খ. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,



ΔLMQ হতে পাই,

$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{LQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$

$\therefore \overrightarrow{LN} = 2\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ}$.................................(i)

ΔLMN হতে পাই, $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN}$

বা, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}$

বা, $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{LM}$ [(1)হতে]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ}$..................................(ii)

ΔLMP হতে পাই, $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{LP}$

বা, $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}[\because \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}]$

বা, $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ})$ [(ii) হতে]

$\therefore \overrightarrow{LP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MQ}$..................................(iii)

ΔLNR হতে পাই, $\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{LR}$

বা, $\overrightarrow{NR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} - \overrightarrow{LN}[\because \overrightarrow{LR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM}]$

বা, $\overrightarrow{NR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} - (2\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ})$ [(i)হতে]

$\therefore \overrightarrow{NR} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{LM} - 2\overrightarrow{MQ}$.............................(iv)

এখন, বামপক্ষ $= \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR}$

$= \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MQ}\right) + \overrightarrow{MQ} + (-\frac{3}{2}\overrightarrow{LM} - 2\overrightarrow{MQ})$

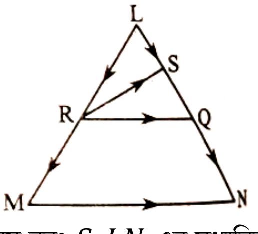
[(iii) ও (iv) হতে]

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ} - \frac{3}{2}\overrightarrow{LM} - 2\overrightarrow{MQ}$

$= \underline{0} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR} = \underline{0}$ (প্রমাণিত)

গ. এখানে, ΔLMN এর R, LM এর মধ্যবিন্দু এবং $RQ \parallel MN.$ প্রমাণ করতে হবে, যে, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত MN এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই Q বিন্দুগামী হবে।



প্রমাণ : মনে করি, Q নয় বরং S, LN এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে, $\overrightarrow{LR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM}$ এবং $\overrightarrow{LS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$

[$\because$ R ও S যথাক্রমে LM ও LN এর মধ্যবিন্দু]

ΔLMN –এ, $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

বা, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}$......................$(i)$

ΔLRS হতে পাই, $\overrightarrow{LR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{LS}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{LS} - \overrightarrow{LR}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{LM}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM})$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ [(i) হতে]

$\therefore$ $\overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল হবে। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং $\overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ RS ও MN সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $RS \parallel MN$, কিন্তু $RQ \parallel MN.$

$\therefore$ RS ও RQ অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ S ও Q একই বিন্দু হবে।

$\therefore$ Q, LN এর মধ্যবিন্দু।

অতএব, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত MN এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই Q বিন্দুগামী। (প্রমাণিত)।

১৪. সিলেট বোর্ড ২০১৯

DEF ত্রিভুজের ভূমি $a = 4.6$ সে.মি., অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $s = 7.8$ সে.মি. এবং শিরঃকোণ $\angle x = 60°$। একটি নিরেট লৌহ গোলকের ব্যাস উক্ত ত্রিভুজের ভূমির সমান। লৌহ গোলকটিকে পিটিয়ে $\frac{3}{5}$ সে.মি. পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হলো।

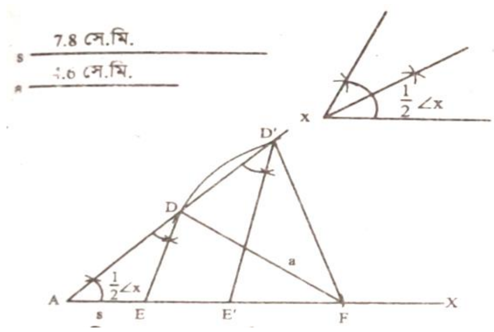
ক. DEF ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. লৌহপাতটির ব্যাস নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি ΔDEF এর DE ও DF এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হয়ঃ তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel EF.$ ৪

⇨১৪নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক.



DEF ত্রিভুজের ভূমি $a = 4.6$ সে.মি. অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $S = 7.8$ সে.মি. এবং শিরঃকোণ $\angle x = 60°$

দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে ।

খ. দেওয়া আছে, ΔDEF এর ভূমি $a = 4.6$ সে.মি.

$\therefore$লৌহ গোলকের ব্যাস $=$ 4.6 সে.মি.

$\therefore$লৌহ গোলকের ব্যাসার্ধ $= \frac{4.6}{2} = 2.3$ সে.মি.

$\therefore$ লৌহ গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(2.3)^3$

$= \frac{48.668}{3}\pi$ ঘন সে.মি.

মনে করি, পাতের ব্যাসার্ধ $= r$ সে.মি.

এবং পাত টি $\frac{3}{5}$ সে. মি পুরু।

$\therefore$ পাতের আয়তন $= \pi r^2 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\pi r^2$ ঘন সে.মি.

শর্তানুসারে, $\frac{3}{5}\pi r^2 = \frac{48.668}{3}\pi$

বা, $9r^2 = 48.668 \times 5$

বা, $r^2 = \frac{48.668\times5}{9} = 27.0378$

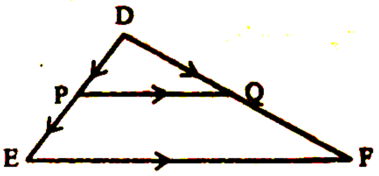
বা, $r = \sqrt{27.0378} = 5.20$

$\therefore$ পাতের ব্যাস $= 2r = 2 \times 5.20 = 10.4$ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় পাতটির ব্যাস 10.4 সে.মি. (প্রায়)

গ. এখানে, ΔDEF এর DE ও DF এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ \parallel EF$



প্রমাণ : যেহেতু P ও Q যথাক্রমে DE ও DF এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ এবং $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$

ΔDEF হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজটি বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DF}$

বা, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE}$

আবার, ΔDPQ হতে পাই,

$\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে]

বা, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

আবার, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় PQ এবং EF সমান্তরাল।

$\therefore PQ \parallel EF$. (প্রমাণিত)

১৫. বরিশাল বোর্ড ২০১৯

$ABCD$ চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। AC কর্ণের মধ্যবিন্দু M.

ক. 7 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = \underline{0}$. ৪

⇨১৫নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাস $=$ 7 সে.মি.

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ $r = \frac{7}{2} = 3.5$ সে.মি.

গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$

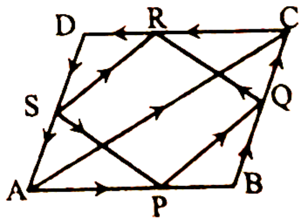
$= 4 \times 3.1416 \times (3.5)$ বর্গ সে.মি.

$= 153.94$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

খ. দেওয়া আছে, $ABCD$ চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S.

এখন, P, Q; Q, R; R, S ও S, E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQRS$ এ সামান্তরিক।



মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \overrightarrow{CD} = \underline{c}, \overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$,

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = 0$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

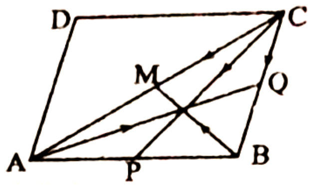
$\therefore PQ$ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore PQRS$ একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)

গ. এখানে, $ABCD$ চতুভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু P ও Q এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু M.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = \underline{0}$



প্রমাণ : ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

ΔCAQ হতে পাই, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

বা, $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AQ}$..................................(i)

ΔCAB হতে পাই, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

বা, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{CA}$ [(i)হতে]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AQ}$..................................(ii)

ΔCAP হতে পাই, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$

বা, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}[\because \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}]$

বা, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AQ})$ [(ii) হতে]

$\therefore \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ}$..................................(iii)

ΔCBM হতে পাই, $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM}$

বা, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}[\because \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}]$

বা, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - (2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AQ})$ [(i)হতে]

$\therefore \overrightarrow{BM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AQ}$.............................(iv)

এখন, বামপক্ষ $= \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM}$

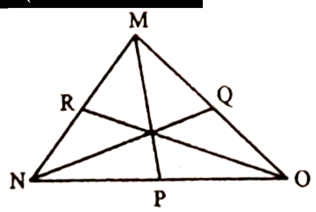
$= \overrightarrow{AQ} + \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ}\right) + (-\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AQ})$

$= 2\overrightarrow{AQ} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AQ}$

$= \underline{0} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = \underline{0}$ (প্রমাণিত)

📖 ১৬. দিনাজপুর বোর্ড ২০১৯



P, Q, R যথাক্রমে NO, MO, MN এর মধ্যবিন্দু।

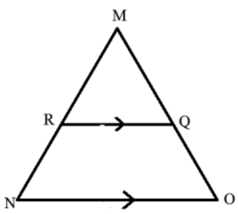
ক. M, N এবং O এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{a}, \underline{b}$ এবং $\underline{c}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$. ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR} = \underline{0}$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত NO এর সমান্তরাল সরলরেখা Q বিন্দুগামী হবে। ৪

⇨১৬নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. এখানে, M, N এবং O এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{a}, \underline{b}$ এবং$\underline{c}$



R, MN এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

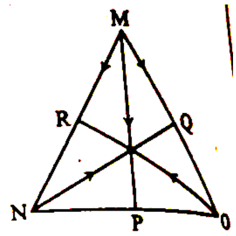
Q, MO এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

$\therefore \overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

বা, $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{b})$

$\therefore \overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$ (দেখানো হলো)

খ. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,



ΔMNQ হতে পাই,

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$

$\therefore \overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NQ}$.................................(i)

ΔMNO হতে পাই,

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$

বা, $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN}$

বা, $\overrightarrow{NO} = 2\overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{NQ} - \overrightarrow{MN}$ [(i)হতে]

$\therefore \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NQ}$..................................(ii)

ΔMNP হতে পাই,

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

বা, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}[\because \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}]$

বা, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NQ})$ [(ii) হতে]

$\therefore \overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}$..................................(iii)

ΔMOR হতে পাই, $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{MR}$

বা, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MO}[\because \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}]$

বা, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} - (2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NQ})$ [(ii)হতে]

$\therefore \overrightarrow{OR} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{NQ}$.............................(iv)

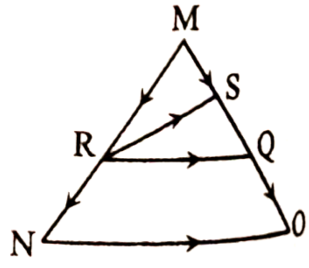
এখন, বামপক্ষ $= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR}$

$= \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ}\right) + \overrightarrow{NQ} + (-\frac{3}{2}\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{NQ})$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NQ} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{NQ} = \underline{0} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR} = \underline{0}$ (প্রমাণিত)

গ. এখানে, ΔMNO এর R, MN এর মধ্যবিন্দু এবং $RQ \parallel NO$। প্রমাণ করতে হবে যে, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত NO এর সমান্তরাল সরলরেখা Q বিন্দুগামী হবে।



প্রমাণ : মনে করি, Q নয় বরং S, MO এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে, $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ এবং $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$

[$\because R$ ও S যথাক্রমে MN ও MO এর মধ্যবিন্দু]

ΔMNO –এ, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

বা, $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN}$......................$(i)$

ΔMRS হতে পাই, $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN})$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$ [(i) হতে]

$\therefore \overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{NO}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল হবে। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং $\overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{NO}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ RS ও NO সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $RS \parallel NO$, কিন্তু $RQ \parallel NO$.

$\therefore RS$ ও RQ অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ R ও Q একই বিন্দু হবে।

অতএব, R বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত NO এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই Q বিন্দুগামী। (প্রমাণিত)।

১৭. সকল বোর্ড ২০১৮

ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N.

