SSC Math

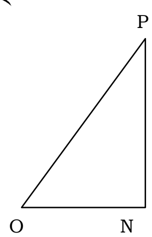
অধ্যায়ভিত্তিক কন্টেন্ট

অধ্যায়-৯: ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

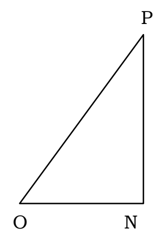
প্রয়োজনীয় তথ্য:

- **ত্রিকোণমিতি :** ‘ত্রিকোণ’ শব্দটি দ্বারা তিনটি কোণ বোঝায় আর ‘মিতি’ শব্দটির অর্থ পরিমাপ বোঝায়। ইংরেজিতে ত্রিকোণমিতিকে Trigonometry বলা হয় ‘Trigon’ গ্রিক শব্দটির অর্থ তিনটি কোণ বা ত্রিভুজ এবং “metry” শব্দের অর্থ পরিমাপ।
অর্থাৎ, গণিতের যে শাখায় ত্রিভুজ সংক্রান্ত বিভিন্ন পরিমাপ সম্পর্কে বিশেষভাবে আলোচনা করা হয় তাকে ত্রিকোণমিতি বলে।

- **সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর নামকরণ :** সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো অতিভুজ, ভূমি ও উন্নতি নামে অভিহিত হয়। আবার, সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের একটির সাপেক্ষে অবস্থানের প্রেক্ষিতেও বাহুগুলোর নামকরণ করা হয়। যথা :
ক. ‘অতিভুজ’, সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু যা সমকোণের বিপরীত বাহু
খ. ‘বিপরীত বাহু’, যা হলো প্রদত্ত কোণের সরাসরি বিপরীত দিকের বাহু
গ. ‘সন্নিহিত বাহু’, যা প্রদত্ত কোণ সৃষ্টিকারী একটি রেখাংশ।



$\angle PON$ কোণের জন্য অতিভুজ OP, সন্নিহিত বাহু ON, বিপরীত বাহু PN



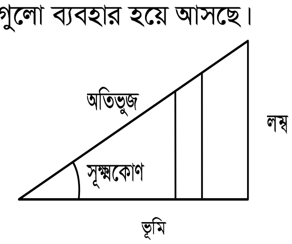
$\angle OPN$ কোণের জন্য অতিভুজ OP, সন্নিহিত বাহু PN, বিপরীত বাহু ON

জ্যামিতিক চিত্রের শীর্ষবিন্দু চিহ্নিত করার জন্য বড় হাতের বর্ণ ও বাহু নির্দেশ করতে ছোট হাতের বর্ণ ব্যবহার করা হয়। কোণ নির্দেশের জন্য প্রায়শই গ্রিক বর্ণ ব্যবহৃত হয়। গ্রিক বর্ণমালার ছয়টি বহুল ব্যবহৃত বর্ণ হলো :

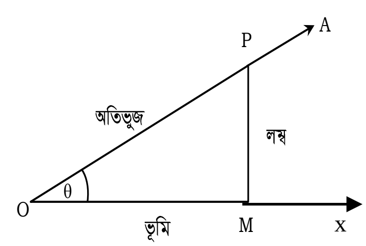
alpha α	beta β	gamma γ	theta θ	phi ϕ	omega ω
(আলফা)	(বিটা)	(গামা)	(থিটা)	(পাই)	(ওমেগা)

প্রাচীন গ্রিসের বিখ্যাত সব গণিতবিদদের হাত ধরেই জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতিতে গ্রিক বর্ণগুলো ব্যবহার হয়ে আসছে।

- **সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত :** সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নিম্নোক্তভাবে বর্ণনা করা হয় :
সূক্ষ্মকোণের দুইটি বাহু থাকে এবং প্রত্যেকটি বাহুর মধ্যে অসংখ্য বিন্দু কল্পনা করা হয়। প্রতিটি বিন্দু থেকে অপর বাহুটির উপর লম্ব টানলে এক একটি সমকোণী ত্রিভুজের সৃষ্টি হয়। সমকোণী ত্রিভুজের বিপরীত বাহুটিকে অতিভুজ, নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণটির বিপরীত বাহুটিকে লম্ব এবং অপর একটি বাহুকে ভূমি বলা হয়।



- **সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিত্রগত ব্যাখ্যা :**
মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OX বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। তাতে সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হলো। এই ΔPOM এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায় তাদের $\angle XOA$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয় এবং তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সুনির্দিষ্ট নামে নামকরণ করা হয়।



$\angle XOA$ সাপেক্ষে সমকোণী ত্রিভুজ POM−এর PM বাহুকে লম্ব, OM বাহুকে ভূমি, OP বাহুকে অতিভুজ ধরা হয়। এখন, $\angle XOA = \theta$ ধরলে θ কোণের যে ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পাওয়া যায় তা বর্ণনা করা হলো।

$\frac{PM}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \theta$ কোণের সাইন (sine) বা সংক্ষেপে $\sin\theta$

$\frac{OM}{OP} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} =$ θ কোণের কোসাইন (cosine) বা সংক্ষেপে cosθ.

$\frac{PM}{OM} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} =$ θ কোণের ট্যানজেন্ট (tangent) বা সংক্ষেপে tanθ.

$\frac{OM}{PM} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} =$ θ কোণের কোট্যানজেন্ট (cotangent) বা সংক্ষেপে cotθ.

$\frac{OP}{OM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} =$ θ কোণের সেকেন্ট (secant) বা সংক্ষেপে secθ.

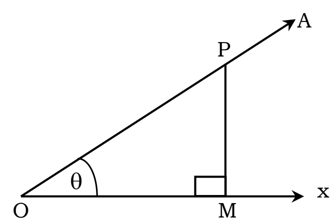
$\frac{OP}{PM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} =$ θ কোণের কোসেকেন্ট (cosecant) বা সংক্ষেপে cosecθ.

