SSC Math

অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট

অধ্যায়-১৩: সসীম ধারা

প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **অনুক্রম:**

  কতকগুলো রাশিকে একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে, প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

  অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ ইত্যাদি বলা হয়। 1, 3, 5, 7, … …অনুক্রমের প্রথম পদ = 1, দ্বিতীয় পদ = 3, ইত্যাদি।

- **ধারা:**

  কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায়। যেমন, 1 + 3 + 5 + 7 + ... একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার 2 + 4 + 8 + 16 + ... একটি ধারা। এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। সুতরাং, যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের ওপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য। ধারাগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা।

- **সমান্তর ধারা:**

  কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।

  1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 একটি ধারা।

  এখানে, দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ = 3 – 1 = 2, তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ = 5 – 3 = 2

  সুতরাং, ধারাটি একটি সমান্তর ধারা। উল্লিখিত ধারার সাধারণ অন্তর 2.

- **সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়:**

  মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ = a ও সাধারণ অন্তর = d হলে ধারাটির n তম পদ = a + (n – 1)d

  এই n তম পদকেই সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d জানা থাকলে n তম পদে n = 1, 2, 3, 4, ... বসিয়ে পর্যায়ক্রমে ধারাটির প্রত্যেকটি পদ নির্ণয় করা যায়।

- **সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি:**

  মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ p, সাধারণ অন্তর d, পদসংখ্যা n এবং ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n.

  $\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + p)$

  n-তম পদ =p = a + (n – 1)d.

  $\mathbf{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}}$

- **প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়:**

  মনে করি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি S_n

  অর্থাৎ, S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n – 1) + n

  বা, $\mathbf{S_n = \frac{n(n + 1)}{2}}$

- **প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয়:**

  মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি S_n

  অর্থাৎ, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2$

  $$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়:**

  মনে করি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি S_n

  অর্থাৎ, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3$

  $$\therefore S_n = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

- **প্রয়োজনীয় সূত্র:**

  $$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

  $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

- **গুণোত্তর ধারা:**

  কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হলে অর্থাৎ, যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে। যেমন, $2 + 4 + 8 + 16 + 32$ ধারাটির প্রথম পদ 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 8, চতুর্থ পদ 16, পঞ্চম পদ 32. এখানে, দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত $= \frac{4}{2} = 2$, তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত $= \frac{8}{2} = 2$, চতুর্থ পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত $= \frac{16}{8} = 2$, পঞ্চম পদের সাথে চতুর্থ পদের অনুপাত $= \frac{32}{16} = 2$.

- **অনন্ত গুণোত্তর ধারা:**

  গুণোত্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না থাকলে সেই ধারাকে অনন্ত গুণোত্তর ধারা বলে। গুণোত্তর ধারার প্রথম পদকে সাধারণত a দ্বারা এবং সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাহলে সংজ্ঞানুসারে, প্রথম পদ a হলে, দ্বিতীয় পদ ar, তৃতীয় পদ ar^2 ইত্যাদি।

  সুতরাং, ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots$

- **গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ:**

  যেকোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, তাহলে ধারাটির **nতম পদ = ar^{n-1}**

- **গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়:**

  মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং পদ সংখ্যা n। যদি n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হয়, তাহলে

  $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ যখন } r < 1$$

  $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}, \text{ যখন } r > 1$$

সৃজনশীল প্রশ্নঃ

প্রশ্ন ▶১ *[রা. বো. ১৭]*

একটি গুণোত্তর ধারার ৩য় পদ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং ৮ম পদ $\frac{1}{27}$ এবং অপর একটি সমান্তর ধারার ১ম 10 পদের সমষ্টি 155 এবং ১ম 20 পদের সমষ্টি 610।

ক. 5 + 8 + 11 + 14 + ... ধারাটির কোন পদ 383? ২

খ. গুণোত্তর ধারাটি নির্ণয় কর। ৪

গ. সমান্তর ধারাটির 30 তম পদ নির্ণয় কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা 5 + 8 + 11 + 14 + ...

এখানে,

প্রথম পদ, a = 5

সাধারণ অন্তর, d = 8 – 5 = 3

ধরি, ধারাটির n তম পদ = 383

বা, a + (n – 1)d = 383

বা, 5 + (n – 1)3 = 383

বা, (n – 1)3 = 383 – 5

বা, $n - 1 = \frac{378}{3}$

বা, n = 126 + 1

বা, n = 127

∴ 127 তম পদ 383 **(Ans.)**

খ ধরি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অনুপাত = r

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার nতম পদ = ar^{n-1}

দেওয়া আছে,

৩য় পদ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $ar^{3-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $ar^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ... ... (i)

এবং ৮ম পদ = $\frac{1}{27}$

বা, $ar^{8-1} = \frac{1}{27}$

বা, $ar^7 = \frac{1}{27}$ ... ... (ii)

(ii) ÷ (i) নং থেকে পাই,

$r^5 = \frac{1}{27} \div \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{1}{(\sqrt{3})^6} \times \sqrt{3}$

বা, $r^5 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$

∴ $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(i) নং হতে পাই,

$a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $a = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3$ ∴ $a = \sqrt{3}$

∴ গুণোত্তর ধারাটি $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots \ldots$

