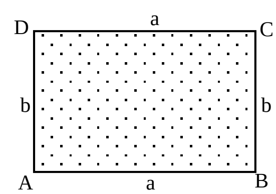
SSC Math

অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট

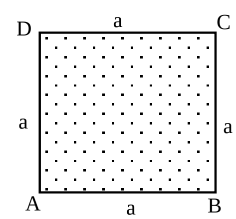
অধ্যায়-১৫: ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :** প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য জ্যামিতিক সূত্র ও উপপাদ্য ব্যবহার করা হয়। জটিল কোনো জ্যামিতিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত জ্যামিতিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র মনে রাখা আবশ্যক। যথা :
  ১। আয়তক্ষেত্র; ২। বর্গক্ষেত্র; ৩। ত্রিভুজ; ৪। সামান্তরিক; ৫। ট্রাপিজিয়াম।
- **ক্ষেত্রফলের একক :** ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য এক সেন্টিমিটার হলে, তার ক্ষেত্রফল হবে এক বর্গ সেন্টিমিটার।
- **আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :**
  চিত্রে, ABCD আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, AB = a একক (যথা, মিটার)
  প্রস্থ, BC = b একক (যথা, মিটার) হলে,
  $\therefore$ ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ab বর্গ একক। (যথা, বর্গমিটার)



- **বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল**
  চিত্রে ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য
  AB = BC = CD = DA = a একক (যথা, মিটার) হলে,
  $\therefore$ ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক (যথা, বর্গমিটার)



সৃজনশীল প্রশ্ন:

প্রশ্ন ▶১ *[ঢা. বো. ১৭]*

ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E

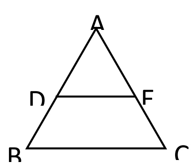
ক. তথ্যানুসারে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, DE || BC. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)।৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

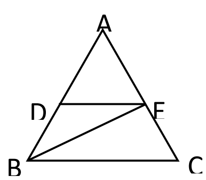
ক



চিত্রে ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.৩ এর উপপাদ্য-১৫ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১১৭

গ



মনে করি, ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। D, E এবং B, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে,

Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABE এ DE, AB এর মধ্যমা [∵ DE মধ্যমা ΔABE কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABE = 2 (Δ ক্ষেত্র BDE)

(২) ΔABC এ BE, AC এর মধ্যমা
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABC = 2 (Δ ক্ষেত্র ABE)
বা, Δক্ষেত্র ABC = 2 [2(Δ ক্ষেত্র BDE)] [ধাপ-১ থেকে]
বা, Δ ক্ষেত্র ABC = 4 (Δ ক্ষেত্র BDE)
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ΔBDE = $\frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২ *[দি. বো. ১৭]*

সমকোণী ΔPQR এর $\angle$Q = এক সমকোণ এবং ΔABC সমবাহু যার AD $\perp$ BC.

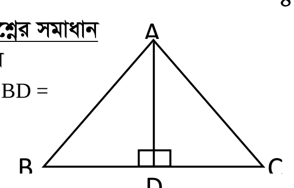
ক. দেখাও যে, BD = CD ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $4AD^2 = 3AB^2$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। যার AD$\perp$BC। প্রমান করতে হবে যে, BD = CD



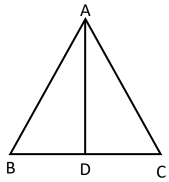
প্রমাণ: ধাপ **যথার্থতা**

(১) AD $\perp$ BC হওয়ায়
$\angle$ADB = $\angle$ADC = 1 সমকোণ

(২) এখন ΔABD ও ΔADC সমকোণী
ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু সমান]
AD সাধারণ বাহু
সুতরাং, ΔABD $\cong$ ΔADC
$\therefore$ BD = CD (প্রমাণিত)

খ **গণিত** পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ১৫ এর উপপাদ্য-৪ দ্রষ্টব্য।

গ



দেওয়া আছে, ΔABC-সমবাহু

অর্থাৎ $AB = BC = CA$

এবং AD, BC এর ওপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$

প্রমাণঃ ধাপ	**যথার্থতা**
(১) $AD \perp BC$	[দেওয়া আছে]
$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90°$.	
(২) এখন, সমকোণী ΔABD এবং সমকোণী ΔACD-এ	
অতিভুজ AB = অতিভুজ AC	[$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]
এবং $AD = AD$	[$\because$ সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$	[$\because$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু সমান]
সুতরাং, $BD = CD$	
$\therefore BC = 2BD$	
(৩) আবার, সমকোণী ΔABD-এ $\angle ADB = 90°$	
এবং অতিভুজ = AB.	
(৪) পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,	
$AB^2 = AD^2 + BD^2$	
বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$	
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - 4BD^2$	[উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - (2BD)^2$	
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - BC^2$	[$\because BC = 2BD$]
বা, $4AD^2 = 4AB^2 - AB^2$	[$\because AB = BC$]
$\therefore 4AD^2 = 3AB^2$. **(প্রমাণিত)**	

প্রশ্ন ▶৩ *[চ. বো. ১৭]*

ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ।

ক. পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ। ২

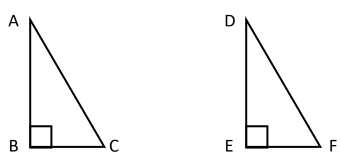
খ. ΔABC এ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ হলে প্রমাণ করো যে, $\angle B$ = ১ সমকোণ। ৪

গ. যদি $AB = BC$ হয় এবং P, AC এর উপরস্থ কোনো বিন্দু হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে, $PA^2 + PC^2 = 2PB^2$. ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্যঃ** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

খ



মনে করি, ΔABC-এ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle B$ = এক সমকোণ

অঙ্কন : DEF একটি ত্রিভুজ আঁকি, যার $\angle E$ = এক সমকোণ

$DE = AB$ এবং $EF = BC$

প্রমাণ : যেহেতু $\angle E$ = এক সমকোণ

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$DF^2 = DE^2 + EF^2$

বা, $DF^2 = AB^2 + BC^2$ [$\because$ অঙ্কন অনুসারে, $DE = AB$

বা, $DF^2 = AC^2$ এবং $EF = BC$]

$\therefore DF = AC$

এখন ΔABC এবং ΔDEF-এ

$AB = DE$ [অঙ্কন অনুসারে]

$BC = EF$ [একই কারণে]

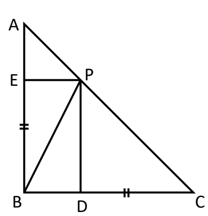
এবং $AC = DF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\therefore \angle B = \angle E$ [অঙ্কন অনুসারে]

কিন্তু $\angle E$ = এক সমকোণ

$\therefore \angle B$ = এক সমকোণ। **(প্রমাণিত)**



গ মনে করি, সমদ্বিবাহু সমকোণী ΔBAC-এর $BA = BC$ এবং অতিভুজ AC। P, AC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। P, B যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে,

$PA^2 + PC^2 = 2PB^2$.

