SSC Math

অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট

অধ্যায়-১৪: অনুপাত, সদৃশ্যতা ও প্রতিসমতা

প্রয়োজনীয় তথ্য:

দুইটি রাশির তুলনা করার জন্য তাদের অনুপাত বিবেচনা করা হয়। অনুপাত নির্ণয়ের জন্য রাশি দুইটি একই এককে পরিমাপ করতে হয়।

- **অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম :**

(i) $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে, $a : b = c : d$

(ii) $a : b = b : a$ হলে, $a = b$

(iii) $a : b = x : y$ হলে, $b : a = y : x$ (ব্যস্তকরণ)

(iv) $a : b = x : y$ হলে, $a : x = b : y$ (একান্তরকরণ)

(v) $a : b = c : d$ হলে, $ad = bc$ (আড়গুণন)

(vi) $a : b = x : y$ হলে, $a + b : b = x + y : y$ (যোজন)

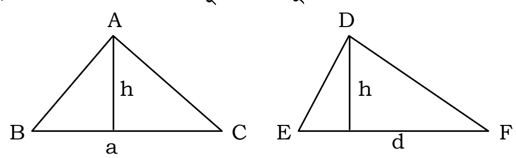
এবং $a - b : b = x - y : y$ (বিয়োজন)

(vii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (যোজন ও বিয়োজন)

- **জ্যামিতিক সমানুপাত**

আমরা ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। এ থেকে দুইটি প্রয়োজনীয় অনুপাতের ধারণা তৈরি করা যায়।

(১) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।

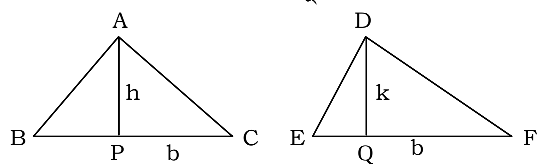


মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর ভূমি যথাক্রমে $BC = a$, $EF = d$ এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(a \times h)$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(d \times h)$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} a \times h : \frac{1}{2} d \times h = a : d = BC : EF$।

(২) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।



মনে করি, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DEF এর উচ্চতা যথাক্রমে $AP = h$, $DQ = k$ এবং উভয়ক্ষেত্রের ভূমি b।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(b \times h)$, ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(b \times k)$

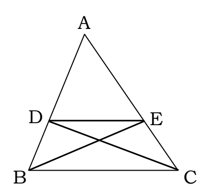
অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল : ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(b \times h) : \frac{1}{2}(b \times k) = h : k = AP : DQ$

- **অনুসিদ্ধান্ত ১।** ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে,

তবে $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে তবে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$।

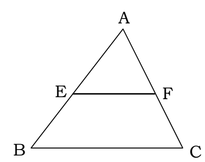
অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC এবং ΔADC একই উচ্চতা বিশিষ্ট। $\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta ADC} = \frac{AB}{AD}$	[একই উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক]
(২) $\frac{\Delta ABC}{\Delta ABE} = \frac{AC}{AE}$	[একই]
(৩) কিন্তু $\Delta BDE = \Delta DEC$	[এরা একই ভূমি DE এর একই পাশে একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।]
$\therefore \Delta ADE + \Delta BDE = \Delta ADE + \Delta DEC$ বা, $\Delta ABE = \Delta ADC$ $\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta ADC} = \frac{\Delta ABC}{\Delta ABE}$	
(৪) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$	[১নং ও ২নং হতে]
(৫) $\frac{AB}{AB - AD} = \frac{AC}{AC - AE}$ বা, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$ **(প্রমাণিত)**	[১নং, ২নং ও ৩নং হতে]

■ **অনুসিদ্ধান্ত ২। ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।**

সমাধান : সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু E। E বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল EF সরলরেখা AC কে F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AF = FC$।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC এ $EF \parallel BC$ $\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC}$	[ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]
(২) $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{AE} = 1$	[AE = BE]
(৩) $AF = FC$ **(প্রমাণিত)**	

সৃজনশীল প্রশ্ন:

প্রশ্ন ▶১ *[দি. বো. ১৭]*

ΔPQR এর $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক PS, QR-কে S বিন্দুতে ছেদ করেছে। SP এর সমান্তরাল RT রেখাংশ বর্ধিত QP-কে T বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. দেখাও যে, দুইটি ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল উচ্চতার সমানুপাতিক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $QS : SR = PQ : PR$. ৪

গ. QR এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ PQ এবং PR-কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, $QS : SR = MQ : NR$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

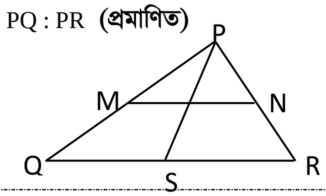
ক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ১৪ এর অনুচ্ছেদ ১৪.১ এর "জ্যামিতিক সমানুপাত" এর (২) নং দ্রষ্টব্য।

খ ΔPQR এর $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক PS, QR কে S বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $QS : SR = PQ : PR$

