SSC Math

অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট

অধ্যায়-৬: রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ

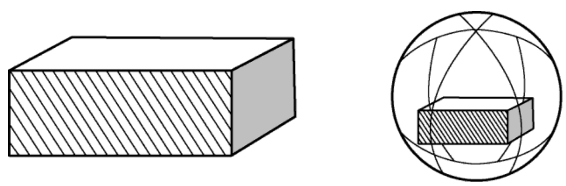
প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **জ্যামিতি**

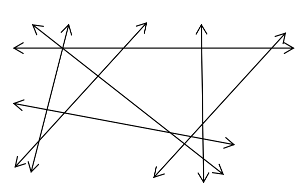
জ্যামিতি বা *'Geometry'* গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। *'Geometry'* শব্দটি গ্রিক *Geo*-ভূমি (earth) ও *metrein* -পরিমাপ *(measure)* শব্দের সমন্বয়ে তৈরি। তাই 'জ্যামিতি' শব্দের অর্থ 'ভূমি পরিমাপ'। কৃষিভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তবে জ্যামিতি আজকাল কেবল ভূমি পরিমাপের জন্যই ব্যবহৃত হয় না, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে জ্যামিতিক জ্ঞান এখন অপরিহার্য। প্রাচীন সভ্যতার নিদর্শনগুলোতে জ্যামিতি চর্চার প্রমাণ পাওয়া যায়। ঐতিহাসিকদের মতে প্রাচীন মিশরে আনুমানিক চার হাজার বছর আগেই ভূমি জরিপের কাজে জ্যামিতিক ধ্যান–ধারণা ব্যবহার করা হতো।
তবে প্রাচীন গ্রিক সভ্যতার যুগেই জ্যামিতিক প্রণালিবদ্ধ রূপটি সুস্পষ্টভাবে লক্ষ করা যায়। গ্রিক গণিতবিদ থেলিসকে প্রথম জ্যামিতিক প্রমাণের কৃতিত্ব দেয়া হয়। থেলিসের শিষ্য পিথাগোরাস জ্যামিতিক তত্ত্বের বিস্তৃতি ঘটান।

- **স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর ধারণা**

আমাদের চারপাশে বিস্তৃত জগত *(Space)* সীমাহীন। এর বিভিন্ন অংশজুড়ে রয়েছে ছোট–বড় নানা রকম বস্তু। ছোট–বড় বস্তু বলতে বালুকণা, আলপিন, পেন্সিল, কাগজ, বই, চেয়ার, টেবিল, ইট, পাথর, বাড়িঘর, পাহাড়, পৃথিবী, গ্রহ–নক্ষত্র সবই বোঝানো হয়। বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশজুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান–ধারণার উদব।
কোনো ঘনবস্তু *(Solid)* যে স্থান অধিকার করে থাকে, তা তিন দিকে বিস্তৃত। এই তিন দিকের বিস্তারেই বস্তুটির তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা) নির্দেশ করে। সেজন্য ঘনবস্তুই ত্রিমাত্রিক *(Three dimensional)* যেমন, একটি ইট বা বাক্সের তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা) আছে। একটি গোলকের তিনটি মাত্রা আছে। এর তিন মাত্রার ভিন্নতা স্পষ্ট বোঝা না গেলেও একে দৈর্ঘ্য–প্রস্থ –উচ্চতা বিশিষ্ট খ– বিভক্ত করা যায়।



ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল *(Surface)* নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি সমতলের প্রতিরূপ।
তল দ্বিমাত্রিক *(Two-dimensional)* : এর শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কোনো উচ্চতা নেই। দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে একটি রেখা (line) উৎপন্ন হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠতল বাক্সের একধারে একটি রেখায় মিলিত হয়।
রেখা একমাত্রিক *(one-dimensional)* : এর শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। বাক্সের একটি পৃষ্ঠ–তলের প্রস্থ ক্রমশ হ্রাস পেয়ে সম্পূর্ণ শূন্য হলে, ঐ তলের একটি রেখা মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণায় আসা যায়।
দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়। অর্থাৎ, দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু *(point)* দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাক্সের দুইটি ধার যেমন, বাক্সের এক কোণায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।
সমতল জ্যামিতি : জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা এবং তাদের সঙ্গে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্তা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে সমতল জ্যামিতিক (Plane Geometry) বলা হয়। বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থানকে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়।

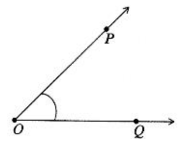


- **রেখা, রশ্মি, রেখাংশ**

সমতলীয় জ্যামিতির স্বীকার্য অনুযায়ী সমতলে সরলরেখা বিদ্যমান যার প্রতিটি বিন্দু সমতলে অবস্থিত। মনে করি, সমতলে AB একটি সরলরেখা এবং রেখাটির উপর অবস্থিত একটি বিন্দু C। C বিন্দুকে A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী বলা হয় যদি A, C ও B একই সরলরেখার ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হয় এবং $AC + CB = AB$ হয়। A, C ও B বিন্দু তিনটিকে সমরেখ বিন্দুও বলা হয়। A ও B এবং এদের অন্তর্বর্তী

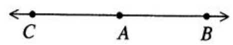
সকল বিন্দুর সেটকে A ও B বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বা সংক্ষেপে AB রেখাংশ বলা হয়। A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী প্রত্যেক বিন্দুকে রেখাংশের অন্তঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

- **কোণ :** সমতলে দুইটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু একই হলে কোণ তৈরি হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের বাহু এবং তাদের সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে।



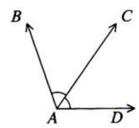
চিত্রে, OP ও OQ রশ্মিদ্বয় তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু O তে ∠POQ উৎপন্ন করেছে। O বিন্দুটি ∠POQ এর শীর্ষবিন্দু।

- **সরল কোণ :** দুইটি পরস্পর বিপরীত রশ্মি তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে সরল কোণ বলে।



