

SSC Math

অধ্যয়ভিত্তিক কন্টেন্ট

অধ্যায়-৩: বীজগাণিতিক রাশি

প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **বীজগাণিতিক রাশি** : প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সংখ্যানির্দেশক অক্ষর প্রতীক এর অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়।

যেমন, $2a + 3b - 4c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে $a, b, c, p, q, r, m, n, x, y, z, \dots$ ইত্যাদি বর্ণমালার মাধ্যমে বিভিন্ন তথ্য প্রকাশ করা হয়। বীজগাণিতিক রাশি সংবলিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে এই সমস্ত বর্ণমালাকে ব্যবহার করা হয়। পাটিগণিতে শুধু ধনাত্মক সংখ্যা ব্যবহৃত হয়, অন্যদিকে বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। বীজগণিতকে পাটিগণিতের সর্বাঙ্গীনকৃত রূপ বলা হয়। বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলো ধ্রুবক (constant), এদের মান নির্দিষ্ট।

বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষর প্রতীকগুলো চলক (variables), এদের মান নির্দিষ্ট নয়, এরা বিভিন্ন মান ধারণ করতে পারে।

- **বীজগাণিতিক সূত্রাবলি** : বীজগাণিতিক প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগাণিতিক সূত্র বলা হয়।

সূত্র ১ | $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

অনুসিদ্ধান্ত ৩ | $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

সূত্র ২ | $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

অনুসিদ্ধান্ত ৪ | $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

সূত্র ৩ | $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

অনুসিদ্ধান্ত ৫ | $a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$

সূত্র ৪ | $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৬ | $ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$

সূত্র ৫ | $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

অনুসিদ্ধান্ত ৭ | $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$

অনুসিদ্ধান্ত ১ | $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৮ | $2(ab + bc + ac) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

অনুসিদ্ধান্ত ২ | $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

- **ঘন সংবলিত সূত্রাবলি**

সূত্র ৬ | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

সূত্র ৭ | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 $= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

সূত্র ৮ | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

সূত্র ৯ | $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

অনুসিদ্ধান্ত ৯ | $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

অনুসিদ্ধান্ত ১০ | $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

- **উৎপাদকে বিশ্লেষণ**

কোনো রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলা হয়।

কোনো বীজগাণিতিক রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকগুলো নির্ণয় করার পর রাশিটিকে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বলা হয়।

বীজগাণিতিক রাশিগুলো এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে। সেজন্য উক্ত রাশির উৎপাদকগুলোও এক বা একাধিক পদবিশিষ্ট হতে পারে।

- **উৎপাদক নির্ণয়ের কতিপয় কৌশল :**

(ক) কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদে সাধারণ উৎপাদক থাকলে তা প্রথম বের করে নিতে হয়। যেমন:

(i) $3a^2b + 6ab^2 + 12a^2b^2 = 3ab(a + 2b + 4ab)$

(ii) $2ab(x - y) + 2bc(x - y) + 3ca(x - y) = (x - y)(2ab + 2bc + 3ca)$

(খ) একটি রাশিকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করে।

$$\text{যেমন : } 4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + (3)^2 = (2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3)$$

(গ) একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে এবং $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ সূত্র প্রয়োগ করে।

(ঘ) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ সূত্রটি ব্যবহার করে।

এ পদ্ধতিতে $x^2 + px + q$ আকারের বহুপদীয় উৎপাদক নির্ণয় করা সম্ভব হয় যদি দুইটি পূর্ণসংখ্যা a ও b নির্ণয় করা যায় যেন, $a + b = p$ এবং $ab = q$ হয়। এজন্য q -এর দুইটি স্বচিহ্ন উৎপাদক নিতে হয় যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি p হয়। $q > 0$ হলে, a ও b একই চিহ্নযুক্ত এবং $q < 0$ হলে, a ও b বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

(ঙ) $ax^2 + bx + c$ আকারের বহুপদীর মধ্যপদ বিভক্তিকরণ পদ্ধতিতে : $ax^2 + bx + c = (rx + p)(sx + q)$ হবে।

অতএব, $ax^2 + bx + c$ আকারের বহুপদীর উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে ac , অর্থাৎ, x^2 এর সহগ এবং x বর্জিত পদের গুণফলকে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি x এর সহগ b এর সমান হয়।

(চ) একটি রাশিকে পূর্ণ ঘন আকারে প্রকাশ করে।

(ছ) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ এবং $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ সূত্র দুইটি ব্যবহার করে।

(জ) ভগ্নাংশসহযুক্ত রাশির উৎপাদক : ভগ্নাংশযুক্ত রাশির উৎপাদকগুলোকে বিভিন্নভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$\text{যেমন, } a^3 + \frac{1}{27} = a^3 + \frac{1}{3^3} = \left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a^2 - \frac{a}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{আবার, } a^3 + \frac{1}{27} = \frac{1}{27}(27a^3 + 1) = \frac{1}{27}\{(3a)^3 + (1)^3\} = \frac{1}{27}(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)$$

এখানে, দ্বিতীয় সমাধানে চলক-সংবলিত উৎপাদকগুলো পূর্ণসংখ্যা সহগবিশিষ্ট। এই ফলকে প্রথম সমাধানের মতো প্রকাশ করা যায় :

$$\frac{1}{27}(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1) = \frac{1}{3}(3a + 1) \times \frac{1}{9}(9a^2 - 3a + 1) = \left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a^2 - \frac{a}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

■ ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) :

আমরা জানি, ভাজ্য = ভাজক \times ভাগফল + ভাগশেষ

যদি আমরা ভাজ্যকে $f(x)$, ভাগফলকে $h(x)$, ভাগশেষকে r ও ভাজককে $(x - a)$ দ্বারা সূচিত করি, তাহলে উপরের সূত্র থেকে পাই,

$$f(x) = (x - a).h(x) + r \text{ এই সূত্রটি } a \text{ এর সকল মানের জন্য সত্য।}$$

