

SSC Math

অধ্যয়ভিত্তিক কন্টেন্ট

অধ্যায়-৫: এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ

প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **চলক** : যখন কোনো অক্ষর প্রতীক কোনো সেটের উপাদান বোঝায় তখন তাকে চলক বলে। একটি সেট $A = \{x : x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 10\}$ হয়, তবে x -এর মান 1 থেকে 10 পর্যন্ত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এখানে, x হলো চলক।
- **সমীকরণের ঘাত** : কোনো সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলে। $x + 1 = 5$, $2x - 1 = x + 5$, $y + 7 = 2y - 3$ সমীকরণগুলোর প্রত্যেকটির ঘাত 1; এগুলো এক চলকবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ।
- **সমীকরণ ও অভেদ** :

সমীকরণ : অন্ততপক্ষে একটি চলকযুক্ত সমান চিহ্ন সংবলিত খোলা বাক্যকে সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলে। যেমন, $(3x + 5) - 6 = 5x + 9$ একটি সমীকরণ যেখানে, x একটি চলক। সমীকরণে সমান চিহ্নের দুইপক্ষে দুইটি বহুপদী থাকে, অথবা একপক্ষে (প্রধানত ডানপক্ষে) শূন্য থাকতে পারে। দুই পক্ষের বহুপদীর চলকের সর্বোচ্চ ঘাত সমান না-ও হতে পারে।

- **সমীকরণের মূল** : চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের যে মান বা মানগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, তাকে ঐ সমীকরণের মূল বলে।
- **অভেদ** : কোনো চলকের সকল মানের জন্য যদি সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তবে তা একটি অভেদ। যেমন, $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x$ একটি অভেদ। এটি x এর সকল মানের জন্য সিদ্ধ হয়। প্রত্যেক বীজগণিতীয় সূত্র একটি অভেদ।
- **একঘাত সমীকরণের সমাধান**:

সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে কয়েকটি নিয়ম প্রয়োগ করতে হয়। এই নিয়মগুলো জানা থাকলে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সহজতর হয়। নিয়মগুলো হলো :

- ১। সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।
- ২। সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে একই সংখ্যা বা রাশি বিয়োগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।
- ৩। সমীকরণের উভয়পক্ষকে একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা গুণ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।
- ৪। সমীকরণের উভয়পক্ষকে অশূন্য একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা ভাগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

উপরের ধর্মগুলোকে বীজগণিতীয় রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় :

যদি $x = a$ এবং $a \neq 0$ হয় তাহলে,

$$(i) x + c = a + c \quad (ii) x - c = a - c \quad (iii) xc = ac \quad (iv) \frac{x}{c} = \frac{a}{c}$$

এছাড়া যদি a , b ও c তিনটি রাশি হয় তবে, $a = b + c$ হলে, $a - b = c$ হবে এবং $a + c = b$ হলে, $a = b - c$ হবে।

■ একঘাত সমীকরণের ব্যবহার

বাস্তব জীবনে বিভিন্ন ধরনের সমস্যার সমাধান করতে হয়। এই সমস্যা সমাধানের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই গাণিতিক জ্ঞান, দক্ষতা ও যুক্তির প্রয়োজন হয়।

বাস্তবভিত্তিক সমস্যা সমাধানে অজ্ঞাত সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য এর পরিবর্তে চলক ধরে নিয়ে সমস্যায় প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ গঠন করা হয়। তারপর সমীকরণটি সমাধান করলেই চলকটির মান, অর্থাৎ অজ্ঞাত সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

■ এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ

যে সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 2, তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

যেমন, $ax^2 + bx + c = 0$ [যেখানে, a , b , c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$] একটি এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ। দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষ একটি দ্বিমাত্রিক বহুপদী। সমীকরণের ডানপক্ষ শূন্য ধরা হয়।