অঙ্কন: SP রেখাংশের সমান্তরাল করে R বিন্দু দিয়ে RT রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত QP বাহুকে T বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু $SP \parallel RT$ এবং PR ও PT তাদের ছেদক	[অঙ্কন]
$\therefore \angle PTR = \angle QPS$	[অনুরূপ কোণ]
এবং $\angle PRT = \angle RPS$	[একান্তর কোণ]
(২) কিন্তু $\angle QPS = \angle RPS$	[স্বীকার]
$\therefore \angle PTR = \angle PRT$; $\therefore PR = PT$	
(৩) আবার, যেহেতু $SP \parallel RT$, $\therefore \frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PT}$ $\therefore \frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ $\therefore QS : SR = PQ : PR$ **(প্রমাণিত)**	

গ



মনে করি, $\triangle PQR$ এ $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক PS। QR এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ PQ এবং PR কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, QS : SR = MQ : NR

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) $\triangle PQR$ এর $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক PS ['খ' হতে]

$\therefore$ QS : SR = PQ : PR ....(i)

(২) এখন, $MN \parallel QR$

$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{PN}{NR}$

বা, $\frac{PM}{MQ} + 1 = \frac{PN}{NR} + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{PM + MQ}{MQ} = \frac{PN + NR}{NR}$

বা, $\frac{PQ}{MQ} = \frac{PR}{NR}$

বা, $\frac{PQ}{PR} = \frac{MQ}{NR}$

বা, PQ : PR = MQ : NR ... ... (ii)

(৩) সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

QS : SR = MQ : NR **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২ *[কু. বো. ১৭]*

দুইটি সদৃশকোণী $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর BC এবং EF এর উপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব।

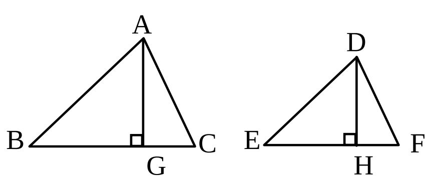
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ করো যে, AG : DH = AB : DE. ৪

গ. প্রমাণ করো যে, $\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2$. ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপকের আলোকে চিত্র নিম্নরূপ :



খ দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ। AG ও DH যথাক্রমে তাদের উচ্চতা।

প্রমাণ করতে হবে যে, AG ঃ DH = AB ঃ DE

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) যেহেতু $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

(২) আবার, $\triangle ABG$ ও $\triangle DEH$ -এ,

$\angle ABG = \angle DEH$

$\angle AGB = \angle DHE$ = এক সমকোণ [কল্পনা]

$\therefore \angle BAG = \angle EDH$ [অবশিষ্ট]

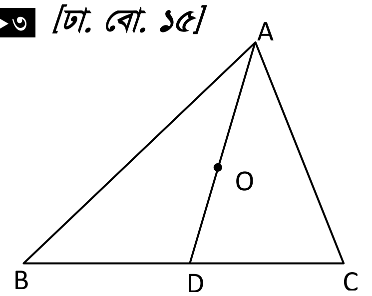
$\therefore \triangle ABG$ ও $\triangle DEH$ সদৃশকোণী ও সদৃশ। [সদৃশ কোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

$\therefore \frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE}$

$\therefore$ AG ঃ DH = AB ঃ DE **(প্রমাণিত)**

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের ১৪.২ অনুশীলনীর উপপাদ্য ৮ দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৩ *[ঢা. বো. ১৫]*



চিত্রে, AB = 6cm, AC = 4cm, CD = 2cm এবং O, AD এর উপর যে কোনো বিন্দু। AD রেখা $\triangle ABC$ এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

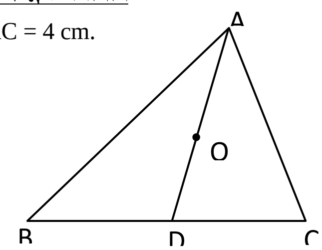
ক. $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ সদৃশকোণী কি-না যুক্তিসহ লিখ। ২

খ. BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\triangle AOB$ ঃ $\triangle AOC$ = 3 ঃ 2 ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, AB = 6 cm, AC = 4 cm.



$\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$-এ,

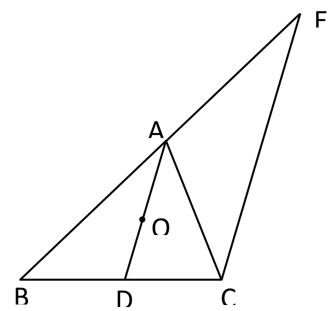
$\frac{AB}{AC} = \frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{3}{2}$

বা, $\frac{AD}{AD} = 1$

বা, $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AD}{AD}$

$\therefore \triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ সদৃশকোণী নয়।

খ এখানে, $\triangle ABC$-এর AB = 6 cm, AC = 4 cm, CD = 2 cm, AD রেখাংশ $\triangle ABC$ এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং O, AD এর উপর যেকোনো বিন্দু।



DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $DA \parallel CE$ এবং AC ও AE তাদের ছেদক

সেহেতু $\angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$ [স্বীকার]

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$;

$\therefore$ AC = AE

আবার, যেহেতু $DA \parallel CE$,

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$

কিন্তু AE = AC

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

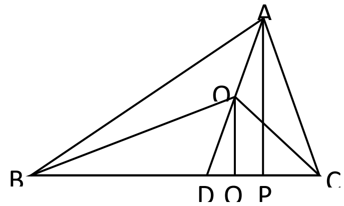
বা, $\frac{BD}{2\text{ cm}} = \frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}}$ [□ AB = 6 cm, AC = 4 cm এবং CD = 2 cm]

বা, $BD = \frac{12}{4}$ cm

বা, BD = 3 cm

$\therefore$ BD এর দৈর্ঘ্য 3 cm. **(Ans.)**

গ এখানে, ΔABC এর $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm, $BD = 3$ cm (খ-হতে প্রাপ্ত) এবং O, AD এর উপর যে কোনো বিন্দু।



অঙ্কন: A এবং O হতে BC-এর উপর যথাক্রমে AP ও OQ লম্ব টানি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABD ও ΔACD এর উচ্চতা AP। [ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

$\therefore \Delta ABD$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.BD.AP$

এবং ΔACD-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.CD.AP$

[ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

(২) আবার, ΔBOD ও ΔCOD- এর উচ্চতা OQ.