[**দ্রষ্টব্য :** (θ) থেটা একটি গ্রিক অক্ষর, এখানে যা একটি কোণের পরিমাপ নির্দেশ করে]

- **সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে সম্পর্ক :**

মনে করি, $\theta = \angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

পাশের চিত্র সাপেক্ষে, সংজ্ঞানুযায়ী,



$\sin\theta = \frac{PM}{OP}$ $\quad$ $\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$

$\cos\theta = \frac{OM}{OP}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{OP}{OM}$

$\tan\theta = \frac{PM}{OM}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{OM}{PM}$

সুতরাং দেখা যায় যে,

1. $\sin\theta . \text{cosec}\theta = \frac{PM}{OP} \cdot \frac{OP}{PM} = 1$

$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$ এবং $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

2. $\cos\theta . \sec\theta = \frac{OM}{OP} \cdot \frac{OP}{OM} = 1$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

3. $\tan\theta . \cot\theta = \frac{PM}{OM} \cdot \frac{OM}{PM} = 1$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

4. $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ [লব ও হরকে OP দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং একইভাবে, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

- **ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি পিথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা ব্যবহার করে যে সম্পর্ক পাওয়া যায় তা হলো :**

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

বা, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

3. $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

বা, $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

■ sin এবং cos এর মধ্যে সম্পর্ক :

অথবা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

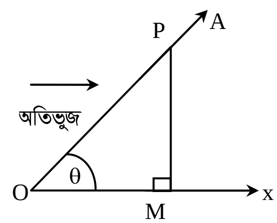
প্রমাণ : মনে করি, $\theta = \angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

$PM \perp OX$.

সুতরাং, ΔPOM সমকোণী।

সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের সূত্র হতে আমরা জানি,
$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$
এখন, ΔOPM এ,
অতিভুজ = OP, লম্ব = PM এবং ভূমি = OM
$\therefore OP^2 = PM^2 + OM^2$

বা, $\dfrac{OP^2}{OP^2} = \dfrac{PM^2}{OP^2} + \dfrac{OM^2}{OP^2}$ [উভয়পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করে]

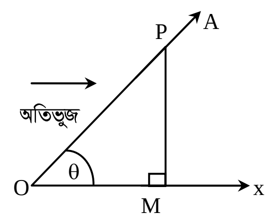


বা, $1 = \left(\dfrac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2$

বা, $1 = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

বা, $1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ [$\because \sin\theta \ \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ এবং $\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$]

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **[প্রমাণিত]**



■ secθ এবং tanθ এর মধ্যে সম্পর্ক : $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

প্রমাণ : মনে করি, $\theta = \angle XOA$, একটি সূক্ষ্মকোণ।
$PM \perp OX$.
সুতরাং, Δ POM সমকোণী।
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের সূত্র হতে আমরা জানি,
$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$
এখন সমকোণী ΔPOM এ,
অতিভুজ = OP, লম্ব = PM এবং ভূমি = OM
$\therefore OP^2 = PM^2 + OM^2$
বা, $OP^2 - PM^2 = OM^2$

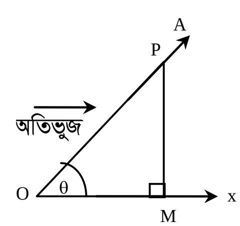
বা, $\dfrac{OP^2}{OM^2} - \dfrac{PM^2}{OM^2} = \dfrac{OM^2}{OM^2}$ [উভয় পক্ষকে OM^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\dfrac{OP}{OM}\right)^2 - \left(\dfrac{PM}{OM}\right)^2 = 1$ [$\because \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \sec\theta$ এবং $\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan\theta$]

$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ **[প্রমাণিত]**

■ cosecθ এবং cotθ এর মধ্যে সম্পর্ক : $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

প্রমাণ : মনে করি, $\theta = \angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ।



$PM \perp OX$.
সুতরাং, Δ POM সমকোণী।
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের সূত্র হতে আমরা জানি,
$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$
এখন, সমকোণী ΔPOM এ,
অতিভুজ = OP, লম্ব = PM এবং ভূমি = OM
$\therefore OP^2 = PM^2 + OM^2$
বা, $OP^2 - OM^2 = PM^2$

বা, $\dfrac{OP^2}{PM^2} - \dfrac{OM^2}{PM^2} = \dfrac{PM^2}{PM^2}$ [উভয় পক্ষকে PM^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\frac{OP}{PM}\right)^2 - \left(\frac{OM}{PM}\right)^2 = 1$ [$\because$ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ = cosecθ এবং $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ = cotθ]

$\therefore$ $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ **[প্রমাণিত]**

- **বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত**

অধ্যায়ের পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়গুলো নিচে তুলে ধরা হলো, যা প্রত্যেকটি অঙ্কের সমাধানে বিশেষভাবে সহায়তা করবে। এ বিষয়গুলো ছাত্রছাত্রীদের জানা আবশ্যক।

ব্যবহারের সুবিধার্থে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান (যেগুলো সংজ্ঞায়িত) নিচের ছকে দেখানো হলো:

কোণ অনুপাত	0°	30°	45°	60°	90°
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cotangent	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosecant	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

- **লক্ষ করি : নির্ধারিত কয়েকটি কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক মানসমূহ মনে রাখার সহজ উপায় :**

(i) 0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে sin0°, sin30°, sin45°, sin60° এবং sin90° এর মান পাওয়া যায়; যেমন, $\sin 30° = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

(ii) 4, 3, 2, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে cos 0°, cos 30°, cos 45°, cos 60° এবং cos 90° এর মান পাওয়া যায়;

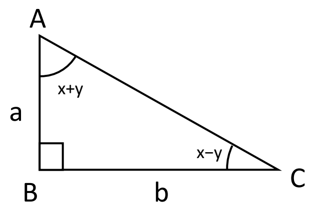
যেমন, $\cos 45° = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে tan 0°, tan 30°, tan 45° এবং tan 60° এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ যে tan 90° সংজ্ঞায়িত নয়)

(iv) 9, 3, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে cot30°, cot45°, cot60°, cot90° এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, cot0° সংজ্ঞায়িত নয়)।

সৃজনশীল প্রশ্নঃ

প্রশ্ন ▶১ *[ঢা. বো. ১৭]*



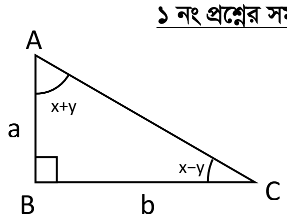
ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}+\dfrac{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = 2\ \text{cosec}A.$ ৪

গ. $a = 1$ এবং $b = \sqrt{3}$ হলে x ও y এর মান নির্ণয় কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্রানুসারে, $AB = a$, $BC = b$ এবং $\angle ABC = 90°$

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ বা, $AC^2 = a^2 + b^2$ $\therefore AC = \sqrt{a^2+b^2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $AB = a$, $BC = b$