অষ্টম শ্রেণিতে $x^2 + px + q$ এবং $ax^2 + bx + c$ আকারের এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেছি। এখানে আমরা $x^2 + px + q = 0$ এবং $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে চলকের মান নির্ণয়ের মাধ্যমে এরূপ সমীকরণ সমাধান করবো।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে বাস্তব সংখ্যার একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম প্রয়োগ করা হয়। ধর্মটি নিম্নরূপ :

যদি দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হয়, তবে রাশিদ্বয়ের যেকোনোটি অথবা উভয় রাশি শূন্য হবে। অর্থাৎ, দুইটি রাশি a ও b এর গুণফল $ab = 0$ হলে, $a = 0$ বা, $b = 0$, অথবা $a = 0$ এবং $b = 0$ হবে।

■ দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার

আমাদের দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যা সরল সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তর করে সহজে সমাধান করা যায়।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

প্রশ্ন ১ [ব. বো. ১৫]

সজীবদের লিচু গাছ থেকে সজীব ও তার বন্ধুরা x জনের জন্য মোট 1950 টি লিচু পাড়ল। পরবর্তীতে সজীবের ছোট ভাই উপস্থিত হওয়ায় আরো 34টি লিচু পাড়া হলেও গড়ে 1 টি লিচু কমে গেল। y টি লিচু পাড়লে গড়ে তারা 1 টি করে লিচু বেশি পেত।

ক. সজীবের ভাই আসায় প্রত্যেকে কতটি লিচু পেল, তা x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. x -এর মান নির্ণয় কর।

গ. y -এর মান নির্ণয় কর।

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সজীবের ছোট ভাই আসায় মোট লোকসংখ্যা হলো $(x + 1)$ জন এবং লিচু পাড়া হলো মোট $(1950 + 34) = 1984$ টি

∴ প্রত্যেকের প্রাপ্ত লিচুর সংখ্যা হলো $\frac{1984}{x+1}$ টি (Ans.)

খ. 1ম শর্তমতে,

$$\frac{1950}{x} = \frac{1984}{x+1} + 1 \text{ ['ক' এর সাহায্যে]}$$

$$\text{বা, } \frac{1950}{x} = \frac{1984 + x + 1}{x+1}$$

$$\text{বা, } 1950x + 1950 = 1985x + x^2 \text{ [আড়গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 + 35x - 1950 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 65x - 30x - 1950 = 0$$

$$\text{বা, } x(x + 65) - 30(x + 65) = 0$$

$$\therefore (x + 65)(x - 30) = 0$$

$$\text{হয় } x + 65 = 0 \text{ অথবা, } x - 30 = 0$$

$$\therefore x = -65 \quad \therefore x = 30$$

$x = -65$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ লোকসংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।

∴ নির্ণেয় মান, $x = 30$ (Ans.)

গ. 'খ' হতে পাই, $x = 30$

$$\text{এখন, ২য় শর্তমতে, } \frac{1950}{x} = \frac{1950 + y}{x + 1} - 1$$

$$\text{বা, } \frac{1950}{30} = \frac{1950 + y}{31} - 1 \text{ [} \square x = 30 \text{]}$$

$$\text{বা, } 65 = \frac{1950 + y}{31} - 1$$

$$\text{বা, } \frac{1950 + y}{31} = 65 + 1$$

$$\text{বা, } 1950 + y = 66 \times 31$$

$$\text{বা, } y = 2046 - 1950$$

$$\therefore y = 96$$

∴ নির্ণেয় মান, $y = 96$ (Ans.)