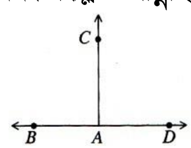
চিত্রে, AB রশ্মি, প্রান্তবিন্দু A থেকে AB এর বিপরীত দিকে AC রশ্মি আঁকা হয়েছে। AC ও AB রশ্মিদ্বয় তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু A তে ∠BAC উৎপন্ন করেছে। ∠BAC কে সরল কোণ বলে। সরল কোণের পরিমাপ দুই সমকোণ বা ১৮০°।

- **সন্নিহিত কোণ :** যদি সমতলে দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু হয় ও তাদের একটি সাধারণ রশ্মি থাকে এবং কোণদ্বয় সাধারণ রশ্মির বিপরীত পাশে অবস্থান করে, তবে ঐ কোণদ্বয়কে সন্নিহিত কোণ বলে।



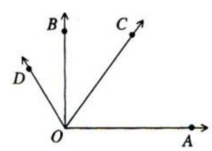
চিত্রে, A বিন্দুটি ∠BAC ও ∠CAD এর শীর্ষবিন্দু।
A বিন্দু ∠BAC ও ∠CAD উৎপন্নকারী রশ্মিগুলোর মধ্যে AC সাধারণ রশ্মি। কোণ দুইটি সাধারণ রশ্মি AC এর বিপরীত পাশে অবস্থিত। ∠BAC এবং ∠CAD পরস্পর সন্নিহিত কোণ।

- **লম্ব, সমকোণ :** একটি সরলকোণের সমদ্বিখ-ককে লম্ব এবং সংশ্লিষ্ট সন্নিহিত কোণের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে।



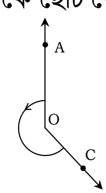
চিত্রে, ∠BAD সরলকোণ A বিন্দুতে AC রশ্মি দ্বারা উৎপন্ন ∠BAC ও ∠CAD সন্নিহিত কোণ দুইটির প্রত্যেকে সমকোণ এবং BD ও AC বাহুদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

- **সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ :** এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়।

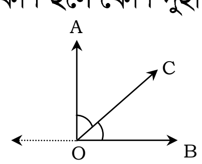


চিত্রে ∠AOC সূক্ষ্মকোণ এবং ∠AOD স্থূলকোণ। এখানে ∠AOB এক সমকোণ।

- **প্রবৃদ্ধ কোণ :** দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে। চিত্রে চিহ্নিত ∠AOC প্রবৃদ্ধ কোণ।

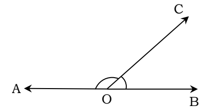


- **পূরক কোণ :** দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল 1 সমকোণ হলে কোণ দুইটির একটি অপরটির পূরক কোণ।



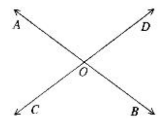
চিত্রে, ∠AOB একটি সমকোণ। OC রশ্মি কোণটির বাহুদ্বয়ের অভ্যন্তরে অবস্থিত। এর ফলে ∠AOC এবং ∠COB এই দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল ∠AOB এর পরিমাপের সমান, অর্থাৎ 1 সমকোণ। ∠AOC এবং ∠COB পরস্পর পূরক কোণ।

- **সম্পূরক কোণ :** দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল 2 সমকোণ হলে কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক কোণ।



AB একটি সরলরেখার O অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। OC একটি রশ্মি যা OA রশ্মি ও OB রশ্মি থেকে ভিন্ন। এর ফলে $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ এই দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল $\angle AOB$ কোণের পরিমাপের সমান, অর্থাৎ 2 সমকোণ, কেননা $\angle AOB$ একটি সরলকোণ। $\angle AOC$ এবং $\angle COB$ পরস্পর সম্পূরক কোণ।

- **বিপ্রতীপ কোণ :** কোনো কোণের বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মিদ্বয় যে কোণ তৈরি করে তা ঐ কোণের বিপ্রতীপ কোণ।



চিত্রে OA ও OB পরস্পর বিপরীত রশ্মি। আবার, OC ও OD পরস্পর বিপরীত রশ্মি।

$\therefore$ $\angle BOD$ ও $\angle AOC$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ। আবার $\angle BOC$ ও $\angle DOA$ একটি অপরটির বিপ্রতীপ কোণ। দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, ছেদ বিন্দুতে দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ উৎপন্ন হয়।

- **সমান্তরাল সরলরেখা :** একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখার সমান্তরালতা নিচে বর্ণিত তিনভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় :

ক. সরলরেখা দুইটি কখনও পরস্পরকে ছেদ করে না (দুই দিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করা হলেও)।

খ. একটি সরলরেখার প্রতিটি বিন্দু অপরটি থেকে সমান ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থান করে।

গ. সরলরেখা দুইটিকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে যদি একান্তর কোণ বা অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়।

সংজ্ঞা (ক) অনুসারে একই সমতলে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা একে অপরকে ছেদ না করলে সেগুলো সমান্তরাল। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা থেকে যেকোনো দুইটি রেখাংশ নিলে, রেখাংশ দুইটিও পরস্পর সমান্তরাল হয়।

সংজ্ঞা (খ) অনুসারে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটির যেকোনো বিন্দু থেকে অপরটির লম্ব–দূরত্ব সর্বদা সমান। লম্ব–দূরত্ব বলতে তাদের একটির যেকোনো বিন্দু হতে অপরটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকেই বোঝায়। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি সরলরেখার একটির যেকোনো দুইটি বিন্দু থেকে অপরটির লম্ব–দূরত্ব পরস্পর সমান হলেও রেখাদ্বয় সমান্তরাল। এই লম্ব–দূরত্বকে দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব বলা হয়।

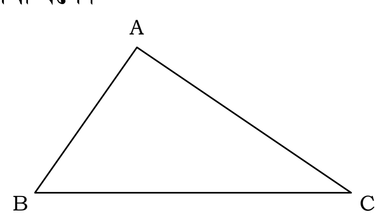
সংজ্ঞা (গ) ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যের সমতুল্য। জ্যামিতিক প্রমাণ ও অঙ্কনের জন্য এ সংজ্ঞাটি অধিকতর উপযোগী।

লক্ষকরি, কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত নয় এরূপ বিন্দুর মধ্য দিয়ে ঐ সরলরেখার সমান্তরাল করে একটি মাত্র সরলরেখা আঁকা যায়।