এবং $AC = \sqrt{a^2+b^2}$ ['ক' থেকে প্রাপ্ত]

বামপক্ষ $= \dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}+\dfrac{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \dfrac{\dfrac{BC}{AC}}{1-\dfrac{AB}{AC}}+\dfrac{1-\dfrac{AB}{AC}}{\dfrac{BC}{AC}}$ ['ক' এর চিত্র হতে]

$= \dfrac{\sin A}{1-\cos A}+\dfrac{1-\cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin^2A+(1-\cos A)^2}{(1-\cos A)\sin A}$

$= \dfrac{\sin^2A+1-2\cos A+\cos^2A}{(1-\cos A)\sin A}$

$= \dfrac{1+1-2\cos A}{(1-\cos A)\sin A}$ [□ $\sin^2A+\cos^2A = 1$]

$= \dfrac{2(1-\cos A)}{(1-\cos A)\sin A} = 2.\dfrac{1}{\sin A} = 2\ \text{cosec}A$ = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}+\dfrac{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = 2\text{cosec}A$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $AB = a = 1$

$BC = b = \sqrt{3}$

এখন, সমকোণী ΔABC এ

$\tan\angle BAC = \dfrac{BC}{AB}$

বা, $\tan(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$

বা, $\tan(x+y) = \tan 60°$

$\therefore x + y = 60°$ .... (i)

আবার, $\tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\tan(x-y) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x-y) = \tan 30°$

$\therefore x - y = 30°$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2x = 90°$ $\therefore x = 45°$

আবার, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$2y = 30°$ $\therefore y = 15°$

সুতরাং $x = 45°$ এবং $y = 15°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২ *[দি. বো. ১৭]*

$A = \cos\theta + \sin\theta$ এবং $B = \cos\theta - \sin\theta$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক রাশি।

ক. $\theta = 45°$ হলে A এবং B এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $A = \sqrt{2}(A - \sin\theta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $B = \sqrt{2}(A - \cos\theta)$ ৪

গ. $A = 1$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে $0° \le \theta \le 90°$. ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \cos\theta + \sin\theta$ এবং $B = \cos\theta - \sin\theta$

$\theta = 45°$ হলে, $A = \cos45° + \sin 45°$ এবং $B = \cos45° - \sin 45°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $= \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ | $\therefore B = 0$

$\therefore A = \sqrt{2}$ এবং $B = 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \cos\theta + \sin\theta$ এবং $B = \cos\theta - \sin\theta$

এখন $A = \sqrt{2}(A - \sin\theta)$ হলে

$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta - \sin\theta)$

বা, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2}\cos - \cos\theta$

বা, $\sin\theta = (\sqrt{2}-1)\cos\theta$

বা, $(\sqrt{2}+1)\sin\theta = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\cos\theta$

বা, $(\sqrt{2}+1)\sin\theta = \{(\sqrt{2})^2 - 1\}\cos\theta$

বা, $(\sqrt{2}+1)\sin\theta = (2-1)\cos\theta$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta = \cos\theta$

বা, $\sqrt{2}\sin\theta = \cos\theta - \sin\theta$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta - \cos\theta)$

$\therefore B = \sqrt{2}(A - \cos\theta)$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$A = \cos\theta + \sin\theta$

$A = 1$ হলে $\cos\theta + \sin\theta = 1$

বা, $\cos\theta = 1 - \sin\theta$

বা, $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)^2$

বা, $\cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $1 - \sin^2\theta = 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta$

বা, $1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

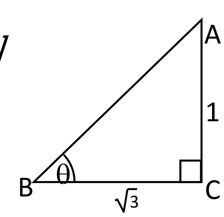
হয়, $\sin\theta = 0$ | অথবা, $\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = \sin0°$ | বা, $\sin\theta = 1$

$\therefore \theta = 0°$ | বা, $\sin\theta = \sin90°$ $\therefore \theta = 90°$

$\therefore \theta = 0°$ বা $90°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩ *[কু. বো. ১৭]*



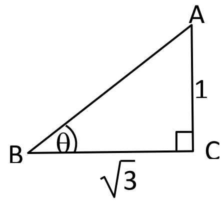
ক. θ এর মান নির্ণয় করো। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ করো যে, $\frac{1}{1 + \sin^2\theta} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2\theta} = 1.$ ৪

গ. যদি $\frac{\cos B - \sin B}{\cos B + \sin B} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ হয়, তবে দেখাও যে, $B = \theta$. ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্র হতে পাই,



$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan 30°$

$\therefore \theta = 30°$

খ 'ক' থেকে পাই, $\theta = 30°$

বামপক্ষ $= \frac{1}{1 + \sin^2\theta} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2\theta}$

$= \frac{1}{1 + (\sin 30°)^2} + \frac{1}{1 + (\text{cosec}\ 30°)^2}$

$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 + (2)^2}$

$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{\frac{4 + 1}{4}} + \frac{1}{5}$

$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4 + 1}{5} = \frac{5}{5} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1 + \sin^2\theta} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2\theta} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে,

$\frac{\cos B - \sin B}{\cos B + \sin B} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

বা, $\frac{\cos B - \sin B + \cos B + \sin B}{\cos B - \sin B - \cos B - \sin B} = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos B}{-2\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $\frac{\cos B}{\sin B} = \sqrt{3}$

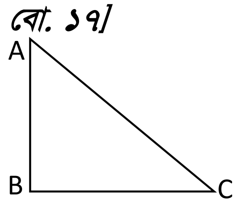
বা, $\cot B = \sqrt{3}$

বা, $\cot B = \cot 30°$

$\therefore B = 30°$

সুতরাং $B = \theta$ ['ক' হতে পাই] **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৪ *[চ. বো. ১৭]*



$AB = a$, $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং $\angle C = \theta$ হলে,

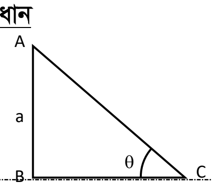
ক. চিত্র হতে $\tan\theta$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করো। ২

খ. $\tan\theta$ এর মানের উপর ভিত্তি করে $\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় করো। ৪

গ. যদি $\tan A + \sin A = m$, $\tan A - \sin A = n$ হয় তাহলে প্রমাণ করো যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $AB = a$, $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$



$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 - a^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = \sqrt{b^2} = b$

