

# SSC Math

## অধ্যয়নভিত্তিক কন্টেন্ট

### অধ্যায়-১১: বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত

#### প্রয়োজনীয় তথ্য:

##### ■ অনুপাত:

একই এককে সমজাতীয় দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।

ব্যখ্যা : দুইটি রাশি  $p$  ও  $q$  এর অনুপাতকে  $p : q = \frac{p}{q}$  লেখা হয়।  $p$  ও  $q$  রাশি দুইটি সমজাতীয় ও একই এককে হতে হবে। অনুপাতে  $p$  কে পূর্ব রাশি এবং  $q$  কে উত্তর রাশি বলা হয়।

##### ■ সমানুপাত :

যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত উৎপন্ন হয়।  $a, b, c, d$  এরূপ চারটি রাশি হলে আমরা লিখি,  $a : b = c : d$

##### ক্রমিক সমানুপাতী

$a, b, c$  ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায়  $a : b = b : c$

$a, b, c$  ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি  $b^2 = ac$  হয়। ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে।

##### ■ অনুপাতের রূপান্তর:

এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

(১)  $a : b = c : d$  হলে,  $b : a = d : c$  [ব্যস্তকরণ (*invertendo*)]

(২)  $a : b = c : d$  হলে,  $a : c = b : d$  [একান্তকরণ (*alternendo*)]

(৩)  $a : b = c : d$  হলে,  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  [যোজন (*componendo*)]

(৪)  $a : b = c : d$  হলে,  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  [বিয়োজন (*dividendo*)]

(৫)  $a : b = c : d$  হলে,  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$  [যোজন-বিয়োজন (*componendo-dividendo*)]

(৬)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$  হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত  $= \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

##### ■ ধারাবাহিক অনুপাত :

দুইটি অনুপাত যদি  $k : x$  এবং  $x : g$  আকারের হয়, তাহলে তাদেরকে সাধারণত  $k : x : g$  আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়। যেকোনো দুইটি বা ততোধিক অনুপাতকে এই আকারে প্রকাশ করা যায়। এখানে লক্ষণীয় যে, দুইটি অনুপাতকে  $k : x : g$  আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশি, দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান হতে হবে। যেমন :  $2 : 3$  এবং  $4 : 3$  অনুপাত দুইটি  $k : x : g$  আকারে প্রকাশ করতে হলে প্রথম অনুপাতটির উত্তর রাশিটিকে দ্বিতীয় অনুপাতটির পূর্ব রাশির সমান করতে হবে। অর্থাৎ ঐ দুইটি রাশিকে তাদের ল.সা.গু. এর সমান করতে হবে।

অতএব,  $2 : 3$  এবং  $4 : 3$  অনুপাত দুইটি  $k : x : g$  আকারে হবে  $8 : 12 : 9$ .

##### ■ সমানুপাতিক ভাগ :

কোনো রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়।  $S$  কে  $a : b : c : d$  অনুসারে ভাগ করতে হলে,  $S$  কে মোট  $(a + b + c + d)$  ভাগ করে যথাক্রমে  $a, b, c$  ও  $d$  ভাগ নিতে হয়।

অতএব

$$1ম অংশ = S \text{ এর } \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{Sa}{a+b+c+d} \quad 3য় অংশ = S \text{ এর } \frac{c}{a+b+c+d} = \frac{Sc}{a+b+c+d}$$

$$2য় অংশ = S \text{ এর } \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{Sb}{a+b+c+d} \quad ৪র্থ অংশ = S \text{ এর } \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{Sd}{a+b+c+d}$$

## সৃজনশীল প্রশ্ন:

প্রশ্ন ১৭ [রা. বো. ১৭]

a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী এবং  $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$

ক.  $\log_{\sqrt[3]{2}} 324$  এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে,  $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$  ৪

গ. দেখাও যে,  $p = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$  ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক  $\log_{\sqrt[3]{2}} 324 = \log_{\sqrt[3]{2}} (3\sqrt[2]{2})^4$   
 $= 4 \log_{\sqrt[3]{2}} 3\sqrt[2]{2}$   
 $= 4.1$   $[\square \log_a a = 1]$   
 $= 4$  (Ans.)

খ দেওয়া আছে, a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

$$\text{ধরি, } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

$$\therefore c = dk$$

$$b = ck = dk \cdot k = dk^2$$

$$a = bk = dk^2 \cdot k = dk^3$$

$$\text{বামপক্ষ} = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$$

$$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\} \{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$$

$$= \{d^2 k^6 + d^2 k^4 + d^2 k^2\} \{d^2 k^4 + d^2 k^2 + d^2\}$$

$$= d^2 k^2 (k^4 + k^2 + 1) \times d^2 (k^4 + k^2 + 1)$$

$$= d^4 k^2 (k^4 + k^2 + 1)^2$$

$$\text{ডানপক্ষ} = (ab + bc + cd)^2$$

$$= (dk^3 \times dk^2 + dk^2 \times dk + dk \times d)^2$$

$$= (d^2 k^5 + d^2 k^3 + d^2 k)^2$$

$$= \{d^2 k (k^4 + k^2 + 1)\}^2$$

$$= d^4 k^2 (k^4 + k^2 + 1)^2$$

$$\therefore (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ দেওয়া আছে,  $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$

$$\text{বা, } p^2 + 1 = \frac{2p}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{p^2 + 1}{2p} = \frac{1}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{p^2 + 1 + 2p}{p^2 + 1 - 2p} = \frac{1+x}{1-x} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{(p+1)^2}{(p-1)^2} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{বা, } \frac{p+1}{p-1} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \quad [\text{বর্গমূল করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{p+1+p-1}{p+1-p+1} = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \quad [\text{যোজন-বিয়োজন করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{2p}{2} = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ১৮ [দি. বো. ১৭]

একটি বর্গের ক্ষেত্রফল একটি আয়তের ক্ষেত্রফলের সমান। আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 36 মিটার এবং প্রস্থ 25 মিটার।

ক. আয়তের বাহুর দৈর্ঘ্যের ও প্রস্থের দ্বিভাজিত অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. আয়তের দৈর্ঘ্য 10% হ্রাস পেলে এবং প্রস্থ 10% বৃদ্ধি করা হলে, ক্ষেত্রফল শতকরা কত হ্রাস বা বৃদ্ধি পাবে? ৪

গ. বর্গাকার ক্ষেত্রটির চতুর্দিকে 3 মিটার অন্তর গাছ লাগালে কতটি গাছ প্রয়োজন হবে এবং প্রতিটি গাছ লাগাতে 23 টাকা হিসাবে গাছ লাগানো বাবদ খরচ কত হবে? ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 36 মিটার এবং প্রস্থ 25 মিটার

