SSC Math

অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট

অধ্যায়-৪: সূচক ও লগারিদম

প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **সূচক :** সূচক ও ভিত্তি সংবলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়।

  a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণ, অর্থাৎ, $a \times a \times a \times \cdots \times a$ কে a^n আকারে লেখা হয়, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
  $a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a$ (n সংখ্যক বার a) $= a^n$
  এখানে, $n \rightarrow$ সূচক বা ঘাত
  $a \rightarrow$ ভিত্তি
  আবার, বিপরীতক্রমে $a^n = a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a$ (n সংখ্যক বার a)
  সূচক শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই নয়, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ধনাত্মক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশও হতে পারে। অর্থাৎ, ভিত্তি $a \in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং সূচক $n \in Q$ (মূলদ সংখ্যার সেট) এর জন্য a^n সংজ্ঞায়িত।

- **সূচকের সূত্রাবলি :**
  ধরি, $a \in R$; $m, n \in N$.

  সূত্র ১। $a^m \times a^n = a^{m+n}$

  সূত্র ২। $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \text{ যখন } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} \text{ যখন } n > m \end{cases}$

  সূত্র ৩। $(ab)^n = a^n \times b^n$

  সাধারণভাবে, $(ab)^n = ab \times ab \times ab \times \cdots\cdots \times ab$ [n সংখ্যক ab এর ক্রমিক গুণ]

  $= (a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a) \times (b \times b \times b \times \cdots\cdots \times b)$

  $= a^n b^n$

  সূত্র ৪। $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$

  সাধারণভাবে, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \cdots\cdots \times \dfrac{a}{b}$ [n সংখ্যক $\dfrac{a}{b}$ এর ক্রমিক গুণ]

  $= \dfrac{a \times a \times a \times \cdots\cdots \times a}{b \times b \times b \times \cdots\cdots \times b} = \dfrac{a^n}{b^n}$

  সংজ্ঞা : $a^0 = 1, (a \neq 0)$

  $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, (a \neq 0, n \in N)$

  সূত্র ৫। $(a^m)^n = a^{mn}$

  প্রমাণ : $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots \times a^m$ [n সংখ্যক a^m এর ক্রমিক গুণ]

  $= a^{m+m+m+\cdots\cdots+m}$ [ঘাতে n সংখ্যক গুণকের যোগফল]
  $= a^{n \times m} = a^{mn} \therefore (a^m)^n = a^{mn}$

- **nতম মূল**

  nতম মূলের ক্ষেত্রে,

  $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \cdots\cdots \times a^{\frac{1}{n}}$ [n সংখ্যক $a^{\frac{1}{n}}$ এর ক্রমিক গুণ]

  $= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$

  আবার, $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \cdots\cdots \times a^{\frac{1}{n}}$

  $= a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}}$ [সূচকে n সংখ্যক $\frac{1}{n}$ এর যোগ]

  $= a^{n \times \frac{1}{n}} = a$

  $\therefore \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$·

  $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত = a এবং a এর n তম মূল = $a^{\frac{1}{n}}$

  অর্থাৎ, $a^{\frac{1}{n}}$ এর nতম ঘাত = $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$ = a এবং a এর nতম মূল $(a)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ । a এর nতম মূলকে $\sqrt[n]{a}$ আকারে লেখা হয়।

  লক্ষণীয় :

  1· $a > 0, a \neq 1$ শর্তে $a^x = a^y$ হলে, $x = y$

  2· $a > 0, b > 0, x \neq 0$ শর্তে $a^x = b^x$ হলে, $a = b$

- **লগারিদম *(Logarithm)***

  $a^x = N, (a > 0, a \neq 1)$ হলে, $x = \log_a N$ কে N এর a ভিত্তিক লগ বলা হয়।

  সূচকীয় রাশির মান বের করতে লগারিদম ব্যবহার করা হয়। লগারিদমকে সংক্ষেপে লগ (Log) লেখা হয়। বড় বড় সংখ্যা বা রাশির গুণফল, ভাগফল ইত্যাদি log এর সাহায্যে সহজে নির্ণয় করা যায়।

  আমরা জানি, $2^3 = 8$; এই গাণিতিক উক্তিটিকে লগের মাধ্যমে লেখা হয় $\log_2 8 = 3$· আবার, বিপরীতক্রমে, $\log_2 8 = 3$ হলে, সূচকের মাধ্যমে লেখা যাবে $2^3 = 8$; অর্থাৎ $2^3 = 8$ হলে $\log_2 8 = 3$ এবং বিপরীতক্রমে, $\log_2 8 = 3$ হলে $2^3 = 8$· একইভাবে $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ কে লগের মাধ্যমে লেখা যায়, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$·

- **সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ**

  সূচকের সাহায্যে আমরা অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে ছোট ও সহজ আকারে প্রকাশ করতে পারি। যেমন,

  আলোর গতি = 300000 কি.মি./সে. = 300000000 মিটার/সে.

  $= 3 \times 100000000$ মি·/সে. $= 3 \times 10^8$ মি·/সে.

  সুবিধার জন্য অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখানে, $1 \leq a < 10$ এবং $n \in Z$· কোনো সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ।

- **লগারিদম পদ্ধতি**

  লগারিদম পদ্ধতি দুই ধরনের :

(ক) **স্বাভাবিক লগারিদম (Natural Logarithm) :** স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (*John Napier :* 1550-1617) ১৬১৪ সালে e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম সম্পর্কিত বই প্রকাশ করেন। e একটি অমূলদ সংখ্যা, e = 2·71828···। তাঁর এই লগারিদমকে নেপিরিয়ান লগারিদম বা e ভিত্তিক লগারিদম বা স্বাভাবিক লগারিদমও বলা হয়। $\log_e x$ কে *ln* x আকারেও লেখা হয়।

(খ) **সাধারণ লগারিদম (Common Logarithm) :** ইংল্যান্ডের গাণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (*Henry Briggs :* 1561–1630) ১৬২৪ সালে 10 কে ভিত্তি করে লগারিদমের টেবিল (লগ টেবিল বা লগ সারণি) তৈরি করেন। তাঁর এই লগারিদমকে ব্রিগস লগারিদম বা 10 ভিত্তিক লগারিদম বা ব্যবহারিক লগারিদমও বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : লগারিদমের ভিত্তির উল্লেখ না থাকলে রাশির (বীজগণিতীয়) ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। লগ সারণিতে ভিত্তি 10 ধরতে হয়।