সুতরাং, $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\therefore \tan\theta = \frac{a}{b}$ **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই,

$\tan\theta = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta} = \frac{a^2}{b^2}$ [$\frac{a}{b}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ **(Ans.)**

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.১ এর উদাহরণ ৯ এর অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶৫ *[সি. বো. ১৭]*

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B = 1$ সমকোণ এবং $\tan A = 1$

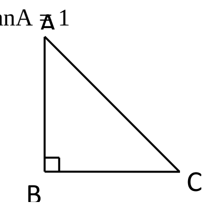
ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $(\sec^2 A + \cot^2 C + \sin^2 A)$ এর মান নির্ণয় করো। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ করো যে, $\frac{1 - \sin^2 A}{1 + \sin^2 A} + \frac{2\tan^2 A}{3\sin 2A} = 1$ ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\angle B = 1$ সমকোণ এবং $\tan A = 1$



আমরা জানি,

$\tan A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{BC}{AB}$

বা, $1 = \frac{BC}{AB}$

$\therefore AB = BC$

ΔABC হতে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$

$\therefore AC = \sqrt{2}\ AB$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan A = 1$

বা, $\tan A = \tan 45°$ $\therefore A = 45°$

আবার, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 45° - 90° = 45°$

$\therefore \sec^2 A + \cot^2 C + \sin^2 A = \sec^2 45° + \cot^2 45° + \sin^2 45°$

$= (\sqrt{2})^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{4 + 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$ **(Ans.)**

গ বামপক্ষ $= \frac{1 - \sin^2 A}{1 + \sin^2 A} + \frac{2\tan^2 A}{3\sin 2A}$

$= \frac{1 - \sin^2 45°}{1 + \sin^2 45°} + \frac{2\tan^2 45°}{3\sin(2 \times 45°)}$ [∵ A = 45°]

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{2.(1)^2}{3.\sin 90°} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{2}{3 \times 1}$

$= \frac{\frac{2 - 1}{2}}{\frac{2 + 1}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

$= \frac{1 + 2}{3} = \frac{3}{3} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1 - \sin^2 A}{1 + \sin^2 A} + \frac{2\tan^2 A}{3\sin 2A} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬ *[য. বো. ১৭]*

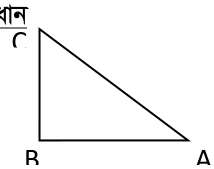
ΔABC এ $\angle B = 90°$ এবং $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ক. AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। ২

খ. প্রমাণ করো যে, $\frac{\text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta} = \frac{1}{2}$. ৪

গ. $\angle A = x - y = \theta$ এবং $\angle C = x + y$ হলে x ও y এর মান নির্ণয় করো। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান



ক ΔABC-এ $\angle B = 90°$

$\therefore\ AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore\ AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ একক **(Ans.)**

খ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\tan^2\theta = \frac{1}{3}\quad \therefore\ \cot^2\theta = 3$

$\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 1 + 3 = 4$

এখন, বামপক্ষ $= \frac{\text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta} = \frac{4 - \frac{4}{3}}{4 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{12-4}{3}}{\frac{12+4}{3}}$

$= \frac{8}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{\text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta} = \frac{1}{2}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\angle A = x - y = \theta$ এবং $\angle C = x + y$

ΔABC এ $\tan A = \frac{BC}{AB}$

বা, $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{AB}\ \left[\because \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

বা, $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x - y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x - y) = \tan 30°$

$\therefore\ x - y = 30°$..............(i)

আবার, $\tan C = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan(x + y) = \sqrt{3} = \tan 60°$

$\therefore\ x + y = 60°$..............(ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

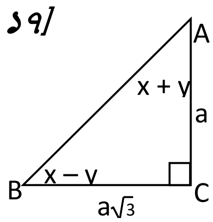
$2x = 90°\ \therefore\ x = 45°$

আবার, (ii) নং হতে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$2y = 30°\ \therefore\ y = 15°$

সুতরাং $x = 45°$ এবং $y = 15°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৭ *[ব. বো. ১৭]*



চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ

ক. AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। ২

খ. দেখাও যে, $\angle x = 45°$ এবং $\angle y = 15°$. ৪

গ. $\angle B + 15°$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো বের করো। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

$\therefore\ AB = 2a$

$\therefore$ AB এর দৈর্ঘ্য 2a একক

খ চিত্র থেকে, $\tan A = \frac{a\sqrt{3}}{a}$

বা, $\tan(x + y) = \sqrt{3}$ বা, $\tan(x + y) = \tan 60°$

$\therefore\ x + y = 60°$................(i)

আবার, $\tan B = \frac{a}{a\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x - y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\tan(x - y) = \tan 30°$

$\therefore\ x - y = 30°$................(ii)

এখন (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$x + y + x - y = 60° + 30°$

বা, $2x = 90°$ বা, $x = \frac{90°}{2}\ \therefore\ x = 45°$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$45° + y = 60°$ বা, $y = 60° - 45°\ \therefore\ y = 15°$

$\therefore\ x = 45°$ এবং $y = 15°$ **(দেখানো হলো)**

গ 'খ' থেকে পাই, $x - y = 30°$

চিত্র থেকে $\angle B = x - y = 30°$

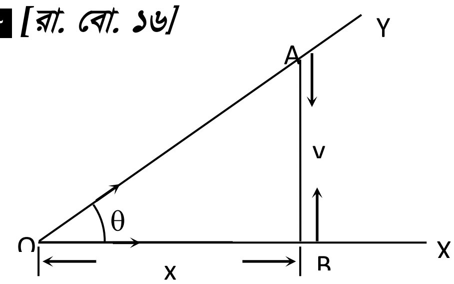
এখন $\angle B + 15° = 30° + 15° = 45°$

45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো বের করতে হবে।

অতপর:

গণিত পাঠ্য বইয়ের অনুশীলন ৯.২ এর অনুচ্ছেদ ৯.৬ এর 45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬০

প্রশ্ন ▶৮ *[রা. বো. ১৬]*

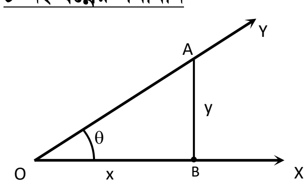


ক. cotθ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে জ্যামিতিক পদ্ধতিতে দেখাও যে,
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$। ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে $\left(\frac{\sin A}{1 - \cos A} + \frac{1 - \cos A}{\sin A}\right)$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $x = 3, y = 4$। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান



ক চিত্র থেকে পাই,

ভূমি = OB = x

লম্ব = AB = y

আমরা জানি,

$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OB}{AB}$

$\therefore\ \cot\theta = \frac{x}{y}$. **(Ans.)**

খ 'ক' এর চিত্রানুসারে পাই,

ভূমি = OB = x

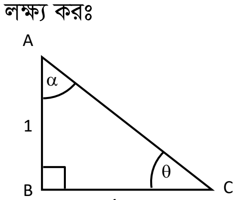
লম্ব = AB = y

এবং $\angle AOB = \theta$ একটি সূক্ষ্মকোণ

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$(\text{অতিভূজ})^2 = (\text{ভূমি})^2 + (\text{লম্ব})^2$
বা, $OA^2 = OB^2 + AB^2$
বা, $OA^2 = x^2 + y^2$
$\therefore OA = \sqrt{x^2 + y^2}$
আমরা জানি,
$\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
বামপক্ষ $= \sin^2\theta + \cos^2\theta$
$= \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2$
$= \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} + \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$
= ডানপক্ষ
$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ 'খ' থেকে পাই,
$OB = x$
$AB = y$
$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$
দেওয়া আছে, $x = 3$ এবং $y = 4$
'ক' এর চিত্র থেকে পাই,
$\sin A = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}$
$\cos A = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$
প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\sin A}{1 - \cos A} + \dfrac{1 - \cos A}{\sin A}$
$= \dfrac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5}} + \dfrac{1 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}} + \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}$
$= \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{1} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{5}{3}$
$= 3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{9 + 1}{3}$
$= \dfrac{10}{3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ *[দি. বো. ১৬]*
নিচের চিত্রটি লক্ষ্য করঃ



ক. অতিভূজ এর পরিমাণ কত? ২
খ. $\cos\theta + \cos\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
গ. চিত্রের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta + \cos^2\alpha = 1$. ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$
$= \sqrt{1^2 + 1^2}$
$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
অতিভুজ $\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে পাই,
অতিভুজ $AC = \sqrt{2}$
এখন, $\cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
এবং $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore \cos\theta + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 + 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ **(Ans.)**

গ 'ক' এর চিত্র থেকে পাই,
$\sin\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
এখন, $\sin^2\theta + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$
$= \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 + 1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\alpha = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১০ *[কু. বো. ১৬]*
$\tan A + \sin A = m$ এবং $\tan A - \sin A = n$
ক. প্রমাণ কর যে, $\tan^2 A. \sin^2 A = mn$. ২
খ. দেখাও যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. ৪
গ. প্রমাণ কর যে, $\sec A = \sqrt{mn}. \operatorname{cosec}^2 A$. ৪

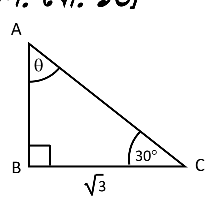
১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,
$\tan A + \sin A = m$
$\tan A - \sin A = n$
এখন, $\tan^2 A. \sin^2 A$
$= \tan^2 A.(1 - \cos^2 A)$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$
$= \tan^2 A - \tan^2 A.\cos^2 A$
$= \tan^2 A - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}. \cos^2 A$
$= \tan^2 A - \sin^2 A$
$= (\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)$
$= mn$ [মান বসিয়ে]
$\therefore \tan^2 A.\sin^2 A = mn$ **(প্রমাণিত)**

খ **গণিত** পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.১ এর উদাহরণ ৯ এর অনুরূপ।

গ 'খ' থেকে পাই,
$m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$
বা, $(\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2 = 4\sqrt{mn}$ [m, n এর মান বসিয়ে]
বা, $4\tan A \sin A = 4\sqrt{mn}$ $[\because (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab]$
বা, $\tan A.\sin A = \sqrt{mn}$ [4 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\dfrac{\sin A}{\cos A}.\sin A = \sqrt{mn}$
বা, $\dfrac{\sin^2 A}{\cos A} = \sqrt{mn}$
বা, $\dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{\sqrt{mn}}{\sin^2 A}$
বা, $\sec A = \sqrt{mn}. \dfrac{1}{\sin^2 A}$
$\therefore \sec A = \sqrt{mn} \operatorname{cosec}^2 A$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১১ *[সি. বো. ১৬]*



$BC = \sqrt{3}$ সে.মি., $\angle B =$ এক সমকোণ, $\angle ACB = 30°$.

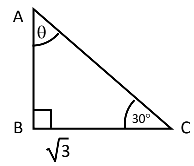
ক. AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2-\sin^2A}+\frac{1}{2+\tan^2A}=1$. ৪

গ. উদ্দীপক অনুসারে θ কোণের সাপেক্ষে যদি $2.\left(\frac{BC}{AC}\right)^2+3.\frac{AB}{AC}-3=0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\theta = 60°$। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



দেওয়া আছে, $BC=\sqrt{3}$ সে.মি., $\angle B =$ এক সমকোণ ও $\angle ACB = 30°$

$\cos\angle ACB = \frac{BC}{AC}$

বা, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{AC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{1}{AC}$

$\therefore AC = 2$ সে.মি. **(Ans.)**

আবার, $\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin 30° = \frac{AB}{2}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{AB}{2}$

$\therefore AB = 1$ সে.মি. **(Ans.)**

খ 'ক' এর চিত্র থেকে পাই,

$\sin A = \frac{BC}{AC}$ .... (i)

$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [$\because BC = \sqrt{3}$ ও $AC = 2$]

আবার, $\tan A = \frac{BC}{AB}$ .... (ii)

$\tan A = \frac{\sqrt{3}}{1}$ [$\because BC = \sqrt{3}$ ও $AB = 1$]

$\therefore \tan A = \sqrt{3}$

এখন, $\frac{1}{2-\sin^2A}+\frac{1}{2+\tan^2A} = \frac{1}{2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{2+(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{1}{2-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2+3} = \frac{1}{\frac{8-3}{4}}+\frac{1}{5} = \frac{1}{\frac{5}{4}}+\frac{1}{5}$

$= \frac{4}{5}+\frac{1}{5} = \frac{4+1}{5} = \frac{5}{5} = 1$

$\therefore \frac{1}{2-\sin^2A}+\frac{1}{2+\tan^2A} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ চিত্রানুযায়ী, $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ এবং $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

দেওয়া আছে, $2\left(\frac{BC}{AC}\right)^2+3.\frac{AB}{AC}-3=0$

$\therefore 2(\sin\theta)^2+3.\cos\theta-3=0$

বা, $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$

বা, $2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0$

বা, $2-2\cos^2\theta+3\cos\theta-3=0$

বা, $-2\cos^2\theta+3\cos\theta-1=0$

বা, $2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

বা, $2\cos^2\theta-2\cos\theta-\cos\theta+1=0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta-1)-1(\cos\theta-1)=0$

বা, $(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \cos\theta-1=0$

বা, $\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \cos 0°$

$\therefore \theta = 0°$

অথবা, $2\cos\theta-1=0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60°$ $\therefore \theta = 60°$

$\therefore \theta = 60°$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶১২ ***[য. বো. ১৬]***

$\tan\theta+\sin\theta = m$ এবং $\tan\theta-\sin\theta = n$.