$\therefore$  আয়তক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের ও প্রস্থের দ্বিভাজিত অনুপাত

$$= \sqrt{36} : \sqrt{25} = 6 : 5 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 36 মিটার এবং প্রস্থ 25 মিটার

$\therefore$  আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল =  $(36 \times 25)$  বর্গমিটার = 900 বর্গমিটার

10% হ্রাসে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য =  $36 - 36$  এর 10%

$$= \left(36 - 36 \times \frac{10}{100}\right) \text{ মিটার}$$

$$= (36 - 3.6) \text{ মিটার} = 32.4 \text{ মিটার}$$

10% বৃদ্ধিতে আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ =  $25 + 25$  এর 10%

$$= \left(25 + 25 \times \frac{10}{100}\right) \text{ মিটার}$$

$$= (25 + 2.5) \text{ মিটার}$$

$$= 27.5 \text{ মিটার}$$

পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল =  $(32.4 \times 27.5)$  বর্গ মিটার = 891

$\therefore$  ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় =  $(900 - 891)$  বর্গ মিটার = 9 বর্গ মিটার

$\therefore$  ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায় =  $\frac{9}{900} \times 100\% = 1\%$  (Ans.)

গ 'খ' থেকে পাই

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 900 বর্গ মিটার

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল = 900 বর্গমিটার

বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার হলে

$$\therefore x^2 = 900$$

$$\text{বা, } x = 30 \text{ মিটার}$$

$\therefore$  বর্গাকার ক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য 30 মিটার

$\therefore$  বর্গাকার ক্ষেত্রটির পরিসীমা =  $(4 \times 30)$  মিটার = 120 মিটার

গাছ প্রয়োজন হবে  $\frac{120}{3}$  টি বা 40 টি (Ans.)

গাছ লাগানো বাবদ খরচ হবে  $(40 \times 23)$  টাকা = 920 টাকা (Ans.)

প্রশ্ন ১৯ [কু. বো. ১৭]

$$\frac{6}{y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ এবং } m : n = n : l$$

ক. দেখাও যে,  $y = \frac{6pq}{p+q}$  ২

খ. প্রমাণ করো যে,  $\frac{y+3p}{y-3p} + \frac{y+3q}{y-3q} = 2, p \neq q$ . ৪

গ. দেখাও যে,  $m^2 n^2 l^2 \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{l^3}\right) = m^3 + n^3 + l^3$ . ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$\frac{6}{y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\text{বা, } \frac{6}{y} = \frac{q+p}{pq}$$

$$\text{বা, } y(p+q) = 6pq$$

$$\therefore y = \frac{6pq}{p+q} \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের ১১নং অনুশীলনীর উদাহরণ ৬ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৮৩

গ দেওয়া আছে,

$$m : n = n : l \quad \text{বা, } \frac{m}{n} = \frac{n}{l} \therefore n^2 = ml$$

$$\text{বামপক্ষ} = m^2 n^2 l^2 \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{l^3}\right)$$

$$= \frac{m^2 n^2 l^2}{m^3} + \frac{m^2 n^2 l^2}{n^3} + \frac{m^2 n^2 l^2}{l^3}$$

$$= \frac{n^2 l^2}{m} + \frac{m^2 l^2}{n} + \frac{m^2 n^2}{l}$$

$$= \frac{n^2 l^2}{m} + \frac{(ml)^2}{n} + \frac{m^2 n^2}{l}$$

$$= \frac{ml \cdot l^2}{m} + \frac{(n^2)^2}{n} + \frac{m^2 \cdot ml}{l} \quad [\square ml = n^2]$$

$$= l^3 + \frac{n^4}{n} + m^3 = l^3 + n^3 + m^3$$

$$= m^3 + n^3 + l^3$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore m^2 n^2 l^2 \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{l^3}\right) = m^3 + n^3 + l^3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

**প্রশ্ন ৪ [ব. বো. ১৭]**

- $10x^{-1}$  এবং  $a^{-1} + b^{-1}$  দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।  
 ক. যদি রাশিদ্বয় পরস্পর সমান হয় তাহলে  $x$  এর মান নির্ণয় করো। ২  
 খ. দেখাও যে,  $\frac{x+5a}{x-5a} + \frac{x+5b}{x-5b} = 2$ . ৪  
 গ. প্রমাণ করো যে, ২য় রাশিটি  $2x^{-1}$  এর সমান হবে, যখন  $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = 2$ . ৪

**৪ নং প্রশ্নের সমাধান**

- ক** শর্তমতে,  
 $10x^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$   
 বা,  $10 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  বা,  $\frac{10}{x} = \frac{b+a}{ab}$  বা,  $\frac{1}{x} = \frac{a+b}{10ab}$   
 $\therefore x = \frac{10ab}{a+b}$  (Ans.)
- খ** 'ক' থেকে পাই,  $x = \frac{10ab}{a+b}$   
 বা,  $\frac{x}{5a} = \frac{2b}{a+b}$   
 বা,  $\frac{x+5a}{x-5a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$  [যোজন-বিয়োজন]  
 বা,  $\frac{x+5a}{x-5a} = \frac{a+3b}{b-a}$  ..... (i)
- আবার,  $x = \frac{10ab}{a+b}$   
 বা,  $\frac{x}{5b} = \frac{2a}{a+b}$   
 বা,  $\frac{x+5b}{x-5b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$  [যোজন-বিয়োজন]  
 বা,  $\frac{x+5b}{x-5b} = \frac{3a+b}{a-b}$  ..... (ii)
- (i)নং ও (ii)নং যোগ করি,  
 $\frac{x+5a}{x-5a} + \frac{x+5b}{x-5b} = \frac{a+3b}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b} = \frac{a+3b}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$   
 $= \frac{a+3b-3a-b}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$   
 $\therefore \frac{x+5a}{x-5a} + \frac{x+5b}{x-5b} = 2$  (দেখানো হলো)

- গ** শর্তমতে,  
 $a^{-1} + b^{-1} = 2x^{-1}$   
 বা,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \cdot \frac{1}{x}$   
 বা,  $\frac{b+a}{ab} = \frac{2}{x}$   
 বা,  $\frac{a+b}{ab} = \frac{2}{x}$   
 $\therefore x = \frac{2ab}{a+b}$  ..... (i)
- (i) নং থেকে পাই,  
 $\frac{x}{a} = \frac{2b}{a+b}$   
 বা,  $\frac{x+a}{x-a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$  [যোজন-বিয়োজন করে]  
 $\therefore \frac{x+a}{x-a} = \frac{a+3b}{b-a}$  ..... (ii)
- আবার (i) নং থেকে পাই,  
 $\frac{x}{b} = \frac{2a}{a+b}$   
 বা,  $\frac{x+b}{x-b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$  [যোজন-বিয়োজন করে]  
 $\therefore \frac{x+b}{x-b} = \frac{3a+b}{a-b}$  ..... (iii)
- (ii) নং ও (iii) নং যোগ করে পাই,  
 $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = \frac{a+3b}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b} = \frac{a+3b}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$   
 $= \frac{a+3b-3a-b}{b-a} = \frac{a+3b-3a-b}{b-a}$   
 $= \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$   
 $\therefore \frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = 2$  (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ৫ [রা. বো. ১৬]**

- একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর অনুপাত ৫ : ৪ : ১২ এবং পরিসীমা ৭৫ সে.মি.।  
 ক. ত্রিভুজের বাহু তিনটির মান নির্ণয় কর। ২  
 খ. ত্রিভুজের বড় এবং ছোট বাহুকে যথাক্রমে দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তের কর্ণের সমান দৈর্ঘ্য নিয়ে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪  
 গ. উক্ত আয়তের দৈর্ঘ্যকে ১০% বৃদ্ধি এবং প্রস্থকে ২০% হ্রাস করলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত হ্রাস বা বৃদ্ধি পাবে? ৪

**৫ নং প্রশ্নের সমাধান**

- ক** দেওয়া আছে, ত্রিভুজের তিনটি বাহুর অনুপাত ৫ : ৪ : ১২ এবং পরিসীমা ৭৫ সে.মি.  
 ধরি, ত্রিভুজের বাহু তিনটি  $5x$  সে.মি.,  $8x$  সে.মি. ও  $12x$  সে.মি.  
 প্রশ্নমতে,  $5x + 8x + 12x = 75$   
 বা,  $25x = 75$   
 বা,  $x = \frac{75}{25} \therefore x = 3$   
 সুতরাং ত্রিভুজের বাহু তিনটির পরিমাণ  
 $5x$  সে.মি. =  $(5 \times 3)$  সে.মি. = ১৫ সে.মি.  
 $8x$  সে.মি. =  $(8 \times 3)$  সে.মি. = ২৪ সে.মি.  
 $12x$  সে.মি. =  $(12 \times 3)$  সে.মি. = ৩৬ সে.মি. (Ans.)
- খ** 'ক' থেকে পাই,  
 ত্রিভুজের বড় বাহুর দৈর্ঘ্য ৩৬ সে.মি. এবং ছোট বাহুর দৈর্ঘ্য ১৫ সে.মি.  
 প্রশ্নানুসারে,  
 আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ৩৬ সে.মি. এবং প্রস্থ ১৫ সে.মি.  
 $\therefore$  আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য =  $\sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$  একক  
 $= \sqrt{(36)^2 + (15)^2}$  সে.মি.  
 $= \sqrt{1521}$  সে.মি.  
 $= 39$  সে.মি.  
 $\therefore$  বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য  
 $= 39$  সে.মি.  
 $\therefore$  বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহুর দৈর্ঘ্য)<sup>২</sup> বর্গ একক  
 $= (39)^2$  বর্গ সে.মি.  
 $= 1521$  বর্গ সে.মি. (Ans.)
- গ** 'খ' থেকে পাই,  
 আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = ৩৬ সে.মি. এবং প্রস্থ = ১৫ সে.মি.  
 $\therefore$  এবং ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য  $\times$  প্রস্থ) বর্গ একক  
 $= (36 \times 15)$  বর্গ সে.মি.  
 $= 540$  বর্গ সে.মি.  
 এখন, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ১০% বৃদ্ধির পর  
 বৃদ্ধিকৃত দৈর্ঘ্য =  $(36 + 36 \text{ এর } 10\%)$  সে.মি.  
 $= \left(36 + 36 \times \frac{10}{100}\right)$  সে.মি.  
 $= 36 + 3.6$  সে.মি.  
 $= 39.6$  সে.মি.  
 এবং প্রস্থ ২০% হ্রাসের পর  
 হ্রাসকৃত প্রস্থ =  $(15 - 15 \text{ এর } 20\%)$  সে.মি.  
 $= \left(15 - 15 \times \frac{20}{100}\right)$  সে.মি.  
 $= (15 - 3)$  সে.মি. = ১২ সে.মি.  
 $\therefore$  আয়তক্ষেত্রের পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল =  $(39.6 \times 12)$  বর্গ সে.মি.  
 $= 475.2$  বর্গ সে.মি.  
 $\therefore$  " ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় =  $(540 - 475.2)$  বর্গ সে.মি.  
 $= 64.8$  বর্গ সে.মি.  
 $\therefore$  ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায় =  $\left(\frac{64.8}{540} \times 100\right)$  বর্গ সে.মি.  
 $= 12$  বর্গ সে.মি.  
 $\therefore$  ক্ষেত্রফল ১২% হ্রাস পায়। (Ans.)

**প্রশ্ন ৬ [দি. বো. ১৬]**

- $a \div b = b \div c$  হলে,  
 ক. দেখাও যে,  $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$ . ২  
 খ. প্রমাণ কর যে,  $a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$ . ৪

গ. দেখাও যে,  $a - 2b + c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(b-c)^2}{c}$ .

8

**৬ নং প্রশ্নের সমাধান**

ক. দেওয়া আছে,  $a \div b = b \div c$

বা,  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

বা,  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$  [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা,  $\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{b^2 + c^2}{c^2}$  [যোজন করে]

বা,  $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{b^2}{c^2}$  [একান্তরকরণ করে]

বা,  $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{ac}{c^2}$  [ $\because \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \therefore ac = b^2$ ]

বা,  $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$  (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে,  $a \div b = b \div c$

বা,  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore b^2 = ac$

এখন,  $a^2 b^2 c^2 \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$   
 $= \frac{a^2 b^2 c^2}{a^3} + \frac{a^2 b^2 c^2}{b^3} + \frac{a^2 b^2 c^2}{c^3}$   
 $= \frac{b^2 c^2}{a} + \frac{a^2 c^2}{b} + \frac{a^2 b^2}{c}$   
 $= \frac{b^2 c^2}{a} + \frac{(ac)^2}{b} + \frac{a^2 b^2}{c}$   
 $= \frac{ac \cdot c^2}{a} + \frac{(b^2)^2}{b} + \frac{a^2 \cdot ac}{c}$  [ $b^2 = ac$  বসিয়ে]  
 $= c^3 + \frac{b^4}{b} + a^3$   
 $= c^3 + b^3 + a^3$   
 $= a^3 + b^3 + c^3$