$\therefore \Delta BOD$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.BD.OQ$

[ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

এবং ΔCOD-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}.CD.OQ$

[ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

(৩) $\frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \frac{\Delta ABD - \Delta BOD}{\Delta ACD - \Delta COD}$

[$\Delta ABD = \Delta AOB + \Delta BOD$ এবং $\Delta ACD = \Delta COD + \Delta AOC$]

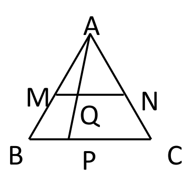
বা, $\frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \frac{\frac{1}{2}.BD.AP - \frac{1}{2}.BD.OQ}{\frac{1}{2}.CD.AP - \frac{1}{2}.CD.OQ}$ [ধাপ (১) ও (২) হতে]

$= \frac{\frac{1}{2}BD(AP - OQ)}{\frac{1}{2}CD(AP - OQ)}$

$= \frac{BD}{CD} = \frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{3}{2}$ [□ BD = 3cm এবং CD = 2cm]

$\therefore \Delta AOB : \Delta AOC = 3 : 2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪



MN || BC

ক. BM = 2 সে.মি. এবং CN = 1.8 সে.মি. হলে, AB : AC এর মান মূলদ ভগ্নাংশ আকারে নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AB : AC = AM : AN. ৪

গ. Q, B এবং Q, C যোগ করে প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AQB : Δ ক্ষেত্র AQC = BP : CP. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, BM = 2 সে.মি., CN = 1.8 সে.মি.

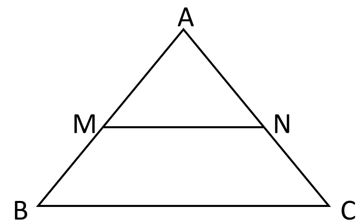
এবং MN || BC

আমরা জানি, $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN}$

বা, $AB ঃ AC = \frac{2}{1.8} = \frac{2 \times 10}{18}$

$\therefore AB ঃ AC = \frac{10}{9}$ **(Ans.)**

খ



মনে করি, ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল MN রেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB ঃ AC = AM ঃ AN।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ [ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ [বিপরীতকরণ করে]

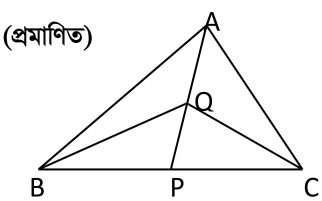
এখন, $\frac{MB}{AM} + 1 = \frac{NC}{AN} + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$

বা, $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore$ AB ঃ AC = AM ঃ AN **(প্রমাণিত)**

গ



Q, B এবং Q, C যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta AQB ঃ \Delta AQC = BP ঃ PC$.

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থ**

(১) ΔQBP ও ΔQCP এর উচ্চতা সমান। [$\because$ একই শীর্ষ বিন্দু Q এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত]

$\therefore \frac{\Delta QBP}{\Delta QCP} = \frac{BP}{PC}$ .... (i) [দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।]

(২) ΔAQB ও ΔQBP এর উচ্চতা সমান। [আবার, একই শীর্ষবিন্দু B এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত।]

$\therefore \frac{\Delta AQB}{\Delta QBP} = \frac{AQ}{QP}$ [একই কারণে]

অনুরূপভাবে, $\frac{\Delta AQC}{\Delta QCP} = \frac{AQ}{QP}$

$\therefore \frac{\Delta AQB}{\Delta QBP} = \frac{\Delta AQC}{\Delta QCP}$

বা, $\frac{\Delta AQB}{\Delta AQC} = \frac{\Delta QBP}{\Delta QCP} = \frac{BP}{PC}$; [সমীকরণ (i) হতে]

$\therefore \frac{\Delta AQB}{\Delta AQC} = \frac{BP}{PC}$

অর্থাৎ $\Delta AQB ঃ \Delta AQC = BP ঃ PC$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৫ ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

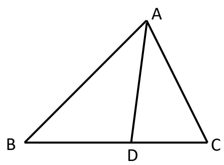
ক. তথ্যানুসারে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC. ৪

গ. ΔABC এর বহির্বৃত্ত অঙ্কন কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.১ এর উপপাদ্য-৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৮

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৫ এর সম্পাদ্য-৬ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৪৬

প্রশ্ন ▶৬ ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AP, BC কে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। PA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA কে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

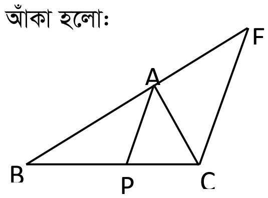
ক. উপরের তথ্য অনুসারে চিত্রটি অংঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BP : PC = BA : AC ৪

গ. BC এর সমান্তরাল কোন রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, BP : PC = BM : CN. ৪

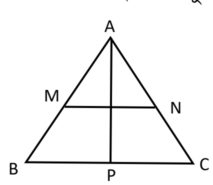
৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রটি আঁকা হলো:



খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.১ এর উপপাদ্য-৩ অনুরূপ।

গ



মনে করি, ΔABC এ $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AP। BC এর সমান্তরাল MN রেখা AB ও AC কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BP ∶ PC = BM ∶ CN.