■ **সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক**

(ক) পূর্ণক (Characteristics) : ধরি, একটি সংখ্যা N কে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ করে পাই, $N = a \times 10^n$, যেখানে $N > 0$, $1 \le a < 10$ এবং $n \in Z$। উভয় পক্ষে 10 ভিত্তিতে লগ নিয়ে পাই, $\log_{10} N = \log_{10}(a \times 10^n)$

$\therefore \log_{10} N = \log_{10} a + \log_{10} 10^n$ ভিত্তি 10 উহ্য রেখে পাই, $\log N = n + \log a$; n কে বলা হয় logN এর পূর্ণক।

দ্রষ্টব্য : ১· পূর্ণক ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। কিন্তু অংশক সর্বদা ধনাত্মক।

দ্রষ্টব্য : ২· কোনো পূর্ণক ঋণাত্মক হলে, পূর্ণকটির বামে '–' চিহ্ন না দিয়ে পূর্ণকটির উপরে '–' (বার চিহ্ন) দিয়ে লেখা হয়।

যেমন, পূর্ণক -3 কে লেখা হয় $\bar{3}$ দিয়ে। তা না হলে অংশকসহ লগের সম্পূর্ণ অংশটি ঋণাত্মক বোঝাবে।

(খ) অংশক (Mantissa) : কোনো সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলত অমূলদ সংখ্যা। তবে একটি নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের মান বের করা হয়।

কোনো সংখ্যার লগের অংশক লগ তালিকা থেকে বের করা যায়। আবার তা ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও বের করা যায়।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

প্রশ্ন ▶১ *[ঢা. বো. ১৭]*

$a = \frac{x^p}{x^q}$, $b = \frac{x^q}{x^r}$ এবং $c = \frac{x^r}{x^p}$

ক. abc এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $a^{\frac{1}{pq}} \times b^{\frac{1}{qr}} \times c^{\frac{1}{rp}} = 1$ ৪

গ. দেখাও যে, $(p + q)\log a + (q + r)\log b + (r + p)\log c = 0$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a = \frac{x^p}{x^q}$, $b = \frac{x^q}{x^r}$ এবং $c = \frac{x^r}{x^p}$

প্রদত্ত রাশি $= abc = \frac{x^p}{x^q} \cdot \frac{x^q}{x^r} \cdot \frac{x^r}{x^p} = 1$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= a^{\frac{1}{pq}} \times b^{\frac{1}{qr}} \times c^{\frac{1}{rp}}$

$= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{\frac{1}{pq}} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{\frac{1}{qr}} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{\frac{1}{rp}}$ [a, b, c এর মান বসিয়ে]

$= (x^{p-q})^{\frac{1}{pq}} \times (x^{q-r})^{\frac{1}{qr}} \times (x^{r-p})^{\frac{1}{rp}}$

$= x^{\frac{p-q}{pq} + \frac{q-r}{qr} + \frac{r-p}{rp}} = x^{\frac{pr-qr+pq-pr+qr-pq}{pqr}}$

$= x^{\frac{0}{pqr}} = x^0 = 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore a^{\frac{1}{pq}} \times b^{\frac{1}{qr}} \times c^{\frac{1}{rp}} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ বামপক্ষ $= (p + q)\log a + (q + r)\log b + (r + p)\log c$

$= \log\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q} + \log\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r} + \log\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p}$

[a, b, c এর মান বসিয়ে]

$= \log (x^{p-q})^{p+q} + \log (x^{q-r})^{q+r} + \log (x^{r-p})^{r+p}$

$= \log x^{p^2-q^2} + \log x^{q^2-r^2} + \log x^{r^2-p^2}$

$= \log (x^{p^2-q^2} \cdot x^{q^2-r^2} \cdot x^{r^2-p^2})$

$= \log (x^{p^2-q^2+q^2-r^2+r^2-p^2})$

$= \log x^0 = \log 1$

$= 0$ [$\because \log 1 = 0$]

= ডানপক্ষ

$\therefore (p + q)\log a + (q + r)\log b + (r + p)\log c = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶২ *[দি. বো. ১৭]*

$A = x^p$; $B = x^q$; $C = x^r$ এবং $M = 2^{2x+1}$ কয়েকটি রাশি।

ক. $M = 512$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(\frac{A}{B}\right)^{p^2+pq+q^2} \times \left(\frac{B}{C}\right)^{q^2+qr+r^2} \times \left(\frac{C}{A}\right)^{r^2+rp+p^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log_x (ABC) = 1\log_x A + \log_x B + \log_x C$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $M = 2^{2x+1}$

$M = 512$ হলে $2^{2x+1} = 512$

বা, $2^{2x+1} = 2^9$

বা, $2x + 1 = 9$

বা, $2x = 9 - 1$

বা, $2x = 8$

$\therefore x = 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = x^p$, $B = x^q$ ও $C = x^r$

প্রদত্ত রাশি $= \left(\frac{A}{B}\right)^{p^2+pq+q^2} \times \left(\frac{B}{C}\right)^{q^2+qr+r^2} \times \left(\frac{C}{A}\right)^{r^2+rp+p^2}$

$= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p^2+pq+q^2} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q^2+qr+r^2} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r^2+rp+p^2}$

$= (x^{p-q})^{p^2+pq+q^2} \times (x^{q-r})^{q^2+qr+r^2} \times (x^{r-p})^{r^2+rp+p^2}$

$= x^{(p-q)(p^2+pq+q^2)} \times x^{(q-r)(q^2+qr+r^2)} \times x^{(r-p)(r^2+rp+p^2)}$

$= x^{p^3-q^3} \times x^{q^3-r^3} \times x^{r^3-p^3}$

$= x^{p^3-q^3+q^3-r^3+r^3-p^3}$

$= x^0 = 1$ **(Ans.)**

গ ধরি, $\log_x A = P$, $\log_x B = q$ এবং $\log_x C = r$

$\therefore A = x^p$, $B = x^q$ এবং $C = x^r$

এখন, $ABC = x^p.x^q.x^r$

বা, $ABC = x^{p+q+r}$

বা, $\log_x ABC = p + q + r$

বা, $\log_x(ABC) = \log_x A + \log_x B + \log_x C$ [p, q ও r এর মান বসিয়ে]

$\therefore \log_x(ABC) = \log_x A + \log_x B + \log_x C$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৩ *[ব. বো. ১৬]*

$A = 4^{2p+1}$, $B = \frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}}$, $C = \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}$, $D = 3^x + 3^{1-x}$.

