

$$P = x^{a+b}, Q = x^{b+c}, R = x^{c+a}$$

ক) $\log_{2\sqrt{5}}$ এর মান নির্ণয় করো।

খ) প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{Q}{P}\right)^{c+a} \times \left(\frac{R}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{P}{R}\right)^{b+c} = 1$

গ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $(a-b)\log P + (b-c)\log Q + (c-a)\log R = 0$

সমাধান: (ক).

$$\log_{2\sqrt{5}} 400$$

$$\begin{aligned} \therefore 400 &= 16 \times 25 = 2^4 \times 5^2 \times (\sqrt{5})^4 \\ &= (2\sqrt{5})^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{2\sqrt{5}} 400 &= \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4 \\ &= 4 \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5}) = 4.1 = 4(\text{Ans}) \end{aligned}$$

সমাধান: (খ).

দেওয়া আছে, $P = x^{a+b}, Q = x^{b+c}, R = x^{c+a}$

$$\text{বামপক্ষ} = \left(\frac{Q}{P}\right)^{c+a} \times \left(\frac{R}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{P}{R}\right)^{b+c}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{x^{b+c}}{x^{a+b}}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^{c+a}}{x^{b+c}}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^{a+b}}{x^{c+a}}\right)^{b+c} \\ &= x^{(b+c-a-b)(c+a)} \times x^{(c+a-b-c)(a+b)} \times x^{(a+b-c-a)(b+c)} \\ &= x^{(c-a)(c+a)} \times x^{(a-b)(a+b)} \times x^{(b-c)(b+c)} \\ &= x^{c^2-a^2} \times x^{a^2-b^2} \times x^{b^2-c^2} \end{aligned}$$

$$= x^{c^2-a^2+a^2-b^2+b^2-c^2} = x^0 = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \left(\frac{Q}{P}\right)^{c+a} \times \left(\frac{R}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{P}{R}\right)^{b+c} = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

সমাধান: (গ).

$$\text{বামপক্ষ} = (a-b)\log P + (b-c)\log Q + (c-a)\log R$$

$$\begin{aligned} &= (a-b)\log x^{a+b} + (b-c)\log x^{b+c} + (c-a)\log x^{c+a} \\ &= (a-b)(a+b)\log x + (b-c)(b+c)\log x + (c-a)(c+a)\log x \end{aligned}$$

$$= a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2 = 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore (a-b)\log P + (b-c)\log Q + (c-a)\log R = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

২.নং প্রশ্নের সমাধানঃ

$$\text{যদি } p = \frac{3^a}{3^b}, q = \frac{3^b}{3^c} \text{ এবং } r = \frac{3^c}{3^a} \text{ হয়, তবে}$$

$$\text{ক) } p^{a+b} \times q^{b+c} \text{ এর নির্ণয় কর।}$$

$$\text{খ) } \frac{1}{p^{ab}} \times \frac{1}{q^{bc}} \times \frac{1}{r^{ca}} \text{ এর সরলীকরণ কর।}$$

$$\text{গ) দেখাও যে, } \frac{q^a}{r^b} \times p^c = 3^{2b(a-c)}$$

সমাধান: (ক).

$$\text{দেওয়া আছে, } p = \frac{3^a}{3^b} = 3^{a-b}$$

$$\text{এবং } q = \frac{3^b}{3^c} = 3^{b-c}$$

$$\text{এখন, } p^{(a+b)} = q^{(b+c)}$$

$$= 3^{(a-b)(a+b)} \times 3^{(b-c)(b+c)}$$

$$= 3^{a^2-b^2} \times 3^{b^2-c^2} = 3^{a^2-b^2+b^2-c^2} = 3^{a^2-c^2} \text{ (Ans.)}$$

সমাধান: (খ).