প্রমাণ: ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AP $\therefore$ BP ∶ PC = AB ∶ AC ...... (i)	[ত্রিভুজের যে কোনো কোণের অন্তর্দ্বিখন্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে]
(২) আবার, MN ∥ BC $\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$ বা, $\frac{AM}{BM} + 1 = \frac{AN}{CN} + 1$	[ত্রিভুজের যে কোনো এক বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে] [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AM + BM}{BM} = \frac{AN + CN}{CN}$

বা, $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CN}$

বা, AB ∶ AC = BM ∶ CN .... (ii)

(৩) সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

BP ∶ PC = BM ∶ CN **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৭ ΔPQR-এর $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক QR কে S বিন্দুতে ছেদ করে।

ক. দেখাও যে, দুইটি ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, PQ : PR = QS : RS. ৪

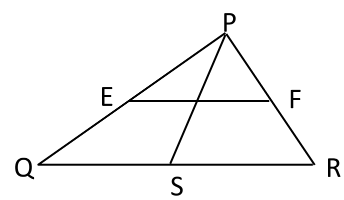
গ. QR-এর সমান্তরাল EF রেখাংশ PQ ও PR-কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, QS : RS = QE : RF. ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.১ এর জ্যামিতিক সমানুপাত এর ২ দ্রষ্টব্য।

খ সৃজনশীল ১(খ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ



মনে করি, ΔPQR এ $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক PS। QR এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ PQ এবং PR কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, QS : SR = EQ : FR

প্রমাণ : ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔPQR এর $\angle P$ এর সমদ্বিখণ্ডক PS $\therefore$ QS : SR = PQ : PR ....(i)	[ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।]

(২) এখন, EF ∥ QR

$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

বা, $\frac{PE}{EQ} + 1 = \frac{PF}{FR} + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{PE + EQ}{EQ} = \frac{PF + FR}{FR}$

বা, $\frac{PQ}{EQ} = \frac{PR}{FR}$

বা, $\frac{PQ}{PR} = \frac{EQ}{FR}$

বা, PQ : PR = EQ : FR ... ... (ii)

(৩) সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

QS : RS = QE : RF **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৮ ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

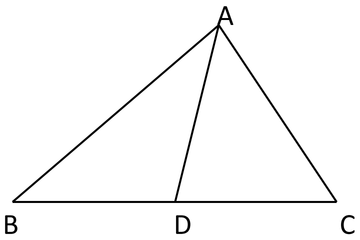
ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ উদ্দীপকের তথ্যের ভিত্তিতে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC. ৪

গ. যদি ত্রিভুজটির BC বাহুস্থ যে কোন বিন্দু X এবং AX রেখাস্থ P যে কোন বিন্দু হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\Delta APB : \Delta APC$ = BX : XC. ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

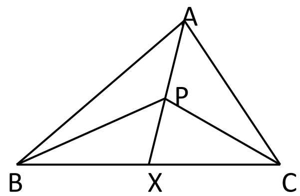
ক



ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.১ এর উপপাদ্য-৩ দ্রষ্টব্য।

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর BC বাহুস্থ যে কোনো বিন্দু X। A, X যোগ করি। AX রেখাস্থ P একটি বিন্দু। P, B এবং P, C যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta APB : \Delta APC = BX : XC$.

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থ**

(১) ΔPBX ও ΔPCX এর উচ্চতা সমান। [$\because$ একই শীর্ষ বিন্দু P এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত]

$\therefore \dfrac{\Delta PBX}{\Delta PCX} = \dfrac{BX}{XC}$ ... ... (i) [দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।]

(২) ΔAPB ও ΔPBX এর উচ্চতা সমান। [আবার, একই শীর্ষবিন্দু B এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত।]

$\therefore \dfrac{\Delta APB}{\Delta PBX} = \dfrac{AP}{PX}$ [একই কারণে]

অনুরূপভাবে, $\dfrac{\Delta APC}{\Delta PCX} = \dfrac{AP}{PX}$

$\therefore \dfrac{\Delta APB}{\Delta PBX} = \dfrac{\Delta APC}{\Delta PCX}$

বা, $\dfrac{\Delta APB}{\Delta APC} = \dfrac{\Delta PBX}{\Delta PCX} = \dfrac{BX}{XC}$; [সমীকরণ (i) হতে]

$\therefore \dfrac{\Delta APB}{\Delta APC} = \dfrac{BX}{XC}$

অর্থাৎ $\Delta APB : \Delta APC = BX : XC$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৯ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী যার $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

ক. সদৃশকোণী বহুভুজ ও সদৃশ বহুভুজ বলতে কী বোঝায়? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ ৪

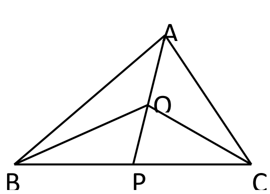
গ. ABC এর BC বাহুর উপর যে কোনো বিন্দু P এবং AP রেখার উপর যে কোনো বিন্দু O হলে প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AOB : Δক্ষেত্র AOC = BP : PC ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের ২৩০ পৃষ্ঠার ১৪.৩ অনুচ্ছেদ দেখ।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.২ এর উপপাদ্য ৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩১।

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর BC বাহুস্থ যে কোনো বিন্দু P। A, P যোগ করি। AP রেখাস্থ O একটি বিন্দু। O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta AOB : \Delta AOC = BP : PC$.