অতএব, $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$ । এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder theorem) নামে পরিচিত। অর্থাৎ, ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x - a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য। ভাজক বহুপদী $(x - a)$ এর মাত্রা 1।

প্রতিজ্ঞা : যদি $f(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $f(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\frac{b}{a}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত : $(x - a)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়।

কোনো বহুপদী $f(x)$, $(x - a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য (Factor theorem) নামে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্ত : $ax + b$, $a \neq 0$ হলে, রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ হয়।

■ বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন ও প্রয়োগ :

দৈনন্দিন কাজে বিভিন্ন সময়ে বিভিন্নভাবে আমরা বাস্তব সমস্যার সম্মুখীন হই। এই সমস্যাগুলো ভাষাগতভাবে বর্ণিত হয়। এ সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন এবং তা প্রয়োগ করার বিভিন্ন পদ্ধতি অবলম্বন করি।

■ সমস্যা সমাধানের পদ্ধতি :

(ক) প্রথমেই সতর্কতার সাথে সমস্যাটি পর্যবেক্ষণ করে এবং মনোযোগ সহকারে পড়ে কোনগুলো অজ্ঞাত এবং কী নির্ণয় করতে হবে তা চিহ্নিত করতে হবে।

(খ) অজ্ঞাত রাশিগুলোর একটিকে যেকোনো চলক (ধরি x) দ্বারা সূচিত করতে হবে। অতঃপর সমস্যাটি ভালোভাবে অনুধাবন করে অন্যান্য অজ্ঞাত রাশিগুলোকেও একই চলক x এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

(গ) সমস্যাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে বীজগাণিতিক রাশি দ্বারা প্রকাশ করতে হবে।

(ঘ) প্রদত্ত শর্ত ব্যবহার করে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশগুলোকে একত্রে একটি সমীকরণে প্রকাশ করতে হবে।

(ঙ) সমীকরণটি সমাধান করে অজ্ঞাত রাশি x এর মান নির্ণয় করতে হবে।

■ বাস্তব সমস্যা সমাধানে বিভিন্ন সূত্র ব্যবহার করা হয়। সূত্রগুলো নিচে উল্লেখ করা হলো :

(১) দেয় বা প্রাপ্য বিষয়ক :

দেয় বা প্রাপ্য, $A = qn$ টাকা

যেখানে, $q =$ জনপ্রতি দেয় বা প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

$n =$ লোকের সংখ্যা

(২) সময় ও কাজ বিষয়ক :

কয়েকজন লোক একটি কাজ সম্পন্ন করলে, কাজের পরিমাণ, $W = qnx$

যেখানে, $q =$ প্রত্যেকে একক সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে

$n =$ কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা

$x =$ কাজের মোট সময়

$W = n$ জনে x সময়ে কাজের যে অংশ সম্পন্ন করে

(৩) সময় ও দূরত্ব বিষয়ক :

নির্দিষ্ট সময়ে দূরত্ব, $d = vt$

যেখানে, $v =$ প্রতি ঘণ্টায় গতিবেগ

$t =$ মোট সময়

(৪) নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক :

নির্দিষ্ট সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ, $Q(t) = Q_0 \pm qt$

যেখানে, $Q_0 =$ নলের মুখ খুলে দেওয়ার সময় চৌবাচ্চায় জমা পানির পরিমাণ।

$q =$ প্রতি একক সময়ে নল দিয়ে যে পানি প্রবেশ করে অথবা বের হয়।

$t =$ অতিক্রান্ত সময়।

$Q(t) = t$ সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ (পানি প্রবেশ হওয়ার শর্তে '+' চিহ্ন এবং পানি বের হওয়ার শর্তে '-' চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে।)

(৫) শতকরা অংশ বিষয়ক :

$p = br$

যেখানে, $b =$ মোট রাশি; $r =$ শতকরা ভগ্নাংশ $= \frac{s}{100} = s\%$; $p =$ শতকরা অংশ $= b$ এর $s\%$

(৬) লাভ-ক্ষতি বিষয়ক :

$S = C(I \pm r)$

লাভের ক্ষেত্রে, $S = C(I + r)$

ক্ষতির ক্ষেত্রে, $S = C(I - r)$

যেখানে, S (টাকা) = বিক্রয়মূল্য; C (টাকা) = ক্রয়মূল্য; $I =$ লাভ বা মুনাফা; $r =$ লাভ বা ক্ষতির হার

(৭) বিনিয়োগ-মুনাফা বিষয়ক :

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে, $I = Pnr$ টাকা

$A = P + I = P + Pnr = P(1 + nr)$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে, $A = P(1 + r)^n$

যেখানে, $I = n$ সময় পরে মুনাফা; $n =$ নির্দিষ্ট সময়; $P =$ মূলধন; $r =$ একক সময়ে একক মূলধনের মুনাফাদ; $A = n$ সময় পরে মুনাফাসহ মূলধন।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

প্রশ্ন ১ [ঢা. বো. ১৭]

$$x^2 - 3 = 2\sqrt{2} \text{ হলে,}$$

ক. x এর মান নির্ণয় কর।

২

খ. $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 58\sqrt{2}$

৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 - 3 = 2\sqrt{2}$

$$\text{বা, } x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + (1)^2$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\therefore x = \pm (\sqrt{2} + 1) \text{ (Ans.)}$$

খ 'ক' থেকে পাই,

$$x = \sqrt{2} + 1 \text{ [ধনাত্মক মান নিয়ে]}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{1 \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} \text{ [লব ও হর কে } (\sqrt{2} - 1) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \right\}^2 - 2$$

$$= \{ (2\sqrt{2})^2 - 2 \}^2 - 2 = (8 - 2)^2 - 2 = (6)^2 - 2 = 36 - 2 = 34 \text{ (Ans.)}$$

গ 'খ' থেকে পাই,

$$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2} \text{ এবং } x^4 + \frac{1}{x^4} = 34$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = 2\sqrt{2} \times 34$$

$$\text{বা, } x^5 + x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} = 68\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 68\sqrt{2} - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 68\sqrt{2} - \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \right\}$$

$$= 68\sqrt{2} - \{ (2\sqrt{2})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{2} \}$$

$$= 68\sqrt{2} - (16\sqrt{2} - 6\sqrt{2})$$

$$= 68\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 58\sqrt{2}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 58\sqrt{2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ২ [রা. বো. ১৭]

কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি $2\sqrt{3}$ ।

ক. সংখ্যাটিকে a চলকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

২

খ. $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, সংখ্যাটি = a

$$\therefore \text{সংখ্যাটির গুণক বিপরীত সংখ্যা} = \frac{1}{a}$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3} \text{ (Ans.)}$$

খ 'ক' থেকে পাই,

$$a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = a^3 + \frac{1}{a^3}$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$= (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{3} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$= 18\sqrt{3} \text{ (Ans.)}$$

গ 'খ' থেকে পাই,

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{a^6 + 1}{a^3} = 18\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } a^6 + 1 = 18\sqrt{3}a^3$$

$$\text{বা, } a^6 - 18\sqrt{3}a^3 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot 9\sqrt{3} + (9\sqrt{3})^2 - (9\sqrt{3})^2 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3 - 9\sqrt{3})^2 = 243 - 1$$

$$\text{বা, } (a^3 - 9\sqrt{3})^2 = 121 \times 2$$

$$\text{বা, } a^3 - 9\sqrt{3} = 11\sqrt{2} \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } a^3 = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$= (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{3}(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$$

$$\therefore a = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ৩ [কু. বো. ১৭]

$$b^2 - 2\sqrt{6}b + 1 = 0$$

ক. দেখাও যে, $b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$.

২

খ. $\frac{1}{b^3} (b^6 - 1)$ এর মান নির্ণয় করো।

৪

গ. প্রমাণ করো যে, $b^5 + \frac{1}{b^5} = 922\sqrt{6}$.

৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $b^2 - 2\sqrt{6}b + 1 = 0$

$$\text{বা, } b^2 + 1 = 2\sqrt{6}b$$

$$\text{বা, } \frac{b^2}{b} + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6} \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ 'ক' হতে পাই,

$$b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 4b \cdot \frac{1}{b}$$

$$= (2\sqrt{6})^2 - 4 = 4 \cdot 6 - 4 = 24 - 4 = 20$$

$$\therefore b - \frac{1}{b} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{1}{b^3}(b^6 - 1) = \frac{b^6}{b^3} - \frac{1}{b^3} \\ &= b^3 - \frac{1}{b^3} = \left(b - \frac{1}{b}\right)^3 + 3b \cdot \frac{1}{b} \left(b - \frac{1}{b}\right) \\ &= (2\sqrt{5})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{5} = 8.5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ &= 40\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 46\sqrt{5} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ 'ক' হতে পাই, $b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$

বা, $\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = (2\sqrt{6})^2$ [বর্গ করে]

বা, $b^2 + 2b \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} = 4.6$

বা, $b^2 + \frac{1}{b^2} = 24 - 2$

$\therefore b^2 + \frac{1}{b^2} = 22$

আবার, $b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$

বা, $\left(b + \frac{1}{b}\right)^3 = (2\sqrt{6})^3$ [ঘন করে]

বা, $b^3 + \frac{1}{b^3} + 3b \cdot \frac{1}{b} \left(b + \frac{1}{b}\right) = 8.6\sqrt{6}$

বা, $b^3 + \frac{1}{b^3} + 3.2\sqrt{6} = 48\sqrt{6}$

বা, $b^3 + \frac{1}{b^3} = 48\sqrt{6} - 6\sqrt{6}$

$\therefore b^3 + \frac{1}{b^3} = 42\sqrt{6}$

এখন, $\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^3 + \frac{1}{b^3}\right) = 22 \times 42\sqrt{6}$

বা, $b^5 + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{b^5} = 924\sqrt{6}$

বা, $b^5 + \frac{1}{b^5} + b + \frac{1}{b} = 924\sqrt{6}$

বা, $b^5 + \frac{1}{b^5} + 2\sqrt{6} = 924\sqrt{6}$

বা, $b^5 + \frac{1}{b^5} = 924\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$

$\therefore b^5 + \frac{1}{b^5} = 922\sqrt{6}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৪ [চ. বো. ১৭]

$x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $a + b + c = m$,
 $a^2 + b^2 + c^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$

ক. x এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. প্রমাণ করো যে, $\frac{x^8 + 1}{x^4} = 98$ ৪

গ. যদি $c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x^2 &= 5 + 2\sqrt{6} \\ &= 3 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$\therefore x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (Ans.)

খ 'ক' থেকে পাই,

$x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

বামপক্ষ $= \frac{x^8 + 1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$
 $= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\right\}^2 - 2$
 $= \{(2\sqrt{3})^2 - 2\}^2 - 2 = (12 - 2)^2 - 2$
 $= 100 - 2$
 $= 98 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \frac{x^8 + 1}{x^4} = 98$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে,

$a + b + c = m$

$a^2 + b^2 + c^2 = n$

$a^3 + b^3 = p^3$

এবং $c = 0$

$\therefore a + b = m$ এবং $a^2 + b^2 = n$

বামপক্ষ $= m^3 + 2p^3$
 $= (a + b)^3 + 2(a^3 + b^3)$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2a^3 + 2b^3$
 $= 3(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
 $= 3\{a^2(a + b) + b^2(a + b)\}$
 $= 3(a + b)(a^2 + b^2)$
 $= 3mn$ [$\because a + b = m$ এবং $a^2 + b^2 = n$]
 $= \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore m^3 + 2p^3 = 3mn$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ৫ [সি. বো. ১৭]

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$.