ক. $A = 128$ হলে P এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $B \div C = \frac{1}{25}$. ৪

গ. $D = 4$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = 4^{2p+1}$

$\therefore A = 128$ হলে, $128 = 4^{2p+1}$

বা, $2^7 = (2^2)^{2p+1}$

বা, $2^7 = 2^{4p+2}$

বা, $7 = 4p + 2$

বা, $4p = 7 - 2$

বা, $4p = 5$

$\therefore p = \frac{5}{4}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}}$ এবং $C = \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}$

এখন, $B \div C = \frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}$

$= \frac{5^{m+1}}{5^{m^2-m}} \div \frac{(5^2)^{m+1}}{5^{m^2-1}}$

$= 5^{m+1-m^2+m} \div \frac{5^{2m+2}}{5^{m^2-1}}$

$= 5^{2m+1-m^2} \div 5^{2m+2-m^2+1}$

$= 5^{2m+1-m^2-2m-2+m^2-1}$

$= 5^{-2}$

$= \frac{1}{5^2}$

$\therefore B \div C = \frac{1}{25}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $D = 3^x + 3^{1-x}$

$D = 4$ হলে,

$4 = 3^x + 3^{1-x}$

বা, $3^x + \frac{3}{3^x} = 4$

বা, $a + \frac{3}{a} = 4$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $a^2 + 3 = 4a$ [a দ্বারা গুণ করে]

বা, $a^2 - 4a + 3 = 0$

বা, $a^2 - 3a - a + 3 = 0$

বা, $a(a-3) - 1(a-3) = 0$

বা, $(a-3)(a-1) = 0$

হয় $a - 3 = 0$ অথবা $a - 1 = 0$

বা, $a = 3$ বা, $a = 1$

বা, $3^x = 3^1$

$\therefore x = 1$ বা, $3^x = 3^0$ [a এর মান বসিয়ে]

$\therefore x = 0$ [$a > 0, a \neq 1$ শর্তে $a^x = a^y$ হলে $x = y$]

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $x = 0, 1$

প্রশ্ন ▶৪ ***[চ. বো. ১৫]***

L, M, N তিনটি বীজগাণিতিক রাশি যেখানে,

$L = \frac{x^a}{x^b}, M = \frac{x^b}{x^c}, N = \frac{x^c}{x^a}$.

ক. $L = 1$ হলে দেখাও যে, $a = b$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt[ab]{L} \times \sqrt[bc]{M} \times \sqrt[ca]{N} = 1$. ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,

$\log_k L^{a+b} + \log_k M^{b+c} + \log_k N^{c+a} = 0$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $L = 1$

বা, $\frac{x^a}{x^b} = 1$

বা, $x^{a-b} = x^0$

বা, $a - b = 0$

$\therefore a = b$ **(দেখানো হলো)**

খ প্রশ্ন ১ এর (খ) ও (গ) এর সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৫ $A = 6^{p+q}, B = 6^{q+r}, C = 6^{r+p}$ হলে —— *[ব. বো. ১৫]*

ক. $\log_{3\sqrt{2}} 324$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(\frac{A}{B}\right)^{p+r} \times \left(\frac{B}{C}\right)^{q+p} \times \left(\frac{C}{A}\right)^{r+q}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(AB)^{p-r} \times (BC)^{q-p} \times (CA)^{r-q} = 1$. ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_{3\sqrt{2}} 324 = \log_{3\sqrt{2}} (3\sqrt{2})^4 = 4 \log_{3\sqrt{2}} 3\sqrt{2}$

$= 4.1$ [$\because \log_a a = 1$]

$= 4$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = 6^{p+q}, B = 6^{q+r}, C = 6^{r+p}$

এখন, $\left(\frac{A}{B}\right)^{p+r} \times \left(\frac{B}{C}\right)^{q+p} \times \left(\frac{C}{A}\right)^{r+q}$

$= \left(\frac{6^{p+q}}{6^{q+r}}\right)^{p+r} \times \left(\frac{6^{q+r}}{6^{r+p}}\right)^{q+p} \times \left(\frac{6^{r+p}}{6^{p+q}}\right)^{r+q}$ [মান বসিয়ে]

$= (6^{p+q-q-r})^{p+r} \times (6^{q+r-r-p})^{q+p} \times (6^{r+p-p-q})^{r+q}$

$= (6^{p-r})^{p+r} \times (6^{q-p})^{q+p} \times (6^{r-q})^{r+q}$

$= 6^{p^2-r^2} \times 6^{q^2-p^2} \times 6^{r^2-q^2}$

$= 6^{p^2-r^2+q^2-p^2+r^2-q^2}$

$= 6^0 = 1$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = 6^{p+q}, B = 6^{q+r}, C = 6^{r+p}$

বামপক্ষ $= (AB)^{p-r} \times (BC)^{q-p} \times (CA)^{r-q}$

$= (6^{p+q}.6^{q+r})^{p-r} \times (6^{q+r}.6^{r+p})^{q-p} \times (6^{r+p}.6^{p+q})^{r-q}$ [মান বসিয়ে]

$= (6^{p+q+q+r})^{p-r} \times (6^{q+r+r+p})^{q-p} \times (6^{r+p+p+q})^{r-q}$

$= (6^{p+2q+r})^{p-r} \times (6^{q+2r+p})^{q-p} \times (6^{r+2p+q})^{r-q}$

$= 6^{p^2+2pq+pr-pr-2qr-r^2} \times 6^{q^2+2qr+pq-pq-2pr-p^2} \times 6^{r^2+2pr+qr-qr-2pq-q^2}$

$= 6^{p^2+2pq-2qr-r^2+q^2+2qr-2pr-p^2+r^2+2pr-2pq-q^2}$

$= 6^0$

$= 1$ = ডানপক্ষ

$\therefore (AB)^{p-r} \times (BC)^{q-p} \times (CA)^{r-q} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৬ $x^3 + \frac{1}{x^3} = 52$, $P = 5^{b-c}$, $Q = 5^{c-a}$ এবং $R = 5^{a-b}$

ক. 2 ভিত্তিক 11 লগারিদমের পূর্ণক নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^{-1} = 2 - \sqrt{3}$ ৪

গ. $\left(\frac{P}{Q}\right)^{b-a} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{c-b} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{a-c}$ এর একটি মান নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক 2 ভিত্তিক 11 এর লগারিদম $= \log_2 11$

$= 3.459$

$\therefore$ লগারিদমটির পূর্ণক 3 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 52$