ক. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $m+n = 2\sec\theta.\sin\theta$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $m^2-n^2 = 4\sqrt{mn}$. ৪

গ. $\frac{m}{n} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0° < \theta < 90°$. ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\tan\theta+\sin\theta = m$......... (i) এবং $\tan\theta-\sin\theta = n$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$\tan\theta+\sin\theta+\tan\theta-\sin\theta = m+n$

বা, $2\tan\theta = m+n$

বা, $m+n = 2\tan\theta$

বা, $m+n = 2.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

বা, $m+n = 2.\frac{1}{\cos\theta}.\sin\theta$

$\therefore m+n = 2\sec\theta.\sin\theta$ **(দেখানো হলো)**

খ **গণিত** পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.১ এর উদাহরণ ৯ এর অনুরূপ।

গ দেওয়া আছে,

$\frac{m}{n} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan\theta+\sin\theta}{\tan\theta-\sin\theta} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ [প্রদত্ত]

বা, $\frac{\tan\theta+\sin\theta+\tan\theta-\sin\theta}{\tan\theta+\sin\theta-\tan\theta+\sin\theta} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\tan\theta}{2\sin\theta} = \frac{4}{2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\frac{1}{\sin\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 30°$

$\therefore \theta = 30°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৩ ***[ব. বো. ১৬]***

ΔABC-এ $\angle B = 90°$, $\angle A = x-y$, $\angle C = x+y$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$.

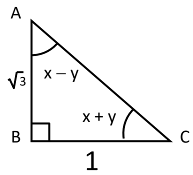
ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\frac{\mathrm{cosec}^2A-\sec^2A}{\cos^2A-\sin^2A}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x ও y এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



দেওয়া আছে, ΔABC এ $\angle B = 90°, AB = \sqrt{3}, BC = 1$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$

$\therefore AC = \pm 2$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ঋনাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ AC এর দৈর্ঘ্য 2 একক **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ΔABC -এ $AB = \sqrt{3}, BC = 1$

'ক' থেকে পাই, $AC = 2$

$\therefore \sin A = \frac{BC}{AC}$

$\sin A = \frac{1}{2}$ বা, $\frac{1}{\sin A} = 2$

$\therefore \operatorname{cosec} A = 2$

আবার, $\cos A = \frac{AB}{AC}$

$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ বা, $\frac{1}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \frac{4 - \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{12-4}{3}}{\frac{3-1}{4}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{4}} = \frac{8}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{16}{3}$ **(Ans.)**

গ ΔABC-এ $AB = \sqrt{3}, BC = 1$

$\tan A = \frac{BC}{AB}$

$\therefore \tan(x - y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $[\because \angle A = x - y]$

বা, $\tan(x - y) = \tan 30°$

$\therefore x - y = 30°$ .... (i)

আবার, $\tan C = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{1}$ $[\because \angle C = x + y]$

বা, $\tan(x + y) = \tan 60°$

$\therefore x + y = 60°$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2x = 90° \therefore x = 45°$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$45° + y = 60° \ \therefore y = 15°$

$\therefore x = 45°$ ও $y = 15°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৪ *[ঢা. বো. ১৫]*

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle C$ সমকোণ, $\tan B = \sqrt{3}$.

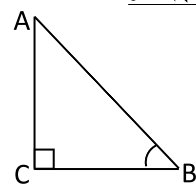
ক. AB এর মান কত? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A . \tan B$. ৪

গ. $\angle B = p + q$ এবং $\angle A = p - q$ হলে, p ও q এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle C$ = এক সমকোণ

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\tan B = \sqrt{3}$

বা, $\tan B = \tan 60°$

$\therefore B = 60°$

যেহেতু $C = 90° \ \therefore A = 30°$

বামপক্ষ $= \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \frac{\cot 30° + \tan 60°}{\cot 60° + \tan 30°} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 3$

ডানপক্ষ $= \cot A . \tan B = \cot 30° . \tan 60°$

$= \sqrt{3} . \sqrt{3} = 3$

= বামপক্ষ

$\therefore \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A . \tan B$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $\angle B = p + q$ .... (i)

$\angle A = p - q$ .... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$\angle B + \angle A = p + q + p - q$

বা, $60° + 30° = 2p$

বা, $2p = 90°$

বা, $p = 45°$

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\angle B - \angle A = p + q - p + q$

বা, $60° - 30° = 2q$

বা, $30° = 2q$

$\therefore \ p = 45°$ এবং $q = 15°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৫ *[দি. বো. ১৫]*

কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $\sqrt{1 + p}$ এবং θ কোণের সন্নিহিত বাহু $\sqrt{2p}$।

ক. তথ্যগুলো জ্যামিতিক চিত্রে উপস্থাপন করে অপর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. $\sec^2\theta + \tan^2\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

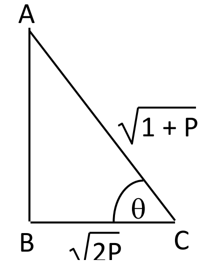
গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1 + \operatorname{cosec}^2\theta}{1 - \operatorname{cosec}^2\theta} = -\frac{1}{p}$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ

$AC = \sqrt{1 + P}$,

θ কোণের সন্নিহিত বাহু $BC = \sqrt{2P}$.



