



ci x v e o j y % a v e w e i x y K A G U K G R m k x E b q O z n g f i c i x v % e s g o y U G i c k a f v c y e m g a b A a q i w k ~ I q n G G % a G v A b k j b k i G Z y % A a q u ^ A G h k v m f b k j i P b g i f K c b f n g a b j l G c v G m G B E

প্রশ্ন ১ $y = 5 + 2\sqrt{6}$ এবং $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$. [সকা বোর্ড-২০১৯] প্রশ্ন নং ২]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $m^3 - 3m^2 + 3m - 2$. ২

খ. $y^4 + \frac{1}{y^4}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $27\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 728$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $m^3 - 3m^2 + 3m - 2$
 $= m^3 - 3.m^2.1 + 3m.1^2 - 1^3 - 1$
 $= (m-1)^3 - 1^3$
 $= (m-1-1)\{(m-1)^2 + (m-1).1 + 1^2\}$
 $= (m-2)\{m^2 - 2m + 1 + m - 1 + 1\}$
 $= (m-2)(m^2 - m + 1)$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $y = 5 + 2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{y} &= \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{(5)^2 - (2\sqrt{6})^2} \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - 24} \\ &= 5 - 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\therefore y + \frac{1}{y} = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10$$

এখন, $y^4 + \frac{1}{y^4} = (y^2)^2 + \left(\frac{1}{y^2}\right)^2$

$$\begin{aligned} &= \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2 - 2.y^2.\frac{1}{y^2} \\ &= \left\{\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2.y.\frac{1}{y}\right\}^2 - 2 \\ &= \{(10)^2 - 2\}^2 - 2 \\ &= (100 - 2)^2 - 2 \\ &= (98)^2 - 2 \\ &= 9604 - 2 \\ &= 9602 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.x.\frac{1}{x} = \frac{82}{9}$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{82}{9} - 2$

$$= \frac{82 - 18}{9} = \frac{64}{9}$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$$

এখন, $27\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 27\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3.x.\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right\}$

$$\begin{aligned} &= 27\left\{\left(\frac{8}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{8}{3}\right)\right\} \\ &= 27\left(\frac{512}{27} + 8\right) \\ &= 27 \times \frac{(512 + 216)}{27} \\ &= 728 \end{aligned}$$

$$\therefore 27\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 728 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ২ $x = \sqrt{2} + 1$ এবং $y^2 + \frac{1}{y^2} = 14, y > 0$. [সম্মিত অধ্যায় ২ ও ৩]

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৯] প্রশ্ন নং ২]

ক. $f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 12$ হলে $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\left(1 - \frac{1}{x^{10}}\right)x^5 = 82$. ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্য হতে $\left(1 - \frac{1}{y}\right)\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 12 \\ \therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} - 12 \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} - 12 \\ &= 4 + 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = -6 \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} + 1 \\ \therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \text{ [হর ও লবকে } (\sqrt{2} - 1) \text{ দ্বারা গুণ করে]} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$

$$\text{এবং } x - \frac{1}{x} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$$

এখানে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned} &= (2\sqrt{2})^3 - 3.2\sqrt{2} \\ &= 8.2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= 16\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

আবার, $x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{2} \times 2 \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

এখন, $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 10\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

বা, $x^5 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^5} = 80$

বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} - \left(x - \frac{1}{x}\right) = 80$

বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} - 2 = 80$ [$\square x - \frac{1}{x} = 2$]



MWZ (AvevkaK)

বা, $x^5 - \frac{1}{x^3} = 80 + 2$

বা, $x^5 - \frac{1}{x^3} = 82$

বা, $x^5 \left(1 - \frac{1}{x^{10}}\right) = 82$

∴ $\left(1 - \frac{1}{x^{10}}\right)x^5 = 82$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $y^2 + \frac{1}{y^2} = 14$

বা, $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{y} = 14$

বা, $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 = 14$

বা, $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 14 + 2$

বা, $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 16$

বা, $y + \frac{1}{y} = \sqrt{16}$

∴ $y + \frac{1}{y} = 4$ [□ $y > 0$]

আবার, $y^2 + \frac{1}{y^2} = 14$

বা, $\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{y} = 14$

বা, $\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2 = 14$

বা, $\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 14 - 2$

বা, $\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 12$

বা, $y - \frac{1}{y} = \sqrt{12}$

∴ $y - \frac{1}{y} = 2\sqrt{3}$ [□ $y > 0$]

এখন, $y + \frac{1}{y} = 4$

$y - \frac{1}{y} = 2\sqrt{3}$

$2y = 4 + 2\sqrt{3}$ [যোগ করে]

বা, $2y = 2(2 + \sqrt{3})$

বা, $y = 2 + \sqrt{3}$

প্রদত্ত রাশি = $\left(1 - \frac{1}{y}\right) \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)$

= $\left(1 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) \left\{ \left(y + \frac{1}{y}\right)^3 - 3 \cdot y \cdot \frac{1}{y} \left(y + \frac{1}{y}\right) \right\}$

= $\left\{ 1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \right\} \{(4)^3 - 3 \cdot 4\}$

= $\left(1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3}\right) (64 - 12)$

= $(1 - (2 - \sqrt{3})) \times 52$

= $(1 - 2 + \sqrt{3}) \times 52$

= $(\sqrt{3} - 1) \times 52$

= $52(\sqrt{3} - 1)$ (Ans.)