অঙ্কনঃ P বিন্দু থেকে BA এবং BC বাহুর ওপর যথাক্রমে PE এবং PD লম্ব টানি।

প্রমাণ : ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔBAC-এর, $\angle B = 90°$	
এবং $\angle A = \angle C = 45°$	[$\because BC = BA$]
এখন, ΔPDC-এর, $\angle D = 90°$	[$\because PD \perp BC$]
সুতরাং, $\angle DPC = \angle DCP = 45°$	
$\therefore CD = PD$	
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়,	
PAE সমকোণী ত্রিভুজে, $PE = AE$	
(২) PDC সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায়	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$PC^2 = PD^2 + CD^2$	
$= PD^2 + PD^2$	[$\because PD = CD$]
$\therefore PC^2 = 2PD^2$ ... ... (i)	
(৩) PAE সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,	
$PA^2 = AE^2 + PE^2$	
$= PE^2 + PE^2$	[$\because AE = PE$]
$\therefore PA^2 = 2PE^2$ ... ... (ii)	
(৪) (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,	
$PC^2 + PA^2 = 2PD^2 + 2PE^2$	
$= 2(PD^2 + PE^2)$	
আবার, BDPE একটি আয়ত।	[$\angle E = \angle B = \angle D$ = এক সমকোণ]
$\therefore PE = BD$	[$\because$ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]
$\therefore PC^2 + PA^2 = 2(PD^2 + BD^2)$ ... ... (iii)	
(৫) BDP সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়,	
$PB^2 = PD^2 + BD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
(৬) (iii) নং হতে পাই, $PC^2 + PA^2 = 2PB^2$	
$\therefore PA^2 + PC^2 = 2PB^2$ **(প্রমাণিত)**	

প্রশ্ন ▶৪ *[য. বো. ১৭]*

ΔABC এ $\angle C$ = 1 সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$.]

ক. $\angle A$ = ? এবং $\angle B$ = ? ২

খ. প্রমাণ করো যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. ৪

গ. প্রমাণ করো যে, ΔABC এর যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য এর তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, ΔABC এ $\angle C$ = 1 সমকোণ = 90°

এবং $\angle B = 2\angle A$

আমরা জানি,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\angle A + 2\angle A + 90° = 180°$

বা, $3\angle A = 90°$

$\therefore \angle A = 30°$

$\therefore \angle B = 2 \times 30° = 60°$ **(Ans.)**

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-৪ (পীথাগোরাসের উপপাদ্য) দ্রষ্টব্য।

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.৩ এর উপপাদ্য-১৫ দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৫ *[চ. বো. ১৬]*

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। যেখানে $\angle B$ = এক সমকোণ।

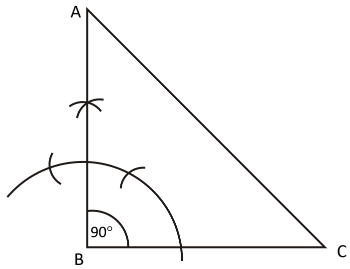
ক. উপরের তথ্যের আলোকে ত্রিভুজটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$। ৪

গ. ABC ত্রিভুজে $AB = BC$ এবং P অতিভুজ AC এর উপরস্থ যে কোনো বিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $PA^2 + PC^2 = 2PB^2$। ৪

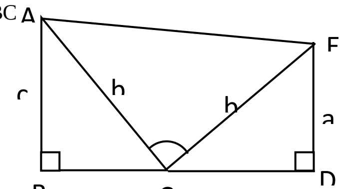
৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



প্রদত্ত উপাত্ত অনুযায়ী ΔABC আঁকা হলো যার $\angle B$ = এক সমকোণ।

খ **বিশেষ নির্বাচন:** মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ, $AC = b$, $BC = a$ ও $AB = c$. প্রমাণ করতে হবে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ অর্থাৎ, $b^2 = c^2 + a^2$



অঙ্কন : BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $CD = AB = c$ হয়। D বিন্দুতে BD রেখাংশের ওপর লম্বভাবে DE রেখাংশ আঁকি যেন $DE = BC = a$ হয়। A, E ও C, E যোগ করি।

প্রমাণ : **ধাপ** — **যথার্থতা**

এখন, ΔBCA ও ΔDEC এ

(১) $BC = DE = a$, $AB = DC = c$ [অঙ্কন অনুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle CBA$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDC$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]
$\therefore \Delta BCA \cong \Delta DEC$
$\therefore AC = EC = b$ এবং $\angle CAB = \angle ECD$

(২) এখন যেহেতু $AB \perp BD$ এবং $ED \perp BD$,
সুতরাং $AB \parallel ED$.
অতএব, ABDE একটি ট্রাপিজিয়াম।
আবার, $\angle BCA + \angle CAB$ = এক সমকোণ।
$\therefore \angle BCA + \angle ECD$ = এক সমকোণ। [ধাপ-১ থেকে]
কিন্তু $\angle BCA + \angle ACE + \angle ECD$ = দুই সমকোণ।
বা, $\angle ACE$ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।
$\therefore \angle ACE$ = এক সমকোণ,

(৩) কিন্তু, ABDE ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল + Δক্ষেত্র ACE এর ক্ষেত্রফল + Δক্ষেত্র ECD এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore \frac{1}{2}BD(AB + DE) = \frac{1}{2} \times AB \times BC + \frac{1}{2} \times AC \times CE + \frac{1}{2} \times CD \times DE$

বা, $\frac{1}{2}(BC + CD)(AB + DE) = \frac{1}{2} \times AB \times BC + \frac{1}{2} \times AC \times CE + \frac{1}{2} \times CD \times DE$ [$\because BD = BC + CD$]

বা, $\frac{1}{2}(a + c)(c + a) = \frac{1}{2}ca + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ac$

বা, $\frac{1}{2}(c + a)^2 = ca + \frac{1}{2}b^2$

বা, $\frac{1}{2}(c^2 + 2ca + a^2) = ca + \frac{1}{2}b^2$

বা, $\frac{1}{2}c^2 + ca + \frac{1}{2}a^2 = ca + \frac{1}{2}b^2$

বা, $\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}b^2$

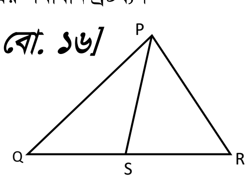
বা, $c^2 + a^2 = b^2$

বা, $b^2 = c^2 + a^2$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রশ্ন ৩(গ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶৬ ***[ব. বো. ১৬]***



চিত্রে $PQ > PR$ এবং S, QR এর মধ্যবিন্দু।

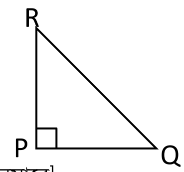
ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle PSQ$ স্থূলকোণ। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$. ৪

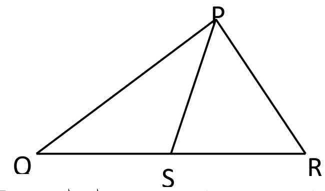
৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **পীথাগোরাসের উপপাদ্য:** সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



PQR সমকোণী ত্রিভুজে,
$PQ^2 + PR^2 = QR^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

খ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR-এ $PQ > PR$ এবং S, QR এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PSQ$ স্থূলকোণ।

প্রমাণ: ধাপ — **যথার্থতা**

(১) ΔPQR এ $PQ > PR$ [দেওয়া আছে]
$\therefore \angle PRQ > \angle PQR$ [ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর]

(২) এখানে $\angle PRQ = \angle PRS$
এবং $\angle PQR = \angle PQS$
$\therefore \angle PRS > \angle PQS$ [ধাপ (১) থেকে]

(৩) ΔPQS ও ΔPSR এর মধ্যে
$QS = SR$ [S, QR এর মধ্যবিন্দু]
$\therefore \angle SPR > \angle QPS$ [QS ও SR বাহুদ্বয় QR সমান্তরাল রেখার উপর অবস্থিত এবং PQ > PR]