- **ত্রিভুজ**

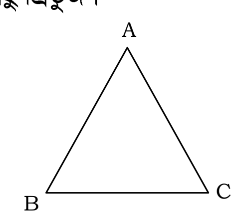
তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজের বাহুগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধক্ষেত্রকে ত্রিভুজক্ষেত্র বলে। রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলে। যেকোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বাহু শীর্ষবিন্দুতে কোণ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে।

ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে পরিসীমা বলে।



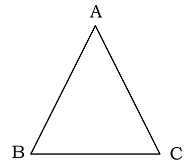
চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ। A, B, C এর তিনটি শীর্ষবিন্দু। AB, BC, CA এর তিনটি বাহু এবং এর তিনটি কোণ $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$। AB, BC, CA বাহুর পরিমাপের যোগফল ত্রিভুজটির পরিসীমা।

- **সমবাহু ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান তা সমবাহু ত্রিভুজ।



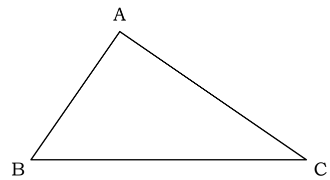
চিত্রে ABC ত্রিভুজের $AB = BC = CA$। ΔABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

- **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান তা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।



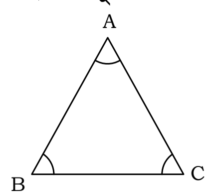
চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $AB = AC \neq BC$। যাদের কোনোটিই তৃতীয় বাহুর সমান নয়। ΔABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

- **বিষমবাহু ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান তা বিষমবাহু ত্রিভুজ।



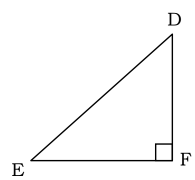
চিত্রে, ABC ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পরস্পর অসমান। ΔABC একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।

- **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ সূক্ষ্মকোণ, তা সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।



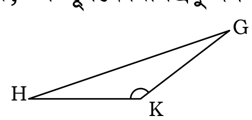
চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ কোণ তিনটি প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। ΔABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

- **সমকোণী ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ, তা সমকোণী ত্রিভুজ।



চিত্রে, DEF ত্রিভুজে $\angle DFE$ সমকোণ, অপর কোণ দুইটি $\angle DEF$ ও $\angle EDF$ প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। ΔDEF একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

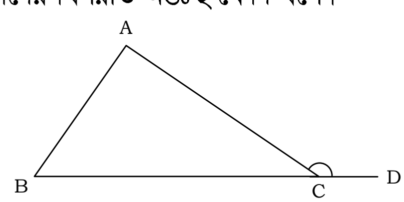
- **স্থূলকোণী ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তা স্থূলকোণী ত্রিভুজ।



চিত্রে GHK ত্রিভুজে $\angle GKH$ একটি স্থূলকোণ, অপর কোণ দুইটি $\angle GHK$ ও $\angle HGK$ প্রত্যেকে সূক্ষ্মকোণ। ΔGHK একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ।

- **ত্রিভুজের বহিঃস্থ ও অন্তঃস্থ কোণ**

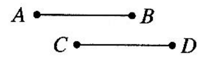
কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। এই কোণের সন্নিহিত কোণটি ছাড়া ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণকে এই বহিঃস্থ কোণের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলে।

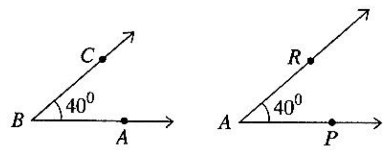


চিত্রে, ΔABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে। $\angle ACD$ ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। $\angle ABC$ ও $\angle BAC$ এর প্রত্যেককে $\angle ACD$ এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।

■ **বাহু ও কোণের সর্বসমতা :**

দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হলে রেখাংশ দুইটি সর্বসম। বিপরীতভাবে, দুইটি রেখাংশ সর্বসম হলে তাদের দৈর্ঘ্য সমান। দুইটি কোণের পরিমাপ সমান হলে কোণ দুইটি সর্বসম।



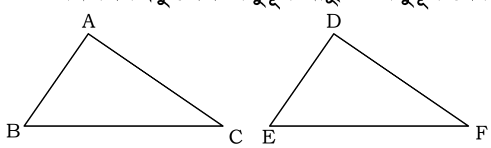


(i) (ii)

বিপরীতভাবে, দুইটি কোণ সর্বসম হলে তাদের পরিমাপও সমান।

■ **ত্রিভুজের সর্বসমতা :**

একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান।



সৃজনশীল প্রশ্ন:

প্রশ্ন ▸১ *[রা. বো. ১৭]*

ΔABC এর AB, BC এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R.

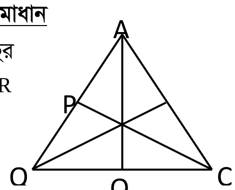
ক. মধ্যমাসহ ত্রিভুজটি এঁকে দেখাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AQ$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ = \frac{1}{2} AC$. ৪

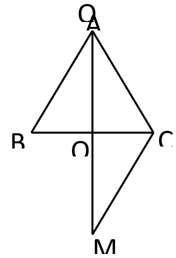
১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে, ΔABC এর AB, BC এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R। A, Q; B, R এবং C, P যোগ করি। AQ, BR এবং CP যথাক্রমে Δ ABC এর তিনটি মধ্যমা।



খ প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AQ$.