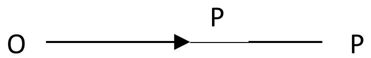
ক. চিত্রসহ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে $QRNM$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$. ৪

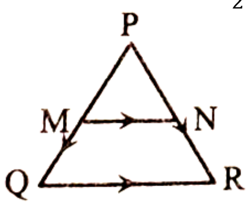
⇨১৭নং প্রশ্নেরসমাধান⇦

ক. সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান OP দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়।



$\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

খ. ΔPQR এ PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $MN = \frac{1}{2}QR$



প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ ....(i)

এবং $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ .....(ii)

কিন্তু $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PN}$ এবং $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PM}$

[$\therefore PQ$ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N]

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ হতে পাই,

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ})$

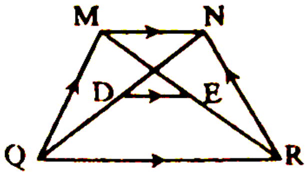
$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

এখন, $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

$\therefore MN = \frac{1}{2}QR$ (প্রমাণিত)

গ. $QRNM$ ট্রাপিজিয়ামের QR ও MN সমান্তরাল বাহু এবং QN ও MR কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

প্রমাণ করতে হবে যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$



প্রমাণ : ধরি, কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে Q, R, N, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{n}, \underline{m}$,

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ ও $\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n})$ ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{n} - \underline{m})\}$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$

এখন, $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{MN}|)$

$\therefore DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$. (প্রমাণিত)

১৮. ঢাকা বোর্ড ২০১৭

ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে $A(1, 3), B(-1, -1), C(3, -1)$ এবং ত্রিভুজটির AB ও AC বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও F.

ক. AB এর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. ABC ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DF \parallel BC$ এবং $DF = \frac{1}{2}BC$. ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 3)$ ও $(-1, -1)$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ΔABC এর শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A(1, 3), B(-1, -1)$ ও $C(3, -1)$

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+1)^2 + (-1+1)^2}$

$= \sqrt{16 + 0} = 4$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ ΔABC এর অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{AB + BC + AC}{2}$

$= \frac{2\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5}}{2}$

$= 2 + 2\sqrt{5}$ একক

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-AC)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(2+2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5}-2\sqrt{5})(2+2\sqrt{5}-4)(2+2\sqrt{5}-2\sqrt{5})}$

$= \sqrt{(2\sqrt{5}+2)(2\sqrt{5}-2) \times 2 \times 2}$

$= \sqrt{\{(2\sqrt{5})^2 - 2^2\} \times 4}$

$= \sqrt{(20-4) \times 4}$

$= \sqrt{64} = 8$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য।
[বি.দ্র. E এর পরিবর্তে F নিতে হবে]

১৯. ঢাকা বোর্ড ২০১৬

ABCD চতুর্ভুজের A(6, – 4), B(2, 2), C(– 2, 2), D(–6, – 4) শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

ক. BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এবং P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || AD || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B(2, 2) ও D(–6, –4) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব অর্থাৎ BD এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-6-2)^2 + (-4-2)^2}$ একক

$= \sqrt{64+36}$ একক $= \sqrt{100}$ একক $= 10$ একক **(Ans)**

খ A(6, –4), B(2, 2), C(–2, 2) ও D(–6, –4) বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12 + 4 + 8 + 24 + 8 + 4 + 12 + 24)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 96$ বর্গ একক

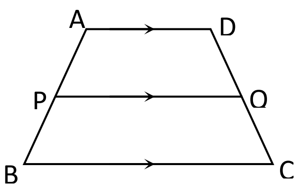
$= 48$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল
= 48 বর্গ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{48}$ একক $= \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2} \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2} \times 4\sqrt{3}$ একক
$= 4\sqrt{6}$ একক **(Ans.)**

গ



এখানে, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। প্রমাণ করতে হবে যে, PQ || AD || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

প্রমাণ: মনে করি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [$\because$ P, AB এর মধ্যবিন্দু]

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because$ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং PQ ভেক্টরও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

এখন $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}|$

অর্থাৎ $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

অর্থাৎ PQ || AD || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ **(প্রমাণিত)**

২০. রাজশাহী বোর্ড ২০১৭

A(p, 3p), B(p^2, 2p), C(p – 2, p) এবং D(1, 1) চারটি ভিন্ন বিন্দু।

ক. BC রেখার ঢাল $\frac{1}{2}$ হলে, p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. AB ও CD রেখা সমান্তরাল হলে p এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত 'p' এর ঋণাত্মক মান ব্যবহার করে A, B, C, D বিন্দু দ্বারা গঠিত ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু R ও S হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, RS || AB || CD এবং $RS = \frac{1}{2}(AB + CD)$. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (p^2, 2p) ও (p – 2, p)

$\therefore$ BC রেখার ঢাল $= \frac{p - 2p}{p - 2 - p^2} = \frac{-p}{p - 2 - p^2}$

প্রশ্নমতে, $\frac{-p}{p - 2 - p^2} = \frac{1}{2}$

বা, $-2p = p - 2 - p^2$

বা, $p^2 - 3p + 2 = 0$

বা, $p^2 - 2p - p + 2 = 0$

বা, $p(p-2) - 1(p-2) = 0$

বা, $(p-2)(p-1) = 0$

$\therefore$ p = 1, 2 **(Ans.)**

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১১.৩ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য।
[**বি. দ্র.** t এর পরিবর্তে p নিতে হবে।]

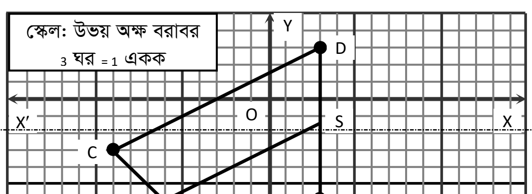
গ 'খ' থেকে পাই, p = – 1

$\therefore$ A(p, 3p) ≡ (– 1, – 3)

B(p^2, 2p) ≡ (1, – 2)

C(p – 2, p) ≡ (– 3, – 1)

D(1, 1)



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AC ও BD বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং AB ও CD বাহুদ্বয় সমান্তরাল। R ও S যথাক্রমে AC ও BD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু। R, S যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $RS \parallel AB \parallel CD$ এবং $RS = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}, \overrightarrow{CD} = \underline{d} - \underline{c}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{c})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{d} - \underline{c})\}$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

$\therefore \left|\overrightarrow{RS}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)\right|$

সুতরাং $RS = \frac{1}{2}(AB + CD)$

কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{RS}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর সমান্তরাল হবে।

অতএব, $RS \parallel AB \parallel CD$ এবং $RS = \frac{1}{2}(AB + CD)$ **(প্রমাণিত)**

২১. রাজশাহী বোর্ড ২০১৬

একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7,2), B(–4,2), C(–4,–3) এবং D(7,–3).

ক. AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত তা নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক A(7, 2) ও C(–4,–3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x-7}{7-(-4)} = \frac{y-2}{2-(-3)}$

বা, $\frac{x-7}{7+4} = \frac{y-2}{2+3}$

বা, $5x - 35 = 11y - 22$

বা, $5x - 11y - 35 + 22 = 0$

$\therefore 5x - 11y - 13 = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7, 2), B(–4, 2), C(–4, –3) এবং D(7,–3)

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7+4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(11)^2 + 0} = 11$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{0 + 5^2} = 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{121 + 0} = 11$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-7)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{0 + 5^2} = 5$ একক

AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{121 + 25} = \sqrt{146}$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{121 + 25}$

$= \sqrt{146}$ একক

সুতরাং আমরা পাই,

AB = CD এবং BC = AD

আবার, কর্ণ AC = কর্ণ BD.

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৫ দ্রষ্টব্য।

২২. রাজশাহী বোর্ড ২০১৫

ABCD চতুর্ভুজের A(6, –4), B(2, 2), C(–2, 2) এবং D(–6, –4) শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

ক. AC কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

গ. P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$. ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, A(6, –4), C(–2, 2)

$AC = \sqrt{(-2-6)^2 + \{2-(-4)\}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}$

$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(6, –4), B(2, 2), C(–2, 2) এবং D(–6, –4) যেখানে, শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{12 + 4 + 8 + 24 - (-8) - (-4) - (-12) - (-24)\}$

$= \frac{1}{2}\{48 + 8 + 4 + 12 + 24\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{48 + 48\}$ বর্গ একক

= 48 বর্গ একক

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $a^2 = 48$ বর্গ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{48}$ একক $= 4\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= 4a = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ প্রদত্ত তথ্যানুসারে,

AD বাহুর ঢাল $= \frac{-4+4}{6+6} = 0$

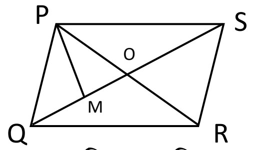
এবং BC বাহুর ঢাল $= \frac{2-2}{2+2} = 0$

$\therefore$ AD ও BC বাহু পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম

অতঃপর সৃজনশীল ১৯(গ) নং দ্রষ্টব্য।

২৩. দিনাজপুর বোর্ড ২০১৬



চিত্রে PQRS একটি সামান্তরিক।

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

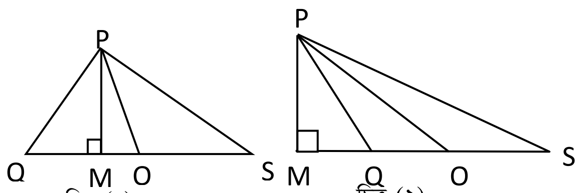
খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$. ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PO = RO এবং QO = SO.৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য:** ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

খ ΔPSQ এর PO মধ্যমা SQ বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$



চিত্র-(১) চিত্র-(২)

অঙ্কন: SQ বাহুর ওপর (চিত্র ১নং) এবং SQ বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর (চিত্র-২নং) PM লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: ΔPSO এর $\angle$POS স্থূলকোণ এবং SO রেখার বর্ধিতাংশের উপর PO রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OM [উভয় চিত্রে]

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে, আমরা পাই, $PS^2 = PO^2 + SO^2 + 2SO.OM$ ...... (i)

আবার, ΔPQO এর $\angle$POQ সূক্ষ্মকোণ এবং OQ রেখার (চিত্র-১নং) এবং OQ রেখার বর্ধিতাংশের (চিত্র-২নং) উপর PO রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OM.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PQ^2 = PO^2 + QO^2 - 2QO.OM$...........(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

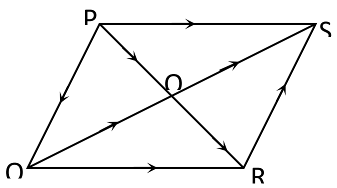
$PS^2 + PQ^2 = 2PO^2 + SO^2 + QO^2 + 2SO.OM - 2QO.OM$

$= 2PO^2 + QO^2 + QO^2 + 2QO.OM - 2QO.OM$ [$\because$ SO=QO]

$= 2(PO^2 + QO^2)$

$\therefore PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, PQRS সামান্তরিকের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, $\overrightarrow{PO} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QO} = \underline{q}$, $\overrightarrow{OR} = \underline{r}$, $\overrightarrow{OS} = \underline{s}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

PO = OR এবং QO = OS

প্রমাণ:

$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{PS}$ এবং $\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR}$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

বা, $\underline{p} + \underline{s} = \underline{q} + \underline{r}$

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = \underline{q} - \underline{s}$

এখানে, $\underline{p}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক PR

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ এর ধারক PR

আবার, $\underline{q}$ ও $\underline{s}$ এর ধারক QS

$\therefore \underline{q} - \underline{s}$ এর ধারক QS

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ দুইটি সমান সমান অশুন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু PR ও QS দুইটি পরস্পরছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = 0$

বা, $\underline{p} = \underline{r}$ বা, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR}$

$\therefore |\overrightarrow{PO}| = |\overrightarrow{OR}|$

এবং $\underline{q} - \underline{s} = 0$ বা, $\underline{q} = \underline{s}$ বা, $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{OS}$

$\therefore |\overrightarrow{QO}| = |\overrightarrow{OS}|$

$\therefore$ PO = RO এবং QO = SO **(প্রমাণিত)**

২৪. দিনাজপুর বোর্ড ২০১৫

ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F এবং শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2, 3), B(5, 6), C(–1, 4).