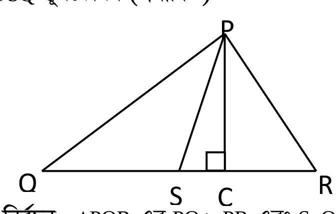
(৪) ΔPQS এর বহি:স্থ
$\angle PSR = \angle PQS + \angle QPS$ [কোনো ত্রিভুজের বহি:স্থ কোণ তার বিপরীত অন্ত:স্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

(৫) আবার ΔPSR এর বহি:স্থ
$\angle PSQ = \angle SPR + \angle PRS$ [একই কারণে]

(৬) ধাপ (২) ও ধাপ (৩) যোগ করে
$\angle PRS + \angle SPR > \angle PQS + \angle QPS$
$\angle PSQ > \angle PSR$

(৭) $\angle PSQ + \angle PSR = 180°$ [সরলকোণ]
$\therefore \angle PSQ > 90°$ [ধাপ (৬) থেকে]
$\therefore \angle PSQ$ স্থূলকোণ। **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন : ΔPQR এর $PQ > PR$ এবং S, QR এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে $PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$

অঙ্কন: P বিন্দু থেকে QR এর উপর PC লম্ব টানি।

প্রমাণ : **ধাপ** — **যথার্থতা**

(১) ΔPSC-এ $\angle PCS = 90°$ এবং অতিভুজ PS [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]
$\therefore PS^2 = PC^2 + SC^2$

(২) ΔPQC এ $\angle PCQ = 90°$ এবং অতিভুজ PQ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]
$\therefore PQ^2 = PC^2 + QC^2$
$= PC^2 + (QS + SC)^2$
$= PC^2 + QS^2 + 2QS.SC + SC^2$
$= PC^2 + SC^2 + QS^2 + 2QS.SC$
$\therefore PQ^2 = PS^2 + QS^2 + 2QS.SC$ [ধাপ (১) থেকে]

(৩) ΔPRC-এ $\angle PCR = 90°$ এবং অতিভুজ PR
$\therefore PR^2 = PC^2 + CR^2$
$= PC^2 + (SR - SC)^2$
$= PC^2 + SR^2 - 2.SR.SC + SC^2$
$= PC^2 + SC^2 + SR^2 - 2SR.SC$
$= PS^2 + SR^2 - 2SR.SC$ [ধাপ (১) থেকে]
$PR^2 = PS^2 + QS^2 - 2QS.SC$

(৪) ধাপ (২) ও ধাপ (৩) হতে পাই,

$PQ^2 + PR^2$
$= PS^2 + QS^2 + 2QS.SC + PS^2 + QS^2 - 2QS.SC$
$= 2PS^2 + 2QS^2$
$= 2(PS^2 + QS^2)$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$ **(প্রমাণিত)**

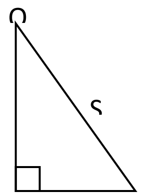
প্রশ্ন ▶ ৭ ***[রা. বো. ১৫]***

ΔPQR-এ $\angle P$ = এক সমকোণ এবং QR-এর মধ্যবিন্দু S.

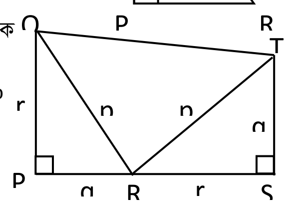
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী চিত্রটি অঙ্কন কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $QR^2 = PQ^2 + PR^2$. ৪
গ. দেখাও যে, PS এর দৈর্ঘ্য QR এর অর্ধেক। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে, PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle P = 90°$, এবং অতিভুজ QR এর মধ্যবিন্দু S.



খ দেওয়া আছে, ΔPQR এর $\angle P$ = এক সমকোণ।
ধরি, PQ = r, PR = q এবং QR = p
প্রমাণ করতে হবে যে,
$QR^2 = PQ^2 + PR^2$



PR বাহুকে S পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি, যেন RS = PQ = r হয়। S বিন্দুতে TS ⊥ PS আঁকি যেন TS = PR = q হয়। R, T ও Q, T যোগ করি।

প্রমাণ : ΔPQR ও ΔRST ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,
PQ = RS, PR = TS এবং
অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle RPQ$ = অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle RST$ = এক সমকোণ।
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta RST$
$\therefore \angle PQR = \angle TRS$ এবং RT = QR = P
এখন, $\angle PQR + \angle PRQ$ = এক সমকোণ
$\therefore \angle TRS + \angle PRQ$ = এক সমকোণ
কিন্তু, $\angle PRQ + \angle QRT + \angle TRS$ = দুই সমকোণ
$\therefore \angle QRT$ = এক সমকোণ
আবার, ট্রাপিজিয়াম PQTS এর ক্ষেত্রফল = ΔPQR এর ক্ষেত্রফল + ΔQRT এর ক্ষেত্রফল + ΔRST এর ক্ষেত্রফল

বা, $\frac{1}{2}(PQ + TS)PS = \frac{1}{2} \times PR \times PQ + \frac{1}{2} \times QR \times RT + \frac{1}{2} \times RS \times TS$

বা, $\frac{1}{2}(r + q)(q + r) = \frac{1}{2}qr + \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}qr$

বা, $\frac{1}{2}(q + r)^2 = \frac{1}{2}(qr + p^2 + qr)$

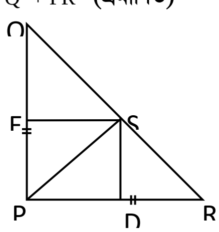
বা, $q^2 + 2qr + r^2 = 2qr + p^2$

বা, $q^2 + r^2 = p^2$

বা, $p^2 = r^2 + q^2$

$\therefore QR^2 = PQ^2 + PR^2$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔPQR-এ $\angle P$ এক সমকোণ এবং S, QR এর মধ্যবিন্দু। P, S যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PS = \frac{1}{2}QR$

অঙ্কন: PQ এর মধ্যবিন্দু E নিই এবং S, E যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

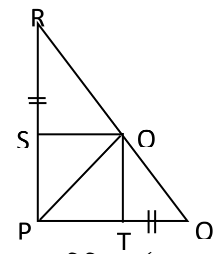
(১) ΔPQR-এ E ও S যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore ES \parallel PR$
$\therefore \angle QES$ = অনুরূপ $\angle EPR$ = এক সমকোণ।
এবং $\angle SEP$ = অনুরূপ $\angle EPR$ = এক সমকোণ

(২) এখন ΔQES ও ΔPES-এ
QE = PE [∵ E, PQ এর মধ্যবিন্দু]
ES = ES [∵ সাধারণ বাহু]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle QES$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle SEP$ [ধাপ (১) থেকে প্রত্যেকে এক সমকোণ]
$\therefore \Delta QES \cong \Delta PES$
$\therefore QS = PS$

(৩) কিন্তু $QS = \frac{1}{2}QR$

$\therefore PS = \frac{1}{2}QR$ **(দেখানো হলো)**

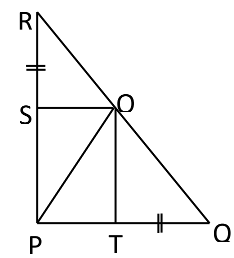
প্রশ্ন ▶ ৮ ***[চ. বো. ১৫]***



ক. উপরোক্ত চিত্রের জ্যামিতিক বর্ণনা দাও। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $OQ^2 + OR^2 = 2OP^2$ ৪
গ. PR = 4.4 সে.মি., হলে দেখাও যে, Δ-ক্ষেত্র PQR = 2 × Δ-ক্ষেত্র POQ. ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, PQR একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ যার PQ = PR এবং RQ অতিভুজ।O, RQ এর ওপর যেকোনো বিন্দু। OT ⊥ PQ এবং OS ⊥ PR.