$= \sqrt{3} + \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \sqrt{3}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \ldots \ldots$

$= \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \ldots \ldots$ **(Ans.)**

গ মনে করি,

সমান্তর ধারার ১ম পদ = a, সাধারণ অন্তর = d, পদ সংখ্যা = n

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

দেওয়া আছে, ১ম 10 পদের সমষ্টি = 155

বা, $\frac{10}{2}\{2a + (10-1)d\} = 155$

বা, 5(2a + 9d) = 155

∴ 2a + 9d = 31 ... ... (i)

এবং ১ম 20 পদের সমষ্টি = 610

বা, $\frac{20}{2}\{2a + (20-1)d\} = 610$

বা, 10 (2a + 19d) = 610

∴ 2a + 19d = 61 ... ... (ii)

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$10d = 30$ বা, $d = \frac{30}{10}$ ∴ d = 3

(i)নং এ d = 3 বসিয়ে পাই,

2a + 9.3 = 31

বা, 2a + 27 = 31

বা, 2a = 4 ∴ a = 2

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n – 1)d

∴ 30 তম পদ = a + (30 – 1)d = 2 + 29.3 = 89 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২ *[কু. বো. ১৭]*

3 + a + 9 + ... + 60 একটি সমান্তর ধারা।

ক. a এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করো। ৪

গ. ধারাটির ১ম পদকে ১ম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি গুণোত্তর ধারা গঠন করে তার ১ম 9টি পদের সমষ্টি সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করো। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 3 + a + 9 + ...+ 60 একটি সমান্তর ধারা

∴ শর্তমতে, 9 – a = a – 3

বা, 2a = 12

∴ a = 6 **(Ans.)**

খ ধারাটির ১ম পদ, a = 3

সাধারণ অন্তর, d = 6 – 3 [□ a = 6]

= 3

শেষ পদ = 60

∴ n তম পদ = a +(n – 1).d

বা, 60 = 3 + (n – 1).3

বা, 3 + 3n – 3 = 60

বা, 3n = 60

∴ n = 20

আবার, ধারাটির n পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1).d\}$

∴ ধারাটির 20 পদের সমষ্টি, $S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 3 + (20-1).3\}$

$= 10\{6 + 19 \times 3\}$

$= 10(6 + 57) = 10 \times 63$

$= 630$ **(Ans.)**

গ ধরি, গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ, a = 3

" " সাধারণ অনুপাত, r = 3

আমরা জানি, যেকোনো গুণোত্তর ধারা $a + ar + ar^2 + \ldots$

ধারাটির n তম পদ = ar^{n-1}

∴ ধারাটির ২য় " = $3 \times 3 = 9$

" ৩য় " = $3 \times 3^2 = 27$

" ৪র্থ " = $3 \times 3^3 = 81$

∴ গুণোত্তর ধারাটি 3 + 9 + 27 + 81 + ...

এখন, ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ যখন r > 1

∴ ধারাটির 9 টি পদের সমষ্টি $S_9 = \frac{3(3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{3(19683 - 1)}{2}$

$= 29523$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩ *[চ. বো. ১৭]*

$7 + x + y + 189$ একটি গুণোত্তর ধারা।

ক. ধারাটির চতুর্থ পদকে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করো যেখানে প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r। ২

খ. x এবং y এর মান নির্ণয় করো। ৪

গ. প্রদত্ত ধারার প্রথম পদকে ১ম পদ এবং সাধারণ অনুপাতকে সাধারণ অন্তর ধরে সমান্তর ধারাটি নির্ণয় করে এর প্রথম 16 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অনুপাত = r

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার n তমপদ = ar^{n-1}

∴ " " ৪র্থ পদ = $ar^{4-1} = ar^3$

সুতরাং, $ar^3 = 189$ **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই,

∴ $ar^3 = 189$

বা, $7.r^3 = 189$ [∵ ধারাটির ১ম পদ, a = 7]

বা, $r^3 = \frac{189}{7}$

বা, $r^3 = 27$

বা, $r^3 = 3^3$

∴ $r = 3$

∴ দ্বিতীয় পদ = $x = ar = 7.3 = 21$

এবং তৃতীয় পদ = $y = ar^2 = 7.3^2 = 63$

সুতরাং, $x = 21$ এবং $y = 63$ **(Ans.)**

গ প্রশ্নানুসারে,

সমান্তর ধারার প্রথম পদ, a = 7 এবং সাধারণ অন্তর, d = 3

∴ সমান্তর ধারাটি, $a + (a + d) + (a + 2d) + ...$

$= 7 + (7 + 3) + (7 + 2.3) + ...$

$= 7 + 10 + 13 + ...$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n পদের সমষ্টি = $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

∴ প্রথম 16 পদের সমষ্টি = $\frac{16}{2}\{2.7 + (16-1).3\}$

$= 8(14 + 15.3)$

$= 8(14 + 45)$

$= 8 \times 59 = 472$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪ *[ব. বো. ১৭]*

একটি ধারার n তম পদ $2n - 1$, $n \in N$.

ক. ধারাটি গঠন করো। ২

খ. ধারাটির কততম পদ 169? ৪

গ. ধারাটির প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে যথাক্রমে প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত ধরে একটি গুণোত্তর ধারা গঠন করে নতুন ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, একটি ধারার n তম পদ $2n - 1$ এবং $n \in$ |

অর্থাৎ n স্বাভাবিক সংখ্যা। সুতরাং, n = 1, 2, 3, 4, ...