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2}BC$. ৪

গ. ΔABC এর বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, ΔABC এ AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী, ΔABE থেকে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$ [$\because$ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}) - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$

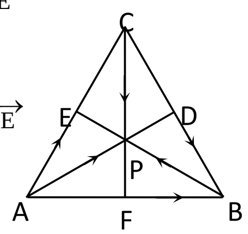
$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

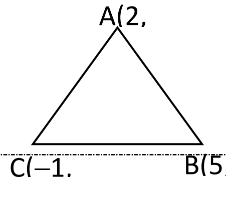


খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য।

গ A, B ও C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2, 3), B(5, 6) এবং C(–1, 4)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-5)^2 + (3-6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$



$= \sqrt{9 + 9}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5 + 1)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 - 4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ একক

অর্ধপরিসীমা, $s = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + \sqrt{10}}{2} = 6{\cdot}8647$ একক

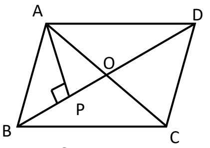
$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s - AB)(s - BC)(s - AC)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6{\cdot}8647)(6{\cdot}8647 - 3\sqrt{2})(6{\cdot}8647 - 2\sqrt{10})(6{\cdot}8647 - \sqrt{10})}$

$= \sqrt{35{\cdot}9964883}$

$= 5{\cdot}9997$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক (প্রায়) **(Ans.)**

২৫. কুমিল্লা বোর্ড ২০১৭



চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক।

ক. AB এবং AD এর লম্ব-অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

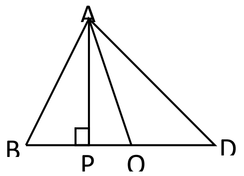
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO^2)$ ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, AO = OC এবং BO = OD ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক BD এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BP এবং AD এর লম্ব অভিক্ষেপ DP.

খ



বিশেষ নির্বচন ঃ মনে করি, ΔABD এর AO মধ্যমা যা BD বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে এবং $AP \perp BD$. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO^2)$

প্রমাণঃ ΔAOB এ $\angle AOB$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2BO\,.\,OP$ .... (i)

আবার, ΔAOD এর মধ্যে $\angle AOD$ স্থূলকোণ।

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AD^2 = AO^2 + OD^2 + 2OD.OP$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AD^2 = AO^2 + BO^2 - 2BO\,.\,OP + AO^2 + OD^2 + 2OD.OP$

$= 2AO^2 + BO^2 - 2BO.OP + BO^2 + 2BO.OP$ [∵ BO = OD]

$= 2AO^2 + 2BO^2$

$\therefore AB^2 + AD^2 = 2(AO^2 + BO)^2$ **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৪ দ্রষ্টব্য।

২৬. কুমিল্লা বোর্ড ২০১৬

P(7, 2), Q(–4,2), R(–4, –3) এবং S(7, –3) বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

ক. PQ বাহুর ঢাল নির্ণয় কর। ২

খ. বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র নাকি সামান্তরিক– যাচাই কর। ৪

গ. যদি উদ্দীপকে উল্লেখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G হয়, তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, DEFG একটি সামান্তরিক। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

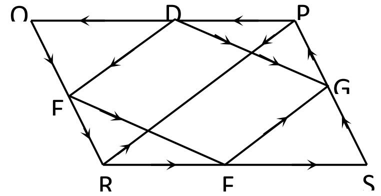
ক দেওয়া আছে,

P(7, 2) এবং Q(–4, 2)

PQ বাহুর ঢাল $= \dfrac{2 - 2}{7 - (-4)} = \dfrac{0}{7 + 4} = 0$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ২১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ



PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F, G। D, E; E, F; F, G এবং D, G যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, DEFG চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণঃ মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}, \overrightarrow{QR} = \underline{q}, \overrightarrow{RS} = \underline{r}, \overrightarrow{SP} = \underline{s}$

P, R যোগ করা হলো।

তাহলে $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{QE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \underline{0}$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

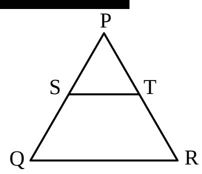
বা, $\frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{FG}$ বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GF}$

$\therefore$ DE ও GF সমান ও সমান্তরাল

$\therefore$ DEFG চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

২৭. কুমিল্লা বোর্ড ২০১৫



ΔPQR, এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T.

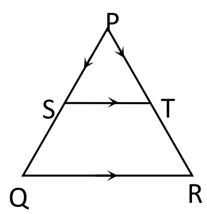
ক. $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $ST \| QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. $\square$SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \| ST \| QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$. ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



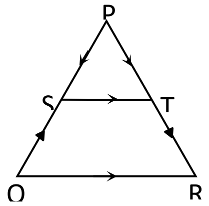
ΔPST এ ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$ .... (i)
আবার, PR বাহুর মধ্যবিন্দু T

$\therefore \quad \overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ .... (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ



এখানে PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T. প্রমাণ করতে হবে যে,

$ST = \frac{1}{2}QR$ এবং $ST \parallel QR$.

প্রমাণ : $PS = SQ = \frac{1}{2}PQ$ এবং $PT = TR = \frac{1}{2}PR$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে ΔPQR হতে পাই,

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$

আবার, ΔPST হতে পাই,

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PT} = -\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PT}$

$= \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PS} \quad = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$\therefore |\overrightarrow{ST}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

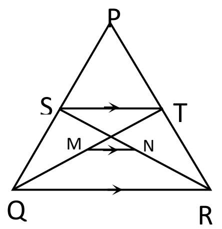
$\therefore ST = \frac{1}{2}QR$

সুতরাং, $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং, $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ ST ও QR সমান্তরাল।

$\therefore ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$ **(প্রমাণিত)**

গ



দেওয়া আছে, ΔPQR-এ S ও T যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$

$\therefore$ SQRT একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, QT ও RS কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। N, M যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$

প্রমাণ: মনে করি, কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে

S ও T বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{s}$ ও $\underline{t}$

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

$\overrightarrow{ST} = \underline{t} - \underline{s}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t})$ [∵ M, QT এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$ [∵ N, RS এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s} - \underline{q} - \underline{t})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{t} - \underline{s})\} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST})$

$ST \parallel QR$ হওয়ায় $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore MN \parallel ST$

আবার, $ST \parallel QR$

$\therefore MN \parallel ST \parallel QR$

আবার, $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}|$

বা, $MN = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{ST}|) = \frac{1}{2}(QR - ST)$

$\therefore MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$ **(প্রমাণিত)**

২৮. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৭

P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3) বিন্দু তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। S ও T যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

ক. QR এর ঢাল নির্ণয় কর। ২
খ. দেখাও যে, PQR সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ক্ষেত্রফল 25 বর্গ একক। ৪
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $ST \parallel QR$ এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 8) ও (– 2, 3)

$\therefore$ QR রেখার ঢাল $= \frac{3-8}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় P(8, 3), Q(3, 8) এবং R(– 2, 3)

PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{50}$ একক

QR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{50}$ একক

PR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-8)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{100}$ একক $= 10$ একক

যেহেতু ΔPQR এর $PQ = QR = \sqrt{50}$ একক

$\therefore \Delta PQR$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

ধরি, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{50}$ একক

এবং অপর বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = 10$ একক

আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ একক

$= \frac{10}{4}\sqrt{4(\sqrt{50})^2 - (10)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{4 \times 50 - 100} = \frac{5}{2}\sqrt{100} = \frac{5}{2} \times 10 = 25$

$\therefore \Delta PQR$ এর ক্ষেত্রফল = 25 বর্গ একক। **(Ans.)**

গ সৃজনশীল ২৭(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

২৯. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৬

ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে A(2,–4), B(–4, 4) এবং C(3, a) যেখানে $a > 0$

ক. AC = BC হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. AB রেখার সমীকরণ ও ঢাল নির্ণয় কর। ৪
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ΔABC এর যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় A(2, – 4), B(– 4, 4) এবং C(3, a)

প্রশ্নমতে, AC = BC

বা, $\sqrt{(3-2)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{(3+4)^2 + (a-4)^2}$

বা, $\sqrt{1 + a^2 + 8a + 16} = \sqrt{49 + a^2 - 8a + 16}$

বা, $a^2 + 8a + 17 = a^2 - 8a + 65$ [বর্গ করে]

বা, $16a = 65 - 17$

বা, $a = \frac{48}{16}$

$\therefore$ $a = 3$ **(Ans.)**

খ $A(2, -4)$ ও $B(-4, 4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$\frac{x - 2}{2 - (-4)} = \frac{y - (-4)}{-4 - 4}$ বা, $\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 4}{-8}$

বা, $-8x + 16 = 6y + 24$ বা, $-8x - 6y + 16 - 24 = 0$

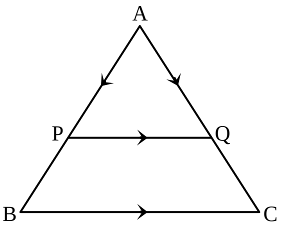
বা, $-8x - 6y - 8 = 0$ বা, $-2(4x + 3y + 4) = 0$

$\therefore$ $4x + 3y + 4 = 0$ **(Ans.)**

আবার, AB রেখার ঢাল $= \frac{4 - (-4)}{-4 - 2} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$ **(Ans.)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য।

৩০. চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৫



চিত্রে, ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল।

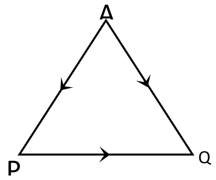
ক. APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Q, AC এর মধ্যবিন্দু। ৪

গ. PBCQ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC}\right)$। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



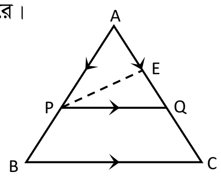
ΔAPQ-এ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ এর আদিবিন্দু একই

এবং $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ এর অন্তবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P ও Q যোগ করলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QP}$

খ দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল PQ, AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে Q, AC এর মধ্যবিন্দু।



প্রমাণ: Q যদি $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু না হয়,

তবে ধরি, E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [□ P, $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore$ $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE}$ [□ $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}$]

$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [□ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু ধরে নেয়া হয়েছে]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because$ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$]

$\therefore$ $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, PE || BC কিন্তু PQ || BC (উদ্দীপকে দেয়া আছে)

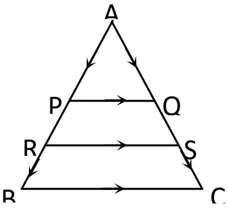
তাহলে $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ রেখাদ্বয় উভয়ে P বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল।

অতএব, $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ অবশ্যই সমপাতিত হবে।

$\therefore$ E ও Q একই বিন্দু হবে।

অর্থাৎ Q, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

গ



PBCQ ট্রাপিজিয়ামে R ও S যথাক্রমে PB ও QC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P, B, C ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{q}$.