অঙ্কন: AQ কে M পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $AQ = QM$ হয়। C, M যোগ করি।



প্রমাণ:	**যথার্থতা:**
(১) ΔABQ ও ΔCQM এ	
$BQ = CQ$	[□ Q, BC এর মধ্যবিন্দু]
$AQ = QM$	[অঙ্কনানুসারে]
এবং $\angle AQB = \angle CQM$	[বিপ্রতীপ কোণ]
$\therefore \Delta AQB \cong \Delta CQM$	
সুতরাং $AB = CM$	
(২) এখন, ΔACM এ	[যেহেতু ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
$AC + CM > AM$	
বা, $AC + AB > AQ + QM$	
বা, $AB + AC > AQ + AQ$	
$\therefore$ $AB + AC > 2AQ$ **(প্রমাণিত)**	

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৬.৩ এর উপপাদ্য ১৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১১৭

প্রশ্ন ▸২ *[সি. বো. ১৭]*

ΔPQR এ $PO \perp QR$, $PQ = PR = 5$ সে.মি. এবং $QO = 4$ সে.মি.।

ক. PO এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। ২

খ. প্রমাণ করো যে, $QO = \frac{1}{2} QR$. ৪

গ. প্রমাণ করো যে, $PQ + PR > 2PO$. ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু, $PO \perp OQ$

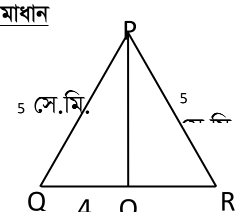
ΔPOQ হতে $PQ^2 = PO^2 + OQ^2$

বা, $PO^2 = PQ^2 - OQ^2$

$= (5)^2 - (4)^2$

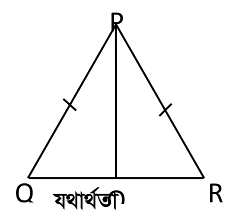
$= 25 - 16 = 9$

$\therefore$ $PO = 3$ সে.মি.



খ দেওয়া আছে, PQR ত্রিভুজে $PO \perp QR$ এবং $PQ = PR$

প্রমাণ করতে হবে যে $QO = \frac{1}{2} QR$



প্রমাণ: ধাপ	**যথার্থতা**
(১) $\angle POQ = \angle POR = 1$ সমকোণ	[যেহেতু, $PO \perp QR$]
(২) এখন, সমকোণী ΔPOQ ও ΔPRO এর মধ্যে	
অতিভূজ PQ = অতিভূজ PR	[দেওয়া আছে]
$PO = PO$	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta POQ \cong \Delta PRO$	[অতিভূজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]
$\therefore QO = OR$	
(৩) $QO + OR = QR$	[অঙ্কনানুসারে]
বা, $QO + QO = QR$	[ধাপ-২ থেকে]
বা, $2QO = QR$	
$\therefore QO = \frac{1}{2} QR$ **(প্রমাণিত)**	

গ প্রশ্ন-১(খ) এর সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৩ ***[ঢা. বো. ১৬]***

ΔPQR এর PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T।

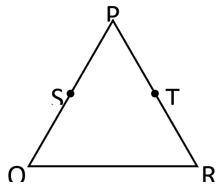
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র অংকন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $ST = \frac{1}{2} QR$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ + QR > 2QT$। ৪

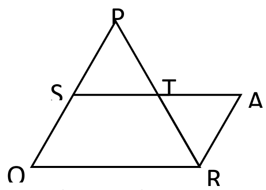
৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রে, ΔPQR এর PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T.

খ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, PQR ত্রিভুজে S ও T যথাক্রমে PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $ST = \frac{1}{2} QR$.

অংকন: S ও T যোগ করে বর্ধিত করি যেন $ST = TA$ হয়। R, A যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔPST ও ΔATR-এ

$PT = TR$ [দেওয়া আছে]

$ST = TA$ [অঙ্কনানুসারে]

$\angle STP = \angle RTA$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta PST \cong \Delta ATR$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle PST = \angle RAT$ [একান্তর কোণ]

এবং $\angle TPS = \angle TRA$

$\therefore$ $SA \parallel QR$ বা, $ST \parallel QR$

(২) আবার, $SA = QR$

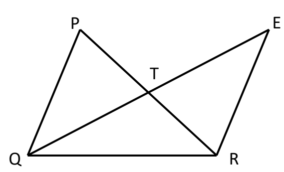
বা, $ST + TA = QR$

বা, $ST + ST = QR$

বা, $2ST = QR$

$\therefore ST = \frac{1}{2}QR$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR এর PR বাহুর মধ্যবিন্দু T। Q, T যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ + QR > 2QT$.

অংকন: QT কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $TE = QT$ হয়। R, E যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔPQT এবং ΔTER-এ

$PT = TR$ [T, PR এর মধ্যবিন্দু]

$QT = TE$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle QTP$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ETR$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta PQT \cong \Delta TER$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং $PQ = RE$

(২) আবার, ΔQER-এ, [ত্রিভুজের যে কোণ দুই বাহুর সমষ্টি

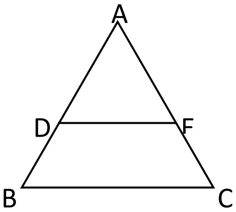
$QR + RE > QE$ তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $QR + PQ > QT + TE$ [ধাপ (১) থেকে]

বা, $PQ + QR > QT + QT$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore PQ + QR > 2QT$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৪ ***[রা. বো. ১৬]***



চিত্রে, ΔABC এর AB এবং AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E।

ক. $37°$ কোণের পূরক কোণ কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $2DE = BC$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB + BC > 2BE$। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি,

দুটি কোণের সমষ্টি $90°$ হলে একটি কোণকে অপর কোণের পূরক কোণ বলে।

$\therefore$ $37°$ কোণের পূরক কোণ $= 90° - 37° = 53°$ **(Ans.)**

খ গণিত পাঠ্য বইয়ের অনুশীলনী-৬.৩ এর উপপাদ্য ১৫ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১১৭

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ১(খ) এর সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৫ ***[দি. বো. ১৬; য. বো. ১৫]***

ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

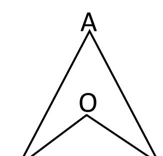
ক. উপরের তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2} \angle A$. ৪

গ. যদি AB কে E পর্যন্ত এবং AC কে F পর্যন্ত বর্ধিত করা হয় এবং $\angle EBC$ ও $\angle FCB$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2} \angle A$. ৪

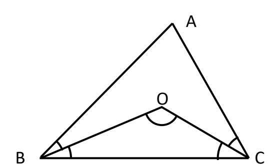
৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

খ



দেওয়া আছে, ত্রিভুজ ABC এর $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অর্থাৎ, BO এবং CO যথাক্রমে $\angle ABC$ এবং $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2} \angle A$.