'ক' হতে পাই,

$$p = 3^{a-b}, q = 3^{b-c}$$

$$\text{দেওয়া আছে, } r = \frac{3^c}{3^a} = 3^{c-a}$$

$$\text{এখন, } \frac{1}{p^{ab}} \times \frac{1}{q^{bc}} \times \frac{1}{r^{ca}}$$

$$= 3^{(a-b) \times \frac{1}{ab}} \times 3^{(b-c) \times \frac{1}{bc}} \times 3^{(c-a) \times \frac{1}{ca}}$$

$$= 3^{\frac{a-b}{ab}} \times 3^{\frac{b-c}{bc}} \times 3^{\frac{c-a}{ca}}$$

$$= 3^{\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}}$$

$$= 3^{\frac{ac-bc+ba-ca+bc-ab}{abc}}$$

$$= 3^{\frac{0}{abc}} = 3^0 = 1 \text{ (Ans.)}$$

সমাধান: (গ).

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{q^a}{r^b} \times p^c$$

$$= \frac{3^{(b-c)a}}{3^{(c-a)b}} \times 3^{(a-b)c} \quad [\text{'খ' থেকে}]$$

$$= \frac{3^{ab-ac}}{3^{bc-ab}} \times 3^{ac-bc} = \frac{3^{ab-ac+ac-bc}}{3^{bc-ab}}$$

$$= 3^{ab-bc-bc+ab} = 3^{2ab-2bc} = 3^{2b(a-c)} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{q^a}{r^b} \times p^c = 3^{2b(a-c)} \quad (\text{দেখানো হলো})$$

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নঃ

১। $a^{-1} = p, q = b^{-1}, r = c^{-1}$

ক. $(p+q)^{-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\sqrt{pb}, \sqrt{qc}, \sqrt{ra}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $[a - \{p + (q-a)^{-1}\}]p^2q$ এর মান নির্ণয় কর।

২। $p = 4, 2^{n-2}, q = 2^{n+4}, r = 4, 2^{n+1}$

ক. $p = 1$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\frac{q-r}{2^{n+2}+2}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\frac{3 \cdot 2^n - p}{2^n - 2^{n-1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। $3^{m+1} = p, 3^{2n-m} = q, r = 10^{m+2}, s = 5^{m+n}$

ক. $p = 1$ হলে $m = ?$

খ. $\frac{p}{(3^m)^{m-1}} + \frac{p^2}{p^{m-1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$. [$x > 0, y > 0, z > 0$] একটি রাশি।

(ক) প্রদত্ত রাশিটির মান বের কর।

(খ) সরল কর: $\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^z \cdot \left(\frac{a^y}{a^z}\right)^x \cdot \left(\frac{a^z}{a^x}\right)^y \cdot \sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$.

(গ) প্রমাণ কর: $\left(\frac{a^{p+q}}{a^{2r}}\right) \times \left(\frac{a^{q+r}}{a^{2p}}\right) \times \left(\frac{a^{r+p}}{a^{2q}}\right) + 1 = \text{'খ' হতে প্রাপ্ত মান}$ ।

৫। $\frac{3^6}{3^3 \cdot 3^5}$ এবং $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \times \frac{(3^{m-1})^{m+1}}{(9^{m+1})}$; $[m \in \mathbf{Q}]$ যদি দুইটি সূচক সম্বলিত রাশি হয় তবে.

(ক) ১ম রাশির মান কত হবে?

(খ) দেখাও যে, $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \times \frac{(3^{m-1})^{m+1}}{(9^{m+1})} = ১$ ম রাশির মান।

(গ) সমাধান কর: $(\sqrt{3})^{m+1} = (\sqrt[3]{3})^{2m-1} \cdot \frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \times \frac{(3^{m-1})^{m+1}}{(9^{m+1})}$

৬। সূচক সম্বলিত কতিপয় রাশি $\left(\frac{a^1}{a^m}\right)^n, \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^1, \left(\frac{a^n}{a^1}\right)^m$

(ক) প্রথম রাশিকে a^{st} আকারে প্রকাশ কর।

(খ) রাশিগুলোর গুণফল নির্ণয় কর।

(গ) দেখাও যে, $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$ এর মান রাশিগুলোর গুণফলের সমান।