প্রশ্ন ৩. $b + \frac{1}{b} = 5$, $p^4 = 119 - \frac{1}{p^4}$ [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৯ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $m^4 - 7m^2 + 1$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{b^8 - 1}{b^4} = 115\sqrt{21}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $p^6 - 1 - 36p^3 = 0$ ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $m^4 - 7m^2 + 1$
 = $m^4 + 1 - 7m^2$
 = $(m^2)^2 + (1)^2 - 7m^2$
 = $(m^2 + 1)^2 - 2m^2 - 7m^2$ [□ $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$]
 = $(m^2 + 1)^2 - 9m^2$
 = $(m^2 + 1)^2 - (3m)^2$
 = $(m^2 + 3m + 1)(m^2 - 3m + 1)$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $b + \frac{1}{b} = 5$

বা, $\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = 25$

বা, $b^2 + \frac{1}{b^2} + 2 \cdot b \cdot \frac{1}{b} = 25$

∴ $b^2 + \frac{1}{b^2} = 23 \dots (i)$

আবার, $\left(b - \frac{1}{b}\right)^2 = \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 4 \cdot b \cdot \frac{1}{b}$
 = $5^2 - 4$
 = 21

∴ $b - \frac{1}{b} = \sqrt{21} \dots (ii)$

এখন, $\frac{b^8 - 1}{b^4} = \frac{b^8}{b^4} - \frac{1}{b^4} = b^4 - \frac{1}{b^4}$
 = $(b^2)^2 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^2 = \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right)$
 = $23 \times \left(b + \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right)$
 = $23 \times 5 \times \sqrt{21}$
 = $115\sqrt{21}$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $p^4 = 119 - \frac{1}{p^4}$

বা, $p^4 + \frac{1}{p^4} = 119$

বা, $(p^2)^2 + \left(\frac{1}{p^2}\right)^2 = 119$

বা, $\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{p^2} = 119$

বা, $\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 = 121$

বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} = 11$

বা, $\left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p} = 11$

বা, $\left(p - \frac{1}{p}\right)^2 = 9$

বা, $p - \frac{1}{p} = 3$

বা, $\left(p - \frac{1}{p}\right)^3 = (3)^3$ [ঘন করে]

বা, $p^3 - \frac{1}{p^3} - 3 \cdot p \cdot \frac{1}{p} \left(p - \frac{1}{p}\right) = 27$

বা, $p^3 - \frac{1}{p^3} - 3 \times 3 = 27$

বা, $p^3 - \frac{1}{p^3} = 36$

বা, $p^6 - 1 = 36p^3$

বা, $p^6 - 1 - 36p^3 = 0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৪. $p = 3 + 2\sqrt{2}$.

◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[সিটে বোর্ড-২০১৯ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(x) = x^2 - 5x + 2k$ হলে k এর কোন মানের জন্য $f(2) = 0$ হবে? ২

খ. $p^4 - \frac{1}{p^4}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

খ. প্রমাণ কর যে, $16(p^4 + q^4)p^2q^2 = 18$

গ. $x^5 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 - 2\left(a + \frac{1}{a}\right)x + 4$

$$= x^2 - 2ax - \frac{2x}{a} + 4$$

$$= x(x - 2a) - \frac{2}{a}(x - 2a)$$

$$= (x - 2a)\left(x - \frac{2}{a}\right) \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $(p^2 + q^2)^2 = \sqrt{125}$

বা, $(p^2 + q^2)^2 = 5$

বা, $p^2 + q^2 = \sqrt{5}$

এবং $(p^2 - q^2)^2 = \sqrt{64}$

বা, $(p^2 - q^2)^2 = 4$

$\therefore p^2 - q^2 = \sqrt{4}$

$\therefore p^2 - q^2 = 2$

L.H.S = $16(p^4 + q^4)p^2q^2$

$$= 16\left\{\frac{(p^2+q^2)^2 + (p^2-q^2)^2}{2}\right\} \left\{\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2-q^2}{2}\right)^2\right\}$$

$$= 16\left\{\frac{(\sqrt{5})^2 + (2)^2}{2}\right\} \left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right\}$$

$$= 16\left(\frac{5+4}{2}\right) \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{4}\right)$$