এখন,

n = 1 হলে ধারাটির ১ম পদ = 2.1 – 1 = 2 – 1 = 1

n = 2 হলে ধারাটির ২য় পদ = 2.2 – 1 = 4 – 1 = 3

n = 3 হলে ধারাটির ৩য় পদ = 2.3 – 1 = 6 – 1 = 5

.....

∴ ধারাটি হলো: 1 + 3 + 5 + ... **(Ans.)**

খ প্রাপ্ত ধারাটি, 1 + 3 + 5 + ...

যার প্রথম পদ a = 1

এবং সাধারণ অন্তর d = 5 – 3 = 3 – 1 = 2

ধরি, ধারাটির nতম পদ 169

আমরা জানি, কোনো ধারার nতম পদ = a + (n – 1)d

= 1 + (n – 1)2

= 1 + 2n – 2 = 2n – 1

প্রশ্নমতে,

2n – 1 = 169

বা, 2n = 169 + 1

বা, 2n = 170

বা, $n = \frac{170}{2}$ ∴ n = 85

∴ ধারাটির 85 তম পদ 169 **(Ans.)**

গ শর্তমতে, নতুন ধারার ১ম পদ, a = 1 এবং সাধারণ অনুপাত, r = 2

গুণোত্তর ধারাটি, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$

$= 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + ...$

$= 1 + 2 + 4 + 8 + ...$

নতুন ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি = $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ [যখন r > 1]

∴ 10 টি পদের সমষ্টি = $\frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1$

$= 1024 - 1 = 1023$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৫ *[চ. বো. ১৬]*

$25 + 23 + 21 + ...$ ধারাটির ১ম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি –456।

ক. ধারাটির সপ্তম পদ কত? ২

খ. n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রদত্ত ধারার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তরকে যথাক্রমে একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত ধরে ধারাটির প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা: $25 + 23 + 21 + ...$

ধারাটির ১ম পদ a = 25

সাধারণ অন্তর d = 23 – 25 = 21 – 23 = –2

∴ ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ = a + (n – 1)d

∴ ধারাটির সপ্তম পদ = a + (7 – 1)d

$= 25 + 6 \times (-2)$

$= 25 - 12$

$= 13$ **(Ans.)**

খ প্রদত্ত ধারা: $25 + 23 + 21 + ...$

'ক' থেকে পাই,

১ম পদ a = 25

সাধারণ অন্তর d = –2

আমরা জানি, সমান্তর ধারার ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$= \frac{n}{2}\{2 \times 25 + (n-1)(-2)\}$

$= \frac{n}{2}(50 - 2n + 2)$

$= \frac{n}{2}(52 - 2n)$

$= \frac{n}{2} \times 2(26 - n)$

$= 26n - n^2$

শর্তমতে, $26n - n^2 = -456$

বা, $26n - n^2 + 456 = 0$

বা, $n^2 - 26n - 456 = 0$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $n^2 - 38n + 12n - 456 = 0$

বা, $n(n - 38) + 12(n - 38) = 0$

বা, $(n - 38)(n + 12) = 0$

∴ হয় $n - 38 = 0$ অথবা, $n + 12 = 0$

∴ $n = 38$ বা, $n = -12$

কিন্তু পদের সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ n এর মান 38 **(Ans.)**

গ 'ক' থেকে পাই,

প্রদত্ত ধারার প্রথম পদ, a = 25

এবং সাধারণ অন্তর = গুণোত্তর ধারার সাধারণ অনুপাত, r = – 2 < 1

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, যখন r < 1

∴ ধারাটির ১ম 7 টি পদের সমষ্টি

$S_7 = \frac{25\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)} = \frac{25(1+128)}{1+2} = \frac{25\times 129}{3} = 1075$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৬ *[চ. বো. ১৬]*

$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - \ldots\ldots$ একটি গুণোত্তর ধারা।

ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং ৪র্থ পদ কত? ২

খ. ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$? ৪

গ. ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং ২য় পদ = – 1

∴ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1\times\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ **(Ans.)**

এবং ধারাটির ৪র্থ পদ = ar^{4-1}

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{4-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^3$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2} = -2$ **(Ans.)**

খ ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এবং 'ক' থেকে পাই, সাধারণ অনুপাত, $r = -\sqrt{2}$

মনে করি, n-তম পদ = $8\sqrt{2}$

আমরা জানি, n-তম পদ = ar^{n-1}

প্রশ্নমতে,

$ar^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 16$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = (-\sqrt{2})^8$

বা, n – 1 = 8

∴ n = 9

∴ ধারাটির 9-তম পদ $8\sqrt{2}$ **(Ans.)**

গ ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এবং 'ক' থেকে পাই, সাধারণ অনুপাত, $r = -\sqrt{2}$

∴ ধারাটির 10-তম পদ = $ar^{10-1} = ar^9 = \frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\sqrt{2})^9$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}(\sqrt{2})^8 = -16$ **(Ans.)**

এবং আমরা জানি, ধারাটির প্রথম n পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, [□ r < 1]

∴ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি $= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{1-(-\sqrt{2})^{10}\}}{1-(-\sqrt{2})}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-32)}{1+\sqrt{2}}$