প্রশ্ন ২: দৃশ্যকল্প ১: $\sqrt{10y - 4}$ এবং ইহার গুণক বিপরীতের 4 গুণের যোগফল 5.

$$\text{দৃশ্যকল্প ২: } (a + b + x)^{-1} = \frac{1}{a} + b^{-1} + x^{-1}$$

ক. দৃশ্যকল্প ১-এ প্রদত্ত তথ্য অনুসারে একটি সমীকরণ গঠন কর।

২

খ. দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা গঠিত সমীকরণটির সমাধান সেট নির্ণয় কর।

৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমাধান কর।

৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\sqrt{10y - 4}$ এর গুণক বিপরীত $\frac{1}{\sqrt{10y - 4}}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $\sqrt{10y - 4} + \frac{4}{\sqrt{10y - 4}} = 5$

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর সমীকরণ,

$$\frac{4}{\sqrt{10y - 4}} + \sqrt{10y - 4} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{4 + (\sqrt{10y - 4})^2}{\sqrt{10y - 4}} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{4 + 10y - 4}{\sqrt{10y - 4}} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{10y}{\sqrt{10y - 4}} = 5$$

$$\text{বা, } 10y = 5 \sqrt{10y - 4} \text{ [আড়গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } (2y)^2 = (\sqrt{10y - 4})^2 \text{ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 4y^2 = 10y - 4$$

$$\text{বা, } 2y^2 = 5y - 2 \text{ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } 2y^2 - 5y + 2 = 0 \text{ [পক্ষাঙ্গুর করে]}$$

$$\text{বা, } 2y^2 - 4y - y + 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2y(y - 2) - 1(y - 2) = 0$$

$$\therefore (y - 2)(2y - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } y - 2 = 0 \text{ অথবা, } 2y - 1 = 0$$

$$\therefore y = 2 \quad \text{বা, } 2y = 1$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}$$

∴ প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান, $y = 2$ অথবা, $y = \frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান সেট $S = \left\{ 2, \frac{1}{2} \right\}$ (Ans.)

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ দেওয়া আছে,

$$(a + b + x)^{-1} = \frac{1}{a} + b^{-1} + x^{-1}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a + b + x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + a + b} - \frac{1}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{b + a}{ab} = \frac{x - (a + b + x)}{x(a + b + x)}$$

$$\text{বা, } \frac{(a + b)}{ab} = \frac{-(a + b)}{ax + bx + x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{ab} = \frac{-1}{ax + bx + x^2}$$

$$\text{বা, } -ab = ax + bx + x^2 \text{ [আড়গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 + ax + bx + ab = 0$$

$$\text{বা, } x(x + a) + b(x + a) = 0$$

$$\therefore (x + a)(x + b) = 0$$

$$\text{হয়, } x + a = 0 \quad \text{অথবা, } x + b = 0$$

$$\therefore x = -a \quad \therefore x = -b$$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{-a, -b\}$

প্রশ্ন ৩ দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি ৯; অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা থেকে ৯ বেশি।

ক. চলক x এর মাধ্যমে প্রদত্ত সংখ্যাটি এবং স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লেখ। ২

খ. সংখ্যাটি নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রদত্ত সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি সে.মি. এ কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্দেশ করে তবে ঐ আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কর্ণটিকে কোনো বর্গের বাহু ধরে বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্ক = x

$$\therefore \text{দশক স্থানীয় অঙ্ক} = 9 - x$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10(9 - x) + x = 90 - 10x + x = 90 - 9x$$

$$\therefore \text{অঙ্ক দুটি স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি} = 10x + (9 - x) \\ = 10x + 9 - x \\ = 9x + 9 \text{ (Ans.)}$$

খ প্রশ্নমতে, $90 - 9x = (9x + 9) - 9$

$$\text{বা, } -9x - 9x = 9 - 9 - 90$$

$$\text{বা, } -18x = -90$$

$$\text{বা, } x = \frac{-90}{-18}$$

$$\therefore x = 5$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সংখ্যাটি} = 90 - 9x \\ = 90 - 9 \cdot 5 \\ = 90 - 45 = 45 \text{ (Ans.)}$$

গ 'খ' হতে পাই, একক স্থানীয় অঙ্ক = 5

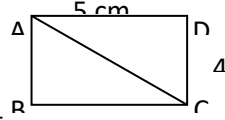
$$\therefore \text{দশক স্থানীয় অঙ্ক} = 9 - 5 = 4$$