$\therefore$ $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{p} + \underline{b}}{2}$

S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{c} + \underline{q}}{2}$

$\therefore$ $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{q}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{q}) = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b}) + \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{p})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PQ})$

$\therefore$ $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$ **(প্রমাণিত)**

৩১. সিলেট বোর্ড ২০১৭

ΔABC এর BC, AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

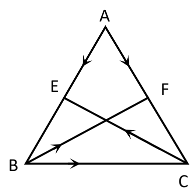
ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BF}$ ও $\overrightarrow{CE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2}BC$। ৪

গ. ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক A(10, 6), B(4, 0), C(14, 0) হলে, ΔABC ও ΔAEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = 4 : 1$. ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔABF হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$ [ত্রিভুজবিধি]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF}$-

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BF}$ .... (i)

আবার, ΔACE হতে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{AE} - \vec{CE}) - \vec{BF}$

বা, $\vec{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{CE}\right) - \vec{BF}$

বা, $\vec{AB} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{CE} - \vec{BF}$

বা, $4\vec{AB} = \vec{AB} - 2\vec{CE} - 4\vec{BF}$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3\vec{AB} = -2\vec{CE} - 4\vec{BF}$

বা, $\vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{CE} - \frac{4}{3}\vec{BF}$

∴ $\vec{AB} = -\frac{4}{3}\vec{BF} - \frac{2}{3}\vec{CE}$ **(Ans.)**

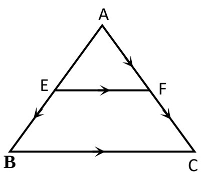
খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু E ও F। E, F যোগ করি।

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $BC \parallel EF$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$।

প্রমাণ: E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।
ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

∴ $\vec{EB} = \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ এবং $\vec{AF} = \vec{FC} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

ΔABC হতে ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,



$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

∴ $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ .... (i)

এবং ΔAEF হতে,

$\vec{AE} + \vec{EF} = \vec{AF}$

বা, $\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE}$

$= \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}$ $\left[\begin{array}{l}\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} \text{ ‰es} \\ \vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AC}\end{array}\right]$

$= \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB})$

বা, $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ [সমীকরণ (i) হতে]

বা, $|\vec{EF}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}|$

∴ $EF = \frac{1}{2}BC$

∴ $\vec{EF}$ ও $\vec{BC}$ এর ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে EF ও BC এর ধারকরেখা একই হতে পারে না।

∴ $EF \parallel BC$।

সুতরাং $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,
ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলো A(10, 6), B(4, 0) ও C(14, 0)

∴ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 4 & 14 & 10 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(0 + 0 + 84 - 24 - 0 - 0)$

$= \frac{1}{2} \times 60 = 30$ বর্গ একক

যেহেতু E ও F যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু

∴ E বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{10+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (7, 3)$

এবং F বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{10+14}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (12, 3)$

∴ ΔAEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 10 & 7 & 12 & 10 \\ 6 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(30 + 21 + 72 - 42 - 36 - 30)$

$= \frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{2}$ বর্গ একক

∴ $\frac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = \frac{60}{15} = \frac{4}{1}$

∴ ΔABC ঃ ΔAEF = 4 ঃ 1 **(দেখানো হলো)**

৩২. সিলেট বোর্ড ২০১৬

PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং PR ও QS উহার দুটি কর্ণ।

ক. নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান কোথায় এবং এর ব্যাসার্ধ কত? ২

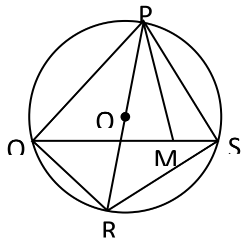
খ. প্রমাণ কর যে, PR.QS = PQ.RS + QR.PS. ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।
আবার, নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান হয়।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি বৃত্তে অর্ন্তলিখিত PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও PS। PR এবং QS চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, PR . QS = PQ . RS + QR . PS.

অঙ্কন: ∠QPR কে ∠SPR এর ছোট ধরে নিয়ে P বিন্দুতে PS রেখাংশের সাথে ∠QPR-এর সমান করে ∠SPM আঁকি যেন PM রেখা QS কর্ণকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে ∠QPR = ∠SPM

উভয়পক্ষে ∠RPM যোগ করে পাই,

∠QPR + ∠RPM = ∠SPM + ∠RPM

অর্থাৎ, ∠QPM = ∠RPS

এখন ΔPQM ও ΔPRS এর মধ্যে

∠PQS = ∠PRS [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট ∠PMQ = অবশিষ্ট ∠PSR

∴ ΔPQM ও ∠PRS সদৃশকোণী।

$\frac{QM}{RS} = \frac{PQ}{PR}$

অর্থাৎ, PR . QM = PQ . RS .... (i)

আবার, ΔPQR ও ΔPMS এর মধ্যে

∠QPR = ∠SPM [অঙ্কন অনুসারে]

∠PSM = ∠PRQ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট ∠PQR = অবশিষ্ট ∠PMS

∴ ΔPQR ও ΔPMS সদৃশকোণী।

∴ $\frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$

অর্থাৎ, PR . MS = QR . PS ....(ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

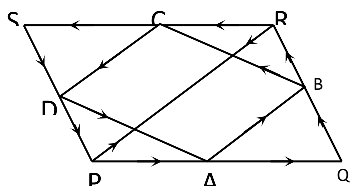
PR . QM + PR. MS = PQ . RS + QR . PS

বা, PR (QM + MS) = PQ . RS + QR . PS

বা, PR . QS = PQ . RS + QR . PS [যেহেতু QM + MS = QS]

∴ PR.QS = PQ.RS + QR.PS **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি PQRS সামান্তরিকের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে A, B, C ও D। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: ধরি, $\vec{PQ} = \underline{p}$, $\vec{QR} = \underline{q}$, $\vec{RS} = \underline{r}$, $\vec{SP} = \underline{s}$

তাহলে,

$\vec{AB} = \vec{AQ} + \vec{QB} = \frac{1}{2}(\vec{PQ} + \vec{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\vec{BC} = \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{r})$, $\vec{CD} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$,

$DA = \frac{1}{2}\ (\underline{s} + \underline{p}\,)$

আবার, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{p} + \underline{q}$

এবং $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \underline{r} + \underline{s}$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}\,) + (\underline{r} + \underline{s}\,) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

অর্থাৎ $(\underline{p} + \underline{q}\,) = -(\underline{r} + \underline{s}\,)$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\ (\underline{p} + \underline{q}\,) = -\frac{1}{2}\ (\underline{r} + \underline{s}\,) = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$

তাহলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারকরেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়।

$\therefore$ ধারকরেখাদ্বয় সমান্তরাল। $\therefore\ \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$.

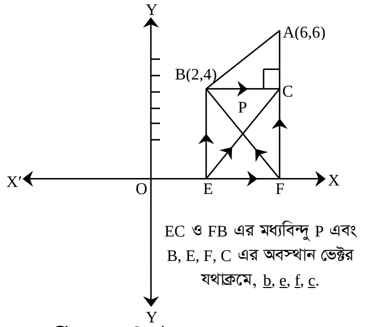
এখন, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|\ \therefore\ AB = DC$

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

৩৩. সিলেট বোর্ড ২০১৫



ক. AB এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. AB রেখার সমীকরণ ও ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BEFC একটি সামান্তরিক।৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক AB এর দূরত্ব $= \sqrt{(6-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ একক **(Ans.)**

খ AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-6}{6-4} = \frac{x-6}{6-2}$

বা, $\frac{y-6}{2} = \frac{x-6}{4}$

বা, $y - 6 = \frac{x-6}{2}$

বা, $2y - 12 = x - 6$

বা, $x - 6 - 2y + 12 = 0$

$\therefore\ x - 2y + 6 = 0$ **(Ans.)**

C এর ভুজ এবং A এর ভুজ একই $\therefore$ C এর ভুজ = 6

C এর কোটি এবং B এর কোটি একই $\therefore$ C এর কোটি = 4

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক (6, 4)

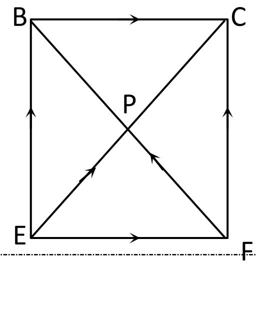
$\therefore$ AC এর দূরত্ব $= \sqrt{(6-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{0 + (2)^2} = 2$

BC এর দূরত্ব $= \sqrt{(2-6)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4$

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4$

$= 4$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ



P বিন্দুটি EC এবং FB এর মধ্যবিন্দু। B, E, F এবং C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{e}$, $\underline{f}$ এবং $\underline{c}$। অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, BEFC একটি সামান্তরিক।

$\overrightarrow{EC}$ বরাবর P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{e} + \underline{c}}{2}$

এবং $\overrightarrow{FB}$ বরাবর P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{f} + \underline{b}}{2}$

যেহেতু, P বিন্দুটি $\overrightarrow{EC}$ এবং $\overrightarrow{FB}$ এর মধ্যবিন্দু

অতএব, $\frac{\underline{e} + \underline{c}}{2} = \frac{\underline{f} + \underline{b}}{2}$

বা, $\underline{c} + \underline{e} = \underline{b} + \underline{f}$

বা, $\underline{b} - \underline{e} = \underline{c} - \underline{f}$

বা, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FC}$ [$\because$ $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PE} = \underline{b} - \underline{e}$ এবং $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PF} = \underline{c} - \underline{b}$]

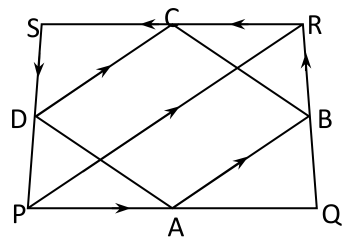
আবার, $|\overrightarrow{EB}| = |\overrightarrow{FC}|$

$\therefore$ EB = FC

আমরা জানি, দুইটি ভেক্টর সমান হবে যদি তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হয়। কিন্তু, এক্ষেত্রে $\overrightarrow{EB}$ এবং $\overrightarrow{FC}$ এর ধারক রেখা একই নয়। অতএব, তারা সমান্তরাল, অর্থাৎ EB ∥ FC

$\therefore$ BEFC একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

৩৪. যশোর বোর্ড ২০১৭



চিত্রে PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C এবং D.

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AB ∥ PR এবং $AB = \frac{1}{2}$ PR. ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABQ থেকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

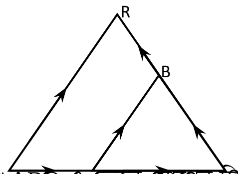
$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AB}$ [$\because$ A ও B যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৩২(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ



প্রমাণ: ΔABQ এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB}$ ... ... (i)

আবার, ΔPQR এ $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

বা, $2\overrightarrow{AQ} + 2\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PR}$ [$\because$ A ও B যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু]

বা, $2(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}) = \overrightarrow{PR}$ বা, $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PR}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ বা $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PR}|$

$\therefore$ AB $= \frac{1}{2}$PR.

আবার, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

∴ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখাদ্বয় সমান্তরাল।

∴ $AB \parallel PR$ এবং $AB = \frac{1}{2}PR$ **(প্রমাণিত)**

৩৫. যশোর বোর্ড ২০১৭

ABC ত্রিভুজের উচ্চতা $h = 3.5$ cm, শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমি BC এর উপর মধ্যমা $AD = 4$ সে. মি. এবং $\angle B = 60°$।

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$. ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ BC এর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-৪ এর সম্পাদ্য-৪ দ্রষ্টব্য।
[**বি. দ্র.** উচ্চতা, $h = 3.5$ সে. মি., মধ্যমা, $AD = d = 4$ সে. মি. এবং $\angle B = \angle x = 60°$ নিতে হবে।]

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১ এর উপপাদ্য-৩.৫ দ্রষ্টব্য।

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য।

৩৬. বরিশাল বোর্ড ২০১৬

ABCD চতুর্ভুজের $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ এবং $D(-5, 5)$ শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত হয়।

ক. ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। ৪

গ. AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $ST \parallel BC$ এবং $ST = \frac{1}{2}BC$. ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $A(-5, 0), B(5, 0), C(5, 5)$ এবং $D(-5, 5)$ বিন্দুসমূহ নিয়ে গঠিত ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 5 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0 + 25 + 25 + 0 - 0 - 0 + 25 + 25)$

$= \frac{1}{2} \times 100 = 50$ বর্গ একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A(-5, 0), B(5, 0), C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$

তাহলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(10)^2 + (0)^2}$
$= \sqrt{100} = 10$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25}$
$= 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 0^2}$
$= \sqrt{100} = 10$ একক

এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5+5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2}$
$= \sqrt{25} = 5$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{10^2 + 5^2}$
$= \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ একক

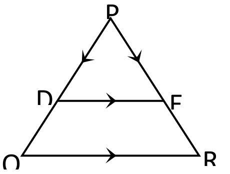
এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 5^2}$
$= \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ একক

এখানে, $AB = CD$; $BC = AD$ এবং কর্ণ $AC =$ কর্ণ BD

∴ ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(দেখানো হলো)**

গ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১২ এর উদাহরণ-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৬৩
[**বি. দ্র.** D এর পরিবর্তে S এবং E এর পরিবর্তে T হবে।]

৩৭. বরিশাল বোর্ড ২০১৫



ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

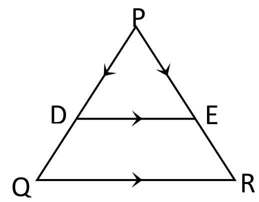
ক. $(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. DERQ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $FG \parallel DE \parallel QR$ এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$.৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

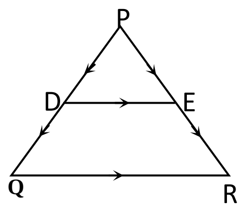


ΔPDE-এ $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$ [ত্রিভুজবিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ [যেহেতু, E, PR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$. **(Ans.)**

