অধ্যায় ঃ ১৫: ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

১নং প্রশ্নের সমাধানঃ

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ এবং AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে x ও y ।

ক. পিথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ।

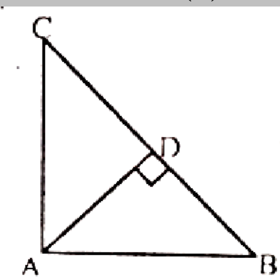
খ. প্রমান করো যে, $BC^2=AB^2+AC^2$

গ. দেখাও যে Δ ক্ষেত্র AXY = $\frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC)

সমাধান: (ক)

পিথাগোরাসের উপপকদ্য: একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের যোগফলের সমান।

সমাধান: (খ)



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ। ফলে অতিভুজ BC।

প্রমান করতে হবে যে, $BC^2=AB^2+AC^2$

অঙ্কন: $AD \perp BC$ আঁকি।

প্রমান: ধাপ যথার্থতা

(১) ΔABC ও ΔADC এর মাধ্যে
[সমকোণ বলে]

$\angle BAC = \angle ADC$

$\angle C$ সাধারণ কোণ এবং $\angle BAC = \angle ADC$ [অবশিষ্ট কোণ]

$\therefore$ ΔABC ও ΔADC সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

(২) আবার, ΔABC ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle BAC = \angle ADB$ [সমকোণ বলে]

$\angle B$ সাধারণ কোণ

এবং $\angle ACB = \angle BAD$ [অবশিষ্ট কোণ]

(৩) $\therefore \Delta ABC$ ও ΔABD সদৃশকোণী তথা সদৃশ

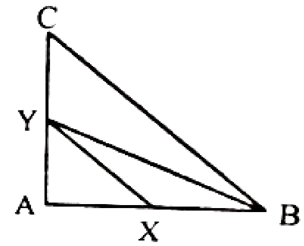
$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BE}$

$\therefore AB^2 = BD. BC.....(ii)$

$(i)+(ii) \Rightarrow AC^2+AB^2=BC.CD+BD.BC=BC(CD+BD) =BC.BC=BC^2$

$\therefore$ $BC^2=AC^2+AB^2$ (প্রমানিত)

সমাধান: (গ)



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ এবং AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে x ও y. x,y যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AXY = $\frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC)

অঙ্কন: B,Y যোগ করি।

প্রমাণ: ΔABC এর BY একটি মধ্যমা।

$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র ABY=$\frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ABC)..........(i)

আবার, ΔABY এর মধ্যমা XY

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AXY = $\frac{1}{2}\times$ (Δ ক্ষেত্র ABY)

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC)

$=\frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC)

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AXY = $\frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC) (প্রমানিত)

২নং প্রশ্নের সমাধানঃ

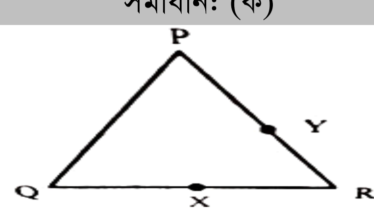
ΔPQR -এ X ও Y যথাক্রমে QR ও PR এর মধ্যবিন্দু।

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণ চিত্রটি আঁক।

খ. প্রমাণ কর যে, ΔPXY এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$(Δ PQR এর ক্ষেত্রফল)।

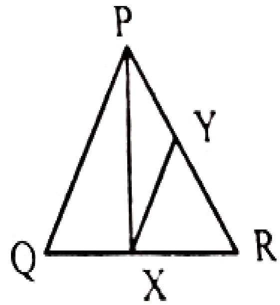
গ. দেখাও যে, XY || PQ এবং XY = $\frac{1}{2}$PQ

সমাধান: (ক)



ΔPQR এ X ও Y যথাক্রমে QR ও PRএর মধ্যবিন্দু।

সমাধান: (খ)



বিশেষ নির্বচণ: ΔPQR -এ X ও Y যথাক্রমে QR ও PR এর মধ্যবিন্দু। X, Y যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPXY এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$ (Δ PQR এর ক্ষেত্রফল)।

অঙ্কন: P ও X যোগ করি।

প্রমাণ: ধাপ যথার্থতা

ΔPXY এ XY মধ্যমা

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র PXY = $\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র PXR) [$\because$ xy মধ্যমা Δ ক্ষেত্র PXR কে সমদ্বিখন্ডিত করে]