$\therefore a^2 b^2 c^2 \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = a^3 + b^3 + c^3$  (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে,

$a \div b = b \div c$  অর্থাৎ,  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

মনে করি,  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$\therefore b = ck$   
 $a = bk = ck \cdot k = ck^2$

প্রথম রাশি  $= a - 2b + c$   
 $= ck^2 - 2ck + c$   
 $= c(k^2 - 2k + 1)$   
 $= c\{(k)^2 - 2 \times k \times 1 + (1)^2\}$   
 $= c(k-1)^2$

দ্বিতীয় রাশি  $= \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(ck^2 - ck)^2}{ck^2}$   
 $= \frac{\{ck(k-1)\}^2}{ck^2} = \frac{c^2 k^2 (k-1)^2}{ck^2} = c(k-1)^2$

তৃতীয় রাশি  $= \frac{(b-c)^2}{c} = \frac{(ck - c)^2}{c} = \frac{\{c(k-1)\}^2}{c}$   
 $= \frac{c^2 (k-1)^2}{c} = c(k-1)^2$

$\therefore a - 2b + c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(b-c)^2}{c}$  (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ৭ [সি. বো. ১৬]**

p, q, r ত্রমিক সমানুপাতী —

ক. দেখাও যে,  $\left( \frac{p+q}{q+r} \right)^2 = \frac{p}{r}$ .

২

খ. প্রমাণ কর যে,  $p^2 q^2 r^2 \left( \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} \right) = p^3 + q^3 + r^3$ .

৪

গ. দেখাও যে,  $\frac{p^2 + q^2}{q^2 + r^2} = \frac{(p+q)^2}{(q+r)^2}$  সম্পর্কটি উদ্দীপকের শর্তকে সমর্থন করে। ৪

**৭ নং প্রশ্নের সমাধান**

ক. দেওয়া আছে,

p, q, r ত্রমিক সমানুপাতী।

$\therefore p : q = q : r$

বা,  $\frac{p}{q} = \frac{q}{r}$

$\therefore q^2 = pr$  .....(i)

$\left( \frac{p+q}{q+r} \right)^2 = \frac{p^2 + 2pq + q^2}{q^2 + 2qr + r^2}$   
 $= \frac{p^2 + 2pq + pr}{q^2 + 2qr + r^2}$  [ $q^2 = pr$  বসিয়ে]  
 $= \frac{p(p+2q+r)}{r(p+2q+r)} = \frac{p}{r}$

$\therefore \left( \frac{p+q}{q+r} \right)^2 = \frac{p}{r}$  (দেখানো হলো)

খ.  $p^2 q^2 r^2 \left( \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} \right) = \frac{p^2 q^2 r^2}{p^3} + \frac{p^2 q^2 r^2}{q^3} + \frac{p^2 q^2 r^2}{r^3}$   
 $= \frac{q^2 r^2}{p} + \frac{p^2 r^2}{q} + \frac{p^2 q^2}{r}$   
 $= \frac{q^2 r^2}{p} + \frac{(pr)^2}{q} + \frac{p^2 q^2}{r}$   
 $= \frac{pr \cdot r^2}{p} + \frac{(q^2)^2}{q} + \frac{p^2 \cdot pr}{r}$  [ $q^2 = pr$ ]  
 $= r^3 + \frac{q^4}{q} + p^3$   
 $= r^3 + q^3 + p^3$   
 $= p^3 + q^3 + r^3$

$\therefore p^2 q^2 r^2 \left( \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} \right) = p^3 + q^3 + r^3$  (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে,

$\frac{p^2 + q^2}{q^2 + r^2} = \frac{(p+q)^2}{(q+r)^2}$

বা,  $\frac{(q+r)^2}{q^2 + r^2} = \frac{(p+q)^2}{p^2 + q^2}$  [একান্তরকরণ করে]

বা,  $\frac{q^2 + 2qr + r^2}{q^2 + r^2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2}{p^2 + q^2}$

বা,  $\frac{q^2 + 2qr + r^2 - q^2 - r^2}{q^2 + r^2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$  [বিয়োজন করে]

বা,  $\frac{2qr}{q^2 + r^2} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$

বা,  $\frac{r}{q^2 + r^2} = \frac{p}{p^2 + q^2}$  [উভয়পক্ষকে 2q দ্বারা ভাগ করে]

বা,  $p(q^2 + r^2) = r(p^2 + q^2)$

বা,  $pq^2 + pr^2 = rp^2 + rq^2$

বা,  $pq^2 - rq^2 = rp^2 - pr^2$

বা,  $q^2(p-r) = pr(p-r)$

বা,  $q^2 = pr$  [(p-r) দ্বারা ভাগ করে]

বা,  $pr = q^2$

বা,  $\frac{p}{q} = \frac{q}{r}$

বা,  $p : q = q : r$

$\therefore p, q, r$  ত্রমিক সমানুপাতী।

$\therefore$  প্রদত্ত সম্পর্কটি উদ্দীপকের শর্তকে সমর্থন করে। (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ৮  $\frac{6}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  এবং a, b, c ত্রমিক সমানুপাতিক।

ক. যদি  $x = f(m, n)$  হয় তবে,  $x = f(1, 2)$  এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে,  $\frac{x+3m}{x-3m} + \frac{x+3n}{x-3n} = 2$ . ৪

গ. দেখাও যে,  $a^2 b^2 c^2 (a^{-3} + b^{-3} + c^{-3}) = a^3 + b^3 + c^3$ . ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,  $\frac{6}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

বা,  $\frac{6}{x} = \frac{m+n}{mn}$

বা,  $x = \frac{6mn}{m+n}$

এখন,  $x = f(m, n)$  হলে

$f(m, n) = \frac{6mn}{m+n}$

$f(1, 2) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 2}{1+2}$

$\therefore x = f(1, 2) = \frac{12}{3} = 4$  (Ans.)