খ মনে করি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।
D, E যোগ করা হলো দেখাতে হবে যে, $DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$



প্রমাণ: D ও E যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

ΔPQR -এ ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ .... (i)

এবং ΔPDE এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ [$\because \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ [(i) হতে]

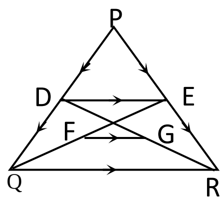
$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

$\therefore DE = \frac{1}{2}QR$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল।

কিন্তু DE এবং QR ভিন্ন ভিন্ন রেখা হওয়ায় $DE \parallel QR$ হবে।

$\therefore DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$. **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, DERQ ট্রাপিজিয়ামের $DE \parallel QR$ এবং QE ও DR কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G। F ও G যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $FG \parallel DE \parallel QR$ এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মধ্যবিন্দুর সাপেক্ষে D, E, Q ও R এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{q}$ ও $\underline{r}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

∴ F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{e}+\underline{q})$ [∵ F, QE এর মধ্যবিন্দু]

এবং G বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{r}+\underline{d})$ [∵ G, DR এর মধ্যবিন্দু]

∴ $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{r}+\underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{e}+\underline{q})$

$= \frac{1}{2}(\underline{r}+\underline{d}-\underline{e}-\underline{q}) = \frac{1}{2}\{(\underline{r}-\underline{q})-(\underline{e}-d)\}$

∴ $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{DE})$

DE || QR হওয়ায় $(\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে।

তাহলে $\overrightarrow{FG}$ ভেক্টরটি, $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

আবার, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{DE})$

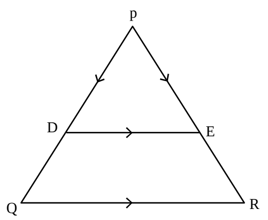
∴ $|\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{DE})| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}|-|\overrightarrow{DE}|)$

∴ $FG = \frac{1}{2}(QR-DE)$

অর্থাৎ FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR-DE)$ **(প্রমাণিত)**

গুরবত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸



ΔPQR–এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

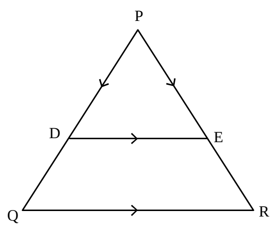
খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || QR এবং DE = $\frac{1}{2}$ QR. ৪

গ. DERQ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

FG || DE || QR এবং FG = $\frac{1}{2}$(QR – DE). ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



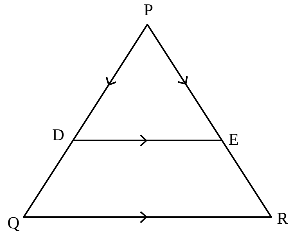
ΔPDE–এ $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$ [ত্রিভুজবিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ [যেহেতু, E, PR এর মধ্যবিন্দু]

∴ $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

D, E যোগ করা হলো দেখাতে হবে যে, DE || QR এবং DE = $\frac{1}{2}$QR



প্রমাণ : D ও E যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

∴ $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

ΔPQR–এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

∴ $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}$ .... (i)

এবং ΔPDE এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$

∴ $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}-\overrightarrow{PD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ [∵ $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ [(i) হতে]

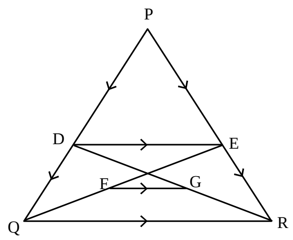
∴ $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

∴ DE = $\frac{1}{2}$QR এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল।

কিন্তু DE এবং QR ভিন্ন ভিন্ন রেখা হওয়ায় DE || QR হবে।

∴ DE || QR এবং DE = $\frac{1}{2}$ QR **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, DERQ ট্রাপিজিয়ামের DE || QR এবং QE ও DR কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G। F ও G যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, FG || DE || QR এবং FG = $\frac{1}{2}$(QR – DE).

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মধ্যবিন্দুর সাপেক্ষে D, E, Q ও R এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{q}$ ও $\underline{r}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e}-\underline{d}$

$\overrightarrow{QR} = \underline{r}-\underline{q}$

∴ F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{e}+\underline{q})$ [∵ F, QE এর মধ্যবিন্দু]

এবং G বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{r}+\underline{d})$ [∵ G, DR এর মধ্যবিন্দু]

∴ $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{r}+\underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{e}+\underline{q}) = \frac{1}{2}(\underline{r}+\underline{d}-\underline{e}-\underline{q})$

$$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{e} - \underline{d})\} \therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$$

DE || QR হওয়ায় $(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{FG}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

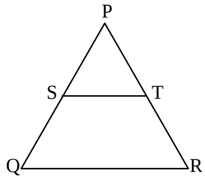
আবার, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})| = \frac{1}{2}|(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{DE}|)$

$\therefore FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$

অর্থাৎ FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২ ▸



ΔPQR, এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T.

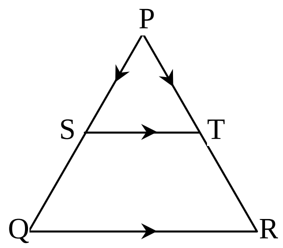
ক. $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || QR এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. □SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || ST || QR এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$. ৪

▸◂ ২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔPST এ ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$ .... (i)

আবার, PR বাহুর মধ্যবিন্দু T

$\therefore \overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ .... (ii)

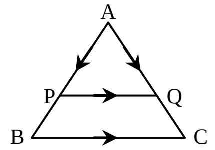
(i) ও (ii) হতে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ. সৃজনশীল ১(গ)নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন–৩ ▸



চিত্রে, ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল।

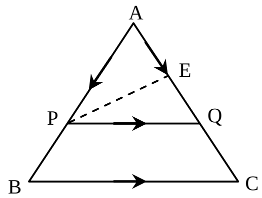
ক. APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি বর্ণনা কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Q, AC এর মধ্যবিন্দু। ৪

গ. PBCQ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC}\right)$। ৪

▸◂ ৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔAPQ-এ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ এর আদিবিন্দু একই এবং $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{AQ}$ এর অন্তবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P ও Q যোগ করলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QP}$

খ. দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল PQ, AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে Q, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ : Q যদি $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু না হয়, তবে ধরি, E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [∵ P, $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE}$ [$\because \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}$]

$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [∵ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু হলে]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, PE || BC কিন্তু PQ || BC (উদ্দীপক অনুসারে)

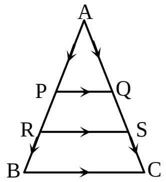
তাহলে $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ রেখাদ্বয় উভয়ে P বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল।

অতএব, $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ অবশ্যই সমাপাতিত হবে,

তাই E ও Q একই বিন্দু হবে।

অর্থাৎ Q, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

গ.



PBCQ ট্রাপিজিয়ামে R ও S যথাক্রমে PB ও QS এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P, B, C ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{q}$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\underline{p} + \underline{b}}{2}$

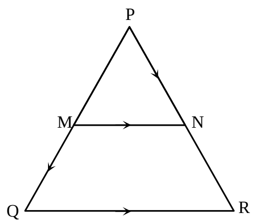
S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{\underline{c} + \underline{q}}{2}$

$$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{q}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{p}) = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b}) + \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{p})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PQ})$$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৪



ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N.

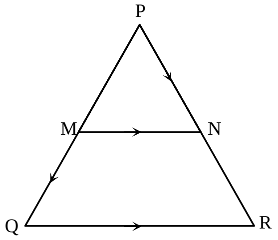
ক. $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN ∥ QR এবং $MN = \frac{1}{2}QR$। ৪

গ. QRNM ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE ∥ MN ∥ QR এবং $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



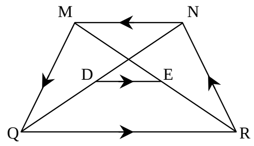
ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N

$\therefore$ ΔPMN–এ $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$

বা, $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ.



মনে করি, QRNM ট্রাপিজিয়ামের QR ও MN সমান্তরাল বাহু এবং MR ও QN কর্ণের মধ্যবিন্দু D ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, DE ∥ MN ∥ QR এবং $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$

ধরি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে R, Q, N, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \underline{b} - \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{MN} = \underline{e} - \underline{d}$

এখন D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

এবং E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e} - \underline{c} - \underline{d})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c} + \underline{e} - \underline{d}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{NM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$$

$\therefore \overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{NM}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী

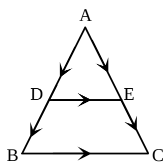
$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{MN}|)$

বা, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$ **(প্রমাণিত)**

$\therefore$ DE, MN ও QR সমান্তরাল।

অর্থাৎ DE ∥ MN ∥ QR **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overline{AD} + \overline{DE})$ কে $\overline{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE ∥ BC এবং $DE = \frac{1}{2}$ BC ৪

গ. A ও B এর অবস্থান ভেক্টর A ও B এবং AB রেখাংশ c বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহিঃবিভক্ত হলে, C

এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$ ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE এ

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

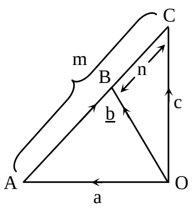
$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]

সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ. মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$

প্রমাণ : AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।



$\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{m-n}{n}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{AC - BC}{BC} = \dfrac{m-n}{n}$

বা, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{m-n}{n}$

বা, $BC = \dfrac{n}{m-n}AB$

বা, $\overrightarrow{BC} = \dfrac{n}{m-n}\overrightarrow{AB}$ [$\because \overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c} - \underline{b} = \dfrac{n}{m-n}(\underline{b} - \underline{a})$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

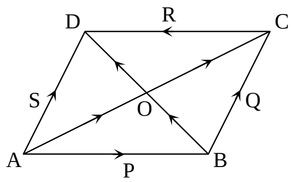
বা, $\underline{c} = \dfrac{n\underline{b} - n\underline{a}}{m-n} + \underline{b}$

বা, $\underline{c} = \dfrac{n\underline{b} - n\underline{a} + m\underline{b} - n\underline{b}}{m-n}$

বা, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m-n}$

$\therefore \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m-n}$ বা, $\dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n-m}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৬



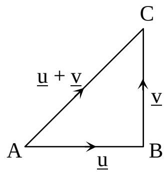
ক. ভেক্টর ত্রিভুজ বিধি কী? চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। (ভেক্টর বিধি প্রযোজ্য)। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে, প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

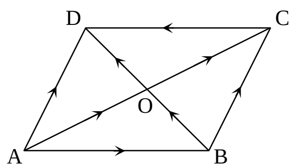
ক. কোন ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা দুই ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করে।



মনে করি $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ যেখানে $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর আদি বিন্দু। তাহলে $\underline{u}$ এর আদি বিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দুর সংযোজক $\overrightarrow{AC}$ দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হয়। $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে, $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরত্রয় একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে বলে উপরিউক্ত যোজন পদ্ধতিতে ত্রিভুজ বিধি বলে।

খ. এখানে ABCD চতুর্ভুজ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ :



$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এখন $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$]

$= \overrightarrow{BC}$

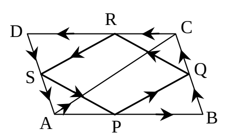
$\therefore |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$

এখন $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ হলে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হবে।

এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AD = BC এবং AD $\parallel$ BC.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

চিত্র হতে, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$[\because \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}]$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{AC} = (\underline{a} + \underline{b})$ $[\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}]$

এবং $\overrightarrow{CA} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\because (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

$[\because \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}]$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS–একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৭ ▸ তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে অবস্থিত। বাড়ি হতে স্কুলে হেঁটে যেতে 1 ঘণ্টা এবং ছুটির পর সাইকেলে বাড়ি ফিরে আসতে 20 মিনিট সময় লাগে।

ক. বাড়ি হতে স্কুলের দূরত্ব ও 3 কিলোমিটার হলে স্কুলে হেঁটে যেতে তোমার গতিবেগ কত? ২

খ. স্কুল থেকে সাইকেলে বাড়ি ফিরে আসতে তোমার গতিবেগ নির্ণয় কর। সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার গতিবেগের কতগুণ? ৪

গ. বাসের গতিবেগ 36 কি.মি./ ঘন্টা হলে বাড়ি হতে স্কুলে যেতে তোমার কত সময় লাগবে? তিন মাধ্যমে তোমার গড় গতিবেগ কত? ৪

▸◂ ৭নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. বাড়ির অবস্থানকে H দ্বারা এবং স্কুলের অবস্থানকে S দ্বারা চিহ্নিত করলে,

আমার গতিবেগ $\underline{u} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{HS}{\text{সময়}} = \frac{3}{1}$ কি.মি./ ঘন্টা দক্ষিণ দিকে = 3 কি.মি./ ঘন্টা দক্ষিণ দিকে। **(Ans.)**

খ. মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.