$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য AD} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{এবং প্রস্থ CD} = 4 \text{ cm}$$

\therefore আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য,

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} \text{ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]} \\ = \sqrt{5^2 + 4^2} \\ = \sqrt{25 + 16} \\ = \sqrt{41} \\ = 6.40 \text{ cm (প্রায়)}$$



$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য} = \sqrt{41} = 6.40 \text{ cm (Ans.)}$$

$$\therefore \text{বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য} = \sqrt{41} \text{ cm}$$

$$\text{আমরা জানি, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য} = \sqrt{2} \times \text{বাহুর দৈর্ঘ্য} \\ = (\sqrt{2} \times \sqrt{41}) \text{ cm} \\ = \sqrt{41 \times 2} = \sqrt{82} \text{ cm (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৪ $P = x + a + b$, $Q = \frac{1}{x}$, $R = \frac{1}{a}$, এবং $S = \frac{1}{b}$

ক. $\frac{S}{QR} - \frac{R}{QS} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{S^2}$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{1}{P} = Q + R + S$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{5}{\sqrt{\frac{10}{Q}-5}} + \sqrt{\frac{10}{Q}-5} = 6$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{3}{5}$ অথবা 3 ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$\frac{S}{QR} - \frac{R}{QS} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{S^2}$$

$$\text{বা, } \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{x} \times \frac{1}{a}} - \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{x} \times \frac{1}{b}} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

$$\text{বা, } \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{ax}} - \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{bx}} = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } \frac{1}{b} \times \frac{ax}{1} - \frac{1}{a} \times \frac{bx}{1} = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } \frac{xa^2 - xb^2}{ab} = a^2 - b^2$$

$$\text{বা, } x(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)ab$$

বা, $x = ab$ [উভয় পক্ষকে $(a^2 - b^2)$ দ্বারা ভাগ করে]

$$\therefore x = ab \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $\frac{1}{P} = Q + R + S$

$$\text{বা, } \frac{1}{x+a+b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b} - \frac{1}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{b+a}{ab} = \frac{x-(a+b+x)}{x(a+b+x)}$$

$$\text{বা, } \frac{(a+b)}{ab} = \frac{-(a+b)}{ax+bx+x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{ab} = \frac{-1}{ax+bx+x^2}$$

$$\text{বা, } -ab = ax + bx + x^2 \text{ [আড়গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 + ax + bx + ab = 0$$

$$\text{বা, } x(x+a) + b(x+a) = 0$$

$$\therefore (x+a)(x+b) = 0$$

$$\text{হয়, } x+a=0$$

$$\text{অথবা, } x+b=0$$

$$\therefore x=-a$$

$$\therefore x=-b$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান সেট: } S = \{-a, -b\}$$

গ দেওয়া আছে, $\frac{5}{\sqrt{\frac{10}{Q}-5}} + \sqrt{\frac{10}{Q}-5} = 6$

$$\text{বা, } \frac{5}{\sqrt{\frac{10}{\frac{1}{x}}-5}} + \sqrt{\frac{10}{\frac{1}{x}}-5} = 6$$

$$\text{বা, } \frac{5}{\sqrt{10x-5}} + \sqrt{10x-5} = 6$$

$$\text{বা, } 5 + (\sqrt{10x-5})^2 = 6\sqrt{10x-5}$$

$$\text{বা, } 5 + 10x - 5 = 6\sqrt{10x-5}$$

$$\text{বা, } \frac{10x}{6} = \sqrt{10x-5}$$

$$\text{বা, } \frac{5x}{3} = \sqrt{10x-5}$$

$$\text{বা, } \frac{25x^2}{9} = (10x-5) \text{ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 25x^2 = 90x - 45$$