বা, $x^6 + 1 = 52x^3$

বা, $x^6 - 52x^3 + 1 = 0$

বা, $x^6 - 52x^3 + 676 - 675 = 0$

বা, $(x^3)^2 - 2.x^3.26 + (26)^2 - (15\sqrt{3})^2 = 0$

বা, $(x^3 - 26)^2 = (15\sqrt{3})^2$

বা, $x^3 - 26 = 15\sqrt{3}$

বা, $x^3 = 26 + 15\sqrt{3}$

বা, $x^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{3} + 3.2.(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3$

বা, $x^3 = (2 + \sqrt{3})^3$

$\therefore x = 2 + \sqrt{3}$

এখন, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\frac{1}{x} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}$

$\therefore \frac{1}{x} = 2 - \sqrt{3}$

$\therefore x^{-1} = 2 - \sqrt{3}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $P = 5^{b-c}$, $Q = 5^{c-a}$, $R = 5^{a-b}$

$\left(\frac{P}{Q}\right)^{b-a} = \left(\frac{5^{b-c}}{5^{c-a}}\right)^{b-a}$

$= (5^{b-c-c+a})^{b-a}$

$= (5^{b-2c+a})^{b-a}$

$= 5^{b^2-2bc+ab-ab+2ac-a^2}$

$= 5^{b^2-2bc+2ac-a^2}$

$\left(\frac{Q}{R}\right)^{c-b} = \left(\frac{5^{c-a}}{5^{a-b}}\right)^{c-b}$

$= (5^{c-a-a+b})^{c-b}$

$= (5^{c-2a+b})^{c-b}$

$= 5^{c^2-2ac+bc-bc+2ab-b^2}$

$= 5^{c^2-2ac+2ab-b^2}$

$\left(\frac{R}{P}\right)^{a-c} = \left(\frac{5^{a-b}}{5^{b-c}}\right)^{a-c}$

$= (5^{a-b-b+c})^{a-c}$

$= (5^{a-2b+c})^{a-c}$

$= 5^{a^2-2ab+ac-ac+2bc-c^2}$

$= 5^{a^2-2ab+2bc-c^2}$

এখন, $\left(\frac{P}{Q}\right)^{b-a} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{c-b} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{a-c}$

$= 5^{b^2-2bc+2ac-a^2} . 5^{c^2-2ac+2ab-b^2} . 5^{a^2-2ab+2bc-c^2}$

$= 5^{b^2-2bc+2ac-a^2+c^2-2ac+2ab-b^2+a^2-2ab+2bc-c^2}$

$= 5^0 = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $P = \frac{x^a}{x^b}$, $Q = \frac{x^b}{x^c}$ এবং $R = \frac{x^c}{x^a}$.

ক. $\sqrt{P}\sqrt{Q}\sqrt{R}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর, $\sqrt[ab]{P} . \sqrt[bc]{Q} . \sqrt[ca]{R} = 1$. ৪

গ. দেখাও যে, $\log P^{a^2+ab+b^2} + \log Q^{b^2+bc+c^2} + \log R^{c^2+ac+a^2} = 0$ ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P = \frac{x^a}{x^b}$, $Q = \frac{x^b}{x^c}$, $R = \frac{x^c}{x^a}$

এখন, $\sqrt{P} . \sqrt{Q} . \sqrt{R}$

$= \sqrt{PQR} = \sqrt{\frac{x^a}{x^b} . \frac{x^b}{x^c} . \frac{x^c}{x^a}} = \sqrt{x^{a-b} . x^{b-c} . x^{c-a}}$

$= \sqrt{x^{a-b+b-c+c-a}} = \sqrt{x^0} = \sqrt{1}$

$= 1$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= \sqrt[ab]{P} . \sqrt[bc]{Q} . \sqrt[ca]{R}$

$= (P)^{\frac{1}{ab}} . (Q)^{\frac{1}{bc}} . (R)^{\frac{1}{ca}}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$ [P, Q ও R এর মান বসিয়ে]

$= (x^{a-b})^{\frac{1}{ab}} . (x^{b-c})^{\frac{1}{bc}} . (x^{c-a})^{\frac{1}{ca}}$

$= x^{\frac{a-b}{ab}} . x^{\frac{b-c}{bc}} . x^{\frac{c-a}{ca}}$

$= x^{\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}}$

$= x^{\frac{c(a-b)+a(b-c)+b(c-a)}{abc}}$

$= x^{\frac{ca-bc+ab-ca+bc-ab}{abc}}$

$= x^{\frac{0}{abc}} = x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt[ab]{P} . \sqrt[bc]{Q} . \sqrt[ca]{R} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ বামপক্ষ $= \log P^{a^2+ab+b^2} + \log Q^{b^2+bc+c^2} + \log R^{c^2+ca+a^2}$

$= \log \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} + \log \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} + \log \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= \log x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} + \log x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} + \log x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$= \log x^{(a^3-b^3)} + \log x^{(b^3-c^3)} + \log x^{(c^3-a^3)}$

$= \log (x^{a^3-b^3} . x^{b^3-c^3} . x^{c^3-a^3}) = \log x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= \log x^0 = \log 1 = 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \log P^{a^2+ab+b^2} + \log Q^{b^2+bc+c^2} + \log R^{c^2+ca+a^2} = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৮ যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$ হয়–

ক. xyz এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b} = 1$. ৪

গ. সরল কর: $\log_e \frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3d^3}{a^3} - 3\log_e b^2c$. ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$a^x = b$, $b^y = c$, $c^z = a$

এখন, $c^z = a$

বা, $(b^y)^z = a$ [$\because b^y = c$]

বা, $b^{yz} = a$

বা, $(a^x)^{yz} = a$ [$\because a^x = b$]

বা, $a^{xyz} = a^1$

$\therefore xyz = 1$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b}$

$= (x^{a-b})^{a+b-c} \times (x^{b-c})^{b+c-a} \times (x^{c-a})^{c+a-b}$

$= x^{(a-b)(a+b)-(a-b)c} \times x^{(b-c)(b+c)-(b-c)a} \times x^{(c-a)(c+a)-(c-a)b}$

$= x^{a^2-b^2-ac+bc} \times x^{b^2-c^2-ab+ac} \times x^{c^2-a^2-bc+ab}$

$= x^{a^2-b^2-ac+bc+b^2-c^2-ab+ac+c^2-a^2-bc+ab}$

$= x^0$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ $\log_e \frac{a^3b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3d^3}{a^3} - 3\log_e b^2c$