ক. $x + \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. প্রমাণ করো যে, $\frac{x^8 - 1}{x^4} = 40\sqrt{6}$ ৪

গ. $x^5 - \frac{1}{x^5}$ এর মান নির্ণয় করো। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 10$ বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 10$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 12$ বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \times 3$

$\therefore x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে,

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 10$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 10$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 8$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right) = (2\sqrt{2})^2$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{x^8 - 1}{x^4} = x^4 - \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 10 \times \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= 10 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \text{ ['ক' হতে মান বসিয়ে]} \\ &= 40\sqrt{6} \\ &= \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x^8 - 1}{x^4} = 40\sqrt{6} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ এখানে,

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) &= x^5 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^5} \\ &= \left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ \therefore x^5 - \frac{1}{x^5} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) \dots \dots \dots \text{(i)} \\ x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= (2\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{2} \text{ [খ হতে মান বসিয়ে]} \\ &= 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 22\sqrt{2} \end{aligned}$$

(i) নং সমীকরণে $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$ ও $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ এর মানগুলো বসিয়ে পাই,

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = 10 \times 22\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 220\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 218\sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৬ / যি. বো. ১৭/

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো: $a^4 + a^2 + 1$. ২

খ. প্রমাণ করো যে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + x^{-4}$ ৪

গ. $x^5 - \frac{1}{x^5}$ এর মান নির্ণয় করো। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a^4 + a^2 + 1$
 $= (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + (1)^2 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2$
 $= (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a) = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) \text{ (Ans.)}$

খ দেওয়া আছে, $x^2 - 2x + 1 = 0$
 বা, $(x)^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + (1)^2 = 0$
 বা, $(x-1)^2 = 0$ বা, $x-1 = 0$
 $\therefore x = 1$

$$\text{বামপক্ষ} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (1)^2 + \frac{1}{(1)^2} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ডানপক্ষ} = x^4 + x^{-4} = (1)^4 + \frac{1}{(1)^4} = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + x^{-4} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ $x^5 - \frac{1}{x^5} = (1)^5 - \frac{1}{(1)^5}$ [মান বসিয়ে]
 $= 1 - 1 = 0 \text{ (Ans.)}$

প্রশ্ন ৭ / যি. বো. ১৭/

যদি $p^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $a^3 + a^{-3} = 18\sqrt{3}$ এবং $a, p > 0$ হয়, তাহলে-

ক. $p - \frac{1}{p}$ এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. দেখাও যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, যখন $a^3 - a^{-3} > 0$. ৪

গ. প্রমাণ করো যে, $\frac{p^{10} + 1}{p^5} = 178\sqrt{3}$. ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p^2 = 5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2$
 $= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

$$\therefore p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{p} &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

এখন, $p - \frac{1}{p} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 $= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\therefore p - \frac{1}{p} = 2\sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে,

$$a^3 + a^{-3} = 18\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{(a^3)^2 + 1}{a^3} = 18\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } a^6 + 1 = 18\sqrt{3}a^3$$

$$\text{বা, } (a^3)^2 - 18\sqrt{3}a^3 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot 9\sqrt{3} + (9\sqrt{3})^2 - 242 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3 - 9\sqrt{3})^2 = 242$$

$$\text{বা, } (a^3 - 9\sqrt{3})^2 = (11\sqrt{2})^2$$

$$\text{বা, } a^3 - 9\sqrt{3} = 11\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } a^3 = 9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } a^3 = (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3$$

$$\text{বা, } a^3 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$$

$$\therefore a = \sqrt{3} + \sqrt{2}; \text{ যখন } a^3 - a^{-3} > 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ 'ক' থেকে পাই, $p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ এবং $\frac{1}{p} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\therefore p + \frac{1}{p} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } p + \frac{1}{p} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} + 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p} = 12$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} + 2 = 12$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} = 12 - 2$$

$$\therefore p^2 + \frac{1}{p^2} = 10 \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$\text{আবার, } p + \frac{1}{p} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \left(p + \frac{1}{p}\right)^3 = (2\sqrt{3})^3$$

$$\text{বা, } p^3 + \frac{1}{p^3} + 3.p.\frac{1}{p}\left(p + \frac{1}{p}\right) = 24\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } p^3 + \frac{1}{p^3} + 3 \times 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } p^3 + \frac{1}{p^3} + 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } p^3 + \frac{1}{p^3} = 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$\therefore p^3 + \frac{1}{p^3} = 18\sqrt{3} \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) গুণ করে পাই,

$$\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)\left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right) = 180\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } p^5 + \frac{1}{p^5} + p + \frac{1}{p} = 180\sqrt{3} \quad \text{বা, } p^5 + \frac{1}{p^5} + 2\sqrt{3} = 180\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } p^5 + \frac{1}{p^5} = 180\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \quad \text{বা, } \frac{(p^5)^2 + 1}{p^5} = 178\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{p^{10} + 1}{p^5} = 178\sqrt{3} \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$\begin{aligned} &= \left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right)\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) - \left(p + \frac{1}{p}\right) \\ &= \left[\left(p + \frac{1}{p}\right)^3 - 3.p.\frac{1}{p}\left(p + \frac{1}{p}\right)\right]\left[\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 - 2.p.\frac{1}{p}\right] \\ &\quad - \left(p + \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{(4^3 - 3 \times 4)(4^2 - 2)\} - 4 \\ &= (64 - 12)(16 - 2) - 4 \\ &= (52 \times 14) - 4 \\ &= 728 - 4 = 724 \\ &= \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore p^5 + \frac{1}{p^5} = 724. \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ৯ [রা. বো. ১৬]

রাইসা তার বিদ্যালয় হতে প্রাপ্ত বৃত্তি ও উপবৃত্তির মোট 10,000 টাকা 5 বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখে। বার্ষিক মুনাফার হার 8%। (সূত্র প্রযোজ্য)

- ক. $x^2 - 5x - 6$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২
 খ. সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর। ৪
 গ. সরল মুনাফার ক্ষেত্রে উক্ত টাকা কত বছরে মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হবে? ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 - 5x - 6$
 $= x^2 - 6x + x - 6$
 $= x(x - 6) + 1(x - 6)$
 $= (x - 6)(x + 1)$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে,