এখন, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $\left(\sqrt{1 + P}\right)^2 = AB^2 + \left(\sqrt{2P}\right)^2$

বা, $1 + P = AB^2 + 2P$

বা, $AB^2 = 1 + P - 2P$

বা, $AB^2 = 1 - P$

$\therefore AB = \sqrt{1 - P}$ **(Ans.)**

খ 'ক' হতে পাই,

ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $AC = \sqrt{1+P}$, $BC = \sqrt{2P}$

এবং $AB = \sqrt{1-P}$ এবং $\theta = \angle ACB$

এখন, $\sec\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{1+P}}{\sqrt{2P}}$

$\tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{1-P}}{\sqrt{2P}}$

$\therefore \quad \sec^2\theta + \tan^2\theta = \left(\dfrac{\sqrt{1+P}}{\sqrt{2P}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{1-P}}{\sqrt{2P}}\right)^2$

$= \dfrac{1+P}{2P} + \dfrac{1-P}{2P} = \dfrac{1+P+1-P}{2P} = \dfrac{2}{2P}$

$= \dfrac{1}{P}$ **(Ans.)**

গ 'ক' হতে পাই, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $AC = \sqrt{1+P}$, $BC = \sqrt{2P}$

$AB = \sqrt{1-P}$ এবং $\theta = \angle ACB$

$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{1+P}}{\sqrt{1-P}}$

বামপক্ষ $= \dfrac{1+\operatorname{cosec}^2\theta}{1-\operatorname{cosec}^2\theta} = \dfrac{1+\left(\dfrac{\sqrt{1+P}}{\sqrt{1-P}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{\sqrt{1+P}}{\sqrt{1-P}}\right)^2} = \dfrac{1+\dfrac{1+P}{1-P}}{1-\dfrac{1+P}{1-P}}$

$= \dfrac{\dfrac{1-P+1+P}{1-P}}{\dfrac{1-P-1-P}{1-P}} = \dfrac{2}{(1-P)} \times \dfrac{(1-P)}{-2P} = \dfrac{-1}{P}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \ \dfrac{1+\operatorname{cosec}^2\theta}{1-\operatorname{cosec}^2\theta} = \dfrac{-1}{P}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৬ *[কু. বো. ১৫]*

$\dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $\angle B = 60°$.

ক. $\operatorname{cosec}^2B + \cot^2B$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. A এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $4\sin^2\theta - (2+2\sqrt{3})\sin\theta + \sqrt{3} = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে দেখাও যে, $\theta = 2A$ অথবা $\theta = A$। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\angle B = 60°$

এখন $\operatorname{cosec}^2B + \cot^2B$

$= (\operatorname{cosec}60°)^2 + (\cot 60°)^2$

$= \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$= \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{5}{3}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে,

$\dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

বা, $\dfrac{\cos A + \sin A - \cos A + \sin A}{\cos A + \sin A + \cos A - \sin A} = \dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}$

[বিয়োজন–যোজন করে]

বা, $\dfrac{2\sin A}{2\cos A} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan A = \tan 30°$

$\therefore \ A = 30°$ **(Ans.)**

গ $4\sin^2\theta - (2+2\sqrt{3})\sin\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $4\sin^2\theta - 2\sin\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta(2\sin\theta - 1) - \sqrt{3}(2\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয়, $2\sin\theta - 1 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta = 1$ বা, $2\sin\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ বা, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin 30°$ বা, $\sin\theta = \sin 60°$

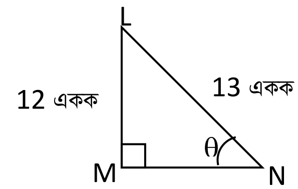
বা, $\theta = 30°$

$\therefore \ \theta = A$ ['খ' হতে] বা, $\theta = 2 \times 30°$

$\therefore \ \theta = 2A$ ['খ' হতে]

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶১৭ *[চ. বো. ১৫]*



ক. $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta.\sin^2\theta$ ৪

গ. জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$LM = 12$ একক

$LN = 13$ একক

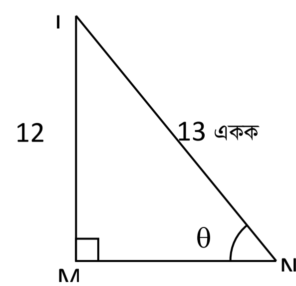
$\therefore \ MN = \sqrt{LN^2 - LM^2}$ একক

$= \sqrt{13^2 - 12^2}$ একক

$= \sqrt{169 - 144}$ একক

$= \sqrt{25}$ একক

$= 5$ একক



$\therefore \ \cot\theta = \dfrac{MN}{LM} = \dfrac{5}{12}$ **(Ans.)**

খ উদ্দীপকের চিত্রানুসারে পাই,

$LM = 12$ একক, $LN = 13$ একক

'ক' হতে পাই, $MN = 5$ একক

$\therefore \quad \tan\theta = \dfrac{LM}{MN} = \dfrac{12}{5}$

$\sin\theta = \dfrac{LM}{LN} = \dfrac{12}{13}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \tan^2\theta - \sin^2\theta$

$= \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2$

$= \dfrac{144}{25} - \dfrac{144}{169} = \dfrac{24336 - 3600}{4225} = \dfrac{20736}{4225}$

ডানপক্ষ $= \tan^2\theta.\sin^2\theta = \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 . \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = \dfrac{144}{25} . \dfrac{144}{169} = \dfrac{20736}{4225}$

$\therefore \ \tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta.\sin^2\theta$ **(প্রমাণিত)**

গ গণিত পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৯.১ এর অনুচ্ছেদ ৯.৫(i) দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶১৮ ***[য. বো. ১৫]***

$p = 1 + \sin A$ এবং $q = 1 - \sin A$ হলে —

ক. pq এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\dfrac{p}{q}} = \sec A + \tan A.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(\sec A - \tan A)^2 = \dfrac{q}{p}.$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p = 1 + \sin A$ এবং $q = 1 - \sin A$

$\therefore pq = (1 + \sin A)(1 - \sin A) = 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{p}{q}} = \sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1 + \sin A)(1 + \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}}$ [লব ও হরকে $(1 + \sin A)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\dfrac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}} = \sqrt{\dfrac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$= \dfrac{1 + \sin A}{\cos A} = \dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A + \tan A$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\dfrac{p}{q}} = \sec A + \tan A$ **(প্রমাণিত)**

গ বামপক্ষ $= (\sec A - \tan A)^2$

$= \left(\dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}\right)^2 = \left(\dfrac{1 - \sin A}{\cos A}\right)^2$

$= \dfrac{(1 - \sin A)^2}{\cos^2 A} = \dfrac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}$