$$= 16 \times \frac{9}{2} \times \left(\frac{5-4}{4}\right)$$

$$= 16 \times \frac{9}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= 18$$

$$= \text{R.H.S (প্রমাণিত)}$$

গ দেওয়া আছে, $x^2 = 9 + 4\sqrt{5}$

$$= 5 + 4\sqrt{5} + 4$$

$$= (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + (2)^2$$

$$= (\sqrt{5} + 2)^2$$

$\therefore x = \sqrt{5} + 2$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$

$$= \frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \text{ [হর ও লবকে } (\sqrt{5} - 2) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4}$$

$$= \sqrt{5} - 2$$

$\therefore \frac{1}{x} = \sqrt{5} - 2$

$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2$

$$= 2\sqrt{5}$$

এখন, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$

$$= (2\sqrt{5})^2 - 2$$

$$= 20 - 2$$

$$= 18$$

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 18 \dots \dots \dots$ (i)

আবার, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= (2\sqrt{5})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$= 85\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$$

$$= 40\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$$

$$= 34\sqrt{5}$$

$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 34\sqrt{5} \dots \dots \dots$ (ii)

(i) ও (ii) নং গুণ করে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 18 \times 34\sqrt{5}$$

বা, $x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = 612\sqrt{5}$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = 612\sqrt{5}$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^3} + 2\sqrt{5} = 612\sqrt{5}$; $\left[\square x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}\right]$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^3} = 612\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

বা, $x^5 + \frac{1}{x^3} = 610\sqrt{5}$

$\therefore x^5 + \frac{1}{x^3} = 610\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$

প্রশ্ন ৭ $x^2 - 3 = 2\sqrt{2}$

[ঢাকা বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. x এর মান নির্ণয় কর।

২

খ. $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^3} = 58\sqrt{2}$

৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x^2 - 3 = 2\sqrt{2}$

বা, $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

বা, $x^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1$

বা, $x^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + (1)^2$

বা, $x^2 = (\sqrt{2} + 1)^2$

$\therefore x = \sqrt{2} + 1 \text{ (Ans.)}$

খ 'ক' থেকে পাই,

$$x = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{1 \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} \text{ [লব ও হর কে } (\sqrt{2} - 1) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1}$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$

প্রদত্ত রাশি $= x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\right\}^2 - 2$$

$$= \{(2\sqrt{2})^2 - 2\}^2 - 2$$

$$= (8 - 2)^2 - 2$$

$$= (6)^2 - 2$$

$$= 36 - 2$$

$$= 34 \text{ (Ans.)}$$

গ 'খ' থেকে পাই,

$$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2} \text{ এবং } x^4 + \frac{1}{x^4} = 34$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = 2\sqrt{2} \times 34$$

বা, $x^5 + x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} = 68\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{বা, } x^5 + \frac{1}{x^3} &= 68\sqrt{2} - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \\ &= 68\sqrt{2} - \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= 68\sqrt{2} - \{(2\sqrt{2})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{2}\} \\ &= 68\sqrt{2} - (16\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) \\ &= 68\sqrt{2} - 10\sqrt{2} \\ &= 58\sqrt{2} \\ \therefore x^5 + \frac{1}{x^3} &= 58\sqrt{2} \text{ (প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

প্রশ্ন ▶ চ কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি $2\sqrt{3}$ ।
[রাজশাহী বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. সংখ্যাটিকে a চনকে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ৪

চ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, সংখ্যাটি = a
 \therefore সংখ্যাটির গুণক বিপরীত সংখ্যা = $\frac{1}{a}$

প্রশ্নানুসারে, $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$ (Ans.)

খ 'ক' থেকে পাই,

$$a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}$$

প্রদত্ত রাশি = $a^3 + \frac{1}{a^3}$

$$\begin{aligned} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right) \\ &= (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{3} \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{3} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ 'ক' হতে পাই,

$$a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3} \dots (i)$$

এখন, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$

$$\text{বা, } (2\sqrt{3})^2 - 4 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\text{বা, } 8 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = 2\sqrt{2} \dots (ii)$$

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$2a = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\therefore a = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ক $b^2 - 2\sqrt{6}b + 1 = 0$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$ । ২

খ. $\frac{1}{b^3} (b^6 - 1)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $b^5 + \frac{1}{b^3} = 922\sqrt{6}$ । ৪

ক নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $b^2 - 2\sqrt{6}b + 1 = 0$

$$\text{বা, } b^2 + 1 = 2\sqrt{6}b$$

$$\text{বা, } \frac{b^2}{b} + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6} \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ 'ক' হতে পাই,

$$b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 &= \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 4b \cdot \frac{1}{b} \\ &= (2\sqrt{6})^2 - 4 \\ &= 4 \cdot 6 - 4 \\ &= 24 - 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\therefore b - \frac{1}{b} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