$= \frac{-31}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$

$= \frac{-31.\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}.\sqrt{2}.(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$= \frac{-31\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৭ *[সি. বো. ১৬]*

একটি সমান্তর ধারার ষষ্ঠ পদ 30 এবং একাদশতম পদ 55।

ক. প্রথম পদকে a এবং সাধারণ অন্তরকে 'd' ধরে দুইটি সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. উদ্দীপক অনুসারে ধারাটি গঠন কর। ৪

গ. যদি ধারাটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 6375 হয়, তবে n-এর মান নির্ণয় কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, কোন সমান্তর ধারার ১ম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে, n-তম পদ = a + (n – 1)d

∴ ষষ্ঠ পদ = a + (6 – 1)d = 30

বা, a + 5d = 30 .....(i)

এবং একাদশতম পদ = a + (11 – 1)d = 55

বা, a + 10d = 55.....(ii)

(i) ও (ii)-ই নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়।

খ 'ক' হতে পাই,

a + 10d = 55..... (iii)

এবং a + 5d = 30 ..... (iv)

(–) (–) (–)

5d = 25 [বিয়োগ করে]

বা, $d = \frac{25}{5}$ ∴ d = 5

d এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

a + 10 × 5 = 55

বা, a + 50 = 55

বা, a = 55 – 50

∴ a = 5

∴ ধারাটির ১ম পদ, a = 5

" ২য় পদ, a + d = 5 + 5 = 10

" ৩য় পদ, a + 2d = 5 + 2.5 = 15

" ৪র্থ পদ, a + 3d = 5 + 3.5 = 20

... ...

... ...

∴ নির্ণেয় ধারাটি = 5 + 10 + 15 + 20 + ...

গ 'খ' হতে পাই,

ধারাটির ১ম পদ, a = 5

এবং সাধারণ অন্তর, d = 5

আমরা জানি, ১ম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d বিশিষ্ট সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

প্রশ্নমতে, $\frac{n}{2}\{2.5 + (n-1)5\} = 6375$

বা, n(10 + 5n – 5) = 6375 × 2

বা, n(5n + 5) = 12750

বা, $5n^2 + 5n - 12750 = 0$

বা, $n^2 + n - 2550 = 0$ [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $n^2 + 51n - 50n - 2550 = 0$

বা, n(n + 51) – 50(n + 51) = 0

বা, (n + 51) (n – 50) = 0

হয় n + 51 = 0 অথবা, n – 50 = 0

বা, n = –51 বা, n = 50

কিন্তু n = –51 গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ পদসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ n = 50 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৮ *[য. বো. ১৬]*

$33 + 29 + 25 + ... - 19$ একটি ধারা এবং $m = \frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}$.

ক. ধারাটির 12তম পদ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $m^2 - \frac{2m}{y} + 1 = 0$ ৪

গ. ধারাটির ১ম পদকে ১ম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি গুণোত্তর ধারা গঠন কর এবং ধারাটির ১ম পাঁচ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা, $33 + 29 + 25 + ... - 19$

ইহা একটি সমান্তর ধারা। ইহার,

১ম পদ, $a = 33$

এবং সাধারণ অন্তর, $d = 29 - 33 = -4$

আমরা জানি, কোন সমান্তর ধারার n-তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 12-তম পদ $= 33 + (12-1)(-4)$

$= 33 + 11.(-4)$

$= 33 - 44$

$= -11$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$m = \frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}$

$\therefore \frac{m+1}{m-1} = \frac{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1+y}-\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}-\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{m+1}{m-1} = \frac{2\sqrt{1+y}}{2\sqrt{1-y}}$

বা, $\frac{m+1}{m-1} = \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}$

বা, $\frac{(m+1)^2}{(m-1)^2} = \frac{\left(\sqrt{1+y}\right)^2}{\left(\sqrt{1-y}\right)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{m^2+2m+1}{m^2-2m+1} = \frac{1+y}{1-y}$

বা, $\frac{m^2+2m+1+m^2-2m+1}{m^2+2m+1-m^2+2m-1} = \frac{1+y+1-y}{1+y-1+y}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2(m^2+1)}{2.2m} = \frac{2}{2y}$

বা, $\frac{m^2+1}{2m} = \frac{1}{y}$

বা, $m^2 + 1 = \frac{2m}{y}$

$\therefore m^2 - \frac{2m}{y} + 1 = 0$. **(প্রমাণিত)**

গ প্রদত্ত ধারাটির ১ম পদকে ১ম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে পাই, $a = 33$ এবং $r = -4$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ $= a = 33$

" " ২য় " $= ar = 33.(-4) = -132$

" " ৩য় " $= ar^2 = 33.(-4)^2 = 528$

" " ৪র্থ " $= ar^3 = 33.(-4)^3 = -2112$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর ধারাটি, $33 - 132 + 528 - 2112 + ...$

যেহেতু, $r = -4 < 1$.

সুতরাং, প্রাপ্ত গুণোত্তর ধারার ১ম পাঁচটি পদের সমষ্টি

$S_5 = \frac{33\{1-(-4)^5\}}{1-(-4)}$ $\left[\because S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}; \because r < 1\right]$

$= \frac{33(1+1024)}{1+4}$

$= \frac{33 \times 1025}{5}$

$= 33 \times 205 = 6765$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৯ *[ব. বো. ১৬]*

একটি সমান্তর ধারার ১ম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 6.