খ প্রশ্ন ৩(গ) এর সমাধান অনুরূপ।

গ দেওয়া আছে, PR = 4.4 সে.মি.
$\therefore$ PQ = PR = 4.4 সে.মি.
এখন, যেহেতু OS ⊥ PR এবং OT ⊥ PQ এবং O, RQ এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OT = SP = \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2} \times 4.4 = 2.2$ সে.মি.

$\therefore \Delta POQ$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times PQ \times OT$
$= \frac{1}{2} \times 4.4 \times 2.2$
= 4.84 বর্গ সে.মি.

ΔPQR এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times PQ \times PR$
$= \frac{1}{2} \times 4.4 \times 4.4$
= 9.68
= 2 × 4.84 সে.মি.

ক্ষেত্র ΔPQR = 2 × Δ-ক্ষেত্র POQ **(দেখানো হলো)**

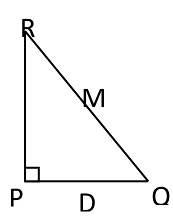
প্রশ্ন ▶ ৯ ***[ব. বো. ১৫]***

PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ QR-এর উপর M যে কোনো বিন্দু। D, PQ-এর উপর একটি বিন্দু।

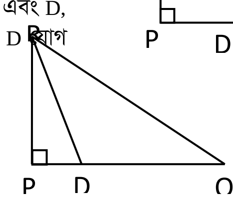
ক. তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২
খ. দেখাও যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$. ৪
গ. প্রমাণ কর যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$. ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে, PQR একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $\angle P = 90°$, অতিভুজ QR এর উপর M যেকোনো একটি বিন্দু। D, PQ এর উপরস্থ একটি বিন্দু।



খ ΔPQR-এর $\angle P$ = এক সমকোণ এবং D, PQ এর উপরস্থ একটি বিন্দু। R, D যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে,
$RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$



প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔPRQ সমকোণী যার অতিভুজ RQ

$\therefore RQ^2 = PR^2 + PQ^2$ ... ... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔPRD সমকোণী যার অতিভুজ RD

$\therefore$ $RD^2 = PR^2 + PD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $PD^2 = RD^2 - PR^2$ ... ... (ii)

(৩) (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$\therefore$ $RQ^2 + PD^2 = PR^2 + PQ^2 + RD^2 - PR^2$

বা, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$

$\therefore$ $RQ^2 + PD^2 = RD^2 + PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রশ্ন ৩(গ) এর সমাধান অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶১০ ΔABC একটি ত্রিভুজ। AD এর মধ্যমা। A থেকে BC এর উপর AE লম্ব।

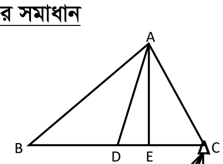
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুসারে সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ জ্যামিতিক চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AB ও AC এর বর্গের যোগফল BD ও AD এর বর্গের যোগফলের দ্বিগুণ। ৪

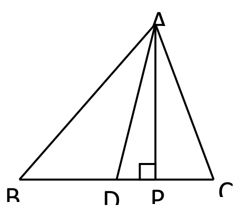
গ. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমা AD ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

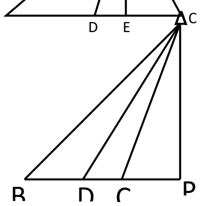
ক ABC একটি ত্রিভুজ এবং AD এর মধ্যমা। শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমি BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব AE.



খ



চিত্র-১



চিত্র-২

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর মধ্যমা AD। দেখাতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

অঙ্কন: A বিন্দু থেকে BC-এর (বা, তার বর্ধিতাংশের চিত্র (২)) ওপর AP লম্ব টানি।

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔADP-এ, $\angle APD = 90°$ এবং অতিভুজ AD.

$AD^2 = AP^2 + DP^2$ ... ... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(২) ΔABP- এ, $\angle APB = 90°$ এবং অতিভুজ AB.

$\therefore AB^2 = AP^2 + BP^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$= AP^2 + (BD + DP)^2$ [$\because$ BP = BD + DP]

$= AP^2 + BD^2 + DP^2 + 2BD\cdot DP$

$= (AP^2 + DP^2) + BD^2 + 2BD\cdot DP$

$= AD^2 + BD^2 + 2BD\cdot DP$ [(i) নং থেকে, $AD^2 = AP^2 + DP^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD\cdot DP$ ... ... (ii)

(২) ΔACP-এ, $\angle APC = 90°$ এবং অতিভুজ AC.

$\therefore AC^2 = AP^2 + CP^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

বা, $AC^2 = AP^2 + (CD - DP)^2$ [$\because$ ১ নং চিত্রে, CP = CD – DP এবং ২ নং চিত্রে, CP = DP – CD]

কিন্তু, $(CD - DP)^2 = (DP - CD)^2 = CD^2 + DP^2 - 2CD.DP$

$\therefore AC^2 = AP^2 + CD^2 + DP^2 - 2CD\cdot DP$

$= (AP^2 + DP^2) + BD^2 - 2BD\cdot DP$ [$\because$ AD, BC বাহুর মধ্যমা $\therefore$ CD = BD]

$= AD^2 + BD^2 - 2BD\cdot DP$ [$\because$ (i) নং থেকে $AD^2 = AP^2 + DP^2$]

$\therefore AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD\cdot DP$ ... ... (iii)

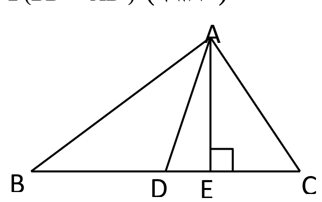
(৩) (ii) নং ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD\cdot DP + AD^2 + BD^2 - 2BD\cdot DP$

$= 2AD^2 + 2BD^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর মধ্যমা AD. প্রমাণ করতে হবে যে, Δ-ক্ষেত্র ABD = Δ-ক্ষেত্র ACD.

অঙ্কন: A থেকে BC এর উপর AE লম্ব আঁকি। তাহলে AE, ΔABC-এর উচ্চতা।

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) $\Delta ABD = \frac{1}{2} \times BD \times AE$ ... ... (i) [ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

(২) $\Delta ACD = \frac{1}{2} CD \times AE = \frac{1}{2} BD \times AE$ ... ... (ii) [□ CD = BD]

(৩) Δ-ক্ষেত্র ABD = Δ-ক্ষেত্র ACD. **(প্রমাণিত)** [(i) ও (ii) নং থেকে]

প্রশ্ন ▶১১ ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F.