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থ**

(১) ΔOBP ও ΔOCP এর উচ্চতা সমান। [$\because$ একই শীর্ষ বিন্দু O এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত]

$\therefore \dfrac{\Delta OBP}{\Delta OCP} = \dfrac{BP}{PC}$ .... (i) [দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ভূমিদ্বয়ের অনুপাতের সমান।]

(২) ΔAOB ও ΔOBP এর উচ্চতা সমান। [আবার, একই শীর্ষবিন্দু B এবং ভূমি একই রেখায় অবস্থিত।]

$\therefore \dfrac{\Delta AOB}{\Delta OBP} = \dfrac{AO}{OP}$ [(i) এর অনুরূপে]

অনুরূপভাবে, $\dfrac{\Delta AOC}{\Delta OCP} = \dfrac{AO}{OP}$

$\therefore \dfrac{\Delta AOB}{\Delta OBP} = \dfrac{\Delta AOC}{\Delta OCP}$

বা, $\dfrac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \dfrac{\Delta OBP}{\Delta OCP} = \dfrac{BP}{PC}$ [সমীকরণ (i) হতে]

$\therefore \dfrac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \dfrac{BP}{PC}$

অর্থাৎ $\Delta AOB : \Delta AOC = BP : PC$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১০ দুইটি সদৃশকোণী ΔABC ও ΔDEF এর BC এবং EF এর উপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব।

ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AG : DH = AB : DE$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$ ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ১৪.২, পৃষ্ঠা- ২৩৩, উপপাদ্য-৮ দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১১ ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

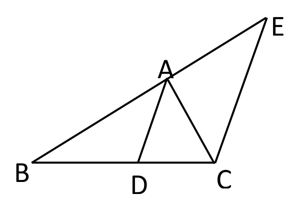
ক. তথ্য অনুসারে চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC. ৪

গ. BC এর সমান্তরাল রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

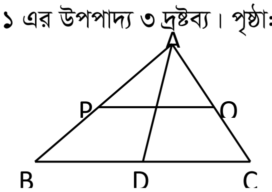
ক



ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ১৪.১ এর উপপাদ্য ৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা: ২২৮

গ



দেওয়া আছে, BC এর সমান্তরাল রেখা AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BP : CQ.

প্রমাণ: আমরা জানি, ত্রিভুজের যে কোন বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

ΔABC এর $PQ \parallel BC$.

$\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$

বা, $\frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$ ... ... (i)

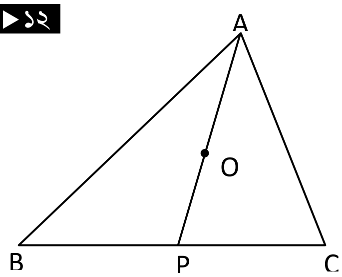
আবার, AD রেখা $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ... ... (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{CQ}$

অর্থাৎ, BD ঃ DC = BP ঃ CQ. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১২



চিত্রে, AB = 6 cm, AC = 4 cm, CP = 2 cm এবং O, AP এর উপর যে কোনো বিন্দু। AP রেখা, ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ক. ΔABP ও ΔACP সদৃশকোণী কি-না যুক্তিসহ লিখ। ২

খ. BP এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\Delta AOB : \Delta AOC = 3 : 2$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন ৩নং এর সমাধান অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶১৩ ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

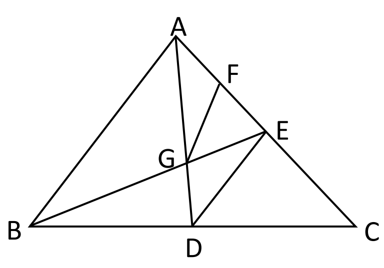
ক. উপরের তথ্যানুসারে চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AC = 6 EF ৪

গ. D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ৪

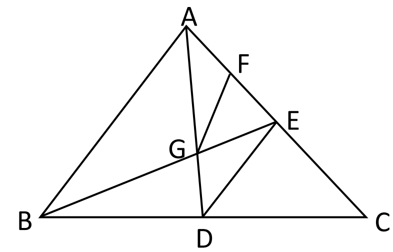
১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। D, E যোগ করি। G বিন্দু দিয়ে GF || DE আঁকি। GF, AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AC = 6EF.