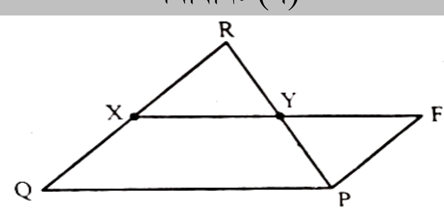
ΔPQR এ PX মাধ্যমা

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ΔPXR = $\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র PQR) [ধাপ ১ হতে]

বা, 2(Δ ক্ষেত্র PXY)= $\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র PQR)

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র PXY = $\frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র PQR) (প্রমানিত)

সমাধান: (গ)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔRQP এ RQ এবং RP এর মধ্যবিন্দু X ও Y। X,Y যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, XY = $\frac{1}{2}QP$ এবং XY $\parallel$ PQ

অঙ্কন: XY কে F পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন YF = XY হয়।

প্রমাণ: ধাপ যথার্থত

(১) ΔRXY এবং ΔYFP এর মধ্যে

RY = PY [$\because Y, RP$ এর মধ্যবিন্দু]

XY =YF [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $\angle RYX = \angle PYF$ [∵ বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta RXY \cong \therefore \Delta YFP$

$\therefore \angle RXY = \angle YFP$

এবং $\angle XRY = \angle YPF$

সুতরাং $XF \parallel QP$

(২) আবার, $XF = QP$

বা, $XY + YF = QP$

বা, $XY + XY = QP$

বা, $2XY = QP$ $[\because YF = XY]$

$\therefore 2XY = \frac{1}{2} QP$ (প্রমাণিত)

অতিরিক্ত সৃজনমীল প্রশ্নঃ

১। একটি সামান্তরিকের আকতে হবে যার একটি বাহু একটি নিদির্ষ্ট রেখাংশের সমান্ এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নিদির্ষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

ক. অক্ষর প্রতীক ব্যবহার করে প্রদত্ত বিবৃতিকে প্রকাশ কর।

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ সামান্তরিকটি অঙ্কন কর।

গ. অঙ্কণের যথার্থতা প্রমাণ কর।

২। দুটি খুটি 25.3মি. এবং 32.5মি উচু এবং পরস্পকর হতে 24মি দুরে অবস্থিত।

ক. উপরের তথ্যের ভিত্তিতে খুটিটির শীর্ষবিন্দু ও পাদবিন্দুসমূহ যোগ করলে উৎপন্ন জ্যামিতিক চিত্রের নামকরণ কর।

খ. খুটিদ্বয়ের শীর্ষ দুটির সরাসরি দূরত্ব কত?

গ. উৎপন্ন ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩। একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 সে.মি।

ক. বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন কর।

খ. বর্গক্ষেত্রটির চারগুণ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অপর একটি বর্গক্ষেত্র আক এবং অঙ্কনের বিবরণদাও।

গ. ক নং ও খ নং বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র আক। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

৪। $ABCD$ সামান্তরিকের অভ্যন্তরে P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল ক EF টানা হলো।

ক. উপরোক্ত তথ্যগুলোকে চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করে সংক্ষিপ্ত বিবরণ দাও।

খ. প্রমান কর যে, Δ- ক্ষেত্র $PAB + \Delta$ - ক্ষেত্র $PCD = \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র $ABCD$)

গ. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = (ভুমি $\times$ উচ্চতা)

৫। ΔPQR এ $PQR = 1$ সমকোণ এবং $PQ = QR, Q$ থেকে PR এর উপর QM লম্ব PR কে M বিন্দুতে ছেদ করে। N, PQ এর মধ্যবিন্দু।

ক) উপরের তথ্যানুসারে চিত্র আঁক।

খ) প্রমাণ কর যে, $PR = \sqrt{2}PQ$

গ) প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}QR$

৬। PQR সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ QR এর উপর M যে কোনো বিন্দু। D, PQ এর উপর একটি বিন্দু।

ক) তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) দেখাও যে, $RQ^2 + PD^2 = PQ^2 + RD^2$

গ) প্রমাণ কর যে, $MR^2 + MQ^2 = 2PM^2$

৭। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ।

ক) পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি লিখ।

খ) প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

গ) ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যেকোন বিন্দু প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$