মোট সময় = 20 মিনিট

আবার, এক ঘন্টা = 60 মিনিট

20 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব = 3 কি.মি.

$\therefore$ 60 " " " $= \frac{3 \times 60}{20}$ কি.মি.

= 9 কি.মি.

$\therefore$ স্কুল থেকে বাড়ি ফেরার সময় আমার গতিবেগ,

$\underline{v}$ = 9 কি. মি./ঘন্টা। **(Ans.)**

এখন সাইকেলের গতিবেগ = 9 কি. মি./ ঘন্টা

= 3×3 কি.মি./ ঘন্টা

= $3 \times$ হাঁটার গতিবেগ ['ক' হতে]

সুতরাং সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার বেগের তিনগুণ। **(Ans.)**

গ. 'ক' হতে মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.

গাড়ির গতিবেগ = 36 কি.মি.

বাসে 45 কি. মি. যায় 1 ঘন্টায়

$\therefore$ 1 " " " $\frac{1}{36}$ "

$\therefore$ 3 " " " $\frac{3}{36}$ "

বা, $\frac{1}{12}$ ঘণ্টায় বা $\frac{60}{12}$ মিনিটে [$\because$ 1 ঘন্টা = 60 মিনিট]

বা 5 মিনিটে।

$\therefore$ বাড়ি হতে বাসে স্কুলে যেতে আমার 5 মিনিট সময় লাগবে। **(Ans.)**

হেঁটে যেতে সময় লাগে 1 ঘণ্টা বা 60 মিনিট

সাইকেলে যেতে সময় লাগে 20 মিনিট।

তিন মাধ্যমে যেতে মোট সময় লাগে = (60 + 20 + 5) মিনিট।

= 85 মিনিট

তিন মাধ্যমে অতিক্রান্ত দূরত্ব = (3 + 3 + 3) বা 9 কি.মি.

$\therefore$ তিন মাধ্যমে গড় গতিবেগ $= \frac{9 \text{ কি. মি.}}{85 \text{ মিনিট}} = \frac{9 \text{ কি.মি.}}{\frac{85}{60} \text{ ঘন্টা}}$

$= \frac{9 \times 60}{85}$ কি.মি./ ঘণ্টা

= 6·35 কি.মি./ ঘন্টা (প্রায়)

(Ans.)

প্রশ্ন–৮ ▸ m ও n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$ একটি ভেক্টর। $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

ক. m ও n এর বিভিন্ন সাংখ্যিক মানের সূত্রটি যাচাই কর। ২

খ. ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক সংক্রান্ত সূত্র হতে এটি প্রমাণ কর। ৪

গ. অপর আরেকটি ভেক্টর u হলে $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ সুত্রটি প্রমাণ কর। ৪

▸◂ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

m = 1 এবং n = 2 হলে, বামপক্ষ = $(1 + 2)\underline{u}$

$= 3\underline{u}$

ডানপক্ষ = $1\underline{u} + 2\underline{u} = \underline{u} + 2\underline{u} = 3\underline{u}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

আবার, m = 2 এবং n = 3 হলে, বামপক্ষ = $(2 + 3)\underline{u}$

$= 5\underline{u}$

ডানপক্ষ = $2\underline{u} + 3\underline{u} = 5\underline{u}$

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অতএব, m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই করা হলো।

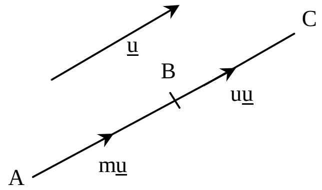
খ. **প্রমাণ :** m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$

∴ $|\overrightarrow{AB}| = m\,|\underline{u}|$

AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন,

$|\overrightarrow{BC}| = n\,|\underline{u}|$ হয়।



∴ $\overrightarrow{BC} = m\underline{u}$

এবং $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = m|\underline{u}| + n|\underline{u}| = (m + n)\,|\underline{u}|$

∴ $\overrightarrow{AC} = (m + n)\,\underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

∴ $m\underline{u} + n\underline{u} = (m + n)\underline{u}$

m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে m + n) $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m + n|\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক, তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m|\,|\underline{u}| + |n|\,|\underline{u}| = (|m| + |n|)\,|\underline{u}|$

[∵ $m\underline{u}, n\underline{u}$ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে]

এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। কিন্তু $m < 0$ এবং $n < 0$ হওয়ায় $|m| + |n| = |m + n|$ সেহেতু এক্ষেত্রে $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ পাওয়া গেল।

সর্বশেষ m এবং n এর মধ্যে $m > 0, n < 0$ হলে

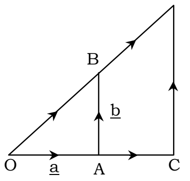
$(m + n)\,\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|\,m + n\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে

(i) $\underline{u}$ এর দিকের সাথে একমুখী যখন $|m| > |n|$

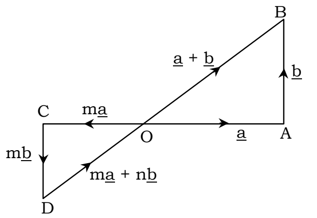
(ii) $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক যখন $|m| < |n|$

তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটিও দৈর্ঘ্য ও দিকে $(m + n)\,\underline{u}$ এর সাথে একমুখী হবে। **(প্রমাণিত)**

গ.



চিত্র –১



চিত্র –২

মনে করি, $\overrightarrow{OC} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = m OA হয়। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

সেহেতু $\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

∴ $\overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

চিত্র –১ এ m ধনাত্মক চিত্র –২ এ m ঋণাত্মক

∴ OC = m. OA, CD = m. AB, OD = m. OB

এখন, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ বা, $m(\overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

∴ $m\underline{u} + m\,\underline{v} = m(\underline{u} + \underline{v})$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৯ ▸ O কে মূলবিন্দু ধরে বিভিন্ন অবস্থানে A, B, C, D ও E পাঁচটি বিন্দু নিই।

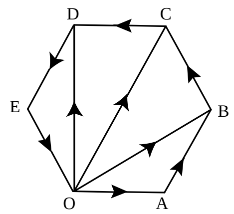
ক. চিত্র এঁকে O বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুগুলোর অবস্থান চিহ্নিত কর। ২

খ. দেখাও যে, $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, OABCDE ষড়ভুজের মূলবিন্দু O মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A, B, C, D, E এই পাঁচটি বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$ এবং $\overrightarrow{OE} = \underline{e}$



খ. 'ক' হতে, = $\underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$

এখন, ΔOAB-এ

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

আবার, ΔOBC - এ

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ [[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \underline{c} - \underline{b}$

সুতরাং $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{b}$

$= \underline{c} = \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

∴ $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান। **(দেখানো হলো)**

গ. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ ['খ' হতে]

এখন, ΔOCD- এ

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \underline{d} - \underline{c}$ ['ক' হতে]

আবার, ΔOAD- এ

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \underline{c} - \underline{d}$ [‘ক’ হতে]

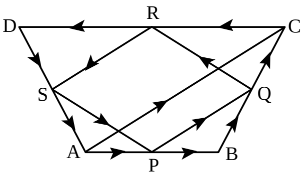
সুতরাং $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{c} + \underline{d} - \underline{c} + \underline{e} - \underline{d}$

$= \underline{e} = \overrightarrow{OE}$

বা, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$\therefore \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০



চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S.

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

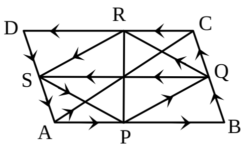
১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q.

আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।

$\therefore \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ **(দেখানো হলো)**

খ. মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, BD, DA বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \overrightarrow{CD} = \underline{c}, \overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, PQRS সামান্তরিকের $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\overrightarrow{PO} = \underline{p}, \overrightarrow{QO} = \underline{q}$ ও $\overrightarrow{OR} = \underline{r}$ ও $\overrightarrow{OS} = \underline{s}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{p}| = |\underline{r}|, |\underline{s}| = |\underline{q}|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{SQ}$

আমরা জানি, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

বা, $\underline{p} + \underline{s} = \underline{q} + \underline{r}$

বা, $\underline{p} - \underline{r} = \underline{q} - \underline{s}$

[উভয়পক্ষে $-\underline{s} - \underline{r}$ যোগ করে]

এখানে, $\underline{p}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক PR

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ এর ধারক PR.

$\underline{q}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক QS,

$\therefore \underline{q} - \underline{s}$ এর ধারক QS.

$\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে এদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু PR ও QS দুইটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = 0$ বা $\underline{p} = \underline{r}$ এবং $\underline{q} - \underline{s} = 0$ বা, $\underline{q} = \underline{s}$

$\therefore |\underline{p}| = |\underline{r}|$ এবং $|\underline{q}| = |\underline{s}|$

অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১১ **ABC ত্রিভুজে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F**

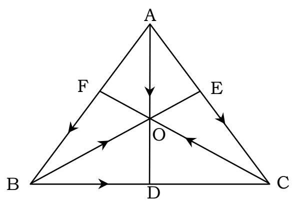
ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{AD}$–কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ BOF হতে পাই,

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BF}$

বা, $\frac{2}{3}$ BE + $\frac{2}{3}$ CF = $\frac{1}{2}$ AB

$\therefore AB = \frac{4}{3}(BE + CF)$

খ. 'ক' এর চিত্রানুসারে Δ BAE হতে পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$ **(Ans.)**

Δ BCE থেকে পাই,

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE}$

$= \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}.2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

Δ AOB হতে পাই,

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$

বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

গ. 'ক' এর চিত্রানুসারে,

মনে করি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

প্রমাণ :

Δ ABD হতে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ .... (i)

ΔACD থেকে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

(i) + (ii) করে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

বা, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}$

বা, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .... (iii)

একইভাবে দেখানো যায় যে,

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ .... (iv)

এবং $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ .... (v)

(iii), (iv) ও (v) যোগ করে পাই,

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{2} \times 0$

$= 0$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১২ A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$

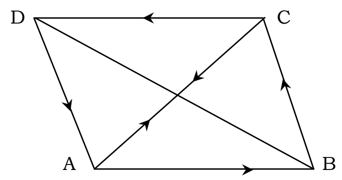
ক. (AB + BC + CD + DA) এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, ADCD একটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাও যে, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}$ হবে। ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .... (i)

ΔACD হতে পাই,

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$

$= \underline{0}$

$\therefore$ (AB + BC + CD + DA) এর মান 0 **(Ans.)**

খ. A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ....(i)

আবার, C ও D-এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$ ....(ii)

কিন্তু প্রদত্ত তথ্যানুসারে, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান হওয়ায় এদের ধারক রেখা পরস্পর সমান্তরাল বা একই হবে।

কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore \overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখা সমান্তরাল।

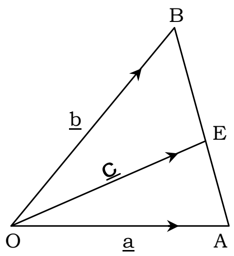
$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

আবার, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

একইভাবে দেখানো যায় যে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ও AD || BC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

গ.