খ দেওয়া আছে,  $\frac{6}{x} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  বা,  $\frac{6}{x} = \frac{n+m}{mn}$

বা,  $6mn = x(m+n)$  বা,  $\frac{6mn}{m+n} = x$

$\therefore x = \frac{6mn}{m+n}$

বা,  $\frac{x}{3m} = \frac{2n}{m+n}$  [3m দ্বারা ভাগ করে]

বা,  $\frac{x+3m}{x-3m} = \frac{2n+m+n}{2n-m-n}$  [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+3m}{x-3m} = \frac{3n+m}{n-m}$

আবার,  $\frac{x}{3n} = \frac{2m}{m+n}$

বা,  $\frac{x+3n}{x-3n} = \frac{2m+m+n}{2m-m-n}$  [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+3n}{x-3n} = \frac{3m+n}{m-n}$

এখন,  $\frac{x+3m}{x-3m} + \frac{x+3n}{x-3n} = \frac{3n+m}{n-m} + \frac{3m+n}{m-n} = \frac{3n+m}{n-m} - \frac{3m+n}{n-m}$   
 $= \frac{3n+m-3m-n}{n-m} = \frac{2n-2m}{n-m} = \frac{2(n-m)}{(n-m)} = 2$

$\therefore \frac{x+3m}{x-3m} + \frac{x+3n}{x-3n} = 2$  (দেখানো হলো)

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬ (i)  $p^2x - 2p + x = 0$  (ii)  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

ক. যদি  $l, m, n$  ক্রমিক সমানুপাতিক হয়, তাহলে দেখাও যে,  $\frac{l}{n} = \frac{l^2+m^2}{m^2+n^2}$  ২

খ. (i) নং হতে দেখাও যে,  $p = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$  8

গ. (ii) নং হতে প্রমাণ কর যে,  $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{xyz}{abc}$  8

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,  $l, m, n$  ক্রমিক সমানুপাতিক

$\therefore \frac{l}{m} = \frac{m}{n}$

ধরি,  $\frac{l}{m} = \frac{m}{n} = k$

তাহলে,  $\frac{l}{m} = k$  এবং  $\frac{m}{n} = k$

বা,  $l = mk$  বা,  $m = nk$

বা,  $l = nk \cdot k$

$\therefore l = nk^2$

বামপক্ষ =  $\frac{l}{n} = \frac{nk^2}{n} = k^2$

ডানপক্ষ =  $\frac{l^2+m^2}{m^2+n^2} = \frac{n^2k^4+n^2k^2}{n^2k^2+n^2}$

$= \frac{n^2k^2(k^2+1)}{n^2(k^2+1)} = k^2$

$\therefore \frac{l}{n} = \frac{l^2+m^2}{m^2+n^2}$  (দেখানো হলো)

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ১(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে,  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

ধরি,  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$

$\therefore \frac{x}{a} = k$  বা,  $x = ak$

একইভাবে,  $y = bk$  এবং  $z = ck$

বামপক্ষ =  $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{(ak)^3+(bk)^3+(ck)^3}{a^3+b^3+c^3}$   
 $= \frac{a^3k^3+b^3k^3+c^3k^3}{a^3+b^3+c^3}$   
 $= \frac{k^3(a^3+b^3+c^3)}{(a^3+b^3+c^3)} = k^3$

ডানপক্ষ =  $\frac{xyz}{abc} = \frac{ak \cdot bk \cdot ck}{abc} = \frac{k^3 \cdot abc}{abc} = k^3$

$\therefore \frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{xyz}{abc}$  (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১০  $\frac{4}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

ক.  $\frac{2x-1}{2x+1}$  এর মান  $p$  ও  $q$  মাধ্যমে নির্ণয় কর। ২

খ.  $\frac{x+2p}{x-2p} + \frac{x+2q}{x-2q}$  এর যোগফল মূলদ সংখ্যায় প্রকাশ কর। যেখানে  $p \neq q$  8

গ.  $p = 6$  এবং  $q = 4$  হলে,  $\log_{10}(x+5) + 2 \log_{10}x$  এর মান নির্ণয় কর। 8

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,  $\frac{4}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

বা,  $\frac{4}{x} = \frac{p+q}{pq}$

বা,  $x = \frac{4pq}{p+q}$

বা,  $2x = \frac{8pq}{p+q}$

বা,  $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{8pq-p-q}{8pq+p+q}$  [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{8pq-p-q}{p+q+8pq}$  (Ans.)

খ 'ক' থেকে পাই,  $x = \frac{4pq}{p+q}$

বা,  $x = \frac{2p \times 2q}{p+q}$

$\therefore \frac{x}{2p} = \frac{2q}{p+q}$  এবং  $\frac{x}{2q} = \frac{2p}{p+q}$

যখন,  $\frac{x}{2p} = \frac{2q}{p+q}$

তখন,  $\frac{x+2p}{x-2p} = \frac{2q+p+q}{2q-p-q}$  [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+2p}{x-2p} = \frac{p+3q}{q-p} \dots \dots \dots$  (i)

আবার, যখন  $\frac{x}{2q} = \frac{2p}{p+q}$

তখন,  $\frac{x+2q}{x-2q} = \frac{2p+p+q}{2p-p-q}$  [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+2q}{x-2q} = \frac{3p+q}{p-q}$

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$\frac{x+2p}{x-2p} + \frac{x+2q}{x-2q} = \frac{p+3q}{q-p} + \frac{3p+q}{p-q}$   
 $= \frac{p+3q}{q-p} + \frac{3p+q}{-(q-p)} = \frac{p+3q}{q-p} - \frac{3p+q}{q-p}$   
 $= \frac{p+3q-(3p+q)}{q-p} = \frac{p+3q-3p-q}{q-p}$   
 $= \frac{2q-2p}{q-p} = \frac{2(q-p)}{(q-p)} = 2$

$\therefore \frac{x+2p}{x-2p} + \frac{x+2q}{x-2q} = 2$  (দেখানো হলো)

গ 'ক' থেকে থেকে পাই,

$x = \frac{4pq}{p+q}$   
 $= \frac{4 \times 6 \times 4}{6+4}$  [ $p = 6, q = 4$ ]

$$= \frac{96}{10}$$

এখন,  $\log_{10}(x+5) + 2\log_{10}x$

$$= \log_{10}\left(\frac{96}{10} + 5\right) + 2\log_{10}\left(\frac{96}{10}\right)$$

$$= \log_{10}\left(\frac{96+50}{10}\right) + 2\log_{10}\left(\frac{96}{10}\right)$$

$$= \log_{10}146 - \log_{10}10 + 2\log_{10}96 - 2\log_{10}10$$

$$= \log_{10}146 + \log_{10}96^2 - 3 \quad [\square \log_{10}10 = 1]$$

$$= \log_{10}146 + \log_{10}9216 - 3$$

$$= 2.164 + 3.965 - 3$$

$$= 3.129 \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ▶ ১১**  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{8}{x}$  এবং  $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ .

ক.  $x$  এর মান নির্ণয় কর।

২

খ.  $\frac{x+4p}{x-4p} + \frac{x+4q}{x-4q}$  এর মান বের কর।

৪

গ. দ্বিতীয় সম্বন্ধ হতে, প্রমাণ কর যে,  $c = a$  অথবা  $a+b+c+d=0$ .

৪

### ১১ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{8}{x}$

বা,  $\frac{q+p}{pq} = \frac{8}{x}$

$\therefore x = \frac{8pq}{p+q}$  (Ans.)