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এ

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$]

বা, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90°$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ ... ... (i)

(২) ΔBOC-এ

$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

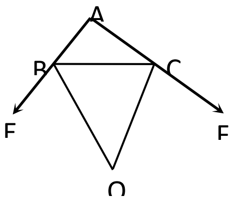
বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$ [∵ BO এবং CO রেখা যথাক্রমে ∠B ও ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle BOC + 90° - \frac{1}{2}\angle A = 180°$ [(i) নং হতে]

বা, $\angle BOC = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A$

$\therefore \angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন:** ΔABC-এর AB বাহুকে E পর্যন্ত এবং AC বাহুকে F পর্যন্ত বর্ধিত করায় B এবং C বিন্দুতে দুইটি বহিঃস্থকোণ যথাক্রমে ∠EBC এবং ∠FCB উৎপন্ন হয়েছে। এখন, ∠EBC এর সমদ্বিখণ্ডক BO এবং ∠FCB এর সমদ্বিখণ্ডক CO পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

প্রমাণ: ধাপ যথার্থতা

(১) ΔABC-এ

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]

বা, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90°$ ... ... (i)

(২) আবার, ΔBOC-এ

$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle EBC + \frac{1}{2}\angle FCB = 180°$ [∵ BO এবং CO যথাক্রমে ∠EBC ও ∠FCB এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}(180° - \angle B) + \frac{1}{2}(180° - \angle C) = 180°$
[∵∠CBE, ∠B-এর এবং ∠BCF,∠C-এর সম্পূরক কোণ]

বা, $\angle BOC + 90° - \frac{1}{2}\angle B + 90° - \frac{1}{2}\angle C = 180°$

বা, $\angle BOC = 180° - 90° - 90° + (\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A) - \frac{1}{2}\angle A$ [(i) নং হতে]

$\therefore \angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬ *[সি. বো. ১৬]*

ABC একটি ত্রিভুজ। E এবং F যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

ক. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের দুইটি সূত্র লিখ। ২

খ. উদ্দীপক অনুসারে প্রমাণ কর যে, EF∥BC এবং $EF = \frac{1}{2}BC$। ৪

গ. যদি ΔABC এর ∠AB = এক সমকোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BF = \frac{1}{2}AC$. ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের দুইটি সূত্র নিম্নরূপ:

ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা জানা থাকলে, $\frac{1}{2} \times$ ভূমি × উচ্চতা

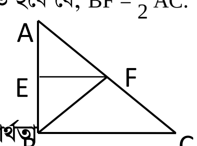
ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

যেখানে, a, b, c ত্রিভুজের বাহুত্রয় এবং $s = \frac{a+b+c}{2}$

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৬.৩ এর উপপাদ্য ১৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১১৭

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, ΔABC-এ ∠B = এক সমকোণ তাহলে F অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু। B, F যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $BF = \frac{1}{2}AC$.

অঙ্কন: E, F যোগ করি।



প্রমাণ: ধাপ যথার্থতা

(১) ΔABC -এর E এবং F যথাক্রমে AB এবং AC -এর মধ্যবিন্দু। [অঙ্কন এবং কল্পনানুসারে]

∴ EF ∥ BC. [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]

∴ ∠AEF = অনুরূপ ∠EBC = এক সমকোণ [কল্পনা]

(২) এখন, ΔAEF এবং ΔBEF -এর মধ্যে

AE = BE [E, AB-এর মধ্যবিন্দু]

EF = EF [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভূক্ত ∠AEF = অন্তর্ভূক্ত ∠BEF [∵ প্রত্যেকে সমকোণ]

∴ ΔAEF ≅ ΔBEF

∴ AF = BF

(৩) কিন্তু $AF = \frac{1}{2}AC$. [F, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore BF = \frac{1}{2}AC$. [ধাপ-২ থেকে] **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৭ *[য. বো. ১৬]*

ΔPQR এর PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M, N এবং PQ > PR.

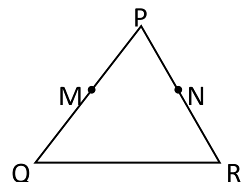
ক. তথ্যটির চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, MN ∥ QR এবং $MN = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. ∠P এর সমদ্বিখন্ডক QR কে D বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, ∠PDQ স্থূলকোণ। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

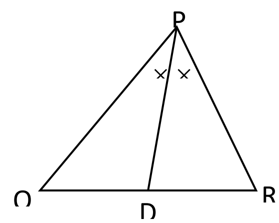
ক



চিত্রে, PQR একটি ত্রিভুজ। ইহার PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N এবং PQ > PR.

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৬.৩ এর উপপাদ্য ১৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১১৭

গ



দেওয়া আছে, ΔPQR-এ PQ > PR এবং ∠P এর সমদ্বিখন্ডক QR কে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠PDQ স্থূলকোণ।

প্রমাণ: ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔPQR-এ PQ > PR

∴ ∠R > ∠Q [ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।]

বা, $\angle R + \frac{1}{2}\angle P > \angle Q + \frac{1}{2}\angle P$ [উভয়পক্ষে $\frac{1}{2}\angle P$ যোগ করে]

(২) আবার, ΔPRD-এ

বহিঃস্থ ∠PDQ = অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle R + \frac{1}{2}\angle P)$

(৩) এবং ΔPQD-এ

বহিঃস্থ ∠PDR = অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle Q + \frac{1}{2}\angle P)$

∴ ∠PDQ > ∠PDR [□ $\angle R + \frac{1}{2}\angle P > \angle Q + \frac{1}{2}\angle P$]

যেহেতু কোণ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং অসমান,

∴ 90° < ∠PDQ < 180°

∴ ∠PDQ স্থূলকোণ। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৮ *[ঢা. বো. ১৫]*

ΔDEF-এ ∠E ও ∠F এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

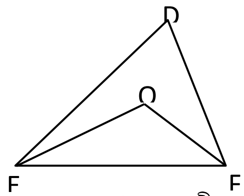
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. দেখাও যে, DE + DF > OE + OF. ৪

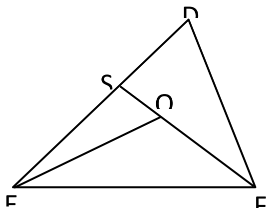
গ. প্রমাণ কর যে, $\angle EOF = 90° + \frac{1}{2}\angle D$. ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি নিম্নরূপ:



খ **বিশেষ নির্বচন:** প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী DEF ত্রিভুজ। $\angle E$ ও $\angle F$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় যথাক্রমে EO ও FO পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
দেখাতে হবে যে, DE + DF > OE + OF



অঙ্কন: FO কে বর্ধিত করি যেন তা DE কে S বিন্দুতে ছেদ করে।

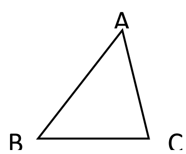
প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔDFS-এ DF + DS > SF [ত্রিভুজের যেকোনো দুই
বা, DF + DS > OF +OS .... (i) বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

(২) আবার ΔEOS-এ
OS + ES > OE .... (ii)
(৩) (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
DF + DS + OS + ES > OF + OS + OE
বা, DF + DE + OS > OF + OS + OE [□ DS + ES = DE]
$\therefore$ DF + DE > OE + OF [উভয় পক্ষ হতে OS বাদ দিয়ে] **(দেখানো হলো)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(খ) এর সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶ ৯



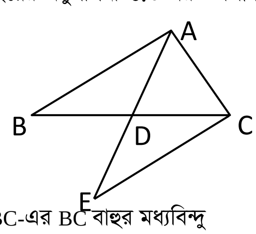
দেওয়া আছে, $\angle ACB > \angle ABC$
ক. ABC ত্রিভুজে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করা যাবে কি? কেন নয়? ২
খ. প্রমাণ কর যে, AB > AC ৪
গ. যদি BC এর মধ্যবিন্দু D হয় তবে প্রমাণ কর যে, AB + AC > 2AD ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ABC ত্রিভুজে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করা যাবে না। কারণ ABC ত্রিভুজে কোনো কোণ সমকোণ কিনা তা নির্দিষ্ট নয়।

খ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.৩ এর উপপাদ্য-১৩ অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১১৬

গ



দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু
D. A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, AB + AC > 2AD.
অঙ্কন: AD কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, DE = AD হয়।
E, C যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABD এবং ΔECD-এ
BD = CD [$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে]
AD = DE [অঙ্কন অনুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle$ADB = অন্তর্ভুক্ত $\angle$EDC [বিপ্রতীপ কোণ সমান]
$\therefore$ Δ ABD $\cong$ ΔECD [$\because$ দুইটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান]

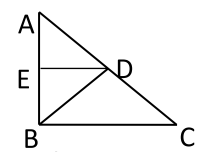
সুতরাং AB = CE ... ... (i)
(২) এখন, Δ AEC-এ,
AC + CE > AE [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
বা, AC + AB > AD + DE [$\because$ (i) নং থেকে AB = CE]
বা, AB + AC > AD + AD [$\because$ অঙ্কনানুসারে, DE = AD]
$\therefore$ AB + AC > 2AD. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১০ ΔABC এ $\angle$B = এক সমকোণ এবং AC এর মধ্যবিন্দু D।
$\angle C = 2\angle A$.
ক. $\angle$A এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. দেখাও যে, BD = $\frac{1}{2}$AC. ৪
গ. প্রমাণ কর যে, AC = 2BC. ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ অথবা 180°।
এখন, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ এ,
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
বা, $\angle A + 90° + 2\angle A = 180°$ [□ $\angle C = 2\angle A$]
বা, $3\angle A = 180° - 90°$
$\therefore$ $\angle A = \frac{90°}{3} = 30°$ **(Ans.)**

খ

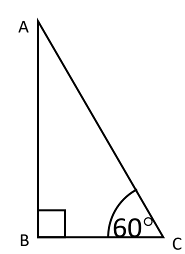


বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এ $\angle$B = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু। B, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, BD = $\frac{1}{2}$AC.
অঙ্কন: AB -এর মধ্যবিন্দু E নিই
এবং D, E যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABC -এর E এবং D যথাক্রমে AB এবং AC -এর মধ্যবিন্দু। [অঙ্কন এবং কল্পনানুসারে]
$\therefore$ DE $\parallel$ BC. [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]
$\therefore$ $\angle$AED = অনুরূপ $\angle$EBC = এক সমকোণ [কল্পনা]
(২) এখন, ΔAED এবং ΔBED -এর মধ্যে
AE = BE, [E, AB-এর মধ্যবিন্দু]
DE = DE [সাধারণ বাহু]
এবং অন্তর্ভূক্ত $\angle$AED = অন্তর্ভূক্ত $\angle$BED [$\because$ প্রত্যেকে সমকোণ]
$\therefore$ ΔAED $\cong$ ΔBED
$\therefore$ AD = BD
(৩) কিন্তু AD = $\frac{1}{2}$AC.
$\therefore$ BD = $\frac{1}{2}$AC. **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,



$\angle B = 90°$
$\angle A = 30°$ [(ক) হতে]
এখন, $\angle C = 2\angle A = 2 \times 30° = 60°$
$\therefore$ ΔABC এ, $\cos\angle C = \frac{BC}{AC}$
বা, $\cos 60° = \frac{BC}{AC}$
বা, $\frac{1}{2} = \frac{BC}{AC}$
$\therefore$ AC = 2BC. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১১ ΔPQR এর PQ এবং PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E। $\angle$Q এবং $\angle$R এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

ক. একটি ত্রিভুজ গঠন করার জন্য যে কোনো দুইটি শর্ত লিখ। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle QOR = 90° + \frac{1}{2}\angle P$. ৪

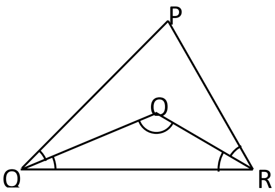
গ. প্রমাণ কর যে, $DE \parallel QR$ এবং $DE = \frac{1}{2}QR$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ত্রিভুজ গঠন করার দুটি শর্ত :

1. দুইটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ।
2. দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু

খ



দেওয়া আছে, ত্রিভুজ PQR এর $\angle Q$ এবং $\angle R$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অর্থাৎ, QO এবং RO যথাক্রমে $\angle PQR$ এবং $\angle PRQ$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QOR = 90° + \frac{1}{2}\angle P$.