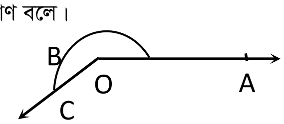
ক. প্রবৃদ্ধ কোণের সংজ্ঞা লিখ উদাহরণসহ। ২

খ. প্রমাণ কর DEF একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ৪

গ. শীর্ষবিন্দু A থেকে BC সমান্তরাল একটি বাহু আঁকলে প্রমাণ করতে হবে যে, BC ভূমির উপর এবং BC ও সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান। ৪

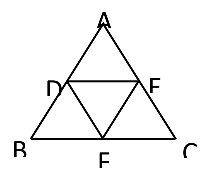
১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **প্রবৃদ্ধ কোণ:** দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে।



চিত্রে $\angle$AOC প্রবৃদ্ধ কোণ।

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC সমবাহু। অর্থাৎ AB = BC = CA। D, E, F যথাক্রমে AB, AC এবং BC বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু। D, E; E, F এবং D, F যোগ করলে ΔDEF উৎপন্ন হবে।

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDEF সমবাহু।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা DE.

$\therefore$ $DE = \frac{1}{2} BC$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক]

(২) আবার, ΔABC-এর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা DF.

$\therefore$ $DF = \frac{1}{2} AC$ [একই কারণে]

(৩) অনুরূপভাবে, $EF = \frac{1}{2} AB$

(৪) কিন্তু দেওয়া আছে, ΔABC সমবাহু। অর্থাৎ, AB = BC = AC

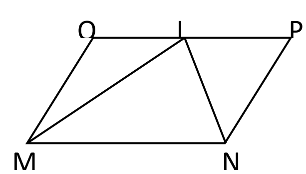
বা, $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AC$

$\therefore$ EF = DE = DF [$\because EF = \frac{1}{2} AB, DE = \frac{1}{2} BC$ এবং $DF = \frac{1}{2} AC$]

$\therefore$ Δ DEF সমবাহু। **(প্রমাণিত)**

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-১ নং এর অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶১২



চিত্রে, MN || PQ এবং QM || PN এবং LMN একটি ত্রিভুজ।

ক. $\angle MLN = 85°$ এবং $\angle LMN = 49°$ হলে, $\angle NLP$ = ? ২

খ. প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র $LMN = \frac{1}{2} \times$ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র $MNPQ$ ৪

গ. যদি $\angle MLN = 90°$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $MN^2 = LM^2 + LN^2$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\angle MLN = 85°$ এবং $\angle LMN = 49°$

যেহেতু $MN \parallel QP$ এবং LM তাদের ছেদক

$\therefore \angle QLM = \angle LMN = 49°$

এবং $\angle PLQ$ = এক সরলকোণ $= 180°$

এখন, $\angle NLP = \angle PLQ - \angle QLN$

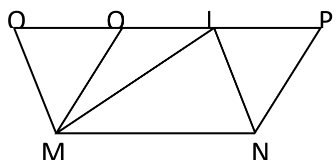
$= \angle PLQ - (\angle QLM + \angle MLN)$

$= 180° - (49° + 85°)$

$= 180° - 134°$

$\therefore \angle NLP = 46°$ **(Ans.)**

খ



মনে করি, $MN \parallel PQ$ এবং $QM \parallel PN$। তাই $PQMN$ একটি সামান্তরিক। ΔLMN ও সামান্তরিক $PQMN$ একই ভূমি MN ও একই সমান্তরাল রেখা যুগল MN ও PQ এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র $LMN = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক $MNPQ$

অঙ্কন: M বিন্দু দিয়ে $MO \parallel NL$ আঁকি যা PQ এর বর্ধিতাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: $MOLN$ চতুর্ভুজে

$MO \parallel NL$ [অঙ্কনানুসারে]

$MN \parallel OL$

$\therefore MOLN$ সামান্তরিক।

এখানে, সামান্তরিক $MNPQ$ ও $MOLN$ একই ভূমি MN ও একই সমান্তরাল রেখাযুগল MN ও OP এর মধ্যে অবস্থিত।

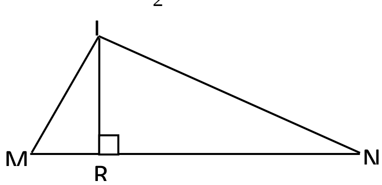
$\therefore$ সামান্তরিক $MNPQ$ = সামান্তরিক $MOLN$

এখন, $MOLN$ সামান্তরিকের কর্ণ ML

$\therefore \Delta LMN = \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক $MOLN$)

$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র $LMN = \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক $MNPQ$) **(প্রমাণিত)**

গ



ΔLMN এর $\angle MLN = 90°$, প্রমাণ করতে হবে যে, $MN^2 = LM^2 + LN^2$

অঙ্কন: L হতে $LR \perp MN$ আঁকি।

প্রমাণ: ΔLMR ও ΔLMN এর মধ্যে

$\angle LRM = \angle MLN = 90°$

$\angle LMR = \angle LMN$

এবং অবশিষ্ট $\angle MLR = \angle LNM$

$\therefore \Delta LMR$ ও ΔLMN সদৃশকোণী

$\therefore \frac{LM}{MN} = \frac{MR}{LM}$

বা, $LM^2 = MR.MN$ .... (i)

আবার, ΔLNR ও ΔLMN এ

$\angle LRN = \angle MLN = 90°$

$\angle LNR = \angle LNM$

এবং অবশিষ্ট $\angle NLR$ = অবশিষ্ট $\angle LMN$

$\therefore \Delta LNR$ ও ΔLMN সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{LN}{MN} = \frac{NR}{LN}$

বা, $LN^2 = NR \cdot MN$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$LM^2 + LN^2 = MR \cdot MN + NR.MN$

$= MN (MR + NR)$

$= MN \cdot MN$

$= MN^2$

$\therefore MN^2 = LM^2 + LN^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৩ ΔPQR এ $\angle Q$ = এক সমকোণ এবং PE মধ্যমা।

ক. দেখাও যে, একই ভূমির উপর এবং একই রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান। ২

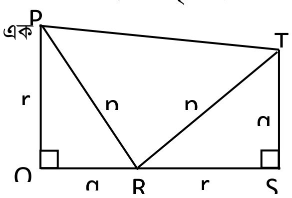
খ. প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2 (PE^2 + QE^2)$. ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক গণিত পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪১

খ দেওয়া আছে, ΔQPR এর $\angle Q$ = এক সমকোণ।



ধরি, $QP = r$, $QR = q$

এবং $PR = p$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$PR^2 = QP^2 + QR^2$

QR বাহুকে S পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি, যেন $RS = QP = r$ হয়। S বিন্দুতে $TS \perp QS$ আঁকি যেন $TS = QR = q$ হয়। R, T ও P, T যোগ করি।

প্রমাণ : ΔQPR ও ΔRST ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

$QP = RS$, $QR = TS$ এবং

অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle RQP$ = অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle RST$ = এক সমকোণ।

$\therefore \quad \Delta QPR \cong \Delta RST$

$\therefore \quad \angle QPR = \angle TRS$ এবং $RT = PR = Q$

এখন, $\angle QPR + \angle QRP$ = এক সমকোণ

$\therefore \quad \angle TRS + \angle QRP$ = এক সমকোণ

কিন্তু, $\angle QRP + \angle PRT + \angle TRS$ = দুই সমকোণ

$\therefore \quad \angle PRT$ = এক সমকোণ

আবার, ট্রাপিজিয়াম $QPTS$ এর ক্ষেত্রফল = ΔQPR এর ক্ষেত্রফল + ΔPRT এর ক্ষেত্রফল + ΔRST এর ক্ষেত্রফল

বা, $\frac{1}{2}(QP + TS)QS = \frac{1}{2} \times QR \times QP + \frac{1}{2} \times PR \times RT + \frac{1}{2} \times RS \times TS$