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔADE-এ GF || DE,

$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{AG}{GD}$ [ত্রিভুজের কোনো এক বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অপর দুই বাহুকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{AF}{FE} = \frac{2}{1}$ [□ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় ছেদ বিন্দুতে 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয় $\therefore$ AG ঃ GD = 2 ঃ 1]

বা, $\frac{AF}{FE} + 1 = 2 + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AF + FE}{FE} = 3$

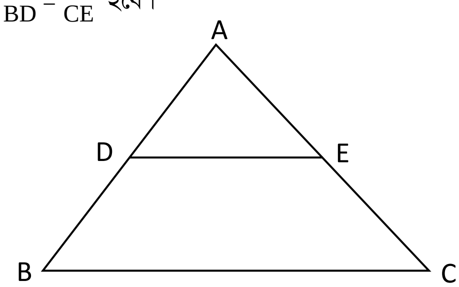
বা, AE = 3EF

(২) $AE = \frac{1}{2}AC$ [$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\frac{1}{2}AC = 3EF$ [ধাপ (১) হতে]

বা, AC = 6EF $\therefore$ AC = 6EF. **(প্রমাণিত)**

গ ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে তবে $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ ।

প্রমাণ: ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে]

বা, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ [বিপরীতকরণ করে]

এখন, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{DB + AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE}$

বা, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

(২) আবার, $\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC}$

বা, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$

$\therefore$ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৪ ABC এবং PQR দুইটি ত্রিভুজ।

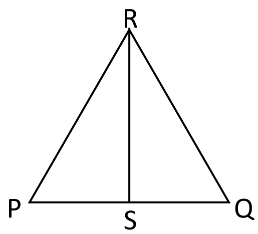
ক. মধ্যমা কি? PQR ত্রিভুজের মধ্যমা RS আঁক। ২

খ. 'ক' এর চিত্র হতে প্রমাণ কর যে, $PR^2 + QR^2 = 2(PS^2 + RS^2)$ ৪

গ. ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হলে প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta PQR = AC^2 : PR^2$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

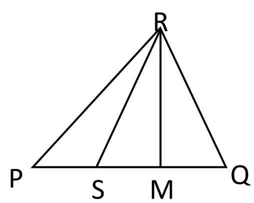
ক **মধ্যমা :** ত্রিভুজের কোন শীর্ষবিন্দু এবং বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু যোগ করলে যে রেখা পাওয়া যায় তাকে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত মধ্যমা বলে।



ΔPQR-এ S, PQ এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ RS, ΔPQR এর একটি মধ্যমা।

খ



মনে করি, ΔRPQ এর $RP > RQ$ এবং S, PQ এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $RP^2 + RQ^2 = 2(RS^2 + PS^2)$

অঙ্কন : R বিন্দু থেকে PQ এর উপর RM লম্ব টানি।

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔRSM-এ $\angle RMS = 90°$ এবং অতিভুজ RS [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

$\therefore$ $RS^2 = RM^2 + SM^2$

(2) ΔRPM-এ $\angle RMP = 90°$ এবং অতিভুজ RP [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

$\therefore$ $RP^2 = RM^2 + PM^2$
$= RM^2 + (PS + SM)^2$
$= RM^2 + PS^2 + 2PS.SM + SM^2$
$= RM^2 + SM^2 + PS^2 + 2PS.SM$

$\therefore$ $RP^2 = RS^2 + PS^2 + 2PS.SM$ [ধাপ (১) থেকে]

(৩) ΔRQM এ $\angle RMQ = 90°$ এবং অতিভুজ RQ

$\therefore$ $RQ^2 = RM^2 + MQ^2$
$= RM^2 + (SQ - SM)^2$
$= RM^2 + SQ^2 - 2.SQ.SM + SM^2$
$= RM^2 + SM^2 + SQ^2 - 2SQ.SM$
$= RS^2 + SQ^2 - 2SQ.SM$ [ধাপ (১) থেকে]

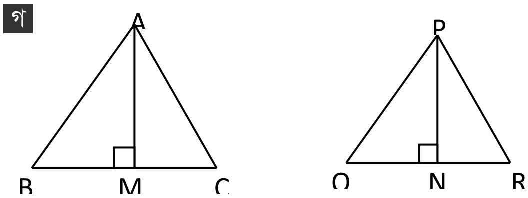
$RQ^2 = RS^2 + PS^2 - 2PS.SM$

(৪) ধাপ (২) ও ধাপ (৩) হতে

$RP^2 + RQ^2$
$= RS^2 + PS^2 + 2PS.SM + RS^2 + PS^2 - 2PS.SM$
$= 2RS^2 + 2PS^2$
$= 2(RS^2 + PS^2)$

$\therefore$ $RP^2 + RQ^2 = 2(RS^2 + PS^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ও ΔPQR সদৃশ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{AC^2}{PR^2}$

অঙ্কন : $AM \perp BC$ এবং $PN \perp QR$ আঁকি।

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) $\Delta ABC = \frac{1}{2} BC.AM$ এবং $\Delta PQR = \frac{1}{2} QR.PN$.

[ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

(২) আবার, ΔABC ও ΔPQR সদৃশ,

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$.

(৩) $\frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2}BC.AM}{\frac{1}{2}QR.PN} = \frac{BC}{QR} \cdot \frac{AM}{PN}$ [ধাপ (১) হতে]

(৪) আবার, ΔABM ও ΔPQN-এ,

$\angle ABM = \angle PQN$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলো সমান]

এবং $\angle AMB = \angle PNQ$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore$ ΔABM ও ΔPQN সদৃশ।

$\therefore \frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$

(৫) অতএব, $\frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{BC}{QR} \cdot \frac{AM}{PN} = \frac{BC}{QR} \cdot \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2}$ [ধাপ (১) হতে]

(৬) আবার, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{AC^2}{PR^2}$ $\therefore$ $\Delta ABC : \Delta PQR = AC^2 : PR^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৫ ΔABC ও ΔDEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং $AM \perp BC$ ও $DN \perp EF$.