$= \log_e \left(\frac{a^3b^3}{c^3} \times \frac{b^3c^3}{d^3} \times \frac{c^3d^3}{a^3}\right) - 3\log_e b^2c$

$= \log_e (b^{3+3} . c^3) - 3\log_e b^2c$

$= \log_e b^6c^3 - 3\log_e b^2c$

$= \log_e (b^2c)^3 - 3\log_e b^2c$

$= 3\log_e b^2c - 3\log_e b^2c$

$= 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 3$ হলে,

ক. $(p + q)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\log(p + q) = \log 3 + \frac{1}{2}\log p + \frac{1}{2}\log q$ ৪

গ. $4\log(p + q)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 3$

বা, $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} = 3$

বা, $\frac{p+q}{\sqrt{q}.\sqrt{p}} = 3$

বা, $p + q = 3\sqrt{pq}$

বা, $(p + q)^2 = (3\sqrt{pq})^2$

$\therefore (p + q)^2 = 9pq$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= \log (p + q)$

$= \log 3(\sqrt{pq})$ ['ক' থেকে]

$= \log (3.\sqrt{p}.\sqrt{q})$

$= \log 3 + \log\sqrt{p} + \log\sqrt{q}$

$= \log 3 + \log p^{\frac{1}{2}} + \log q^{\frac{1}{2}}$

$= \log 3 + \frac{1}{2}\log p + \frac{1}{2}\log q$ = ডানপক্ষ

$\therefore \log(p+q) = \log 3 + \frac{1}{2}\log p + \frac{1}{2}\log q$ **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত রাশি $= 4\log(p+q)$

$= 4 \times (\log 3 + \frac{1}{2}\log p + \frac{1}{2}\log q)$ ['খ' থেকে]

$= 4 \times \log 3 + 4 \times \frac{1}{2}\log p + 4 \times \frac{1}{2}\log q$

$= 4\log 3 + 2\log p + 2\log q$

$= 4\log 3 + 2(\log p + \log q)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০ $P = \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b} \cdot \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c}$ এবং $Q = \log_{10} 3\sqrt{3} + \log_{10} 8 - \log_{10} 10\sqrt{10}$

ক. $\log_5(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P = 1$ ৪

গ. দেখাও যে, $\frac{Q}{\log_{10} 1.2} = \frac{3}{2}$ ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_5(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}) = \log_5\left(5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right) = \log_5 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$

$= \log_5 5^{\frac{2+3}{6}} = \log_5 5^{\frac{5}{6}}$

$= \frac{5}{6}\log_5 5 = \frac{5}{6} \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]

$= \frac{5}{6}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল ৮(খ) নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ বামপক্ষ $= \frac{Q}{\log 1.2} = \frac{\log_{10} 3\sqrt{3} + \log_{10} 8 - \log_{10} 10\sqrt{10}}{\log_{10} 1.2}$

$= \frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10} 8 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৪.২ এর উদাহরণ-**১১** দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮০

প্রশ্ন ▶ ১১ $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$ হয়–

ক. $\log_3 \sqrt[5]{y^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. মান নির্ণয় কর: $w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$. ৪

গ. দেখাও যে, $\frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z} = \log_y\sqrt{y^3}$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_3 \sqrt[5]{y^3} = \log_3 y^{\frac{3}{5}}$

$= \frac{3}{5}\log_3 3$ [দেওয়া আছে, $y = 3$]

$= \frac{3}{5} \cdot 1$ [$\because \log_a a = 1$]

$= \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$x = 2, y = 3, z = 5$ এবং $w = 7$

প্রদত্ত রাশি $= w\log\frac{xz}{y^2} - x\log\frac{z^2}{x^2y} + y\log\frac{y^4}{x^4z}$

$= 7\log\frac{2.5}{3^2} - 2\log\frac{5^2}{2^2.3} + 3\log\frac{3^4}{2^4.5}$

$= \log\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^7 - \log\left(\frac{5^2}{2^2\times3}\right)^2 + \log\left(\frac{3^4}{2^4\times5}\right)^3$

$= \log\left\{\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^7 \div \left(\frac{5^2}{2^2\times3}\right)^2 \times \left(\frac{3^4}{2^4\times5}\right)^3\right\}$

$= \log\left\{\frac{2^7\times5^7}{3^{14}} \div \frac{5^4}{2^4\times3^2} \times \frac{3^{12}}{2^{12}\times5^3}\right\}$

$= \log\left\{\frac{2^7\times5^7}{3^{14}} \times \frac{2^4\times3^2}{5^4} \times \frac{3^{12}}{2^{12}\times5^3}\right\}$

$= \log\left\{\frac{2^{7+4}.3^{2+12}.5^7}{2^{12}.3^{14}.5^{4+3}}\right\}$

$= \log\left\{\frac{2^{11}.3^{14}.5^7}{2^{12}.3^{14}.5^7}\right\}$

$= \log(2^{11-12}.3^{14-14}.5^{7-7})$

$= \log(2^{-1}.3^0.5^0)$

$= \log\left(\frac{1}{2}.1.1\right) = \log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2$

$= 0 - \log 2 = -\log 2$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $x = 2, y = 3$ এবং $z = 5$

বামপক্ষ $= \frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z}$

$= \frac{\log\sqrt{3^3} + 3\log 2 - \frac{3}{2}\log(2\times5)}{\log(2\times3) - \log 5}$

$= \frac{\log(3^3)^{\frac{1}{2}} + 3\log(2^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\log 10}{\log 6 - \log 5}$

$= \frac{\log 3^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\log 4 - \frac{3}{2}\log 10}{\log\left(\frac{6}{5}\right)}$

$= \frac{\frac{3}{2}\log 3 + \frac{3}{2}\log 4 - \frac{3}{2}\log 10}{\log 1.2}$

$= \frac{\frac{3}{2}(\log 3 + \log 4 - \log 10)}{\log 1.2} = \frac{\frac{3}{2}\log(3\times4\div10)}{\log 1.2}$

$= \frac{\frac{3}{2}\log\left(\frac{3\times4}{10}\right)}{\log 1.2} = \frac{\frac{3}{2}\left(\log\frac{12}{10}\right)}{\log 1.2} = \frac{\frac{3}{2}(\log 1.2)}{(\log 1.2)}$

$= \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}\log_3 3$ [$\because 1 = \log_a a$]

$= \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}}$

$= \log_y (y^3)^{\frac{1}{2}}$ [$\because y = 3$]