**খ** 'ক' হতে পাই,  $x = \frac{8pq}{p+q}$

$\therefore \frac{x+4p}{x-4p} + \frac{x+4q}{x-4q} = \frac{\frac{8pq}{p+q} + 4p}{\frac{8pq}{p+q} - 4p} + \frac{\frac{8pq}{p+q} + 4q}{\frac{8pq}{p+q} - 4q}$

$= \frac{8pq + 4p^2 + 4pq}{8pq - 4p^2 - 4pq} + \frac{8pq + 4q^2 + 4pq}{8pq - 4q^2 - 4pq}$

$= \frac{p+q}{8pq - 4p^2 - 4pq} + \frac{p+q}{8pq - 4q^2 - 4pq}$

$= \frac{12pq + 4p^2}{4pq - 4p^2} + \frac{12pq + 4q^2}{4pq - 4q^2}$

$= \frac{4p(3q+p)}{4p(q-p)} + \frac{4q(3p+q)}{4q(p-q)}$

$= \frac{3q+p}{q-p} + \frac{3p+q}{p-q} = \frac{3q+p}{q-p} - \frac{3p+q}{q-p}$

$= \frac{3q+p-3p-q}{q-p} = \frac{2q-2p}{q-p} = \frac{2(q-p)}{q-p}$

$= 2$  (Ans.)

**গ** দেওয়া আছে,  $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$

বা,  $(a+b)(d+a) = (c+d)(b+c)$

বা,  $ad + bd + a^2 + ab = bc + bd + c^2 + cd$

বা,  $a^2 - c^2 + ad - cd + ab - bc = 0$

বা,  $(a+c)(a-c) + d(a-c) + b(a-c) = 0$

বা,  $(a-c)(a+c+d+b) = 0$

বা,  $(a-c)(a+b+c+d) = 0$

$\therefore a-c=0$  অথবা,  $a+b+c+d=0$

বা,  $a=c$

$\therefore c=a$  অথবা  $a+b+c+d=0$  (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ▶ ১২**  $a, b, c$  ক্রমিক সমাপুপাতিক এবং  $\frac{6}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

ক.  $x$  এর মান  $a$  ও  $b$  এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

২

খ. প্রমাণ কর যে,  $a^2b^2c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

৪

গ. সমানুপাতের ধর্ম ব্যবহার করে দেখাও যে,  $\frac{x+3a}{x-3a} + \frac{x+3b}{x-3b} = 2$  যেখানে  $a \neq b$ .

৪

### ১২ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে,  $\frac{6}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

বা,  $\frac{6}{x} = \frac{b+a}{ab}$

বা,  $\frac{x}{6} = \frac{ab}{a+b}$  [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore x = \frac{6ab}{a+b}$  (Ans.)

**খ** সৃজনশীল প্রশ্ন ৬(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

**গ** গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায় ১১.১ এর উদাহরণ-৬ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮৩

**প্রশ্ন ▶ ১৩**  $p, q, r$  ক্রমিক সমানুপাতী এবং  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{x}$ .

ক. দেখাও যে,  $x = \frac{4ab}{a+b}$

২

খ. দেখাও যে,  $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$

৪

গ. প্রমাণ কর যে,  $p^2q^2r^2(p^{-3} + q^{-3} + r^{-3}) = p^3 + q^3 + r^3$

৪

### ১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{x}$

বা,  $\frac{a+b}{ab} = \frac{4}{x}$

বা,  $x(a+b) = 4ab$

$\therefore x = \frac{4ab}{a+b}$  (দেখানো হলো)

**খ** 'ক' থেকে,  $x = \frac{4ab}{a+b}$

বা,  $x = \frac{2a \times 2b}{a+b}$

$\therefore \frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$  এবং  $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

যখন,  $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

তখন,  $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$  [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} = \frac{a+3b}{b-a} \dots \dots \dots$  (i)

আবার, যখন  $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

তখন,  $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$  [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b} \dots \dots \dots$  (ii)

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{a+3b}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b}$   
 $= \frac{a+3b}{b-a} + \frac{3a+b}{-(b-a)} = \frac{a+3b}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$   
 $= \frac{a+3b-(3a+b)}{b-a} = \frac{a+3b-3a-b}{b-a}$   
 $= \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$  (দেখানো হলো)

**গ** দেওয়া আছে,  $p : q = q : r$

বা,  $\frac{p}{q} = \frac{q}{r}$

$\therefore q^2 = pr$

বামপক্ষ =  $p^2q^2r^2(p^{-3} + q^{-3} + r^{-3})$

$= p^2q^2r^2\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3}\right)$

$= \frac{p^2q^2r^2}{p^3} + \frac{p^2q^2r^2}{q^3} + \frac{p^2q^2r^2}{r^3}$

$= \frac{q^2r^2}{p} + \frac{p^2r^2}{q} + \frac{p^2q^2}{r}$

$= \frac{q^2r^2}{p} + \frac{(pr)^2}{q} + \frac{p^2q^2}{r}$

$= \frac{pr \cdot r^2}{p} + \frac{(q^2)^2}{q} + \frac{p^2 \cdot pr}{r}$  [ $q^2 = pr$  বসিয়ে]

$= r^3 + \frac{q^4}{q} + p^3$

$= r^3 + q^3 + p^3$

$$= p^3 + q^3 + r^3$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore p^2q^2r^2 \left( \frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} \right) = p^3 + q^3 + r^3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

**প্রশ্ন ১৪** a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী এবং  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{10}{x}$

ক. দেখাও যে,  $x = \frac{10pq}{p+q}$  ২

খ.  $\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q}$  এর মান নির্ণয় কর। যেখানে  $p \neq q$  ৪

গ. প্রমাণ কর যে,  $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$  ৪

### ১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** শর্তমতে,

$$\frac{10}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \text{ বা, } \frac{10}{x} = \frac{q+p}{pq} \text{ বা, } \frac{1}{x} = \frac{p+q}{10pq}$$

$$\therefore x = \frac{10pq}{p+q} \text{ (দেখানো হলো)}$$

**খ** 'ক' থেকে পাই,  $x = \frac{10pq}{p+q}$

$$\text{বা, } \frac{x}{5p} = \frac{2q}{p+q}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5p}{x-5p} = \frac{2q+p+q}{2q-p-q} \text{ [যোজন-বিয়োজন]}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5p}{x-5p} = \frac{p+3q}{q-p} \text{ ..... (i)}$$

$$\text{আবার, } x = \frac{10pq}{p+q}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{5q} = \frac{2p}{p+q}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{2p+p+q}{2p-p-q} \text{ [যোজন-বিয়োজন]}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{3p+q}{p-q} \text{ ..... (ii)}$$