প্রমাণ: ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔPQR-এ

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

বা, $\frac{1}{2}\angle P + \frac{1}{2}\angle Q + \frac{1}{2}\angle R = 90°$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore \frac{1}{2}\angle Q + \frac{1}{2}\angle R = 90° - \frac{1}{2}\angle P$ ... ... (i)

(২) ΔQOR-এ

$\angle QOR + \angle OQR + \angle ORQ = 180°$

বা, $\angle QOR + \frac{1}{2}\angle Q + \frac{1}{2}\angle R = 180°$ [$\because$ QO এবং RO রেখা যথাক্রমে $\angle Q$ ও $\angle R$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle QOR + 90° - \frac{1}{2}\angle P = 180°$ [(i) নং হতে]

বা, $\angle QOR = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle P$

$\therefore \angle QOR = \angle 90° + \frac{1}{2}\angle P$ **(প্রমাণিত)**

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৬.৩ এর উপপাদ্য-১৫ এর অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১১৭

প্রশ্ন ▶১২ একটি সমকোণী ত্রিভুজ ΔABC-এ, $\angle A = 1$ সমকোণ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু।

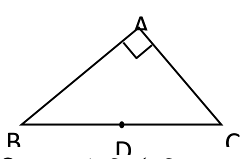
ক. উপরের তথ্যের সাহায্যে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AB + BC > AC। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, BC = 2AD। ৪

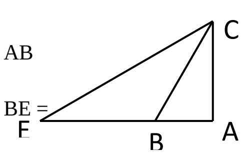
১২ নং প্রশ্নের সমাধান

K



প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, AB + BC > AC.



অঙ্কন: AB কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন BE = BC হয়। C, E যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ **যথার্থতা**

(১) ΔBEC-এ BE = BC [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \angle BCE = \angle BEC$

$\therefore \angle BCE = \angle AEC$

(২) $\angle ACE > \angle BCE$ [কারণ $\angle BCE$, $\angle ACE$ এর একটি অংশ]

$\therefore \angle ACE > \angle AEC$

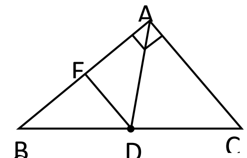
(৩) ΔACE-এ $\angle ACE > \angle AEC$ [বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তর]

$\therefore$ AE > AC

(৪) কিন্তু AE = AB + BE = AB + BC [যেহেতু BC = BE]

$\therefore$ AB + BC > AC. **(প্রমাণিত)**

গ **বিশেষ নির্বচন:** মনে করি, ΔABC-এর $\angle A =$ এক সমকোণ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু। A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, BC = 2AD.



অঙ্কন: AB এর মধ্যবিন্দু E নিই। D, E যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔABC-এ E এবং D যথাক্রমে AB ও BC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore DE \parallel AC$ [□ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।]

$\therefore$ $\angle BAC$ = অনুরূপ $\angle BED$ = এক সমকোণ।

(২) এখন, ΔAED ও ΔBED-এর মধ্যে

AE = BE [□ E, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\angle AED$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BED$ [□ প্রত্যেকে সমকোণ]

এবং DE = DE [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta AED \cong \Delta BED$

$\therefore$ AD = BD

(৩) কিন্তু, $BD = \frac{1}{2}BC$

$\therefore AD = \frac{1}{2}BC$

$\therefore$ BC = 2AD. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৩ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E। $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর বহিঃদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

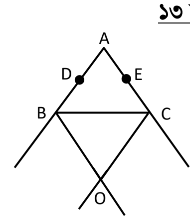
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, 6 DE = 3BC ৪

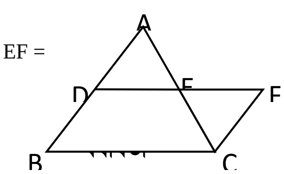
গ. প্রমাণ কর যে, $2\angle BOC + \angle BAC = 180°$ ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ D ও E যোগ করে বর্ধিত করি যেন EF = DE হয়। C, F যোগ করি।



প্রমাণঃ ধাপ

(১) ΔADE ও ΔCEF এর মধ্যে

AE = EC [দেওয়া আছে]

DE = EF [অঙ্কনানুসারে]

$\angle AED = \angle CEF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta ADE \cong \Delta CEF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle ADE = \angle EFC$ এবং $\angle DAE = \angle ECF$. [একান্তর কোণ]

$\therefore DF \parallel BC$

(২) আবার, DF = BC বা DE + EF = BC

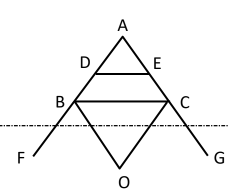
বা, DE + DE = BC

বা, 2DE = BC

বা, $3 \times 2DE = 3 \times BC$

$\therefore$ 6DE = 3BC **(প্রমাণিত)**

গ



আমরা জানি, ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle CBF = \angle BAC + \angle ACB$

বা, $\frac{1}{2}\angle CBF = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB)$

বা, $\angle CBO = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB)$ [যেহেতু BO রেখা $\angle B$ এর বহিঃদ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle CBO = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB)$ ... ... (i)

একইভাবে,

$\angle BCO = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে,

$\angle CBO + \angle BCO = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB) + \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$

বা, $180° - \angle BOC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC)$

বা, $180° - \angle BOC = \frac{1}{2}(180° + \angle BAC)$

[যেহেতু $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180°$]

বা, $360° - 2\angle BOC = 180° + \angle BAC$

বা, $360° - 180° = 2\angle BOC + \angle BAC$

$\therefore 2\angle BOC + \angle BAC = 180°$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৪ ΔABC এ $AB = AC$ এবং BA বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $BA = AD$ হয়। C, D যোগ করা হল।

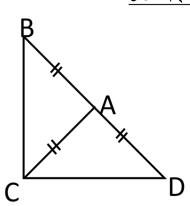
ক. উদ্দীপকের আলোকে ΔABC এর আনুসাঙ্গীক তথ্যের একটি চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BCD = 90°$ ৪

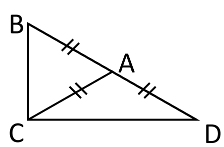
গ. প্রমাণ কর যে, $BC + CD > 2AC$ ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



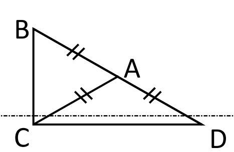
খ



দেওয়া আছে, ΔCBA এ $CA = BA$। BA কে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন $AD = BA$ হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BCD = 90°$।