বা, $\frac{1}{2}(r + q)(q + r) = \frac{1}{2} qr + \frac{1}{2} Q^2 + \frac{1}{2} qr$

বা, $\frac{1}{2}(q + r)^2 = \frac{1}{2}(qr + p^2 + qr)$

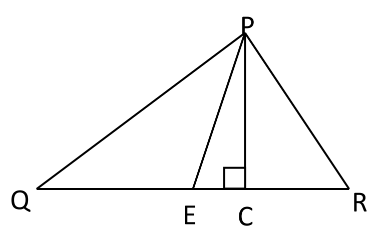
বা, $q^2 + 2qr + r^2 = 2qr + p^2$

বা, $q^2 + r^2 = p^2$

বা, $p^2 = r^2 + q^2$

$\therefore \quad PR^2 = QP^2 + QR^2$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: ΔPQR এর $PQ > PR$ এবং E, QR এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে $PQ^2 + PR^2 = 2(PE^2 + QE^2)$

অঙ্কন: P বিন্দু থেকে QR এর উপর PC লম্ব টানি।

প্রমাণ :	**ধাপ**	**যথার্থতা**
(১)	ΔPEC-এ $\angle PCE = 90°$ এবং অতিভুজ PE $\therefore PE^2 = PC^2 + EC^2$	[পীথাগোরাসের উপপাদ্য]
(২)	ΔPQC এ $\angle PCQ = 90°$ এবং অতিভুজ PQ $\therefore PQ^2 = PC^2 + QC^2$ $= PC^2 + (QE + EC)^2$ $= PC^2 + QE^2 + 2QE.EC + EC^2$ $= PC^2 + EC^2 + QE^2 + 2QE.EC$	[পীথাগোরাসের উপপাদ্য]
	$\therefore PQ^2 = PE^2 + QE^2 + 2QE.EC$	[ধাপ (১) থেকে]

(৩) ΔPRC -এ $\angle PCR = 90^\circ$ এবং অতিভুজ PR

$\therefore PR^2 = PC^2 + CR^2$

$= PC^2 + (ER - EC)^2$

$= PC^2 + ER^2 - 2.ER.EC + EC^2$

$= PC^2 + EC^2 + ER^2 - 2ER.EC$

$= PE^2 + ER^2 - 2ER.EC$ [ধাপ (১) থেকে]

$PR^2 = PE^2 + QE^2 - 2QE.EC$

(৪) ধাপ (২) ও ধাপ (৩) হতে পাই,

$PQ^2 + PR^2$

$= PE^2 + QE^2 + 2QE.EC + PE^2 + QE^2 - 2QE.EC$

$= 2PE^2 + 2QE^2$

$= 2(PE^2 + QE^2)$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PE^2 + QE^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৪ ABCD একটি সামান্তরিক যার একটি কোণ 60°।

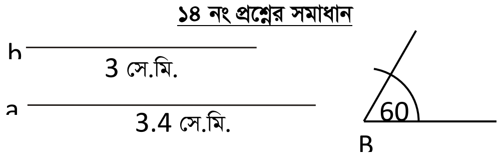
ক. সন্নিহিত বাহুদ্বয় 3 সে.মি. ও 3.4 সে.মি. হলে সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। ২

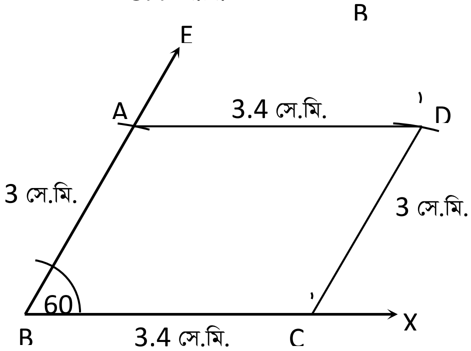
খ. প্রদত্ত সামান্তরিক এবং একটি ত্রিভুজ একই ভূমি ও একই সমান্তরাল রেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ABCD) ৪

গ. ABCD সামান্তরিক অঙ্কন কর যার একটি কোণ প্রদত্ত কোণের সমান ও যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

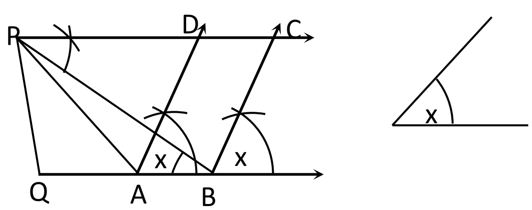




খ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবই-এর অনুশীলনী-১৫ হতে উপপাদ্য-২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪২

F, C, D এর স্থলে যথাক্রমে D, E, C নিতে হবে।

গ



মনে করি, PQB একটি ত্রিভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ $\angle x = 60°$ এর সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ΔPQB এর ক্ষেত্রফল সমান।

অঙ্কনের বিবরণ: (১) QB বাহুকে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি।

(২) AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAD$ আঁকি।

(৩) P বিন্দু দিয়ে QB বাহুর সমান্তরাল PC রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AD রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

(৪) B বিন্দু দিয়ে AD রেখাংশের সমান্তরাল BC রশ্মি টানি এবং মনে করি তা PC কে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABCD ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রশ্ন ▶১৫ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle BAC$ = এক সমকোণ।

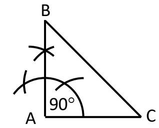
ক. তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. দেখাও যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. ৪

গ. যদি AB = BC = CA এবং AD, BC এর উপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $4AD^2 = 3AB^2$. ৪

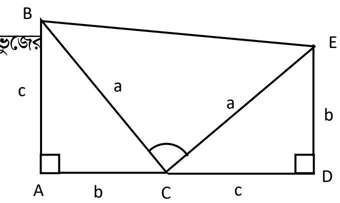
১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle BAC = 1$ সমকোণ।

খ **বিশেষ নির্বচন:**



মনেকরি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ,
BC = a, AC = b ও BA = c.
প্রমাণ করতে হবে,
$BC^2 = BA^2 + AC^2$
অর্থাৎ, $a^2 = c^2 + b^2$

অঙ্কন : AC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন CD = BA = c হয়। D বিন্দুতে AD রেখাংশের ওপর লম্বভাবে DE রেখাংশ আঁকি যেন DE = AC = b হয়। B, E ও C, E যোগ করি।

প্রমাণ : **ধাপ** **যথার্থতা**

এখন, ΔACB ও ΔDEC এ

(১) AC = DE = b, BA = DC = c [অঙ্কন অনুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle CAB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDC$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore \Delta ACB \cong \Delta DEC$

$\therefore BC = EC = a$ এবং $\angle CBA = \angle ECD$

(২) এখন যেহেতু $BA \perp AD$ এবং $ED \perp AD$,

সুতরাং $BA \parallel ED$.