(i)নং ও (ii)নং যোগ করি,

$$\frac{x+5p}{x-5p} + \frac{x+5q}{x-5q} = \frac{p+3q}{q-p} + \frac{3p+q}{p-q} = \frac{p+3q}{q-p} - \frac{3p+q}{q-p}$$

$$= \frac{p+3q-3p-q}{q-p} = \frac{2q-2p}{q-p} = \frac{2(q-p)}{q-p} = 2 \text{ (Ans.)}$$

**গ** সৃজনশীল প্রশ্ন ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

**প্রশ্ন ১৫** a, b, c, d চারটি ক্রমিক সমানুপাতিক রাশি।

ক. a, b এবং c এর মান d এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে,  $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$  ৪

গ. উদ্দীপকের সংখ্যা চারটির প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল 200, a : b = 1 : 2 এবং b :

$$d = 1 : 4 \text{ হলে সংখ্যা চারটি নির্ণয় কর।} \quad ৪$$

### ১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** মনে করি,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$$

$$\therefore c = dk$$

$$b = ck = dk \cdot k = dk^2$$

$$\text{এবং } a = bk = dk^2 \cdot k = dk^3$$

$\therefore$  a, b এবং c এর মান d এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে পাই,

$$a = dk^3, b = dk^2 \text{ এবং } c = dk \text{ (Ans.)}$$

**খ** সৃজনশীল প্রশ্ন ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

**গ** দেওয়া আছে,

$$a, b, c, d \text{ চারটি ক্রমিক সমানুপাতিক রাশি অর্থাৎ } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } ad = 200 \text{ ..... (i)}$$

$$\text{এখানে, } a : b = 1 : 2$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } b = 2a \text{ ..... (ii)}$$

$$\text{এবং } b : d = 1 : 4$$

$$\text{বা, } \frac{b}{d} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore d = 4b \text{ ..... (iii)}$$

এখন, d এর মান (i) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$a \cdot 4b = 200$$

$$\text{বা, } ab = 50$$

$$\text{বা, } 2a \cdot a = 50 \text{ [(ii) নং হতে b এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } a^2 = 25$$

$$\therefore a = 5$$

$$\text{(ii) নং হতে পাই, } b = 2a = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\text{(iii) নং হতে পাই, } d = 4b = 4 \cdot 10 = 40$$

$$\therefore \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

$$\text{বা, } bd = c^2$$

$$\text{বা, } c^2 = 10 \cdot 40$$

$$\text{বা, } c^2 = 400$$

$$\therefore c = 20$$

$$\therefore \text{ সংখ্যা চারটি যথাক্রমে } a = 5; b = 10; c = 20; d = 40 \text{ (Ans.)}$$

**প্রশ্ন ১৬** a, b, c, d রাশি চারটি ক্রমিক সমানুপাতী এবং  $x = \frac{10ab}{a+b}$

ক. প্রতিটি অনুপাতকে K ধরে a, b, c এর মানকে d এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. দেখাও যে,  $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$  ৪

গ. সমানুপাতের ধর্ম ব্যবহার করে ২য় সমীকরণ হতে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+5a}{x-5a} + \frac{x+5b}{x-5b} = 2. \quad ৪$$

### ১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে,

a, b, c, d রাশি চারটি ক্রমিক সমানুপাতী অর্থাৎ

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \text{ [প্রশ্ন অনুসারে]}$$

$$\therefore c = dk$$

$$b = ck = dk \times k = dk^2$$

$$a = bk = dk^2 \times k = dk^3 \text{ (Ans.)}$$

**খ** সৃজনশীল প্রশ্ন ১(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

**গ** সৃজনশীল প্রশ্ন ৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

**প্রশ্ন ১৭**  $a^2 - 2\sqrt{30} - 11 = 0$ ;  $a > 0$  এবং  $x = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}$

ক. a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে,  $\frac{1}{a^3}(a^6 + 1) = 42\sqrt{6}$  ৪

গ. প্রমাণ কর যে,  $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$  ৪

### ১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে,  $a^2 - 2\sqrt{30} - 11 = 0$

$$\text{বা, } a^2 = 2\sqrt{30} + 11$$

$$\text{বা, } a^2 = 6 + 2\sqrt{6 \cdot 5} + 5$$

$$\text{বা, } a^2 = (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$$

$$\text{বা, } a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$$

$$\therefore a = \sqrt{6} + \sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

**খ** 'ক' থেকে পাই,  $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{a^3}(a^6 + 1)$$

$$= a^3 + \frac{1}{a^3}$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$= (2\sqrt{6})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{6} = 8 \cdot 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6}$$

$$= 48\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = 42\sqrt{6}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{1}{a^3}(a^6 + 1) = 42\sqrt{6} \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$x = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b} + \sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b} - \sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}\right)^2 \text{ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$$

$$\text{বা, } \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2} = \frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$$

[পুনরায় যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2(x^2+1)}{4x} = \frac{4a}{6b}$$

$$\therefore (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2) \text{ এবং } (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$$

$$\text{বা, } 3b(x^2+1) = 4ax \text{ [আড় গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } 3bx^2 + 3b - 4ax = 0$$

$$\therefore 3bx^2 - 4ax + 3b = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন 18 p, q, r, s রাশি চারটি ক্রমিক সমানুপাতী।

$$\text{ক. } \frac{2x-y}{x-2y} = \frac{a}{b} \text{ হলে, } x : y \text{ কত?} \quad 2$$

$$\text{খ. প্রমাণ কর যে, } (p^2 + q^2 + r^2)(q^2 + r^2 + s^2) = (pq + qr + rs)^2. \quad 8$$

গ. যদি p ও q কে কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিবেচনা করা হয়, তবে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি ও প্রস্থ 20% হ্রাসে ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে? 8

### 18 নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,  $\frac{2x-y}{x-2y} = \frac{a}{b}$

$$\text{বা, } 2bx - by = ax - 2ay \text{ [আড়গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } 2bx - ax = by - 2ay$$

$$\text{বা, } x(2b-a) = y(b-2a)$$

$$\text{বা, } \frac{x}{y} = \frac{b-2a}{2b-a}$$

$$\therefore x : y = (b-2a) : (2b-a) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, p, q, r ও s ক্রমিক সমানুপাতী।

$$\therefore \frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{r}{s}$$

$$\text{ধরি, } \frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{r}{s} = k$$

$$\therefore r = sk$$

$$q = rk = sk \cdot k = sk^2$$

$$\text{এবং } p = qk = sk^2 \cdot k = sk^3$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, বামপক্ষ} &= (p^2 + q^2 + r^2)(q^2 + r^2 + s^2) \\ &= \{(sk^3)^2 + (sk^2)^2 + (sk)^2\} \{(sk^2)^2 + (sk)^2 + s^2\} \\ &= (s^2k^6 + s^2k^4 + s^2k^2)(s^2k^4 + s^2k^2 + s^2) \\ &= s^2k^2(k^4 + k^2 + 1) \cdot s^2(k^4 + k^2 + 1) \\ &= s^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ডানপক্ষ} &= (pq + qr + rs)^2 = (sk^3 \cdot sk^2 + sk^2 \cdot sk + sk \cdot s)^2 \\ &= (s^2k^5 + s^2k^3 + s^2k)^2 = \{s^2k(k^4 + k^2 + 1)\}^2 \\ &= s^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore (p^2 + q^2 + r^2)(q^2 + r^2 + s^2) = (pq + qr + rs)^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = p একক