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 705 হলে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির সাধারণ অন্তরকে ১ম পদ এবং ১ম পদকে সাধারণ অনুপাত ধরে গঠিত গুণোত্তর ধারার ১ম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$

এবং সাধারণ অন্তর $d = 6$

$\therefore$ ধারাটির ২য় পদ $= a + d = 5 + 6 = 11$

$\therefore$ ধারাটির ৩য় পদ $= a + 2d = 5 + 2.6 = 5 + 12 = 17$

$\therefore$ ধারাটি $= 5 + 11 + 17 + ...$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$

এবং সাধারণ অন্তর $d = 6$

এবং ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 705$

আমরা জানি, কোন সমান্তর ধারার ১ম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে, ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

প্রশ্নমতে, $\frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = 705$

বা, $\frac{n}{2}\{2.5 + (n-1)6\} = 705$

বা, $\frac{n}{2}\{2(5 + 3n - 3)\} = 705$

বা, $n(3n + 2) = 705$

বা, $3n^2 + 2n - 705 = 0$

বা, $3n^2 + 47n - 45n - 705 = 0$

বা, $n(3n + 47) - 15(3n + 47) = 0$

বা, $(3n + 47)(n - 15) = 0$

হয় $3n + 47 = 0$ অথবা $n - 15 = 0$

বা, $3n = -47$ বা, $n = 15$

বা, $n = -\frac{47}{3}$

যেহেতু পদ সংখ্যা ঋণাত্মক ও ভগ্নাংশ হতে পারে না।

$\therefore n = 15$ **(Ans.)**

গ ধরি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a

এবং সাধারণ অনুপাত q

শর্তমতে, $a = 6$ এবং $q = 5$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 7টি পদের সমষ্টি $= \frac{a(q^7-1)}{q-1}$ $[\because q > 1]$

$= \frac{6(5^7-1)}{5-1}$

$= \frac{6(78125-1)}{4}$

$= \frac{6 \times 78124}{4}$

$= 117186$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১০ *[রা. বো. ১৫]*

একটি গুণোত্তর ধারার অষ্টম পদ -27 এবং একাদশ পদ $81\sqrt{3}$.

ক. প্রদত্ত তথ্যগুলো সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. ধারাটির 14 তম পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি,

গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ $= a$

এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ ধারাটির অষ্টম পদ, $ar^{8-1} = -27$

$\therefore ar^7 = -27$ ..... (i)

আবার, ধারাটির একাদশ পদ, $ar^{11-1} = 81\sqrt{3}$

$\therefore\ ar^{10} = 81\sqrt{3}$ ..... (ii)

Ans. $ar^7 = -27$, $ar^{10} = 81\sqrt{3}$

খ 'ক' হতে পাই,

$ar^7 = -27$ ..... (i)

$ar^{10} = 81\sqrt{3}$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{ar^{10}}{ar^7} = \frac{81\sqrt{3}}{-27}$

বা, $r^3 = -3\sqrt{3}$

বা, $r^3 = (-\sqrt{3})^3$

$\therefore\ r = -\sqrt{3}$

r এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$a.(-\sqrt{3})^7 = -27$

বা, $a(-27\sqrt{3}) = -27$

বা, $a = \frac{-27}{-27\sqrt{3}}$

$\therefore\ a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ ধারাটির 14তম পদ $= \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3})^{14-1}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3})^{13}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}.(-729\sqrt{3})$

$= -729$ **(Ans.)**

গ 'খ' হতে পাই,

গুণোত্তর ধারাটির **১ম** পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\sqrt{3} < 1$

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r < 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি

$S_{10} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\{1-(-\sqrt{3})^{10}\}}{1-(-\sqrt{3})} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(-242)}{1+\sqrt{3}} = \frac{-242}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{242\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3\{(\sqrt{3})^2-(1)^2\}} = \frac{-121\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ *[দি. বো. ১৫]*

একটি ধারার সাধারণ পদ $2n + 1$; $(n \in \mid)$.

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির কততম পদ 169? ৪

গ. ধারাটির প্রথম সংখ্যাকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে নতুন ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, একটি ধারার সাধারণ পদ $= 2n + 1$; $(n \in \mid)$

এখন, $n = 1$ হলে প্রথম পদ $= 2.1 + 1 = 3$

$n = 2$ হলে দ্বিতীয় পদ $= 2.2 + 1 = 5$

$n = 3$ হলে তৃতীয় পদ $= 2.3 + 1 = 7$

... ...

... ...

$\therefore$ নির্ণেয় ধারাটি, $3 + 5 + 7 + \ldots\ \ldots\ \ldots$ **(Ans.)**

খ 'ক' হতে পাই, ধারাটির **১ম** পদ $a = 3$

২য় পদ $= 5$

$\therefore$ সাধারণ অন্তর, $d = 5 - 3 = 2$

মনেকরি, ধারাটির n তম পদ $= 169$

বা, $a + (n-1)d = 169$ [$\square$ n তম পদ $= a + (n-1)d$]

বা, $3 + (n-1)2 = 169$

বা, $(n-1)2 = 166$

বা, $n - 1 = 83$

$\therefore\ n = 84$

$\therefore$ ধারাটির 84 তম পদ 169 **(Ans.)**

গ 'ক' হতে প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম সংখ্যাকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরলে প্রাপ্ত গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 3$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 2 > 1$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$; $r > 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি,

$S_{10} = \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = \frac{3(1024-1)}{1} = 3 \times 1023 = 3069$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১২ *[কু. বো. ১৫]*

$215 + 213 + 211 + \ldots\ldots + 175 = S_1$ এবং $24 + 96 + 384 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি $= S_2$.