মনে করি, AB রেখাংশ E বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দুতে অবস্থান ভেক্টর = $\dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$

প্রমাণ : AB রেখাংশ E বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

$$\therefore \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{m}{n}$$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{EB}|} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \dfrac{n}{m}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \dfrac{|\overrightarrow{AE}| + |\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = 1 + \dfrac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|}$

$$= 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}$$

$$\therefore \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{m}{m+n}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{AB}$$

$AE = \underline{c} - \underline{a}$ ও $AB = \underline{b} - \underline{a}$

$$\therefore \underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a})$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a}$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)\underline{b} + \underline{a}\left(1 - \frac{m}{m+n}\right)$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)\underline{b} + \underline{a}\left(\frac{m}{m+n}\right)$$

$$= \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$$

$\therefore \underline{c} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ ABCD সামান্তরিকের AC ও BD দুইটি কর্ণ।

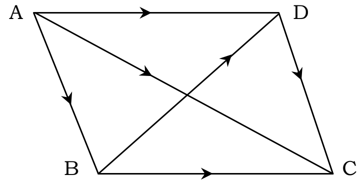
ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ ৪

▸◂ ১৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔABD থেকে,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

ΔADC থেকে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ .... (i)

ΔBDC থেকে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

(i) + (ii) করে পাই,

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ **(প্রমাণিত)**

গ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

ΔADC থেকে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ .... (i)

ΔBCD থেকে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$........................... (ii)

(i) – (ii) করে পাই,

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$$

$$= 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৪ ▸ ABC ত্রিভুজের BC, CA, ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

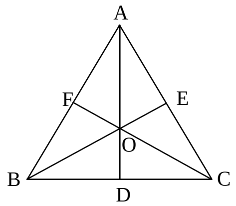
ক. $\overrightarrow{BC}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু ও ছেদবিন্দুতে প্রত্যেক মধ্যমা 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। ৪

গ. EFBC ট্রাপিজিয়ামের BE ও CF বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে প্রমাণ কর যে, EF || PQ || BC ও PQ = $\dfrac{1}{2}$(BC – EF) ৪

▸◂ ১৪নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔBOC হতে পাই,

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$$ **Ans.**

খ. ধরি A, B, C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$

এখন, BC এর মধ্যবিন্দু D

$\therefore$ D এর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

যে বিন্দুটি AD-কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তার অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{2 \times \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) + 1 \times \underline{a}}{2 + 1}$

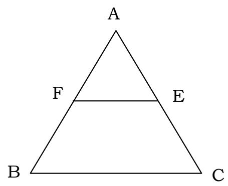
$$= \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$$

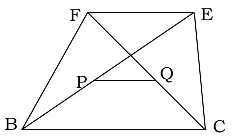
একইভাবে দেখানো যায় যে, বিন্দুটি BE ও CF-কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তার অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{3}(\underline{b} + \underline{c} + \underline{a})$

অর্থাৎ দেখা যাচ্ছে যে, $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$–কে যে বিন্দুগুলো 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তাদের অবস্থান ভেক্টর একই অর্থাৎ তারা একই বিন্দু।

$\therefore$ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং ছেদবিন্দুতে প্রত্যেকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। **(প্রমাণিত)**

গ.





দেওয়া আছে, EFBC ট্রাপিজিয়ামের BE ও CF বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P,Q যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, EF $\parallel$ PQ $\parallel$ BC ও PQ $= \frac{1}{2}$ (BC – EF)

প্রমাণ : মনে করি, যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E ও F ভেক্টরগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$,$\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{f}$

$\therefore \overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c}$, $\overrightarrow{FE} = \underline{e} - \underline{f}$

P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f})$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{f})\}$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$$

বা, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{FE}|) = \frac{1}{2}(BC - FE)$

কিন্তু $PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF})$ হওয়ায় $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি – $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF})$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। আবার $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{FE}$ এর সমান্তরাল হবে।

প্রশ্ন–১৫ ▸ ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S.

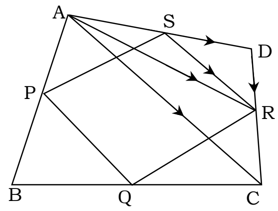
ক. $\overrightarrow{AR}$ কে $\overrightarrow{DA}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ ADR থেকে পাই,

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$ **(Ans.)**

খ. ‘ক’ চিত্র থেকে,

A , C যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

AD ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও R.

$\therefore \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

বা, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে SR ও AC এর ধারক রেখা এক হতে পারে না।

$\therefore$ SR $\parallel$ AC

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং SR $\parallel$ AC **(প্রমাণিত)**

গ. চিত্র ‘ক’ থেকে

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

AD ও DC এর মধ্যবিন্দু S ও R

$\therefore \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

এবং $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

এখন, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল কিন্তু স্পষ্টতই SR ও AC এর ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore$ SR || AC

একইভাবে দেখানো যায় যে,

PQ || AC

অর্থাৎ SR || PQ

অনুরূপভাবে পাই, PS || QR

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৬ $\underline{c}$ **,** $\underline{a}$ **ও** $\underline{b}$ **3টি অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং m ও n দুটি স্কেলার গুণিতক।**

ক. দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$ ২

খ. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ ৪

গ. $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $m = n = \underline{0}$ ৪

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুটি ভেক্টর।

এখন, $\underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 1.\underline{a} + 1.\underline{a} + 1.\underline{b} + 1.\underline{b}$

$= \underline{a}\ (1 + 1) + \underline{b}\ (1 + 1)$

$= 2\underline{a} + 2\underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$

$\therefore \underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$ **(দেখানো হলো)**

খ. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) + (-\underline{b}) = \underline{c} + (-\underline{b})$

বা, $\underline{a} + \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + \{\underline{b} + (-\underline{b})\} = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + (\underline{b} - \underline{b}) = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + 0 = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

$\therefore \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

গ. $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = 0 - n\underline{b}$

বা, $m\underline{a} = -n\underline{b}$

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হলে $m\underline{a}$, $\underline{b}$ n এর বিপরীত ভেক্টর হতে পারে না।

$\therefore m\underline{a} = \underline{0}$ ও $n\underline{b} = \underline{0}$

কিন্তু $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য ভেক্টর

$\therefore m = \underline{0}$ ও $n = \underline{0}$

$\therefore m = n = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৭ $\underline{c}$ **,** $\underline{a}$ **ও** $\underline{b}$ **তিনটি অশূন্য ভেক্টর রাশি এবং m, n স্কেলার গুণিতক।**

ক. দেখাও যে $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ এবং $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} + m(-\underline{b})$ ৪

গ. দেখাও যে, $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\underline{a} + \underline{a} = 1\underline{a} + 1\underline{a} = \underline{a}\,(1 + 1) = 2\,\underline{a}$

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

খ. $(m - n)\,\underline{a} = \{m + (-n)\}\,\underline{a} = m\underline{a} + (-n)\,\underline{a}$

$= m\underline{a} - n\underline{a}$

$\therefore (m - n)\,\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

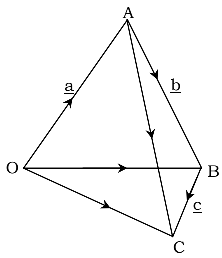
আবার, $m\,(\underline{a} - \underline{b}) = m\,\{\underline{a} + (-\underline{b})\}$

$= m\underline{a} + m\,(-\underline{b})$

$\therefore m\,(\underline{a} - \underline{b}) = m\,\underline{a} + m\,(-\underline{b})$ **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি,

OABC চতুর্ভুজে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$



$\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \underline{c}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$

প্রমাণ :

Δ AOB হতে পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b}$

Δ OBC হতে পাই,

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OC} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ .... (i)

Δ ABC থেকে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \underline{b} + \underline{c}$

Δ OAC হতে পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = \overrightarrow{OC}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৮ **m, n স্কেলার এবং** $\underline{a}$ **,** $\underline{b}$ **ভেক্টর।**

ক. প্রমাণ কর যে, $(m - n)\,\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ ২

খ. $a \neq 0$ ও $b \neq 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $a = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হয়। ৪

গ. $\underline{a} \neq 0$ ও $\underline{b} \neq 0$; $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমান্তরাল এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে দেখাও যে, $m = n = 0.$ ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(m-n)\underline{a} = \{m+(-n)\}\underline{a}$

$= m\underline{a} + (-n)\underline{a}$

$= m\underline{a} - n\underline{a}$

$\therefore (m-n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ **(প্রমাণিত)**

খ. মনে করি, $\underline{a} = m\underline{b}$

তাহলে $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল দেখানোই যথেষ্ট হবে।

$\underline{a} = m\underline{b}$ হওয়ায় $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর স্কেলার গুণিতক।

$\therefore$ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক একই যদি $m > 0$ হয় এবং বিপরীতমুখী হবে যদি $m < 0$ হয়। এখন $m \neq 0$ কারণ $m = 0$ হলে $\underline{a} = 0$ হবে যা অসম্ভব এখন, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক যদি একই হয় তাহলে তারা সদৃশ সমান্তরাল আর যদি বিপরীত হয় তাহলে তারা বিসদৃশ সমান্তরাল হবে। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে $\underline{a} \parallel \underline{b}$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = 0 - n\underline{b}$

বা, $m\underline{a} = -n\underline{b}$

যদি $m \neq 0$ ও $n \neq 0$ হয় তাহলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

(i) বিপরীতমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন একই হয়,

(ii) সমমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন বিপরীত হয়।

উভয় ক্ষেত্রেই $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হবে যা অসম্ভব কেননা দেওয়া আছে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ পরস্পর অসমান্তরাল।

$\therefore m \neq 0$ ও $n \neq 0$ হতে পারে না।

$\therefore m = n = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৯ **ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD.**

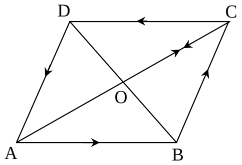
ক. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ = কত? ২

খ. যদি AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তবে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. AB ও AC ভেক্টরদ্বয়কে AD ও BD এর সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ ABC থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .... (i)

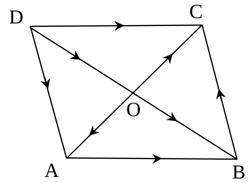
Δ CDA থেকে পাই,

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .... (ii)

(i) + (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = 0$ **(Ans.)**

খ.



দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ ....(i)

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .... (ii)

(i) + (ii) থেকে $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ও $\overline{AB} = \overline{DC}$

অনুরূপভাবে, AD $\parallel$ BC ও AD = BC.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক **(প্রমাণিত)**

গ. 'খ' এর চিত্র থেকে, ABCD একটি সামান্তরিক।

ΔABD হতে পাই,

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

এবং Δ ACD থেকে ,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২০ **ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.**

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪

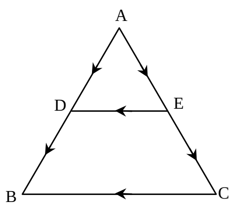
গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের BD ও CE বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(DE + BC)$ ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE-এ

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

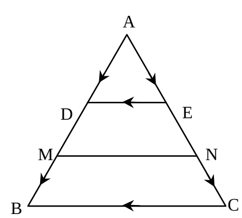
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]



সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

খ. সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধানের অনুরূপ।

গ.



DBCE ট্রাপিজিয়ামে M ও N যথাক্রমে BD ও CE-এর মধ্যবিন্দু।

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D, B, C ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{e}$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $DE = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$ [$\because$ M, DB-এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c})$ [$\because$ N, EC-এর মধ্যবিন্দু]

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$$

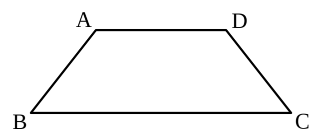
$$= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c} - \underline{d} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE})$$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও তাদের সমান্তরাল হবে।

$\therefore MN \parallel BC \parallel DE$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC + DE)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২১



P, Q, R, S বিন্দুগুলো ABCD চতুর্ভুজের বাহুসমূহের মধ্যবিন্দু।

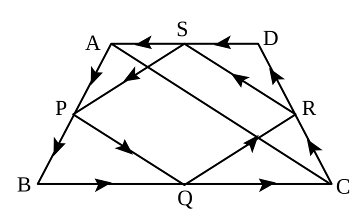
ক. $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel AC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}AC$. ৪

২১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র হতে,

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

খ. দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং DA = $\underline{d}$

'ক' হতে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ এবং $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

আবার, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \underline{c} + \underline{d}$

[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

$\therefore\ (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\ [\because \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}]$

$= \underline{0}$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR ও PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক।**(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, ΔABC এর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে

P ও Q ; P,Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, PQ ∥ AC এবং PQ = $\frac{1}{2}$ AC.