প্রমাণ: ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔCBA এ $CA = BA$	[দেওয়া আছে]
$\therefore \angle CBA = \angle BCA$	[সমান সমান বাহুর বিপরীত
আবার, ΔCAD এ	কোণদ্বয় সমান]
$CA = DA$	[$\because CA = BA, BA = DA$]
$\therefore \angle CDA = \angle ACD$	
বা, $\angle BCA + \angle ACD = \angle CBA + \angle CDA$	
$\therefore \angle BCD = \angle CBD + \angle CDB$	
(২) এখন, ΔCBD এ	
$\angle BCD + \angle CBD + \angle CDB = 180°$	[ত্রিভুজের তিন কোণের
বা, $\angle BCD + \angle BCD = 180°$	সমষ্টি দুই সমকোণ]
বা, $2\angle BCD = 180°$	
$\therefore \angle BCD = 90°$ **(প্রমাণিত)**	

গ



দেওয়া আছে, ΔABC এ $AB = AC$। BA কে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন $BA = DA$ হয়। C, D যোগ করা হলে প্রমাণ করতে হবে যে, $BC + CD > 2AC$

প্রমাণ: ধাপ	**যথার্থতা**
(১) ΔCBD এ	[ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি
$CB + CD > BD$	তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
বা, $CB + CD > BA + AD$	
বা, $CB + CD > BA + BA$ [$\because BA = DA$]	
বা, $CB + CD > 2BA$	
বা, $CB + CD > 2CA$ [$\because BA = CA$]	
$\therefore BC + CD > 2AC$ **(প্রমাণিত)**	

প্রশ্ন ▶১৫ ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয় এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু D

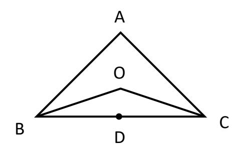
ক. উপরোক্ত তথ্য অনুসারে চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



খ সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৬ ΔABC এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে বহিঃকোণে দুইটি উৎপন্ন হয় তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করে।

ক. সমবাহু ও সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র চলকের পরিচয়সহ লেখ।২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$ ৪

গ. প্রদত্ত ত্রিভুজে $\angle A = 1$ সমকোণ, BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$ ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ বর্গ একক

যেখানে x = সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য

এবং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ একক

যেখানে, a = সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য

b = অসমান বাহুর দৈর্ঘ্য

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৭ ΔDEF এ $\angle E$ ও $\angle F$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. দেখাও যে, $DE + DF > OE + OF$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\angle EOF = 90° + \frac{1}{2}\angle D$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৮ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৮ ΔPQR এর PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T।

ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PQ + QR > 2QT$. ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল ৩ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ১৯ একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle P = 1$ সমকোণ এবং O, QR এর মধ্যবিন্দু।

ক. জ্যামিতিক উপপাদ্যের প্রমাণের ধাপগুলো লিখ? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PO < \frac{1}{2}(PQ + PR)$. ৪

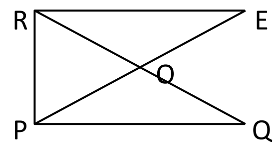
গ. দেখাও যে, $QR = 2PO$. ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রমাণে সাধারণত নিম্নোক্ত ধাপগুলো থাকে—

১. সাধারণ নির্বচন
২. চিত্র ও বিশেষ নির্বচন
৩. প্রয়োজনীয় অঙ্কনের বর্ণনা এবং
৪. প্রমাণের যৌক্তিক ধাপগুলো বর্ণনা।

খ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPQR-এর O, QR বাহুর মধ্যবিন্দু।
P, O যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PO < \frac{1}{2}(PQ + PR)$

অঙ্কন: PO কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, $OE = PO$ হয়। E, R যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔPQO এবং ΔERO-এ

$QO = RO$ [$\because$ O, QR এর মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে]

$PO = OE$ [অঙ্কন অনুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle POQ$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EOR$ [বিপ্রতীপ কোণ সমান]

$\therefore \Delta PQO \cong \Delta ERO$ [$\because$ দুইটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান]

সুতরাং $PQ = RE$ ... ... (i)

(২) এখন, ΔPER-এ,

$PR + RE > PE$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

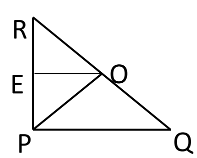
বা, $PR + PQ > PO + OE$ [$\because$ (i) নং থেকে $PQ = RE$]

বা, $PQ + PR > PO + PO$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে, $OE = PO$]

$\therefore PQ + PR > 2PO$.

$\therefore PO < \frac{1}{2}(PQ + PR)$ **(প্রমাণিত)**

গ



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔQPR-এ $\angle P$ = এক সমকোণ এবং O, অতিভুজ QR-এর মধ্যবিন্দু। P, O যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $QR = 2PO$.

অঙ্কন: RP -এর মধ্যবিন্দু E নিই
এবং O, E যোগ করি।

প্রমাণ: **ধাপ** **যথার্থতা**

(১) ΔQPR -এর E এবং O যথাক্রমে RP এবং QR -এর মধ্যবিন্দু। [অঙ্কন এবং কল্পনানুসারে]

$\therefore OE \parallel PQ$. [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]

$\therefore \angle REO$ = অনুরূপ $\angle EPQ$ = এক সমকোণ [কল্পনা]

(২) এখন, ΔREO এবং ΔPEO -এর মধ্যে

$RE = PE$, [E, QP-এর মধ্যবিন্দু]

$OE = OE$ [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle REO$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle PEO$ [$\because$ প্রত্যেকে সমকোণ]

$\therefore \Delta REO \cong \Delta PEO$

$\therefore RO = PO$

(৩) কিন্তু $RO = \frac{1}{2}QR$.

$\therefore PO = \frac{1}{2}QR$.

$\therefore QR = 2PO$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২০ ΔABC এ D, BC এর মধ্যবিন্দু।

ক. $54°$ কোণের সম্পূরক কোণ কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$. ৪

গ. $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর 'O' বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $2\angle BOC = 180° + \angle A$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $54°$ কোণের সম্পূরক কোণ $= 180° - 54° = 126°$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ৫(খ) এর সমাধান এর অনুরূপ।