$$\text{বা, } 25x^2 - 90x + 45 = 0$$

$$\text{বা, } 5x^2 - 18x + 9 = 0$$

$$\text{বা, } 5x^2 - 15x - 3x + 9 = 0$$

$$\text{বা, } 5x(x-3) - 3(x-3) = 0$$

$$\text{বা, } (x-3)(5x-3) = 0$$

$$\text{হয়, } x-3=0$$

$$\text{অথবা, } 5x-3=0$$

$$\therefore x=3$$

$$\text{বা, } 5x=3$$

$$\therefore x = \frac{3}{5}$$

$$\therefore x = \frac{3}{5} \text{ অথবা } 3 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ৫ দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি ৯ এবং অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 45 কম।

ক. চলক x ব্যবহার করে সংখ্যাটি এবং স্থান বিনিময়কৃত সংখ্যাটি লিখ। ২

খ. সংখ্যাটি নির্ণয় কর। ৪

গ. সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় যদি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হর নির্দেশ করে তবে লব ও হরের সাথে কোনো একই সংখ্যা যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। ঐ সংখ্যাটি নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি,

$$\text{একক স্থানীয় অঙ্কটি} = x$$

$$\text{তাহলে দশক স্থানীয় অঙ্কটি} = 9 - x$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10 \times (\text{দশক স্থানীয় অঙ্ক}) + \text{একক স্থানীয় অঙ্ক}$$

$$= 10(9 - x) + x = (90 - 10x) + x = 90 - 9x$$

$$\text{অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে সংখ্যাটি হবে} = 10 \times x + (9 - x) \\ = 10x + 9 - x \\ = 9x + 9 \text{ (Ans.)}$$

খ প্রশ্নমতে,

$$9x + 9 = 90 - 9x - 45$$

$$\text{বা, } 9x + 9x = 45 - 9 \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } 18x = 36$$

$$\text{বা, } x = 2$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 90 - 9x = 90 - (9 \times 2) = 90 - 18 = 72 \text{ (Ans.)}$$

গ আমরা জানি, প্রকৃত ভগ্নাংশের লব হর অপেক্ষা ছোট হয়।

$$\text{'খ' হতে পাই সংখ্যাটি} = 72$$

$$\text{তাহলে, প্রকৃত ভগ্নাংশের হর} = \text{দশক স্থানীয় অঙ্ক} = 7$$

$$\text{লব} = \text{একক স্থানীয় অঙ্ক} = 2$$

মনে করি, ভগ্নাংশটির লব ও হরের সাথে x যোগ করতে হবে।

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{2+x}{7+x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } 4 + 2x = 7 + x$$

$$\text{বা, } 4 + 2x - 7 - x = 0$$

$$\text{বা, } x - 3 = 0$$

$$\text{বা, } x = 3$$

$$\therefore x = 3 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৬ (i) $x + y = \sqrt{3}$, (ii) $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$ ও (iii) $x^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি।

(iv) করিম সাহেব 240 টাকায় কতগুলো কলম কিনল। সে যদি ঐ টাকার মধ্যে 1টি কলম বেশি পেত, তবে প্রতিটি কলমের দাম গড়ে 1 টাকা কম পড়ত?

$$\text{ক. (i) নং ও (ii) নং উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে, } 16xy(x^2 + y^2) = 10 \quad ২$$

$$\text{খ. (iii) নং উদ্দীপকের সাহায্যে } x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad ৪$$

গ. চলক x ধরে উদ্দীপকের আলোকে করিম সাহেবের ক্রয়কৃত কলমের সংখ্যা নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$(i) x + y = \sqrt{3};$$

$$(ii) x^2 - y^2 = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (x+y)(x-y) = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(x-y) = \sqrt{6} \text{ [(i) থেকে মান বসিয়ে]}$$

$$\therefore x - y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore x + y = \sqrt{3}$$

$$x - y = \sqrt{2}$$

$$\text{বামপক্ষ} = 16xy(x^2 + y^2)$$

$$= 2 \cdot 4xy \cdot 2(x^2 + y^2)$$

$$= 2\{(x+y)^2 - (x-y)^2\} \{(x+y)^2 + (x-y)^2\}$$

$$= 2\{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\} \{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2\}$$

$$= 2(3-2)(3+2)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore 16xy(x^2 + y^2) = 10 \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ (iii) নং উদ্দীপক থেকে পাই,