ক. S_1 এর দশম পদ নির্ণয় কর। ২

খ. S_1 এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. S_1 এবং S_2 এর অনুপাত বের কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $215 + 213 + 211 + \ldots\ldots\ldots + 175 = S_1$

S_1 এর প্রথম পদ, $a = 215$

সাধারণ অন্তর $d = 213 - 215 = -2$

n-তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ 10-তম পদ $= a + (10-1)d$

$= 215 + (10-1)(-2)$

$= 215 + 9(-2)$

$= 215 - 18$

$= 197$ **(Ans.)**

খ ধরি, 175 পদটি n তম পদে অবস্থিত।

$\therefore$ n-তম পদ $= a + (n-1)d$

বা, $175 = 215 + (n-1)(-2)$

বা, $175 - 215 = (n-1)(-2)$

বা, $(n-1)(-2) = -40$

বা, $n - 1 = \frac{-40}{-2}$

বা, $n - 1 = 20$

বা, $n = 20 + 1 = 21$

আমরা জানি, n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\therefore$ 21 পদের সমষ্টি, $S_{21} = \frac{21}{2} \times \{2 \times 215 + (21-1)(-2)\}$

$= \frac{21}{2}\{430 - 40\}$

$= \frac{21}{2} \times 390$

$= 4095$ **(Ans.)**

গ $S_2 = 24 + 96 + 384 + \ldots\ldots\ldots$

S_2 এর প্রথম পদ $a = 24$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{96}{24} = 4 > 1$

আমরা জানি, $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$\therefore$ প্রথম পাঁচ পদের $(n = 5)$ সমষ্টি $S_n = \frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$= \frac{24(4^5-1)}{4-1} = \frac{24(1024-1)}{3}$

$= 8 \times 1023 = 8184$

$\therefore$ S_1 ও S_2 এর অনুপাত $= 4095 : 8184$ ['খ' হতে]

$= 1365 : 2728$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ *[সি. বো. ১৫]*

6 + x + y + z + 96 + ... একটি গুণোত্তর ধারা।

ক. সমান্তর ধারা ও অনুক্রম এর মধ্যে দুইটি পার্থক্য লিখ। ২

খ. x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের ধারাটি লেখ। ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 3066 হলে, n-এর মান কত? ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

সমান্তর ধারা	অনুক্রম
(i) কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।	(i) কতগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের পদ ও পরের পদের সাথে কীভাবে সম্পর্কীত তা জানা যায়। এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম বলে।
(ii) উদাহরণ: 1 + 3 + 5 + ... (2n – 1)	(ii) উদাহরণ: 1, 3, 5, .. (2n – 1) ,...

খ 6 + x + y + z + 96 + ...

ধারাটির ১ম পদ = a = 6

সাধারণ অনুপাত r হলে,

২য় পদ, $x = ar^1$

৩য় পদ, $y = ar^2$

৪র্থ পদ, $z = ar^3$

৫ম পদ, $96 = ar^4$

বা, $96 = 6.r^4$

বা, $r^4 = 16 = 2^4$

$\therefore$ r = 2

$\therefore$ x = 6.2 = 12

$y = 6.2^2 = 24$

$z = 6.2^3 = 48$ **(Ans.)**

গ 'খ' হতে, 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + ...

এখানে, প্রথম পদ, a = 6

সাধারণ অনুপাত r = 2 > 1

প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ [$\because$ r > 1]

বা, $3066 = \frac{6(2^n - 1)}{2 - 1}$

বা, $2^n - 1 = 511$

বা, $2^n = 511 + 1$

বা, $2^n = 512$

বা, $2^n = 2^9$

$\therefore$ n = 9 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ *[য. বো. ১৫]*

log3 + log9 + log27 + ...

ক. ইহা কোন ধরনের ধারা? ২

খ. ধারার পঞ্চম ও দশম পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারার প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক log3 + log9 + log27 + ...

$= \log3 + \log3^2 + \log3^3$ .....

= log3 + 2log3 + 3log3 + ...