মূলধন, $P = 10,000$ টাকা
 মুনাফার হার, $r = 8\% = \frac{8}{100}$

সময়, $n = 5$ বছর

আমরা জানি, সরল মুনাফা, $I = Pnr$

$$\begin{aligned} &= \left(10000 \times 5 \times \frac{8}{100}\right) \text{ টাকা} \\ &= 4000 \text{ টাকা} \end{aligned}$$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফায়, মুনাফাশূন্যমূলধন C টাকা হলে,
 $C = P(1 + r)^n$

$$\begin{aligned} &= 10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 \\ &= 10000 \left(\frac{108}{100}\right)^5 \\ &= 10000 \left(\frac{108^5}{100^5}\right) \\ &= 10000 \times (1.08)^5 \\ &= 10000 \times 1.4693281 \\ &= 14693.28 \text{ টাকা (প্রায়)} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = (14693.28 - 10000) \text{ টাকা} = 4693.28 \text{ টাকা}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য} \\ &= (4693.28 - 4000) \text{ টাকা} \\ &= 693.28 \text{ টাকা (প্রায়)} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ এখানে,

মূলধন, $P = 10000$ টাকা

$$\therefore \text{মুনাফা-মূলধন} = 2 \times 10000 \text{ টাকা} = 20000 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{মুনাফা, } I = (20000 - 10000) \text{ টাকা} = 10000 \text{ টাকা}$$

প্রশ্ন ▶ ৮ [ঢা. বো. ১৬]

$$p^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

ক. p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{p^6 - 1}{p^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $p^5 + \frac{1}{p^5} = 724$. ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} p^2 &= 7 + 4\sqrt{3} \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= (2 + \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore p = 2 + \sqrt{3} \text{ [বর্গমূল করে] (Ans.)}$$

খ 'ক' থেকে পাই,

$$p = 2 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{p} &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \frac{p^6 - 1}{p^3} &= \frac{p^6}{p^3} - \frac{1}{p^3} = p^3 - \frac{1}{p^3} \\ &= \left(p - \frac{1}{p}\right)^3 + 3.p.\frac{1}{p}\left(p - \frac{1}{p}\right) \\ &= (2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})^3 + 3(2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}) \\ &= (2\sqrt{3})^3 + 3 \times 2\sqrt{3} \\ &= 8 \times 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\ &= 24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\ &= 30\sqrt{3} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ 'ক' ও 'খ' থেকে পাই,

$$p = 2 + \sqrt{3} \text{ এবং } \frac{1}{p} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore p + \frac{1}{p} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$\text{বামপক্ষ} = p^5 + \frac{1}{p^5}$$

মুনাফার হার, $r = 8\% = \frac{8}{100}$

সময়, $n = ?$

আমরা জানি, $I = Pnr$

$$\text{বা, } n = \frac{I}{pr} = \frac{10000}{10000 \times \frac{8}{100}} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12 \frac{1}{2}$$

\therefore সময় $12 \frac{1}{2}$ বছর (Ans.)

প্রশ্ন ১০ [দি. বো. ১৬]

$x + \frac{1}{x} = 6$, হলে —

ক. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 198$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 6726$. ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = 6$

আমরা জানি, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$
 $= (6)^2 - 4$
 $= 36 - 4$
 $= 32$ (Ans.)

খ $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$
 $= (6)^3 - 3 \cdot 6$
 $= 216 - 18$
 $= 198$

$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 198$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে,

$x + \frac{1}{x} = 6$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (6)^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 36$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 36 - 2$

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$

‘খ’ থেকে পাই, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 198$

এখন, $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 198 \times 34$

বা, $x^5 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} = 6732$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 6732 - 6$ [$x + \frac{1}{x} = 6$]

$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 6726$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১১ [কু. বো. ১৬]

$x + y = \sqrt{3}$ এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$ হলে—

ক. xy এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4} = 3\sqrt{3}$ ৪

গ. $16xy(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{3}$ এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$

এখন, $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$

বা, $(x + y)(x - y) = \sqrt{6}$

বা, $x - y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ [$\because x + y = \sqrt{3}$]

বা, $x - y = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore x - y = \sqrt{2}$

আমরা জানি,

$xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4} = \frac{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{4} = \frac{3 - 2}{4}$

$\therefore xy = \frac{1}{4}$ (Ans.)

খ ‘ক’ থেকে পাই,

$x + y = \sqrt{3}$ এবং $xy = \frac{1}{4}$

এখন, $x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4}$

$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + \frac{\sqrt{27}}{4}$

$= (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{9 \cdot 3}}{4}$ [মান বসিয়ে]

$= 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$= 3\sqrt{3}$

$\therefore x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4} = 3\sqrt{3}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{3}$

‘ক’ থেকে পাই,

$x - y = \sqrt{2}$

$xy = \frac{1}{4}$

প্রদত্ত রাশি = $16xy(x^2 + y^2)$

$= 16 \times \frac{1}{4} \times \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2}$ [‘ক’ হতে]

$= 4 \times \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}{2}$ [মান বসিয়ে]

$= 2 \times (3 + 2)$

$= 2 \times 5$

$= 10$ (Ans.)

প্রশ্ন ১২ [চ. বো. ১৬]

$a + b + c, a^2 + b^2 + c^2$ দু’টি বীজগাণিতীয় রাশি।

ক. ১ম রাশি = 0 হলে, প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. ২

খ. ১ম রাশি = 10, ২য় রাশি = 38 হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান কত? ৪

গ. ১ম রাশি = 0 হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{(b + c)^2}{6bc} + \frac{(c + a)^2}{6ca} + \frac{(a + b)^2}{6ab} = \frac{1}{2}$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

১ম রাশি = $a + b + c$

শর্তমতে,

$$a + b + c = 0$$

$$\text{বা, } a + b = -c$$

$$\text{বা, } (a + b)^3 = (-c)^3 \quad [\text{উভয়পক্ষকে ঘন করে}]$$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3 \quad [\because a + b = -c]$$

$$\text{বা, } a^3 + b^3 - 3abc = -c^3$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \quad (\text{দেখানো হলো})$$