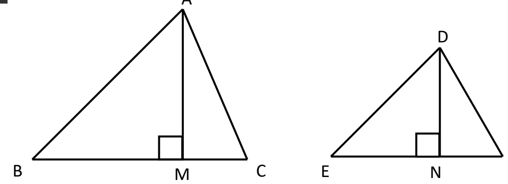
ক. উপরোক্ত তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AM : DN = AB : DE$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$. ৪

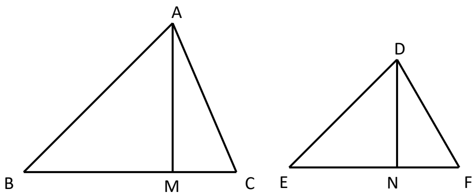
১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশ এবং $AM \perp BC$ ও $DN \perp EF$.

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ও ΔDEF দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ। AM ও DN যথাক্রমে তাদের উচ্চতা। প্রমাণ করতে হবে যে, AM ঃ DN = AB ঃ DE.

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) যেহেতু ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

(২) আবার, ΔABM ও ΔDEN-এ, $\angle ABM = \angle DEN$ [কল্পনা]

$\angle AMB = \angle DNE =$ এক সমকোণ

এবং $\angle BAM = \angle EDN$; [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore \Delta ABM$ ও ΔDEN সদৃশকোণী ও সদৃশ।

$\therefore \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE}$ [সদৃশ কোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

$\therefore$ AM ঃ DN = AB ঃ DE **(প্রমাণিত)**

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবই অনুশীলনী-১৪.২ এর উপপাদ্য-৮ দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৬ ΔABC ও ΔPQR দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ।

ক. একটি রম্বসের প্রতিসাম্য রেখা ও একটি বৃত্তের প্রতিসাম্য রেখা কয়টি? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ ৪

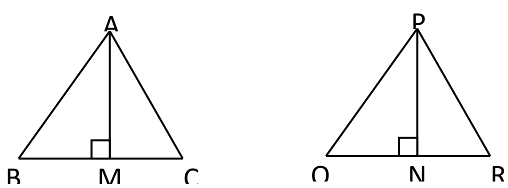
গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$ ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক রম্বসের প্রতিসাম্য রেখা 2টি।
বৃত্তের প্রতিসাম্য রেখা অসংখ্যা।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবই এর অনুশীলনী-১৪.২ এর উপপাদ্য-৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা- **২৩১**

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC ও ΔPQR সদৃশ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$.

অঙ্কন : $AM \perp BC$ এবং $PN \perp QR$ আঁকি।

$\Delta ABC = \frac{1}{2} BC.AM$ এবং $\Delta PQR = \frac{1}{2} QR.PN$.

আবার, ΔABC ও ΔPQR সদৃশ,

$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$.

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2}BC.AM}{\frac{1}{2}QR.PN} = \frac{BC}{QR} . \frac{AM}{PN}$$

আবার, ΔABM ও ΔPQN-এ,

$\angle ABM = \angle PQN$ এবং $\angle AMB = \angle PNQ =$ এক সমকোণ।

$\therefore \quad \Delta ABM$ ও ΔPQN সদৃশ।

$\therefore \quad \frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ ……… (i)

$\therefore \quad \frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{BC}{QR} . \frac{AM}{PN} = \frac{BC}{QR} . \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2}$ [(i) হতে]

আবার, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore \quad \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$ [বর্গ করে]

$\therefore \quad \frac{\Delta ABC}{\Delta PQR} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৭ ABC এবং DEF দুইটি ত্রিভুজ।

ক. ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হওয়ার শর্ত লিখ? ২

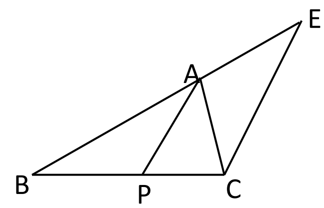
খ. $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AP রেখা BC কে P বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BP : CP = AB : AC ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হলে প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হবার শর্ত হলো ΔABC এর কোণগুলো ধারাবাহিকভাবে ΔDEF এর কোণগুলোর সমান হতে হবে।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক AP, BC বাহুকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PA এর সমান্তরাল রেখাংশ CE, বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BP ঃ PC = BA ঃ AC.

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) এখানে, $PA \parallel CE$ [অঙ্কন]

$\therefore \angle BAP = \angle AEC$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle CAP = \angle ACE$ [একান্তর কোণ]

(২) কিন্তু $\angle BAP = \angle CAP$; [স্বীকার]

$\therefore \angle AEC = \angle ACE \;\; \therefore AC = AE$

(৩) আবার যেহেতু ΔBCE-এ $PA \parallel CE$

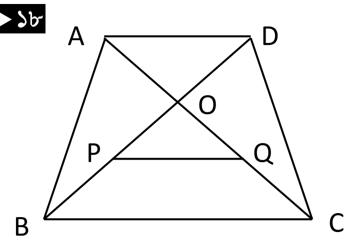
$\therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AE}$

$\therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC}$ [$\because AE = AC$]

$\therefore$ BP ঃ PC = BA ঃ AC. **(প্রমাণিত)**

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ১৪.২ এর উপপাদ্য ৮ দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৮



চিত্রে, $AD \parallel PQ \parallel BC$.