এখানে, ধারাটির যেকোনো পদ-পূর্ববর্তী পদ

= 2log3 – log3 = log3

এবং শেষ পদ অনুপস্থিত।

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটি একটি অনন্ত সমান্তর ধারা। **(Ans.)**

খ এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, a = log3

সাধারণ অন্তর, d = log3

আমরা জানি, সমান্তর ধারা n-তম পদ = a + (n – 1)d

$\therefore$ ধারাটির পঞ্চম (n = 5) পদ = a + (5 – 1)d

= a + 4d = log3 + 4log3

= 5log3 **(Ans.)**

$\therefore$ ধারাটির দশম (n = 10) পদ = a + (10 – 1)d

= a + 9d

= log3 + 9log3 = 10log3 **(Ans.)**

গ আমরা জানি, সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)d\}$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম বারটি (n = 12) পদের সমষ্টি,

$S_{12} = \frac{12}{2}\{2a + (12 - 1)d\}$

$= 6(2\log3 + 11\log3)$

$= 6 \times 13\log3$

$= 78\log3$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির ৪র্থ পদ – 2 এবং ৯ম পদ $8\sqrt{2}$

ক. উপরিউক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ধারটির 12 তম পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ধারাটির ১ম পদ = a

সাধারণ অনুপাত = r

ধারাটির ৪র্থ পদ = – 2

এবং ৯ম পদ = $8\sqrt{2}$

$\therefore$ ধারাটির ৪র্থ পদ = ar^{4-1}

বা, $ar^3 = -2$

এবং ধারাটির ৯ম পদ = ar^{9-1}

বা, $ar^8 = 8\sqrt{2}$

খ 'ক' থেকে পাই, $ar^8 = 8\sqrt{2}$

এবং $ar^3 = -2$

$\therefore \frac{ar^8}{ar^3} = \frac{8\sqrt{2}}{-2}$

বা, $r^5 = -4\sqrt{2}$

বা, $r^5 = (-\sqrt{2})^5$

$\therefore r = -\sqrt{2}$

অতএব, $a(-\sqrt{2})^3 = -2$ [r-এর মান বসিয়ে]

বা, $a = \frac{-2}{(-\sqrt{2})^3}$

বা, $a = \frac{-\sqrt{2}.\sqrt{2}}{-\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}$

বা, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

অতএব, ধারাটির 12 তম পদ = ar^{12-1}

$= \frac{1}{\sqrt{2}}.(-\sqrt{2})^{11}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(\sqrt{2}).(\sqrt{2})^{10}\} = -32$

$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ – 32 **(Ans.)**

গ ধারাটির ১ম 7টি পদের সমষ্টি,

$S_7 = a\frac{1 - r^7}{1 - r}; r < 1$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - (-\sqrt{2})^7}{1 - (-\sqrt{2})} = \frac{1 + 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}$

$= \frac{1 + 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$ [লব ও হরকে $(\sqrt{2} - 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{\sqrt{2} - 1 + 8.2 - 8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2 - 1)}$

$= \frac{15 - 7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ [লব ও হরকে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{15\sqrt{2} - 14}{2} = \frac{1}{2}(15\sqrt{2} - 14)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ কোনো একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, পঞ্চম পদ $3\sqrt{3}$ এবং অষ্টমপদ –27.

ক. উপরোক্ত তথ্যগুলো ২টি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ধারাটির ১৫তম পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. গুণোত্তর ধারাটি নির্ণয় করে তার ১ম ১১টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ = a, সাধারণ অনুপাত = r

$\therefore$ ধারাটির পঞ্চম পদ = ar^{5-1}

বা, $3\sqrt{3} = ar^4$

$\therefore ar^4 = 3\sqrt{3}$ ..... (i)

আবার, ধারাটির অষ্টম পদ = ar^{8-1}

বা, $-27 = ar^7$

$\therefore ar^7 = -27$ ..... (ii) **(Ans.)**

খ 'ক' এর (ii) নং সমীকরণকে (i) নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{ar^7}{ar^4} = \frac{-27}{3\sqrt{3}}$ বা, $r^3 = -\frac{9}{\sqrt{3}}$

বা, $r^3 = -\frac{3.\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

বা, $r^3 = -3\sqrt{3}$ বা, $r^3 = -\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}$.

বা, $r^3 = \left(-\sqrt{3}\right)^3$ $\therefore r = -\sqrt{3}$

এখন, r-এর মান 'ক' এর (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$ar^4 = 3\sqrt{3}$

বা, $a.(-\sqrt{3})^4 = 3\sqrt{3}$

বা, $a.(-\sqrt{3})^2(-\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$

বা, $a.3.3 = 3\sqrt{3}$

বা, $a = 3.\frac{\sqrt{3}}{3.3}$ বা, $a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}$ $\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ ধারাটির ১৫তম পদ = $ar^{15-1} = ar^{14}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\sqrt{3})^{14}$

$= 729\sqrt{3}$ **(Ans.)**

গ 'খ' হতে পাই, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $r = -\sqrt{3} < 1$

$\therefore$ ধারাটি, $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}\right)^3 + ...$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \sqrt{3} - 3 + ...$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম ১১টি পদের সমষ্টি = $a\frac{1-r^{11}}{1-r}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-(-\sqrt{3})^{11}}{1-(-\sqrt{3})}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1+243\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$= \frac{1+243\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}$

$= \frac{(1+243\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$

$= \frac{3+729\sqrt{3}-\sqrt{3}-729}{9-3}$

$= \frac{728\sqrt{3}-726}{6}$

$= \frac{1}{3}(364\sqrt{3}-363)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ 25 + 23 + 21 + ... ধারাটির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি – 456.

ক. ধারাটির নবম পদ কত? ২

খ. n-এর মান বের কর। ৪

গ. প্রদত্ত ধারার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তরকে যথাক্রমে একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত ধরে ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা: 25 + 23 + 21 + ...