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow x^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5$$

$$= (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$$

$$= (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$$

$$\therefore x = \sqrt{3} + \sqrt{5} \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} \text{ [লব ও হরকে } \sqrt{5} - \sqrt{3} \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = (\sqrt{3} + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^3 - \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{8} \{(\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 \cdot 3\sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^3\}$$

$$- \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{8} \{3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} \cdot 45 + 27 \cdot 5\sqrt{5}\}$$

$$- \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{8} \{3\sqrt{3} + 27\sqrt{5} + 135\sqrt{3} + 135\sqrt{5}\} - \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{8} \{138\sqrt{3} + 162\sqrt{5}\} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{138\sqrt{3}}{8} + \frac{162\sqrt{5}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{138\sqrt{3} + 162\sqrt{5} - 12\sqrt{3} - 36\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{126\sqrt{3} + 126\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{63}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \text{ (Ans.)}$$

গ মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যবই এর অনুশীলনী ৫.২ এর উদাহরণ-১৪ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৯৭

প্রশ্ন ৭ $P = x - a$, $Q = x - b$ এবং $R = x - 3a - 3b$ হলে-

$$\text{ক. } P + 2Q = 2(a + b) \text{ হলে } x \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad ২$$

$$\text{খ. } \frac{P}{b} + \frac{Q}{a} + \frac{R}{a+b} = 0 \text{ হলে সমীকরণটির সমাধান কর।} \quad ৪$$

$$\text{গ. } \frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \text{ হলে সমীকরণটির সমাধান সেট নির্ণয় কর।} \quad ৪$$

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P + 2Q = 2(a + b)$

$$\Rightarrow x - a + 2(x - b) = 2(a + b) \text{ [P ও Q এর মান বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow x - a + 2x - 2b = 2a + 2b$$

$$\Rightarrow 3x = 2a + 2b + a + 2b$$

$$\Rightarrow 3x = 3a + 4b$$

$$\Rightarrow x = \frac{3a + 4b}{3} \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $\frac{P}{b} + \frac{Q}{a} + \frac{R}{a+b} = 0$

$$\text{বা, } \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} + \frac{x-3a-3b}{a+b} = 0 \text{ [P, Q ও R এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{x-a}{b} - 1\right) + \left(\frac{x-b}{a} - 1\right) + \left(\frac{x-3a-3b}{a+b} + 2\right) = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x-a-b}{b} + \frac{x-b-a}{a} + \frac{x-3a-3b+2a+2b}{a+b} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x-a-b}{b} + \frac{x-a-b}{a} + \frac{x-a-b}{a+b} = 0$$

$$\text{বা, } (x-a-b) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right) = 0$$

$$\text{বা, } x-a-b = 0 \text{ [x বর্জিত রাশি বলে } \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right) \neq 0]$$

$$\therefore x = a + b$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } x = a + b$$

গ দেওয়া আছে,

$$\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$\text{বা, } \frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \text{ [P ও Q এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } \frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\text{বা, } \frac{x-a}{x-b} - \frac{a}{b} + \frac{x-b}{x-a} - \frac{b}{a} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{a(x-a) - b(x-b)}{a(x-b)} + \frac{b(x-b) - a(x-a)}{b(x-a)} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{ax - a^2 - bx + b^2}{a(x-b)} + \frac{bx - b^2 - ax + a^2}{b(x-a)} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{ax - bx - a^2 + b^2}{a(x-b)} - \frac{ax - bx - a^2 + b^2}{b(x-a)} = 0$$

$$\text{বা, } (ax - bx - a^2 + b^2) \left\{ \frac{1}{a(x-b)} - \frac{1}{b(x-a)} \right\} = 0$$

$$\text{বা, } \{x(a-b) - (a+b)(a-b)\} \left\{ \frac{1}{a(x-b)} - \frac{1}{b(x-a)} \right\} = 0$$