অতএব, BADE একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, $\angle ACB + \angle CBA$ = এক সমকোণ।

$\therefore \angle ACB + \angle ECD$ = এক সমকোণ। [ধাপ-১ থেকে]

কিন্তু $\angle ACB + \angle BCE + \angle ECD$ = দুই সমকোণ।

বা, $\angle BCE$ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।

$\therefore \angle BCE$ = এক সমকোণ,

(৩) কিন্তু, BADE ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δক্ষেত্র BAC এর ক্ষেত্রফল + Δক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল + Δক্ষেত্র ECD এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore \frac{1}{2}AD(BA + DE) = \frac{1}{2} \times BA \times AC + \frac{1}{2} \times BC \times CE + \frac{1}{2} \times CD \times DE$

বা, $\frac{1}{2}(AC + CD)(BA + DE) = \frac{1}{2} \times BA \times AC + \frac{1}{2} \times BC \times CE + \frac{1}{2} \times CD \times DE$ [$\because AD = AC + CD$]

বা, $\frac{1}{2}(b + c)(c + b) = \frac{1}{2}cb + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}bc$

বা, $\frac{1}{2}(c + b)^2 = cb + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}(c^2 + 2cb + b^2) = cb + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}c^2 + cb + \frac{1}{2}b^2 = cb + \frac{1}{2}a^2$

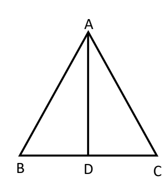
বা, $\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}a^2$

বা, $c^2 + b^2 = a^2$

বা, $a^2 = c^2 + b^2$

$\therefore BC^2 = BA^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, ΔABC-সমবাহু



অর্থাৎ AB = BC = CA

এবং AD, BC এর ওপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) $AD \perp BC$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90°$.

(২) এখন, সমকোণী ΔABD এবং সমকোণী ΔACD-এ

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং AD = AD [$\because$ সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

[∵ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু সমান]

সুতরাং, $BD = CD$

$\therefore BC = 2BD$

(৩) আবার, সমকোণী ΔABD-এ $\angle ADB = 90°$

এবং অতিভুজ = AB.

(৪) পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

বা, $4AD^2 = 4AB^2 - 4BD^2$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4AD^2 = 4AB^2 - (2BD)^2$

বা, $4AD^2 = 4AB^2 - BC^2$ [$\because BC = 2BD$]

বা, $4AD^2 = 4AB^2 - AB^2$ [$\because AB = BC$]

$\therefore 4AD^2 = 3AB^2$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৬ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। যেখানে $\angle A$ = এক সমকোণ।

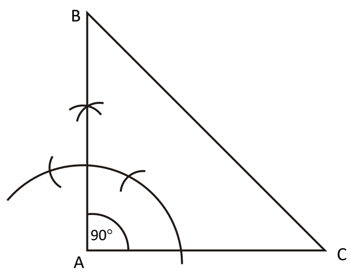
ক. উপরের তথ্যের আলোকে ত্রিভুজটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$। ৪

গ. ABC ত্রিভুজে AB = AC এবং P অতিভুজ, BC এর উপরস্থ যে কোনো বিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

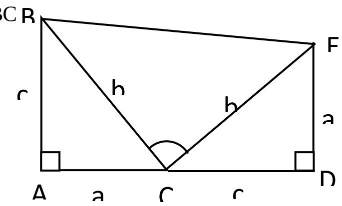


প্রদত্ত উপাত্ত অনুযায়ী ΔBAC আঁকা হলো যার $\angle A$ = এক সমকোণ।

খ **বিশেষ নির্বাচন:** মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ, $BC = b$, $AC = a$ ও $BA = c$.

প্রমাণ করতে হবে, $BC^2 = BA^2 + AC^2$

অর্থাৎ, $b^2 = c^2 + a^2$



অঙ্কন : AC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $CD = BA = c$ হয়। D বিন্দুতে AD রেখাংশের ওপর লম্বভাবে DE রেখাংশ আঁকি যেন $DE = AC = a$ হয়। B, E ও C, E যোগ করি।

প্রমাণ : **ধাপ** **যথার্থতা**

এখন, ΔACB ও ΔDEC এ

(১) $AC = DE = a$, $BA = DC = c$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle CAB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDC$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore \Delta ACB \cong \Delta DEC$

$\therefore BC = EC = b$ এবং $\angle CBA = \angle ECD$

(২) এখন যেহেতু $BA \perp AD$ এবং $ED \perp AD$,

সুতরাং $BA \parallel ED$.

অতএব, BADE একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, $\angle ACB + \angle CBA$ = এক সমকোণ।

$\therefore \angle ACB + \angle ECD$ = এক সমকোণ। [ধাপ-১ থেকে]

কিন্তু $\angle ACB + \angle BCE + \angle ECD$ = দুই সমকোণ।

বা, $\angle BCE$ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।

$\therefore \angle BCE$ = এক সমকোণ,

(৩) কিন্তু, BADE ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δক্ষেত্র BAC এর ক্ষেত্রফল + Δক্ষেত্র BCE এর ক্ষেত্রফল + Δক্ষেত্র ECD এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore \frac{1}{2}AD(BA + DE) = \frac{1}{2} \times BA \times AC + \frac{1}{2} \times BC \times CE + \frac{1}{2} \times CD \times DE$

বা, $\frac{1}{2}(AC + CD)(BA + DE) = \frac{1}{2} \times BA \times AC + \frac{1}{2} \times AC \times CE + \frac{1}{2} \times CD \times DE$ [$\because AD = AC + CD$]

বা, $\frac{1}{2}(a + c)(c + a) = \frac{1}{2}ca + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ac$

বা, $\frac{1}{2}(c + a)^2 = ca + \frac{1}{2}b^2$

বা, $\frac{1}{2}(c^2 + 2ca + a^2) = ca + \frac{1}{2}b^2$

বা, $\frac{1}{2}c^2 + ca + \frac{1}{2}a^2 = ca + \frac{1}{2}b^2$

বা, $\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}b^2$

বা, $c^2 + a^2 = b^2$

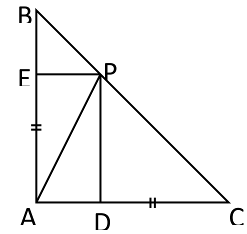
বা, $b^2 = c^2 + a^2$

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**

গ

বিশেষ নির্বাচন: মনে করি, সমদ্বিবাহু সমকোণী ΔABC-এর $AB = AC$ এবং অতিভুজ BC। P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। P, A যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.



অঙ্কন: P বিন্দু থেকে AB এবং AC বাহুর ওপর যথাক্রমে PE এবং PD লম্ব টানি।

প্রমাণ : ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এর, $\angle A = 90°$

এবং $\angle B = \angle C = 45°$ [$\because AC = AB$]

এখন, ΔPDC-এর, $\angle D = 90°$ [$\because PD \perp AC$]

সুতরাং, $\angle DPC = \angle DCP = 45°$

$\therefore$ $CD = PD$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়,

PBE সমকোণী ত্রিভুজে, $PE = BE$

(২) PDC সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায় [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

$PC^2 = PD^2 + CD^2$

$= PD^2 + PD^2$ [$\because PD = CD$]

$\therefore$ $PC^2 = 2PD^2$ ... ... (i)

(৩) PBE সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,

$PB^2 = BE^2 + PE^2$

$= PE^2 + PE^2$ [$\because AE = PE$]

$\therefore$ $PB^2 = 2PE^2$ ... ... (ii)

(৪) (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$PC^2 + PB^2 = 2PD^2 + 2PE^2$

$= 2(PD^2 + PE^2)$

আবার, ADPE একটি আয়ত। [$\angle E = \angle A = \angle D$ = এক সমকোণ]

$\therefore$ $PE = AD$ [$\because$ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore$ $PC^2 + PB^2 = 2(PD^2 + AD^2)$ ... ... (iii)

(৫) ADP সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,

$PA^2 = PD^2 + AD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

(৬) (iii) নং হতে পাই,

$PC^2 + PB^2 = 2PA^2$

$\therefore$ $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৭ ΔPQR এ QD একটি মধ্যমা PR কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