খ ১ম শর্তমতে, $a + b + c = 10$

২য় শর্তমতে, $a^2 + b^2 + c^2 = 38$

এখানে, $a + b + c = 10$

$$\text{বা, } (a + b + c)^2 = 10^2 \quad [\text{উভয়পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 100$$

$$\text{বা, } 38 + 2(ab + bc + ca) = 100 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } 2(ab + bc + ca) = 100 - 38$$

$$\therefore 2(ab + bc + ca) = 62$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$$

$$= (2 \times 38) - 62 \quad [\square 2(ab + bc + ca) = 62]$$

$$= 76 - 62$$

$$= 14 \quad (\text{Ans.})$$

গ দেওয়া আছে, ১ম রাশি = $a + b + c$

$$\therefore \text{১ম রাশি} = 0 \text{ হলে}$$

$$a + b + c = 0$$

$$\therefore a + b = -c$$

$$b + c = -a$$

$$c + a = -b$$

$$\text{এবং 'ক' থেকে পাই, } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{এখন, } \frac{(b+c)^2}{6bc} + \frac{(c+a)^2}{6ca} + \frac{(a+b)^2}{6ab} = \frac{(-a)^2}{6bc} + \frac{(-b)^2}{6ca} + \frac{(-c)^2}{6ab}$$

$$= \frac{a^2}{6bc} + \frac{b^2}{6ca} + \frac{c^2}{6ab}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{6abc}$$

$$= \frac{3abc}{6abc}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{(b+c)^2}{6bc} + \frac{(c+a)^2}{6ca} + \frac{(a+b)^2}{6ab} = \frac{1}{2} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

প্রশ্ন ১৩ [সি. বো. ১৬]

জয়ন্ত 5% হারে 10,000 টাকা 3 বছরের জন্য ব্যাংক থেকে ঋণ নিল।

ক. উক্ত টাকার সরল মুনাফা নির্ণয় কর। ২

খ. উক্ত টাকার সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি উভয় মুনাফার পার্থক্য 45.75 টাকা হয় তবে জয়ন্তের ঋণের

পরিমাণ কত টাকা হবে? ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$\text{মূলধন, } P = 10000 \text{ টাকা; মুনাফার হার, } r = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$$

এবং সময়, $n = 3$ বছর।

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$I = Pnr$$

$$= 10000 \times 3 \times \frac{5}{100} \text{ টাকা}$$

$$= 1500 \text{ টাকা}$$

\therefore সরল মুনাফা 1500 টাকা (Ans.)

খ আমরা জানি,

$$\text{চক্রবৃদ্ধি মূলধন, } C = P(1 + r)^n$$

$$= 10000 (1 + 0.05)^3 \text{ টাকা}$$

$$= 10000 \times (1.05)^3 \text{ টাকা}$$

$$= 10000 \times 1.157625 \text{ টাকা}$$

$$= 11576.25 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = (11576.25 - 10000) \text{ টাকা}$$

$$= 1576.25 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{মুনাফার পার্থক্য} = (1576.25 - 1500) \text{ টাকা}$$

$$= 76.25 \text{ টাকা (Ans.)}$$

গ 'খ' হতে পাই, উভয় মুনাফার পার্থক্য 76.25 টাকা

উভয় মুনাফার পার্থক্য 76.25 টাকা হলে ঋণ হয় 10000 টাকা

$$\begin{array}{cccccccc} " & " & " & 1 & " & " & " & \frac{10000}{76.25} & " \\ " & " & " & 45.75 & " & " & " & \frac{10000 \times 45.75}{76.25} & " \\ " & & & & & & & & \end{array}$$

$$= 6000 \text{ টাকা}$$

\therefore ঋণের পরিমাণ 6000 টাকা (Ans.)

প্রশ্ন ১৪ [য. বো. ১৬]

$$x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ হলে-}$$

ক. $\frac{1}{x}$ নির্ণয় কর। ২

খ. $x^6 + \frac{1}{x^6}$ এর মান কত? ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 14$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$x = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{9 - 8}$$

$$= 3 - 2\sqrt{2} \quad (\text{Ans.})$$

খ দেওয়া আছে, $x = 3 + 2\sqrt{2}$

এবং 'ক' হতে পাই,

$$\frac{1}{x} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$$

$$\text{এখন, } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 6^2 - 2 = 36 - 2 = 34$$

$$\therefore x^6 + \frac{1}{x^6} = (x^2)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= (34)^3 - 3 \cdot 34$$

$$= 39304 - 102$$

$$= 39202 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে,

$$x = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x = 2 + 2\sqrt{2} + 1$$

$$\text{বা, } x = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + 1^2$$

$$\text{বা, } x = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1}$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$= \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$$

$$\text{এখন, } (\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 2$$

$$= 8 + 6$$

$$= 14$$

$$\therefore (\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 14 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ১৫ বি. বো. ১৬/

$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 21$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 7$, যেখানে a, b ধনাত্মক এবং $a > b$.

ক. $a^2 - ab + b^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 80$. ৪

গ. a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 21$

এবং $a^2 + ab + b^2 = 7$, যেখানে a, b ধনাত্মক এবং $a > b$

এখানে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 21$

$$\text{বা, } (a^2)^2 + 2 \cdot a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = 21$$

$$\text{বা, } (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 21$$

$$\text{বা, } (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = 21$$

$$\text{বা, } (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = 21$$

$$\text{বা, } 7(a^2 - ab + b^2) = 21$$

$$\therefore a^2 - ab + b^2 = 3 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $a^2 + ab + b^2 = 7$ (i)

'ক' থেকে পাই, $a^2 - ab + b^2 = 3$ (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$2a^2 + 2b^2 = 10$$

$$\text{বা, } 2(a^2 + b^2) = 10$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

আবার, সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$2ab = 4$$

$$\therefore ab = 2$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = 8ab(a^2 + b^2) = 8 \times 2 \times 5$$

$$= 80 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore 8ab(a^2 + b^2) = 80 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ 'খ' থেকে পাই,

$$a^2 + b^2 = 5 \text{ (i)}$$

$$\text{এবং } ab = 2 \text{ (ii)}$$

$$\text{আমরা পাই, } (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$= 5^2 - 4 \cdot 2^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 3 \text{ (iii) } [\square a > b \text{ এবং } a, b \text{ ধনাত্মক}]$$