$= \log_y\sqrt{y^3}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\log\sqrt{y^3} + y\log x - \frac{y}{x}\log(xz)}{\log(xy) - \log z} = \log_y\sqrt{y^3}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১২ $A = 3bx^2 - 4ax + 3b$ এবং $B = \log_{10}\sqrt{27} - \log_{10}\frac{1}{8} - \log_{10}\sqrt{1000}$

ক. $\log_5\left(\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt{5}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x = \dfrac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ ৪

গ. দেখাও যে, $B \div \log_{10} 1.2 = \dfrac{3}{2}$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল-১০(ক) নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ দেওয়া আছে,

$A = 3bx^2 - 4ax + 3b$

বা, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$ $[\because A = 0]$

বা, $3bx^2 + 3b = 4ax$

বা, $3b(x^2 + 1) = 4ax$

বা, $\dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{2a}{3b}$

বা, $\dfrac{2(x^2+1)}{4x} = \dfrac{2a}{3b}$

বা, $\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2} = \dfrac{2a}{3b}$

বা, $\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2+(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2-(x+1)^2+(x-1)^2} = \dfrac{2a+3b}{2a-3b}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\dfrac{2(x+1)^2}{2(x-1)^2} = \dfrac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 = \dfrac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\dfrac{x+1}{x-1} = \sqrt{\dfrac{2a+3b}{2a-3b}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\dfrac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \dfrac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ [যোজন-বিয়োজন]

বা, $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ **(দেখানো হলো)**

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৪.২ এর উদাহরণ ১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮০।

প্রশ্ন ▶ ১৩ $P = \dfrac{5.2^x - 2.2^{x-1}}{2^x - 2^{x-1}}$, $Q = \dfrac{5^{m+2} - 3.5^{m+1}}{5^{m+2} \div 5}$ এবং

$R = \dfrac{\log_{10}\sqrt{125} + \log_{10}27 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}4.5}$

ক. $\left(\sqrt{3}\right)^{x+1} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x-1}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P \div Q \div \sqrt{16} = 1$ ৪

গ. দেখাও যে, $R \div 9 = \dfrac{1}{6}$ ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

বা, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+1} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1}$

বা, $3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{2x-1}{3}}$

বা, $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{2x-1}{3}$

বা, $2(2x-1) = 3(x+1)$

বা, $4x - 2 = 3x + 3$

$\therefore x = 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \dfrac{5.2^x - 2.2^{x-1}}{2^x - 2^{x-1}} = \dfrac{5.2^x - 2^{1+x-1}}{2^x - 2^x.2^{-1}}$

$= \dfrac{5.2^x - 2^x}{2^x - 2^x.\frac{1}{2}} = \dfrac{2^x(5-1)}{2^x\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

আবার, $Q = \dfrac{5^{m+2} - 3.5^{m+1}}{5^{m+2} \div 5}$

$= \dfrac{5^m.5^2 - 3.5^m.5^1}{5^{m+2-1}}$

$= \dfrac{25.5^m - 15.5^m}{5^{m+1}}$

$= \dfrac{5^m(25-15)}{5.5^m} = \dfrac{10}{5} = 2$

বামপক্ষ $= P \div Q \div \sqrt{16}$

$= 8 \div 2 \div 4$

$= \dfrac{8}{2 \times 4} = 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore P \div Q \div \sqrt{16} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $R = \dfrac{\log_{10}\sqrt{125} + \log_{10}27 - \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}4.5}$

$= \dfrac{\log_{10}5^{\frac{3}{2}} + \log_{10}9^{\frac{3}{2}} - \log_{10}10^{\frac{3}{2}}}{\log_{10}\frac{45}{10}}$

$= \dfrac{\frac{3}{2}(\log_{10}5 + \log_{10}9 - \log_{10}10)}{(\log_{10}45 - \log_{10}10)}$

$= \dfrac{\frac{3}{2}(\log_{10}45 - \log_{10}10)}{(\log_{10}45 - \log_{10}10)} = \dfrac{3}{2}$

এখন, বামপক্ষ $= R \div 9$

$= \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{6}$

= ডানপক্ষ

$\therefore R \div 9 = \dfrac{1}{6}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৪ $M = \log x$, $N = \log\sqrt{27} - \log\frac{1}{8} - \log\sqrt{1000}$

$O = \log\frac{6}{5}$, $P = \dfrac{4^{n+3} - 8.2^{2n+1}}{4^{n+2} \div 8}$, $Q = \dfrac{5.2^n - 8.2^{n-1}}{2^n - 3.2^{n-2}}$

ক. $M = -1$ হলে x এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{N}{O} = \dfrac{3}{2}$. ৪

গ. $(P \div Q)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$M = \log x$

এবং $M = -1$

$\therefore \log x = -1$

বা, $x = 10^{-1}$

$\therefore x = \dfrac{1}{10}$ **(Ans.)**

খ $N = \log\sqrt{27} - \log\frac{1}{8} - \log\sqrt{1000}$ এবং $O = \log\frac{6}{5} = \log 1.2$

$\therefore \dfrac{N}{O} = \dfrac{\log\sqrt{27} - \log\frac{1}{8} - \log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

$= \dfrac{\log\sqrt{27} - \log 8^{-1} - \log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

$$= \frac{\log\sqrt{27} + \log 8 - \log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$$

অতঃপর মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৪.২ এর উদাহরণ ১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮০।

গ দেওয়া আছে, $P = \frac{4^{n+3} - 8.2^{2n+1}}{4^{n+2} \div 8} = \frac{4^n.4^3 - 8.2^{2n}.2^1}{4^n.4^2 \div 2^3}$

$$= \frac{64.4^n - 16.4^n}{4^n.2^4 \div 2^3} = \frac{(64-16)4^n}{4^n.2^{4-3}}$$

$$= \frac{48.4^{n-n}}{2}$$

$$= 24.4^0 = 24 \quad [\because n^0 = 1]$$

আবার, $Q = \frac{5.2^n - 8.2^{n-1}}{2^n - 3.2^{n-2}} = \frac{5.2^n - 8.2^n.2^{-1}}{2^n - 3.2^n.2^{-2}}$

$$= \frac{5.2^n - 8.2^n.\frac{1}{2}}{2^n - \frac{3}{2^2}.2^n} = \frac{5.2^n - 4.2^n}{2^n - \frac{3}{4}.2^n}$$

$$= \frac{2^n}{2^n\left(1 - \frac{3}{4}\right)} = \frac{2^n}{2^n\left(\frac{4-3}{4}\right)}$$

$$= \frac{2^{n-n}}{\frac{1}{4}} = 2^0 \times \frac{4}{1} = 4$$

$\therefore P \div Q = 24 \div 4 = 6$

$\therefore P \div Q = 6$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ $p = x^a$, $q = x^b$, $r = x^c$