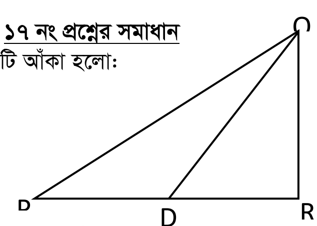
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ ৪

গ. যদি QD, $\angle PQR$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক হয় তবে দেখাও যে, $PQ : QR = PD : RD$. ৪

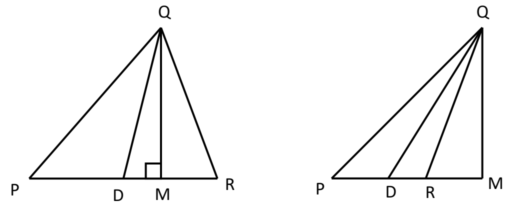
১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি আঁকা হলো:



দেওয়া আছে, ΔPQR এর QD একটি মধ্যমা।

খ



দেওয়া আছে, ΔPQR এর মধ্যমা QD. প্রমাণ করতে হবে যে,
$PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

অঙ্কন : Q বিন্দু থেকে PR এর (বা, তার বর্ধিতাংশের চিত্র (২)) উপর QM লম্ব টানি।

প্রমাণ ঃ ধাপ — যথার্থতা

(১) ΔQDM-এ, $\angle QMD = 90°$ এবং অতিভুজ QD. [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$QD^2 = QM^2 + DM^2$ ... ... (i)

(২) ΔQPM-এ $\angle QMP = 90°$ এবং অতিভুজ QP.
$PQ^2 = QM^2 + PM^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$= QM^2 + (PD + DM)^2$ [$\therefore PM = PD + DM$]
$= QM^2 + PD^2 + DM^2 + 2PD.DM$
$= (QM^2 + DM^2) + PD^2 + 2PD.DM$
$= QD^2 + PD^2 + 2PD.DM$ [(i) নং হতে $QD^2 = QM^2 + DM^2$]
$PQ^2 = QD^2 + PD^2 + 2PD.DM$ ... (ii)

(৩) ΔQRM এ $\angle QMR = 90°$ এবং অতিভুজ QR.
$QR^2 = QM^2 + RM^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$QR^2 = QM^2 + (RD - DM)^2$ [$\therefore$ ১নং চিত্রে $RM = RD - DM$ এবং 2নং চিত্রে $RM = DM - RD$]

কিন্তু $(RD - DM)^2 = (DM - RD)^2$
$= RD^2 + DM^2 - 2RD.DM$
$QR^2 = QM^2 + RD^2 + DM^2 - 2RD.DM$
$= (QM^2 + DM^2) + PD^2 - 2PD.DM$ [QD, PR বাহুর মধ্যমা $\therefore RD = PD$]
$= QD^2 + PD^2 - 2PD.DM$ [$\therefore$ (i) নং থেকে $QD^2 = PM^2 + DM^2$]
$QR^2 = QD^2 + PD^2 - 2PD.DM$ ... ... (iii)

(৪) (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,
$PQ^2 + QR^2 = QD^2 + PD^2 + 2PD.DM + QD^2 + PD^2 - 2PD.DM$
$= 2QD^2 + 2PD^2$
$= 2(QD^2 + PD^2)$
$\therefore PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ মাধ্যমিক **গণিত** পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪.১ এর উপপাদ্য-৩ নং দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৮ ΔDEF এর $DE > DF$ এবং G, EF এর মধ্যবিন্দু।

ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $\angle DGE$ স্থূলকোণ। ৪
গ. প্রমাণ কর যে, $DE^2 + DF^2 = 2(DG^2 + EG^2)$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন ৬ নং দ্রষ্টব্য।

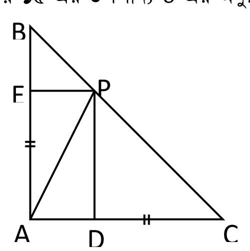
প্রশ্ন ▶১৯ ΔABC এর $\angle A = 90°$.
ক. পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ৪
গ. প্রদত্ত ত্রিভুজে AB = AC এবং P, BC এর উপর যে কোন বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪৩

খ পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১৫ এর উপপাদ্য-৪ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-২৪৩

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর AB = AC এবং অতিভুজ BC। P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। P, A যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.

অঙ্কন: P বিন্দু থেকে AB এবং AC বাহুর ওপর যথাক্রমে PE এবং PD লম্ব টানি।

প্রমাণ : ধাপ — **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এর, $\angle A = 90°$
এবং $\angle B = \angle C = 45°$ [$\because AC = AB$]
এখন, ΔPDC-এর, $\angle D = 90°$ [$\because PD \perp AC$]
সুতরাং, $\angle DPC = \angle DCP = 45°$
$\therefore$ CD = PD
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, PBE সমকোণী ত্রিভুজে, PE = BE

(২) PDC সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায় [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
$PC^2 = PD^2 + CD^2$
$= PD^2 + PD^2$ [$\because PD = CD$]
$\therefore PC^2 = 2PD^2$ ... ... (i)

(৩) PBE সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়,
$PB^2 = BE^2 + PE^2$
$= PE^2 + PE^2$ [$\because BE = PE$]
$\therefore PB^2 = 2PE^2$ ... ... (ii)

(৪) (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,
$PC^2 + PB^2 = 2PD^2 + 2PE^2 = 2(PD^2 + PE^2)$
আবার, ADPE একটি আয়ত। [$\angle E = \angle A = \angle D$ = এক সমকোণ]
$\therefore$ PE = AD [$\because$ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]
$\therefore PC^2 + PB^2 = 2(PD^2 + AD^2)$ ... ... (iii)

(৫) ADP সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়,
$PA^2 = PD^2 + AD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

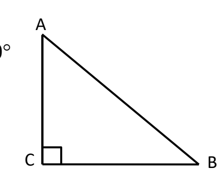
(৬) (iii) নং হতে পাই,
$PC^2 + PB^2 = 2PA^2$
$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶২০ ΔABC এ $\angle C = 1$ সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$.

ক. $\angle A$ = ? এবং $\angle B$ = ? ২
খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ৪
গ. যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজ হয় এবং AD, BC এর উপর লম্ব হয় তবে দেখাও যে, $2AD = \sqrt{3}AB$. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

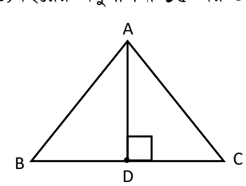
ক দেওয়া আছে $\angle B = 2\angle A$.



সমকোণী ΔABC $\angle C = 1$ সমকোণ $= 90°$
$\therefore \angle B + \angle A = 90°$
বা, $2\angle A + \angle A = 90°$
বা, $3\angle A = 90°$
$\therefore \angle A = 30°$ **(Ans.)**
$\therefore \angle B = 2 \times 30°$
$\therefore \angle B = 60°$ **(Ans.)**

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৫ এর উপপাদ্য-৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৪৩

গ



দেওয়া আছে, ABC সমবাহু ত্রিভুজে $AD \perp BC$। দেখাতে হবে যে, $2AD = \sqrt{3}AB$। এখন, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$ এবং AB = BC = AC
এখন, ΔADC এ AD, DC এর উপর লম্ব।

$\therefore \sin 60° = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{AB}$

$\therefore 2AD = \sqrt{3}AB$ **(দেখানো হলো)**