হয়, $x(a - b) - (a + b)(a - b) = 0$

বা, $x(a - b) = (a + b)(a - b)$

$\therefore x = a + b$ [উভয়পক্ষকে $(a - b)$ দ্বারা ভাগ করে]

অথবা, $\frac{1}{a(x - b)} - \frac{1}{b(x - a)} = 0$

বা, $a(x - b) = b(x - a)$

বা, $ax - ab = bx - ab$

বা, $ax - bx = 0$

বা, $x(a - b) = 0$

$\therefore x = 0$ [$\because a \neq b$]

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 0$ অথবা $a + b$

প্রশ্ন ৮ কোনো সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার 50 গুণ চাঁদা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিয়েছেন। কিন্তু 8 জন সদস্য চাঁদা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 500 টাকা বেড়ে গেল।

ক. সমিতির সদস্য সংখ্যা x এবং মোট চাঁদার পরিমাণ p হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. চাঁদা দিয়েছে এমন সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ. মোট চাঁদার $\frac{2}{5}$ অংশ 4% হারে চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় এবং অবশিষ্ট টাকা 7% হারে সরল মুনাফায় 2 বছরের জন্য বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর।

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, সদস্য সংখ্যা x জন

চাঁদার পরিমাণ p টাকা

একজনের চাঁদা = $50x$ টাকা

$\therefore x$ জনের চাঁদা = $50x \times x$ টাকা = $50x^2$ টাকা

$\therefore p = 50x^2$

খ 8 জন চাঁদা না দিলে প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ = $\frac{50x^2}{x - 8}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{50x^2}{x - 8} = 50x + 500$

বা, $\frac{x^2}{x - 8} = x + 10$ [উভয়পক্ষকে 50 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 = (x + 10)(x - 8)$

বা, $x^2 = x^2 + 10x - 8x - 80$

বা, $x^2 - x^2 + 80 = 10x - 8x$

বা, $80 = 2x$

বা, $x = 40$ জন

\therefore চাঁদা দিয়েছে, $x - 8 = 40 - 8 = 32$ জন (Ans.)

মোট চাঁদার পরিমাণ, $p = 50x^2 = 50 \times 40^2 = 80,000$ টাকা (Ans.)

গ 80000 এর $\frac{2}{5}$ অংশ = 32000 টাকা

অবশিষ্ট টাকা = $(80000 - 32000)$ টাকা = 48000 টাকা

32000 টাকার ক্ষেত্রে, $p = 32000$ টাকা

$n = 2$ বছর

$r = \frac{4}{100}$

আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি মূলধন = $p(1 + r)^n$

= $32000 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2$

= $32000 \times \frac{104 \times 104}{100 \times 100}$

= 34611.2 টাকা (প্রায়)

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, $I_1 = (34611.2 - 32000)$ টাকা

= 2611.2 টাকা (প্রায়)

48000 টাকার ক্ষেত্রে, $p = 48000$ টাকা

$n = 2$ বছর

$r = \frac{7}{100}$

আমরা জানি, সরল মুনাফা, $I_2 = pnr = 48000 \times 2 \times \frac{7}{100} = 6720$ টাকা

\therefore মোট মুনাফা = $I_1 + I_2$

= $(2611.2 + 6720)$ টাকা

= 9331.2 টাকা (Ans.)

প্রশ্ন ৯ 120টি পঁচিশ পয়সার ও পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় মোট 35 টাকা হয়।

ক. পঁচিশ পয়সার মুদ্রা যদি x সংখ্যক হয় তাহলে পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রায় কত টাকা হবে?