প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ}$ ....(i)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ....(ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BQ}$

এখন (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{PB} = 2\,\overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{PB} + 2\,\overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ})$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{PQ}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PQ}$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

আবার, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AC}|$ বা, PQ = $\frac{1}{2}$ AC **(প্রমাণিত)**

আবার, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ PQ ∥ AC **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২২ ▸ ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্য বিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S। A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$.

ক. R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. PBDS ট্রাপিজিয়াম–এ PB ও SD এর তীর্যক বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || BD || PS এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BD + PS). ৪

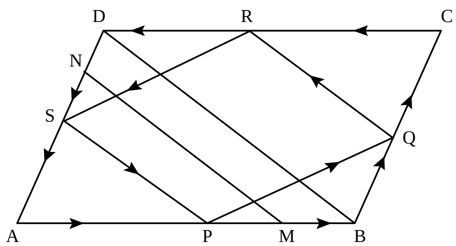
২২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$ এবং R বিন্দু CD বাহুর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{c + d}{2}$ **(Ans.)**

খ. অনুশীলনী ১২–এর উদাহরণ ৫ দেখ।

গ.



মনে করি, PBDS ট্রাপিজিয়ামের BD ∥ PS এবং PB ও SD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, MN | | BD ∥ PS এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BD + PS)

প্রমাণ : দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$। P ও S যথাক্রমে AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু।

মনে করি, PBDS ট্রাপিজিয়ামের BD | | PS এবং PB ও SD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, MN | | BD | | PS এবং MN = $\frac{1}{2}$(BD + PS)

প্রমাণ : দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$। P ও S যথক্রমে AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু।

∴ P বিন্দু অবস্থান ভেক্টর $\underline{p} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

S " " " $\underline{s} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

আবার, M ও N যথাক্রমে PB ও DS বাহুর মধ্যবিন্দু।

∴ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{b})$

$$= \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{b}}{4} + \frac{\underline{b}}{2}$$

N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{n} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{d}) = \frac{\underline{d}}{2} + \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{d}}{4}$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$$

$$= \frac{\underline{d}}{2} + \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{d}}{4} - \frac{\underline{a}}{4} - \frac{\underline{b}}{4} - \frac{\underline{b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{d} - \underline{b}) + \frac{1}{4}(\underline{d} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BD})$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}(2\ \overrightarrow{PS})$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক]

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS})$$

BD ∥ PS হওয়ায় $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে।

তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে কারণ–

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS})$$

$$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{PS}|)$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}(BD + PS)$$

অর্থাৎ MN ∥ BD ∥ PS এবং MN = $\frac{1}{2}$(BD + PS) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৩ ▸ ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD

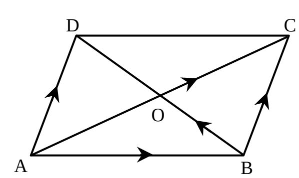
ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক। ৪

২৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র হতে পাই,

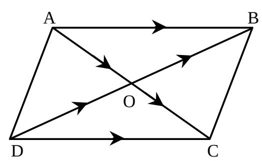
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ [$\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

এবং $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ–৪ দেখ।

গ. মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [∵ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [∵ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$]

$\therefore$ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টত : $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

[∵ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

প্রশ্ন–২৪ **Δ ABC ও D, E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। P, Q যথাক্রমে BE ও CD এর মধ্যবিন্দু। কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেৰে A, B, C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$**

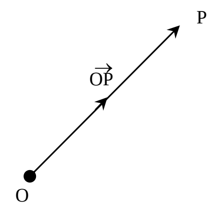
ক. কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলতে কী বোঝায়? ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, PQ || DE এবং PQ $= \frac{1}{2}$ (BC – DE) ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DP || AC এবং DP $= \frac{1}{4}$ AC ৪

২৪নং প্রশ্নের সমাধান

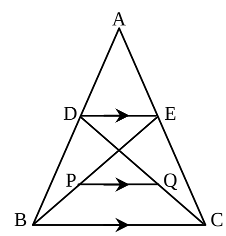
ক. সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O এর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু বলা হয়।



খ. দেওয়া আছে, ΔABC-এ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ DE || BC এর DE $= \frac{1}{2}$ BC

$\therefore$ BCED একটি ট্রাপিজিয়াম।



আবার, BE ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q P, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে PQ || DE এবং PQ $= \frac{1}{2}$ (BC – DE)

প্রমাণ : মনে করি কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$ ও $\underline{e}$

(প্রমাণিত)

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [∵ P, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$ [$\because$ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

$$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e}) = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$$

DE || BC হওয়ায় $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ PQ || DE

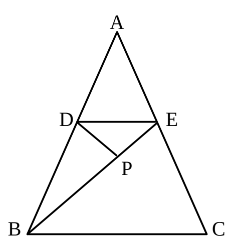
আবার, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}|$

বা PQ $= \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{DE}|\right) = \frac{1}{2}$ (BC – DE)

$\therefore$ PQ || DE এবং PQ $= \frac{1}{2}$ (BC – DE)

(দেখানো হলো)

গ.



চিত্রে, ABC ত্রিভুজে D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। P, BE এর মধ্যবিন্দু।

যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$

$\therefore$ D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}\left\{b + \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})\right\}$

$$\therefore\ \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\left\{b + \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})\right\} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}(a + c) - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$= \frac{1}{4}(\underline{c} - \underline{a}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

সুতরাং $|\overrightarrow{DP}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$

$\therefore$ DP $= \frac{1}{4}$ AC এবং $\overrightarrow{DP}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল।

$\therefore$ DP || AC এবং DP $= \frac{1}{4}$ AC **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৫ A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$।

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ২

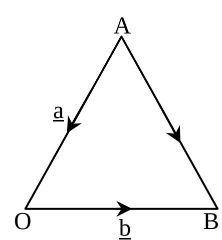
খ. দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, দেখাও যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ ৪

২৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, কোনো সমতলে O বিন্দু সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$



তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

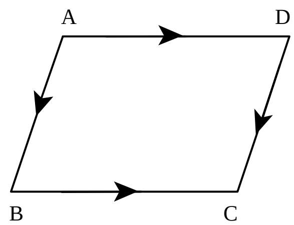
বা, $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

(দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।



A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ

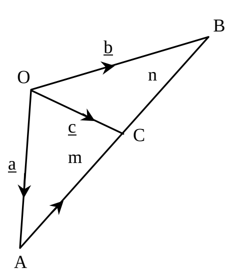
ABCD একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

গ. মনে করি, কোনো মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$। AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$$\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$$



প্রমাণ : $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$

[$\because$ AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।]

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{n}{m}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}| + |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{n + m}{m}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AC + CB}{AC} = \frac{n + m}{m}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{m + n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{m + n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{m}{m + n}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $|\overrightarrow{AC}| = \left(\frac{m}{m + n}\right) |\overrightarrow{AB}|$

বা, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{m}{m + n}\right) \overrightarrow{AB}$ [$\because$ $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{m + n} (\underline{b} - \underline{a})$ [$\because \overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$]

বা, $\underline{c} = \frac{m}{m + n} (\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b} - m\underline{a} - m\underline{a} + n\underline{a}}{m + n}$

$\therefore \underline{c} = \frac{m\underline{b} + m\underline{a}}{m + n}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২৬ ▶ P, Q, R, S একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D।

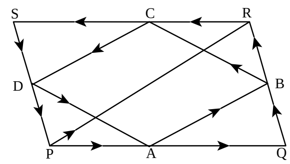
ক. AB এর অবস্থান ভেক্টর PQ ও QR এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

২৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্র হতে,



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right)$

খ. দেওয়া আছে, PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{a}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{b}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{SP} = \underline{d}$

'ক' হতে পাই, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

এবং $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

$\therefore (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP}$

$= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR}$ [$\because \overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$]

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = (\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

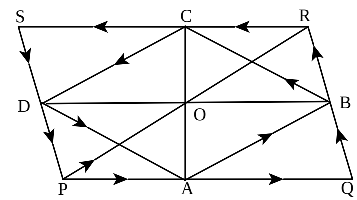
$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore$ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ABCD সামান্তরিকের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

$\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|a| = |c|$, $|b| = |d|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

'খ' হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} - \underline{c} - \underline{d} = \underline{b} + \underline{c} - \underline{c} - \underline{d}$

[উভয় পক্ষে $-\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$

এখানে, $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC

$\therefore \underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC

আবার, $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD

$\therefore \underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান করে অশূন্য ভেক্টর তাদের ধারকরেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু AC ও BD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টর অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = 0$

বা, $\underline{a} = \underline{c}$

এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$

$\therefore \underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\therefore$ ABCD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২৭ ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD।

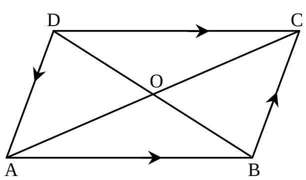
ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে প্রমাণ কর যে, APCQ একটি সামান্তরিক। ৪

২৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ---------------------------------------



------------------- ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD যাদের ছেদ বিন্দু O।

-----------------------------ΔABD–এ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

---------------------------------- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

--- $\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ....(i)

---ΔABC-এ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

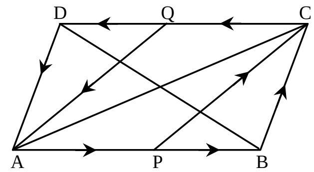
---------------------------------- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

---------------------------------বা, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ....(ii) $\left[\begin{array}{l} \because \text{ABCD সামান্তরিক} \\ \therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{array}\right]$

-------------- $\therefore$ (i) ও (ii) নং সমীকরণে $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

খ. ----------------------------অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ ৪ দেখ।

গ. ---------------------------------------



------------------------ ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বাহুর মধ

-------------------------------- P ও Q। P, Q যোগ করি।

--------------------------প্রমাণ করতে হবে যে, APCQ একটি সা

-------------------- **প্রমাণ :** মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} =$

-------------------------------ΔPBC–এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অ

-------------------------------- $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ [∵ P, AB এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$ .... (i)

ΔADQ - এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ [∵ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}\underline{c} + \underline{d}$

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$ .... (ii)

$\left[\begin{array}{l} \because \text{ABCD সামান্তরিক} \\ \because \underline{a} = \underline{c} \text{ এবং } \underline{b} = \underline{d} \end{array}\right]$

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{QA}$

ভেক্টরদ্বয় সমান। অর্থাৎ তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা PC || QA

আবার, P, AB এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\underline{a}$ ....(iii)

এবং Q, CD এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

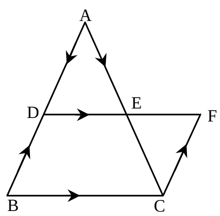
বা, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\underline{c}$

$\therefore \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\underline{a}$

সুতরাং $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{CQ}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ APCQ একটি সামান্তরিক **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৮



উপরের চিত্রে ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E এবং BCFD একটি সামান্তরিক।

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ৪

গ. BCFD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{BF}$ ও $\overrightarrow{CD}$ হলে, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$ এবং $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$ ৪

২৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE-এ

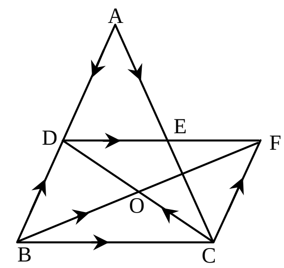
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E , AC এর মধ্যবিন্দু]

সুতরাং $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ–৩ দেখ।

গ. এখানে BF ও CD, BCED সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়।



$\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে,

ΔBCD –এ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ .... (i)

আবার, ΔBDF –এ $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$

$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$

[BCFD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DF}$]

$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ [(i) নং হতে]

$\therefore \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

অতএব, (i) ও (ii) নং সমীকরণ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

আবার, (ii) নং থেকে পাই,

$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$

বা, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$

[উভয় পক্ষে $\overrightarrow{CD}$ যোগ করে]

বা, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$ .... (iii)

[BCFD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CF}$]

আবার, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$ [(iii) নং ব্যবহার করে]

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BD} - 2\,\overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})$

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$

$[\because \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}]$

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BC}$ .... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{CF}$ এবং $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{BC}$ **(দেখানো হলো)**