সমীকরণ (i) ও (iii) যোগ করে পাই,

$$2a^2 = 8$$

$$\text{বা, } a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2, [\square a > 0]$$

এখন, a এর মান সমীকরণ (ii) এ বসিয়ে পাই,

$$2b = 2 \therefore b = 1$$

$$\therefore a = 2 \text{ এবং } b = 1 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৬ টা. বো. ১৫/

একটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গ ঐ সংখ্যার পাঁচগুণ হতে ১ কম।

ক. ধনাত্মক সংখ্যাটি x হলে দেখাও যে, $x + \frac{1}{x} = 5$ ২

খ. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 2525$ ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রশ্নমতে, $5x - x^2 = 1$

$$\text{বা, } x^2 + 1 = 5x$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 1}{x} = 5 \text{ [উভয়পক্ষকে } x \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 5 \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$\text{খ } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \text{ } [\square (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab]$$

$$= 5^2 - 4 = 21$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{21}$$

$$\text{এখন } x^3 - \frac{1}{x^3}$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \text{ } [\square a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)]$$

$$= (\sqrt{21})^3 + 3(\sqrt{21})$$

$$= 21\sqrt{21} + 3\sqrt{21}$$

$$= 24\sqrt{21} \text{ (Ans.)}$$

গ

'ক' হতে পাই, $x + \frac{1}{x} = 5$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \text{ } [\square a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab]$$

$$= 5^2 - 2$$

$$= 23$$

$$\text{এবং } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$[\square a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)]$$

$$= 5^3 - 3.5$$

$$= 125 - 15$$

$$= 110$$

$$\text{এখন, } \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 23 \times 110$$

$$\text{বা, } x^5 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} = 2530$$

$$\text{বা, } x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 2530$$

$$\text{বা, } x^5 + \frac{1}{x^5} + 5 = 2530 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 2525 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ১৭ [রা. বো. ১৫]

$$a = \sqrt{6} + \sqrt{5} \text{ হলে,}$$

$$\text{ক. } \frac{1}{a} \text{ নির্ণয় কর।} \quad ২$$

$$\text{খ. } a^3 + \frac{1}{a^3} \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad ৪$$

$$\text{গ. } a^6 + \frac{1}{a^6} \text{ মান নির্ণয় কর।} \quad ৪$$

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

$$\text{ক. দেওয়া আছে, } a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ. 'ক' হতে পাই, } a = \sqrt{6} + \sqrt{5}, \frac{1}{a} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{এখন, } a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$= (2\sqrt{6})^3 - 3.2\sqrt{6} \quad [\square a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{6}]$$

$$= 48\sqrt{6} - 6\sqrt{6}$$

$$= 42\sqrt{6} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{গ. 'খ' হতে পাই, } a^3 + \frac{1}{a^3} = 42\sqrt{6}$$

$$\text{এখন, } a^6 + \frac{1}{a^6} = (a^3)^2 + \left(\frac{1}{a^3}\right)^2$$

$$= \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)^2 - 2.a^3 \cdot \frac{1}{a^3}$$

$$= (42\sqrt{6})^2 - 2 \quad [\because a^3 + \frac{1}{a^3} = 42\sqrt{6}]$$

$$= 10582 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৮ [দি. বো. ১৫]

$$\text{যদি } p + q = 6 \text{ এবং } pq = 3 \text{ হয়, যেখানে, } p > q.$$

$$\text{ক. } (p - q) \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad ২$$

$$\text{খ. } p^3 - q^3 - 5(p^2 - q^2) \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad ৪$$

$$\text{গ. দেখাও যে, } p^5 + q^5 = 4806. \quad ৪$$

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

$$\text{ক. দেওয়া আছে, } p + q = 6 \text{ এবং } pq = 3 \text{ হয়, যেখানে, } p > q$$

$$\text{আমরা জানি, } (p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$$

$$= (6)^2 - 4.3 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 36 - 12$$

$$= 24$$

$$\therefore p - q = 2\sqrt{6} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ. দেওয়া আছে, } p + q = 6, pq = 3$$

$$\text{'ক' হতে পাই, } p - q = 2\sqrt{6}$$

$$\text{এখন, } p^3 - q^3 - 5(p^2 - q^2)$$

$$= (p - q)^3 + 3pq(p - q) - 5(p + q)(p - q)$$

$$= (2\sqrt{6})^3 + 3.3.2\sqrt{6} - 5.6.2\sqrt{6} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 48\sqrt{6} + 18\sqrt{6} - 60\sqrt{6}$$

$$= 6\sqrt{6} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{গ. দেওয়া আছে, } p + q = 6 \text{ এবং } pq = 3$$

$$\text{বামপক্ষ} = p^5 + q^5$$

$$= p^5 + p^3q^2 + p^2q^3 + q^5 - p^3q^2 - p^2q^3$$

$$= p^3(p^2 + q^2) + q^3(p^2 + q^2) - p^2q^2(p + q)$$

$$= \{(p^2 + q^2)(p^3 + q^3)\} - (pq)^2(p + q)$$

$$= [\{(p + q)^2 - 2pq\} \{(p + q)^3 - 3pq(p + q)\}] - (pq)^2(p + q)$$

$$= [\{(6)^2 - 2.3\} \{(6)^3 - 3.3.6\}] - (3)^2.6 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= (36 - 6)(216 - 54) - 9.6$$

$$= 30.162 - 54$$

$$= 4860 - 54 = 4806$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore p^5 + q^5 = 4806 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ১৯ [কু. বো. ১৫]

$$x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0 \text{ একটি বীজগাণিতিক সমীকরণ।}$$

$$\text{ক. } x + \frac{1}{x} \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad ২$$

$$\text{খ. } x^4 - \frac{1}{x^4} \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad ৪$$

$$\text{গ. প্রমাণ কর যে, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5}. \quad ৪$$

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

$$\text{ক. } x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 1 = \sqrt{5}x$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 1}{x} = \sqrt{5} \text{ [উভয় পক্ষকে } x \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ. } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} \quad [\square a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab]$$

$$= (\sqrt{5})^2 - 2 = 5 - 2 = 3$$

$$\text{আবার, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4x \cdot \frac{1}{x} \quad [\square (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab]$$

$$= (\sqrt{5})^2 - 4 = 5 - 4 = 1$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

এখন, $x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ [$\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$]
 $= \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \pm(1)\sqrt{5.3}$
 $= \pm 3\sqrt{5}$ (Ans.)