ক. $\left(\frac{p}{q}\right)^c . \left(\frac{q}{r}\right)^a . \left(\frac{r}{p}\right)^b$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\frac{(a-b)\log(pq) + (b-c)\log(qr) + (c-a)\log(rp)}{\sqrt{a^{-1}b} \times \sqrt{b^{-1}c} \times \sqrt{c^{-1}a}} = 0$ ৪

গ. সরল কর : $2abc\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b-c}\left(\frac{q}{r}\right)^{b+c-a}\left(\frac{r}{p}\right)^{c+a-b}\right\} \times \sqrt{a^{-3}b^{-2}c} \times \sqrt{c^{-3}a}$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p = x^a$, $q = x^b$, $r = x^c$

$$\therefore \left(\frac{p}{q}\right)^c \times \left(\frac{q}{r}\right)^a \times \left(\frac{r}{p}\right)^b$$

$$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^c \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^a \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^b$$

$$= (x^{a-b})^c \times (x^{b-c})^a \times (x^{c-a})^b$$

$$= x^{ac-bc} \times x^{ab-ca} \times x^{bc-ab}$$

$$= x^{ac-bc+ab-ac+bc-ab}$$

$$= x^0$$

$$= 1 \textbf{ (Ans.)}$$

খ বামপক্ষ $= \frac{(a-b)\log(pq) + (b-c)\log(qr) + (c-a)\log(rp)}{\sqrt{a^{-1}b} \times \sqrt{b^{-1}c} \times \sqrt{c^{-1}a}}$

$$= \frac{(a-b)\log(x^a.x^b) + (b-c)\log(x^b.x^c) + (c-a)\log(x^c.x^a)}{\sqrt{a^{-1}b.\,b^{-1}c.\,c^{-1}.a}}$$

$$= \frac{(a-b)\log(x)^{a+b} + (b-c)\log(x)^{b+c} + (c-a)\log(x)^{c+a}}{\sqrt{a.a^{-1}b.b^{-1}.c.c^{-1}}}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)\log x + (b+c)(b-c)\log x + (c+a)(c-a)\log x}{\sqrt{1.1.1}}$$

$$[\because a.a^{-1} = 1]$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\log x + (b^2-c^2)\log x + (c^2-a^2)\log x}{1}$$

$$= (a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2)\log x$$

$$= 0.\log x$$

$$= 0 = \text{ডানপক্ষ}$$ **(দেখানো হলো)**

গ $2abc\left\{\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b-c} \times \left(\frac{q}{r}\right)^{b+c-a} \times \left(\frac{r}{p}\right)^{c+a-b}\right\} \times \sqrt{a^{-3}b^{-2}c} \times \sqrt{c^{-3}a}$

$$= 2abc\left\{\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b}\right\} \times \sqrt{a^{-3}.b^{-2}.c.c^{-3}.a}$$

$$= 2abc\{(x^{a-b})^{a+b-c} \times (x^{b-c})^{b+c-a} \times (x^{c-a})^{c+a-b}\} \times \sqrt{a^{-3+1}.b^{-2}.\,c^{-3+1}}$$

$$= 2abc\{x^{(a-b)(a+b-c)}.\,x^{(b-c)(b+c-a)}.\,x^{(c-a)(c+a-b)}\} \times \sqrt{a^{-2}.b^{-2}.c^{-2}}$$

$$= 2abc\,(x^{a^2-b^2-ca+bc}.\,x^{b^2-c^2-ab+ca}.x^{c^2-a^2-bc+ab}).\,\sqrt{(a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1})^2}$$

$$= 2abc\,(x^{a^2-b^2-ca+bc+b^2-c^2-ab+ca+c^2-a^2-bc+ab}).\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}$$

$$= 2abc\,.\,x^0.\,\frac{1}{abc} = 2.1.1\ [\because a^0 = 1] = 2$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ $M = \log_a 400$, $x = \frac{10}{9}$, $y = \frac{25}{24}$ এবং $z = \frac{81}{80}$.

ক. $M = 4$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\log_{10} x^7 - \log_{10} y^2 + \log_{10} z^3$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\sqrt{\frac{x}{y}} \times \sqrt{xz} \div \sqrt{\frac{6}{5}} = 1$ ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $M = \log_a 400$

আবার, $M = 4$

বা, $\log_a 400 = 4$

বা, $a^4 = 400$

বা, $a^4 = (2\sqrt{5})^4$

$\therefore a = 2\sqrt{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$$x = \frac{10}{9},\ y = \frac{25}{24},\ z = \frac{81}{80}$$

এখন, $\log_{10} x^7 - \log_{10} y^2 + \log_{10} z^3$

$$= \log_{10}\left(\frac{10}{9}\right)^7 - \log_{10}\left(\frac{25}{24}\right)^2 + \log_{10}\left(\frac{81}{80}\right)^3$$

$$= \log_{10}\left(\frac{2.5}{3^2}\right)^7 - \log_{10}\left(\frac{5^2}{3.2^3}\right)^2 + \log_{10}\left(\frac{3^4}{5.2^4}\right)^3$$

$$= \log_{10}\frac{2^7.5^7}{3^{14}} - \log_{10}\frac{5^4}{3^2.2^6} + \log_{10}\frac{3^{12}}{5^3.2^{12}}$$

$$= \log_{10}\frac{2^7.5^7.3^{12}.3^2.2^6}{3^{14}.5^3.2^{12}.5^4}$$

$$= \log_{10} 2^{7+6-12}.3^{12+2-14}.5^{7-3-4}$$

$$= \log_{10} 2^1.3^0.5^0$$

$$= \log_{10} 2$$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে,

$$x = \frac{10}{9},\ y = \frac{25}{24},\ z = \frac{81}{80}$$

বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{x}{y}} \times \sqrt{xz} \div \sqrt{\frac{6}{5}}$

$$= \sqrt{\frac{\frac{10}{9}}{\frac{25}{24}}} \times \sqrt{\frac{10}{9} \times \frac{81}{80}} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{9} \times \frac{24}{25}} \times \sqrt{\frac{9}{8}} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{15}} \times \sqrt{\frac{9}{8}} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{15} \times \frac{9}{8} \times \frac{5}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{720}{720}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore \sqrt{\frac{x}{y}} \times \sqrt{xz} \div \sqrt{\frac{6}{5}} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $P = \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r\sim p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p\sim q} \times \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q\sim r}$

এবং $Q = \log_{10}\sqrt{27} + \log_{10}8 - \log_{10}\sqrt{1000}$.