খ. কোন প্রকার মুদ্রার সংখ্যা কত?

গ. মোট টাকা নির্দিষ্ট রেখে যদি পঞ্চাশ পয়সার মুদ্রা দ্বিগুণ করা হয় তাহলে পঁচিশ পয়সার মুদ্রা কতটি কমাতে হবে?

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, পঁচিশ পয়সার মুদ্রা x টি

\therefore পঁচিশ পয়সার মুদ্রা = $(120 - x)$ টি

অতএব, পঁচিশ পয়সার মুদ্রা হবে = $(120 - x) \times 50$ পয়সা

বা, $\frac{(120 - x)50}{100}$ টাকা (Ans.)

খ প্রশ্নমতে, $25x + 50(120 - x) = 3500$

বা, $25x + 6000 - 50x = 3500$

বা, $25x - 50x = 3500 - 6000$ [পক্ষালঙ্ঘন করে]

বা, $-25x = -2500$

বা, $x = \frac{-2500}{-25}$

$\therefore x = 100$

\therefore পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 100টি

এবং পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $(120 - 100)$ বা 20টি

পঁচিশ পয়সার মুদ্রা 100টি এবং পঁচিশ পয়সার মুদ্রা 20টি (Ans.)

গ 'খ' হতে পাই, পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 20 টি

এবং পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা 100টি

পঁচিশ পয়সার মুদ্রা দ্বিগুণ করলে হয় (20×2) টি বা 40টি

40টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রায় হয় = (40×50) পয়সা = 2000 পয়সা

= $\frac{2000}{100}$ টাকা = 20 টাকা

\therefore পঁচিশ পয়সার মুদ্রায় হবে = $(35 - 20)$ টাকা = 15 টাকা

= (15×100) পয়সা = 1500 পয়সা

\therefore পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা হবে = $\frac{1500}{25}$ টি = 60 টি

\therefore পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা কমাতে হবে = $(100 - 60)$ টি = 40টি (Ans.)

প্রশ্ন ১০ $(a + b + x)^{-1} = a^{-1} + b^{-1} + x^{-1}$ একটি বিজগণিতীয় সমীকরণ এবং

$\frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}} \times \frac{1}{5^{-2}}$ একটি সূচকীয় রাশি।

ক. সমীকরণ সমাধানের চারটি পদ্ধতির নাম লিখ এবং সমীকরণের বিজ কী? ২

খ. 1ম সমীকরণের সমাধান সেট নির্ণয় কর। 8

গ. সূচকীয় রাশিটির সরল মান বের কর। 8

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমীকরণ সমাধানের চারটি পদ্ধতি হলো:

(i) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

(ii) অপনয়ন পদ্ধতি

(iii) আড়গুণন পদ্ধতি

(iv) লৈখিক পদ্ধতি

সমীকরণের বিজ: সমীকরণ সমাধান করে চলকের যে সকল মান পাওয়া যায় এবং এদের মধ্যে যে মানগুলো দ্বারা ঐ সমীকরণ সিদ্ধ হয় তাদের সমীকরণের বিজ বলে।

খ সূজনশীল প্রশ্ন ২(গ) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সূচকীয় রাশিটি,

$\frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}} \times \frac{1}{5^{-2}}$

= $\frac{5^{m+1}}{5^{m^2-m}} \div \frac{(5^2)^{m+1}}{5^{m^2-1}} \times \frac{1}{5^{-2}}$

= $\frac{5^{m+1}}{5^{m^2-m}} \times \frac{5^{m^2-1}}{5^{2m+2}} \times \frac{1}{5^{-2}}$

= $\frac{5^{m+1+m^2-1}}{5^{m^2-m+2m+2-2}} = \frac{5^{m+m^2}}{5^{m^2+m}}$

= $5^{m+m^2-m^2-m}$

= 5^0

= 1 (Ans.)