গ $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$
 $[\square a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)]$
 $= (\sqrt{5})^3 - 3.\sqrt{5}$
 $= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$
 $= 2\sqrt{5}$

এখন, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}$

বা, $3.2\sqrt{5} = x^5 + \frac{1}{x^5} + \left(x + \frac{1}{x}\right)$

বা, $6\sqrt{5} = x^5 + \frac{1}{x^5} + \sqrt{5}$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 6\sqrt{5} - \sqrt{5}$

$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ২০ [চ. বো. ১৫]

$a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে —

ক. $\frac{1}{a}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{a^{12} - 1}{a^6} = 1932\sqrt{30}$ এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন ১৭(ক) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ 'ক' হতে পাই, $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, $\frac{1}{a} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6}$

এবং $a - \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

এখন, $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$
 $= \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{a}\right)\right\}\left\{\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3.a.\frac{1}{a}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right\}$
 $= \{2\sqrt{6}.2\sqrt{5}\}\{(2\sqrt{5})^3 + 3.2\sqrt{5}\}$ [মান বসিয়ে]
 $= 4\sqrt{6}.\sqrt{5}(40\sqrt{5} + 6\sqrt{5})$ [মান বসিয়ে]
 $= 4\sqrt{6}.\sqrt{5}.46\sqrt{5}$
 $= 920\sqrt{6}$ (Ans.)

গ 'খ' হতে পাই,

$a - \frac{1}{a} = 2\sqrt{5}$, $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{6}$

বামপক্ষ $= \frac{a^{12} - 1}{a^6} = a^6 - \frac{1}{a^6}$

$= (a^3)^2 - \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$

$= \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3.a.\frac{1}{a}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\}\left\{\left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3.a.\frac{1}{a}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right\}$

$= \{(2\sqrt{6})^3 - 3.2\sqrt{6}\}.\{(2\sqrt{5})^3 + 3.2\sqrt{5}\}$ [মান বসিয়ে]

$= (48\sqrt{6} - 6\sqrt{6})(40\sqrt{5} + 6\sqrt{5})$

$= 42\sqrt{6}.46\sqrt{5}$

$= 1932\sqrt{30}$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{a^{12} - 1}{a^6} = 1932\sqrt{30}$ (সত্যতা যাচাই করা হলো)

প্রশ্ন ২১ [সি. বো. ১৫]

$p^2 - 1 = 4p$ হলে —

ক. $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{p^3 + 5p}{p^4 + 4p^2 - 5} \times \sqrt[3]{64}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $p^4 = 322 - \frac{1}{p^4}$ ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p^2 - 1 = 4p$

বা, $\frac{p^2 - 1}{p} = 4$

বা, $p - \frac{1}{p} = 4$

এখন, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 4.p.\frac{1}{p}$ [$\square (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$]
 $= 4^2 + 4$
 $= 20$ (Ans.)

খ $\frac{p^3 + 5p}{p^4 + 4p^2 - 5} \times \sqrt[3]{64}$

$= \frac{p(p^2 + 5)}{p^4 + 5p^2 - p^2 - 5} \times \sqrt[3]{64}$

$= \frac{p(p^2 + 5)}{p^2(p^2 + 5) - 1(p^2 + 5)} \times \sqrt[3]{64}$

$= \frac{p(p^2 + 5)}{(p^2 + 5)(p^2 - 1)} \times 4$

$= \frac{4p}{p^2 - 1}$

$= \frac{4p}{4p}$ [$\square p^2 - 1 = 4p$]

$= 1$ (Ans.)

গ এখন, $p - \frac{1}{p} = 4$

বা, $\left(p - \frac{1}{p}\right)^2 = 4^2$

বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} - 2.p.\frac{1}{p} = 16$ [$\square (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$]

বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} - 2 = 16$

বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} = 18$

বা, $\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 = 18^2$

বা, $p^4 + \frac{1}{p^4} + 2.p^2.\frac{1}{p^2} = 324$ [$\square (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$]

বা, $p^4 + \frac{1}{p^4} + 2 = 324$

বা, $p^4 = 324 - \frac{1}{p^4} - 2$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $p^4 = 322 - \frac{1}{p^4}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ২২ [য. বো. ১৫]

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = -\sqrt{3} \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$x^4 - x^2 + 1 = 0 \text{ হলে —}$$

ক. $x + \frac{1}{x}$ এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $\frac{x^6 + 1}{x^3} = 0$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = -\sqrt{3}$. ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^4 - x^2 + 1 = 0$

বা, $x^4 + 1 = x^2$

বা, $\frac{x^4 + 1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2}$

বা, $\frac{x^4}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 1$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 1 + 2$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$

$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$ (Ans.)

খ 'ক' থেকে প্রাপ্ত, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ [শুধু ধনাত্মক মান নিয়ে]

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \frac{x^6 + 1}{x^3} \\ &= \frac{x^6}{x^3} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ &= 0 \\ &= \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore \frac{x^6 + 1}{x^3} = 0$ (দেখানো হলো)

গ 'ক' থেকে প্রাপ্ত $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ [শুধু ধনাত্মক মান নিয়ে]

'খ' থেকে প্রাপ্ত,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 0 \text{ (i)}$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = (\sqrt{3})^2 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 \text{ (ii)}$$

(i) ও (ii) নং গুণ করে,

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \times 1$$

বা, $x^5 + x^3 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \cdot x^2 + \frac{1}{x^5} = 0$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = 0$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^3} + \sqrt{3} = 0$