ক. $\log_7\left(\sqrt[3]{7}.\sqrt{7}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $P \sim 1 = 0$. ৪

গ. দেখাও যে, $Q \div \log_{10}1.2 = \frac{3}{2}$. ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\log_7\left(\sqrt[3]{7}.\sqrt{7}\right)$

$= \log_7\left(7^{\frac{1}{3}}.7^{\frac{1}{2}}\right) = \log_7 7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = \log_7 7^{\frac{2+3}{6}} = \log_7 7^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}\log_7 7$

$= \frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$P = \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r\sim p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p\sim q} \times \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q\sim r}$

$= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$

$= (x^{p-q})^{p+q-r} \times (x^{q-r})^{q+r-p} \times (x^{r-p})^{r+p-q}$

$= x^{(p-q)(p+q)-r(p-q)}.x^{(q-r)(q+r)-p(q-r)}.x^{(r-p)(r+p)-q(r-p)}$

$= x^{p^2-q^2-rp+qr}.x^{q^2-r^2-pq+rp}.x^{r^2-p^2-qr+pq}$

$= x^{p^2-q^2-rp+qr+q^2-r^2-pq+rp+r^2-p^2-qr+pq}$

$= x^0 = 1$

$\therefore\ P \sim 1 = 1 \sim 1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$Q = \log_{10}\sqrt{27} + \log_{10}8 \sim \log_{10}\sqrt{1000}$

$\therefore\ Q \div \log_{10}1.2 = \frac{\log_{10}\sqrt{27} + \log_{10}8 \sim \log_{10}\sqrt{1000}}{\log_{10}1.2}$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৪.২ এর উদাহরণ-১১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৮০।

প্রশ্ন ▶ ১৮ $a = 2, b = 3$ এবং $c = 5$ হলে

ক. $\frac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 4^{\frac{1}{2}}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(a^2b)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{ab^3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ ৪

গ. $\frac{\log\sqrt{b^3} - b\log\frac{1}{a} - \frac{b}{a}\log(ca)}{\log(ab) - \log c}$ এর মান কত? ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 4^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{n+4} - 4\cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

$= \frac{2^n \times 2^4 - 4 \times 2^n \times 2^1}{2^{n+2} \div 2^1}$

$= \frac{2^n \times 16 - 8 \times 2^n}{2^{n+2-1}}$

$= \frac{2^n(16-8)}{2^{n+1}}$

$= \frac{2^n \times 8}{2^n \times 2^1} = \frac{8}{2} = 4$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= (a^2b)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{ab^3}$

$= (2^2 3)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{2 \times 3^3}$ [$\because a = 2, b = 3$]

$= 2^{-\frac{2}{2}} \times 3^{\frac{-1}{2}} \times (2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{2^{-1}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}-1} \times 3}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2^{\frac{-2}{3}} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ = ডানপক্ষ

$\therefore\ (a^2b)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{ab^3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $a = 2, b = 3, c = 5$

এখন, $\frac{\log\sqrt{b^3} - b\log\frac{1}{a} - \frac{b}{a}\log(ca)}{\log(ab) - \log c}$

$= \frac{\log\sqrt{b^3} - \left\{\log\left(\frac{1}{a}\right)^b + \log(ca)^{\frac{b}{a}}\right\}}{\log\left(\frac{ab}{c}\right)}$

$= \frac{\log\sqrt{b^3} - \log\left[a^{\frac{1}{b}}.c^{\frac{b}{a}}.a^{\frac{b}{a}}\right]}{\log\left(\frac{ab}{c}\right)}$

$= \frac{\log\left[\frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{b-ab}{a}}.c^{\frac{b}{a}}}\right]}{\log\left(\frac{ab}{c}\right)}$

$= \frac{\log\left[\frac{3^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3-2\times3}{2}}.5^{\frac{3}{2}}}\right]}{\log\left(\frac{2\times3}{5}\right)}$

$= \frac{\log\left[\frac{3^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{-3}{2}}.5^{\frac{3}{2}}}\right]}{\log\left(\frac{6}{5}\right)}$

$= \frac{\log\left(\frac{3^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{3}{2}}}\right)}{\log\left(\frac{6}{5}\right)}$

$= \frac{\log\left(\frac{6^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{3}{2}}}\right)}{\log\left(\frac{6}{5}\right)}$

$= \frac{\log\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{\log\left(\frac{6}{5}\right)}$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log\left(\frac{6}{5}\right)}{\log\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{3}{2}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ (i) $a^2 + 2a = -1$ (ii) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

ক. প্রমাণ কর যে, $\log_a M^r = r \log_a M$ ২

খ. (ii) এর আলোকে দেখাও যে, $x^6 = 18\sqrt{3}x^3 - 1$ ৪

গ. (i) এর আলোকে $a^5 + \frac{1}{a^7}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৪.২ এর সূত্র ৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৭৮

খ দেওয়া আছে, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$= \frac{1(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$$

$\therefore \frac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

এখন, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= (2\sqrt{3})^3 - 3.2\sqrt{3}$

$= 2^3.(\sqrt{3})^3 - 6\sqrt{3}$

$= 8.3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

বা, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

বা, $\frac{x^6+1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

বা, $x^6 + 1 = 18\sqrt{3}\,x^3$

$\therefore x^6 = 18\sqrt{3}x^3 - 1$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $a^2 + 2a = -1$

বা, $a^2 + 2a + 1 = 0$

বা, $(a+1)^2 = 0$

বা, $a + 1 = 0$

$\therefore a = -1$

প্রদত্ত রাশি $= a^5 + \frac{1}{a^7} = (-1)^5 + \frac{1}{(-1)^7}$

$= -1 + \frac{1}{-1}$

$= -1 - 1 = -2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২০ L, M এবং N তিনটি বীজগাণিতিক রাশি যেখানে $L = \frac{x^a}{x^b}$, $M = \frac{x^b}{x^c}$ এবং $N = \frac{x^c}{x^a}$।

ক. $L = 1$ হলে দেখাও যে, $a = b$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt[ab]{L} \times \sqrt[bc]{M} \times \sqrt[ca]{N} = 1$ ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\log_K L^{a+b} + \log_K M^{c+a} + \log_K N^{b+c} = 0$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৪নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।