ক. প্রমাণ কর যে, AO . BO = CO.DO। ২

খ. যদি $\angle BOC$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে M বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $BM : MC = BP : CQ$। ৪

গ. যদি E ও F যথাক্রমে AB ও DC এর মধ্যবিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC + AD = 2EF$ [ভেক্টর ব্যবহার করা যাবে না।] ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔBOC ও ΔAOD-এ

$\angle OBC$ = একান্তর $\angle ODA$,

$\angle OCB$ = একান্তর $\angle OAD$

এবং $\angle BOC$ = বিপ্রতীপ $\angle AOD$.

সুতরাং ΔBOC ও ΔAOD সদৃশকোণী এবং সদৃশ।

$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$ [দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক]

$\therefore AO.BO = CO.DO$ **(প্রমাণিত)**

খ দেওয়া আছে, $\angle BOC$ এর সমদ্বিখণ্ডক OM, BC কে M বিন্দুতে ছেদ করে এবং BC এর সমান্তরাল রেখা OB ও OC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

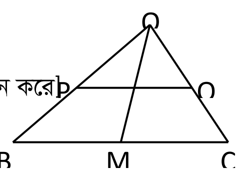
প্রমাণ করতে হবে যে, BM ঃ MC = BP ঃ CQ.

প্রমাণঃ আমরা জানি, ত্রিভুজের যে কোন বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

ΔOBC এর $PQ \parallel BC$.

$\frac{OP}{BP} = \frac{OQ}{CQ}$

বা, $\frac{OP + BP}{BP} = \frac{OQ + CQ}{CQ}$ [যোজন করে]



বা, $\frac{OB}{BP} = \frac{OC}{CQ}$

বা, $\frac{OB}{OC} = \frac{BP}{CQ}$ ... ... (i)

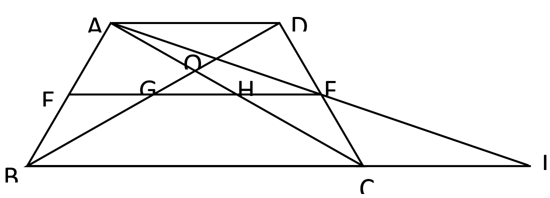
আবার, OM রেখা $\angle BOC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{BM}{MC}$ ... ... (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{BM}{MC} = \frac{BP}{CQ}$

অর্থাৎ, BM ঃ MC = BP ঃ CQ. **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচনঃ এখানে, ABCD ট্রাপিজিয়ামের BC ও AD সমান্তরাল বাহু এবং E ও F যথাক্রমে AB ও DC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC + AD = 2EF$.

অঙ্কনঃ E, F যোগ করি যা AC ও BD কর্ণকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, A, F যোগ করে I পর্যন্ত বর্ধিত করি যা BC এর বর্ধিতাংশকে I বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ

ধাপ	যথার্থতা
(১) এখানে, ABCD ট্রাপিজিয়াম যার $BC \parallel AD$ $\therefore \Delta ADF$ এবং ΔFCI এ	
$DF = FC$	[F, DC এর মধ্যবিন্দু]
$\angle DFA = \angle CFI$	[বিপ্রতীপ কোণ]
$\angle FDA = \angle ICF$	[একান্তর কোণ]
$\therefore \Delta ADF \cong \Delta FCI$	
(২) সুতরাং, $AF = FI$	
$\therefore$ F, AI এর মধ্যবিন্দু	[AF = FI]
$\therefore$ H, AC এর মধ্যবিন্দু	[দেওয়া আছে] [□ ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্য তার অর্ধেক]
(৩) এখন ΔABC-এ E ও H যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। $\therefore EH = \frac{1}{2} BC$	
(৪) আবার ΔADC-এ $HF = \frac{1}{2} AD$	
বা, $EF - EH = \frac{1}{2} AD$	[□ $EF = EH + HF$]
বা, $EF - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD$	
বা, $EF = \frac{1}{2} (BC + AD)$	
$\therefore BC + AD = 2EF$. **(প্রমাণিত)**	

প্রশ্ন ▶১৯ ΔABC-এ $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। DA-এর সমান্তরাল করে CE রেখাংশ আঁকা হলে, তা BA-এর বর্ধিতাংশকে ছেদ করে।

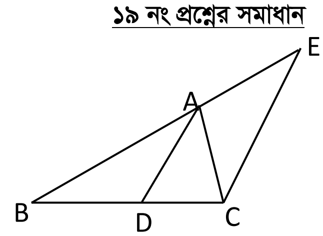
ক. চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ করো যে, $BD : DC = BA : AC$ ৪

গ. BC-এর সমান্তরাল একটি রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BP : CQ$ ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের ১৪.১ এর উপপাদ্য ৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২২৮

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ১১(গ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶২০ ABC ও DEF ত্রিভুজে $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

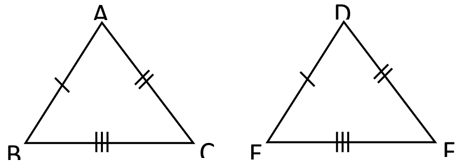
ক. চিত্র এঁকে অনুরূপ বাহুগুলো উল্লেখ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক। ৪

গ. যদি BC অনুরূপ EF হয়, তবে প্রমান কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



AB অনুরূপ DE, AC অনুরূপ DF, BC অনুরূপ EF।

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.২ এর উপপাদ্য-৫ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩১

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.২ এর উপপাদ্য-৮ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৩৩