৭। $x^{p+q} = a, x^{q+r} = b, x^{r+p} = c$

ক. $a \times b \times c = 1$ হলে $p + q + r$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\frac{a}{x^{2r}} \times \frac{b}{x^{2p}} \times \frac{x}{x^{2q}}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\left\{\frac{a^{p+q}}{x^{qr}}\right\}^{p-q} \times \left\{\frac{b^{q+r}}{x^{qr}}\right\}^{q-r} \times \left\{\frac{c^{r+p}}{x^{rp}}\right\}^{r-p} = 1$

৮। $p = \frac{3 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{x-2}}{2^x - 2^{x-1}}, Q = \frac{2^{x+1} - 2^{x-1}}{3 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{x-2}}$ এবং $R = \frac{3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x+1}}{3^{x+2} \div 3}$

ক. P এর মান নির্ণয় কর।

খ. $P \times Q \times R =$ কত?

গ. $PQR \times \frac{25^{a+1}}{(5^{a-1})^{a+1}} \div \frac{5^{a+1}}{(5^a)^{a-1}} =$ কত?

৯। $x = 2, y = -2$ এবং $z = 3$ হলে

ক. $2^x \times 4^y \times 8^z =$ কত?

খ. $\frac{x^3 \times y^3 \times z^3}{2^{3x} \times 4^{4y} \times 8^z}$ এর মান কত?

গ. $\left(\frac{x^{\frac{3}{4}} \times z^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} \times z^{\frac{3}{4}}}\right)$ এর মান কত?

১০। $p = \left(\frac{a^{x+1}}{a^{y+1}}\right), q = \left(\frac{a^{y+2}}{a^{z+2}}\right)$ এবং $r = \left(\frac{a^{z+3}}{a^{x+3}}\right)$

ক. $p^z \times q^x \times r^y =$ কত?

খ. $p^{x+y} \times q^{y+z} \times r^{z+x} =$ কত?

গ. $p^{x+y-z} \times q^{y+z-x} \times r^{z+x-y} =$ কত?

১১। $p = x^a, q = x^b$ এবং $r = x^c$

ক. $\left(\frac{p}{q}\right)^c \times \left(\frac{q}{r}\right)^a \times \left(\frac{r}{p}\right)^b =$ কত?

খ. $\left(\frac{p}{q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{q}{r}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{r}{p}\right)^{c^2+ca+a^2} =$ কত?

গ. $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{ab}} \times \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{ca}} \times \sqrt{x^{-1}y} \times \sqrt{y^{-1}z} \times \sqrt{z^{-1}x}$ এর মান কত?

১২। $p = x^{a-b}, q = x^{b-c}$ এবং $r = x^{c-a}$

ক. $p \times q \times r =$ কত?

খ. $p^{a+b} \times q^{b+c} \times r^{c+a} =$ কত?

গ. $p^{a^2+ab+b^2} \times q^{b^2+bc+c^2} \times r^{c^2+ca+a^2}$ এর মান কত?

১৩। $p = \frac{x^b}{x^c}, q = \frac{x^c}{x^a}, r = \frac{x^a}{x^b}$

ক. $p^a \times q^b \times r^c =$ কত?

খ. প্রমাণ কর যে, $p^{b+c-a} \times q^{c+a-b} \times r^{a+b-c} = 1$

গ. $p^{b^2+bc+c^2} \times q^{c^2+ca+a^2} \times r^{a^2+ab+b^2} =$ কত?

১৪। a এর x তম ঘাত b, b এর y তম ঘাত c এবং c এর z তম ঘাত $a, 2^x + 2^{1-z} = 3$ একটি সূচকীয় সমীকরণ

এবং $P = (2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

ক. P এর মান কত?

খ. x, y এবং z এর গুণফল কত?

গ. সূচকীয় সমীকরণটি সমাধান কর।