ধারাটির প্রথম পদ a = 25

সাধারণ অন্তর d = 23 – 25 = – 2

ধারাটির n তম পদ = a + (n – 1)d

$\therefore$ ধারাটির নবম পদ = 25 + (9 – 1)(– 2)

= 25 + 8(– 2)

= 25 – 16

= 9 **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ প্রদত্ত ধারার প্রথম পদ, a = 25

সাধারণ অন্তর, r = – 2 < 1

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি,

$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ যখন r < 1.

$\therefore$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি,

$S_{10} = 25\left[\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}\right]$

$= 25\left(\frac{1-1024}{3}\right)$

$= \frac{25(-1023)}{3}$

$= -8525$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ একটি গুণোত্তর ধারার ১ম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r। ধারাটির 5 তম এবং 8 তম পদ যথাক্রমে $3\sqrt{3}$ এবং – 27।

ক. উপরের তথ্যগুলো সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ধারাটির 15 তম পদ নির্ণয় কর। ৪

গ. ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ১৬(ক) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ১৬(খ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ 'খ' হতে পাই,

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $r = -\sqrt{3} < 1$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি,

$S_{10} = a.\frac{1-r^{10}}{1-r} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1-\left(-\sqrt{3}\right)^{10}}{1-\left(-\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-243}{1+\sqrt{3}}$

$= \frac{-242}{\sqrt{3}+3}$

$= -242 \cdot \frac{\sqrt{3}-3}{\left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}-3\right)}$

$= -242 \cdot \frac{\sqrt{3}-3}{3-9}$

$= \frac{-242}{-6}\left(\sqrt{3}-3\right)$

$= \frac{121}{3}\left(\sqrt{3}-3\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ একজন সরকারি চাকুরীজীবীর 2016 সালের জুলাই মাসে মাসিক মূল বেতন ছিল 22000 টাকা। তাঁর বাৎসরিক বেতনের প্রবৃদ্ধি 1000 টাকা।

ক. log2 + log16+ log512 + ... ধারাটির সাধারণ পদ কত? ২

খ. একটি সমান্তর ধারা তৈরি কর এবং চাকুরীজীবীর 2021 সালের জুলাই মাসের মূল বেতন কত, বের কর। ৪

গ. প্রতি মাসে যদি তাঁর মূল বেতনের 15% সঞ্চয় করেন তাহলে 25 বছর পরে তাঁর মোট সঞ্চয় কত হবে? ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ধারা : $\log 2 + \log 16 + \log 512 + ...$

$= \log 2 + \log 2^4 + \log 2^9 + ...$

$= \log 2 + 4\log 2 + 9\log 2 + ...$

$= \log 2 + 2^2\log 2 + 3^2\log 2 + ...$

$= \log 2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + ...)$

$\therefore$ ধারাটির n তম পদ $= n^2\log 2$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

2016 সালে মূল বেতন, $a = 22000$ টাকা

বাৎসরিক বেতন বৃদ্ধি, $d = 1000$ টাকা

$\therefore$ 2017 সালের অর্থাৎ ২য় বছরে বেতন $= a + d$

$= 22000 + 1000 = 23000$ টাকা

2018 সালে অর্থাৎ ৩য় বছরে বেতন $= a + 2d$

$= 2200 + 2 \times 1000 = 24000$ টাকা

$\therefore$ সমান্তর ধারাটি : $22000 + 23000+ + 24000 + ...$ **(Ans.)**

আবার, 2021 সালের মূল বেতন বের করতে হবে।

$\therefore$ পদ সংখ্যা, $n = 6$

আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n - 1)d$

$\therefore$ 6 তম পদ $= a + (6 - 1)d$

$= 22000 + 5.1000$

$= 27000$

$\therefore$ 2021 সালের জুলাই মাসে বেতন = 27000 টাকা। **(Ans.)**

গ প্রথম বছরের মোট বেতন $= 22000 \times 12 = 264000$ টাকা

দ্বিতীয় বছরের মোট বেতন $= 23000 \times 12 = 276000$ টাকা

তৃতীয় বছরের মোট বেতন $= 24000 \times 12 = 288000$ টাকা

তাহলে, বছর ভিত্তিক বেতনের ধারাটি দাঁড়ায়,

$264000 + 276000 + 288000 + ...$ যা একটি সমান্তর ধারা।

যার প্রথম পদ, $a = 264000$

সাধারণ অন্তর, $d = 276000 - 264000 = 12000$

পদ সংখ্যা, $n = 25$

$\therefore$ 25 পদের সমষ্টি $= \frac{25}{2}\{2a + (25 - 1)d\}$

$= \frac{25}{2}(2 \times 264000 + 24 \times 12000)$

$= 10200000$ টাকা

অর্থাৎ 25 বছরে মোট বেতন = 10200000 টাকা

সঞ্চয় করা হয় মূল বেতনের 15%

$\therefore$ 25 বছরে সঞ্চয়ের মোট পরিমাণ = 10200000 এর 15%

$= 10200000$ এর $\frac{15}{100}$

$= 1530000$ টাকা **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ একটি ধারার সাধারণ পদ $2n + 1$ ($n \in$ |).

ক. ধারাটি নির্ণয় কর। ২

খ. ধারাটির কত তম পদ 169? ৪

গ. ধারাটির ১ম সংখ্যাকে ১ম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে নতুন ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন ১১ এর সমাধান দ্রষ্টব্য।