„ প্রস্থ = q একক

$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = pq \text{ বর্গ একক}$$

এখন, 10% বৃদ্ধিতে,

$$\text{আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য} = (p+p \text{ এর } 10\%) \text{ একক}$$

$$= (p + p \cdot \frac{10}{100}) \text{ একক} = 1.1p \text{ একক}$$

20% হ্রাসে,

আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = (q - q এর 20%) একক

$$= (q - q \cdot \frac{20}{100}) \text{ একক} = 0.8q \text{ একক}$$

$$\therefore \text{পরিবর্তিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল} = (1.1p \times 0.8q) \text{ বর্গ একক} = 0.88pq \text{ " "}$$

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল হ্রাস পেয়েছে} = (pq - 0.88pq) \text{ বর্গ একক} = 0.12pq \text{ বর্গ একক}$$

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায়} = \left(\frac{0.12pq}{pq} \times 100\right) \text{ বর্গ একক} = 12 \text{ বর্গ একক}$$

সুতরাং ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় 12% (Ans.)

$$\text{প্রশ্ন 19 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{8}{x} \text{ এবং } \frac{p^2+q^2}{q^2+r^2} = \frac{(p+q)^2}{(q+r)^2}$$

ক. x এর মান নির্ণয় কর। 2

খ.  $\frac{x+4p}{x-4p} + \frac{x+4q}{x-4q}$  এর মান নির্ণয় কর। 8

গ. 2য় শর্ত থেকে প্রমাণ কর যে, p, q, r ক্রমিক সমানুপাতী। 8

### 19 নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{8}{x}$

$$\text{বা, } \frac{q+p}{pq} = \frac{8}{x}$$

$$\text{বা, } x(p+q) = 8pq$$

$$\therefore x = \frac{8pq}{p+q} \text{ (Ans.)}$$

খ সৃজনশীল প্রশ্ন 11(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল প্রশ্ন 9(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

$$\text{প্রশ্ন 20 } \frac{qz-ry}{p} = \frac{rx-pz}{q} = \frac{py-qx}{r} \text{ এবং } x, y \text{ ও } z \text{ ক্রমিক সমানুপাতী।}$$

ক. প্রমাণ কর যে,  $\frac{(x-y)^2}{x} = \frac{(y-z)^2}{z}$  2

খ. প্রমাণ কর যে,  $\frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z}$  8

গ. প্রমাণ কর যে,  $\frac{x^3}{p^2} - \frac{y^3}{q^2} - \frac{z^3}{r^2} = \frac{(x-y-z)^3}{(p-q-r)^2}$  8

### 20 নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

x, y ও z ক্রমিক সমানুপাতী

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = k$$

$$\therefore y = zk$$

$$x = yk = zk \cdot k = zk^2$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{(x-y)^2}{x} = \frac{(zk^2 - zk)^2}{zk^2} \\ &= \frac{\{zk(k-1)\}^2}{zk^2} = \frac{z^2k^2(k-1)^2}{zk^2} = z(k-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ডানপক্ষ} &= \frac{(y-z)^2}{z} = \frac{(zk - z)^2}{z} \\ &= \frac{\{z(k-1)\}^2}{z} = \frac{z^2(k-1)^2}{z} \\ &= z(k-1)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(x-y)^2}{x} = \frac{(y-z)^2}{z} \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ মনে করি,  $\frac{qz-ry}{p} = \frac{rx-pz}{q} = \frac{py-qx}{r} = k$

$$\therefore qz - ry = pk \dots \dots \dots (i)$$

$$\therefore rx - pz = qk \dots \dots \dots (ii)$$

$$\therefore py - qx = rk \dots \dots \dots (iii)$$

এখন, (i) নং, (ii) নং এবং (iii) নং সমীকরণকে যথাক্রমে p, q এবং r দ্বারা গুণ করে পাই,

$$pqz - pry = p^2k$$

$$qrx - pqz = q^2k$$

$$pzy - qrx = r^2k$$

$$0 = k(p^2 + q^2 + r^2) \text{ [যোগ করে]}$$

$$\therefore k = 0$$

$$\text{তাহলে, } \frac{qz - ry}{p} = 0$$

$$\text{বা, } qz - ry = 0$$

$$\text{বা, } qz = ry$$

$$\therefore \frac{q}{y} = \frac{r}{z} \dots \dots \dots \text{(iv)}$$

$$\text{আবার, } \frac{rx - pz}{q} = 0$$

$$\text{বা, } rx - pz = 0$$

$$\text{বা, } rx = pz$$

$$\therefore \frac{r}{z} = \frac{p}{x} \dots \dots \dots \text{(v)}$$

$$\text{(iv) ও (v) নং হতে পাই, } \frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z} \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$\text{গ 'খ' হতে পাই, } \frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z}$$

$$\text{ধরি, } \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = k$$

$$\text{বা, } x = pk, y = qk, z = rk$$

$$\text{এখন, } \frac{x^3}{p^3} = \frac{p^3k^3}{p^3} = k^3$$

$$\frac{y^3}{q^3} = \frac{q^3k^3}{q^3} = k^3$$

$$\frac{z^3}{r^3} = \frac{r^3k^3}{r^3} = k^3$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \frac{x^3}{p^3} - \frac{y^3}{q^3} - \frac{z^3}{r^3} = k^3 - k^3 - k^3 = k^3(p - q - r)$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{(x - y - z)^3}{(p - q - r)^3} = \frac{(pk - qk - rk)^3}{(p - q - r)^3} = \frac{k^3(p - q - r)^3}{(p - q - r)^3} = k^3(p - q - r)$$

$$\therefore \frac{x^3}{p^3} - \frac{y^3}{q^3} - \frac{z^3}{r^3} = \frac{(x - y - z)^3}{(p - q - r)^3} \text{ (প্রমাণিত)}$$