$= \dfrac{(1 - \sin A)(1 - \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} = \dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = \dfrac{q}{p}$

= ডানপক্ষ

$\therefore (\sec A - \tan A)^2 = \dfrac{q}{p}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১৯ $2\cos(A + B) = 1 = 2\sin(A - B)$

ক. উদ্দীপক অনুসারে A + B ও A – B সংকলিত দুইটি সমীকরণ গঠন কর। ২

খ. A ও B এর মান নির্ণয় কর। আরো দেখাও যে, $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ ৪

গ. $3\cot^2(B + 45°) - \dfrac{1}{2}\text{cosec}^2(B + 45°) + 5\sin^2(B + 30°) - 4\cos^2(B + 45°)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2\cos(A + B) = 1$

বা, $\cos(A + B) = \dfrac{1}{2}$

বা, $\cos(A + B) = \cos 60°$

$\therefore A + B = 60°$ ... ... (i)

এবং $2\sin(A - B) = 1$

বা, $\sin(A - B) = \dfrac{1}{2}$

বা, $\sin(A - B) = \sin 30°$

$\therefore A - B = 30°$ ... ... (ii)

খ (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$2A = 90° \quad \therefore A = 45°$

আবার, (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$2B = 30° \quad \therefore B = 15°$

বামপক্ষ $= \tan 2A$

$= \tan(2 \times 45°)$ [□ A = 45°]

$= \tan 90°$

$= \dfrac{\sin 90°}{\cos 90°} = \dfrac{1}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত

ডানপক্ষ $= \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$= \dfrac{2.\tan 45°}{1 - (\tan 45°)^2}$

$= \dfrac{2.1}{1 - (1)^2}$

$= \dfrac{2}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত

$\therefore \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ **(দেখানো হলো)**

গ $3\cot^2(B + 45°) - \dfrac{1}{2}\text{cosec}^2(B + 45°) + 5\sin^2(B + 30°) - 4\cos^2(B + 45°)$

$= 3\cot^2(15° + 45°) - \dfrac{1}{2}\text{cosec}^2(15° + 45°) + 5\sin^2(15° + 30°) - 4\cos^2(15° + 45°)$ [□ B = 15°]

$= 3\cot^2 60° - \dfrac{1}{2}\text{cosec}^2 60° + 5\sin^2 45° - 4\cos^2 60°$

$= 3\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 5.\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$= 3 \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3} + 5 \times \dfrac{1}{2} - 4 \times \dfrac{1}{4}$

$= 1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{2} - 1$

$= \dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{15 - 4}{6} = \dfrac{11}{6}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২০ $\cos^2 A + \cos^4 A = 1$

ক. দেখাও যে, $\dfrac{\cos^2 A}{1 + \cos^2 A} = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ ৪

গ. দেখাও যে, $\tan^4 A + \tan^2 A = 1$ এবং $\sin^2 A + \sec^2 A = 2$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\cos^2 A + \cos^4 A = 1$

বা, $\cos^4 A = 1 - \cos^2 A$

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A$ [□ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

$\therefore \cos^2 A = \sin A$

এখন, $\dfrac{\cos^2 A}{1 + \cos^2 A} = \dfrac{\sin A}{1 + \sin A}$

$= \dfrac{\sin A(1 - \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}$ [হর ও লবকে $(1 - \sin A)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{\sin A(1 - \sin A)}{1 - \sin^2 A}$

$= \dfrac{\sin A(1 - \sin A)}{\cos^2 A}$

$= \dfrac{\sin A(1 - \sin A)}{\sin A}$

$= 1 - \sin A = 1 - \cos^2 A$

$= (1 + \cos A)(1 - \cos A)$

$\therefore \dfrac{\cos^2 A}{1 + \cos^2 A} = (1 + \cos A)(1 - \cos A)$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$\cos^2 A + \cos^4 A = 1$

বা, $\cos^4 A = 1 - \cos^2 A$

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A$

বা, $\dfrac{\cos^4 A}{\sin^4 A} = \dfrac{\sin^2 A}{\sin^4 A}$

বা, $\cot^4 A = \dfrac{1}{\sin^2 A}$

বা, $\cot^4 A = \text{cosec}^2 A$

বা, $\cot^4 A = 1 + \cot^2 A$

$\therefore \cot^4 A - \cot^2 A = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ ‘খ’ থেকে পাই,

$\cot^4A - \cot^2A = 1$

বা, $\dfrac{1}{\tan^4A} - \dfrac{1}{\tan^2A} = 1$

বা, $\dfrac{1 - \tan^2A}{\tan^4A} = 1$

বা, $\tan^4A = 1 - \tan^2A$

$\therefore \tan^4A + \tan^2A = 1$ **(দেখানো হলো)**

$\sin^2A + \sec^2A$

$= \sin^2A + \dfrac{1}{\cos^2A}$

$= \sin^2A + \dfrac{1}{\sin A}$

$= \dfrac{\sin^3A + 1}{\sin A}$

$= \dfrac{(\sin A + 1)(\sin^2A - \sin A + 1)}{\sin A}$

$= \dfrac{(\sin A + 1)(\sin^2A - \sin A + 1)}{\cos^2A}$ [‘ক’ হতে $\sin A = \cos^2A$]

$= \dfrac{(\sin A + 1)(\sin^2A - \sin A + 1)}{1 - \sin^2A}$ [□ $\sin^2A + \cos^2A = 1$]

$= \dfrac{\sin^2A - \sin A + 1}{1 - \sin A}$

$= \dfrac{\sin^2A - \sin A + 1}{1 - \cos^2A}$

$= \dfrac{\sin^2A - \sin A + 1}{\sin^2A}$

$= 1 - \dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin^2A}$

$= 1 - \dfrac{1}{\cos^2A} + \dfrac{1}{\sin^2A}$

$1 - \sec^2A + \mathrm{cosec}^2A$

$= 1 - \mathrm{sce}^2A + (1 + \cot^2A)$ [□ $\mathrm{cosec}^2A - \cot^2A = 1$]

$= 2 + \cot^2A - \sec^2A$

$= 2 + \dfrac{\cos^2A}{\sin^2A} - \sec^2A$

$= 2 + \dfrac{\cos^2A}{\cos^4A} - \sec^2A$

$= 2 + \sec^2A - \sec^2A$

$= 2$

$\therefore \sin^2A + \sec^2A = 2$ **(দেখানো হলো)**