প্রদত্ত রাশি = $\frac{1}{b^3} (b^6 - 1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{b^6}{b^3} - \frac{1}{b^3} \\ &= b^3 - \frac{1}{b^3} \\ &= \left(b - \frac{1}{b}\right)^3 + 3b \cdot \frac{1}{b} \left(b - \frac{1}{b}\right) \\ &= (2\sqrt{5})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{5} \\ &= 8 \cdot 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ &= 40\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ &= 46\sqrt{5} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ 'ক' হতে পাই, $b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$

$$\text{বা, } \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = (2\sqrt{6})^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } b^2 + 2b \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} = 4 \cdot 6$$

$$\text{বা, } b^2 + \frac{1}{b^2} = 24 - 2$$

$$\therefore b^2 + \frac{1}{b^2} = 22$$

আবার, $b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{6}$

$$\text{বা, } \left(b + \frac{1}{b}\right)^3 = (2\sqrt{6})^3 \text{ [ঘন করে]}$$

$$\text{বা, } b^3 + \frac{1}{b^3} + 3b \cdot \frac{1}{b} \left(b + \frac{1}{b}\right) = 8 \cdot 6\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } b^3 + \frac{1}{b^3} + 3 \cdot 2\sqrt{6} = 48\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } b^3 + \frac{1}{b^3} = 48\sqrt{6} - 6\sqrt{6}$$

$$\therefore b^3 + \frac{1}{b^3} = 42\sqrt{6}$$

$$\text{এখন, } \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(b^3 + \frac{1}{b^3}\right) = 22 \times 42\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } b^5 + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{b^3} = 924\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } b^5 + \frac{1}{b^3} + b + \frac{1}{b} = 924\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } b^5 + \frac{1}{b^3} + 2\sqrt{6} = 924\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } b^5 + \frac{1}{b^3} = 924\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$\therefore b^5 + \frac{1}{b^3} = 922\sqrt{6} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ১০ $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $a + b + c = m$, [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ২]



$$a^2 + b^2 + c^2 = n \text{ এবং } a^3 + b^3 = p^3$$

ক. x এর মান নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^8+1}{x^4} = 98$

গ. যদি $c=0$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$.

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x^2 &= 5 + 2\sqrt{6} \\ &= 3 + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

খ. 'ক' থেকে পাই,

$$x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{x^8+1}{x^4}$$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4}$$

$$= (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \right\}^2 - 2$$

$$= \left\{ (2\sqrt{3})^2 - 2 \right\}^2 - 2$$

$$= (12 - 2)^2 - 2$$

$$= 100 - 2$$

$$= 98$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{x^8+1}{x^4} = 98 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$a + b + c = m$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = n$$

$$a^3 + b^3 = p^3$$

$$\text{এবং } c = 0$$

$$\therefore a + b = m \text{ এবং } a^2 + b^2 = n$$

$$\text{বামপক্ষ} = m^3 + 2p^3$$

$$= (a+b)^3 + 2(a^3+b^3)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2a^3 + 2b^3$$

$$= 3(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$= 3\{a^2(a+b) + b^2(a+b)\}$$

$$= 3(a+b)(a^2+b^2)$$

$$= 3mn$$

$$[\because a+b=m \text{ এবং } a^2+b^2=n]$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore m^3 + 2p^3 = 3mn \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ১১ $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$.

[সিলেট বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $x + \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^8-1}{x^4} = 40\sqrt{6}$

গ. $x^5 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 10$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 10$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 12$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4 \times 3$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3} \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 10$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 10$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 8$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{x^8-1}{x^4}$$

$$= x^4 - \frac{1}{x^4}$$

$$= (x^2)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 10 \times \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 10 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \text{ ['ক' হতে মান বসিয়ে]}$$

$$= 40\sqrt{6}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{x^8-1}{x^4} = 40\sqrt{6} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ. এখানে,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^5}$$

$$= \left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore x^5 - \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) \dots \dots \dots \text{(i)}$$

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{2} \text{ [খ হতে মান বসিয়ে]}$$

$$= 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$$

(i) নং সমীকরণে $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$ ও $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ এর মানগুলো বসিয়ে পাই,

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = 10 \times 22\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 220\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 218\sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১২ $x^2 - 2x + 1 = 0$ [যশোর বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^4 + a^2 + 1$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + x^{-4}$ ৪

গ. $x^5 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $a^4 + a^2 + 1$
 $= (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + (1)^2 - a^2$
 $= (a^2 + 1)^2 - a^2$
 $= (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)$
 $= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে,
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 বা, $(x)^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + (1)^2 = 0$
 বা, $(x-1)^2 = 0$ বা, $x-1 = 0$
 $\therefore x = 1$
 বামপক্ষ = $x^2 + \frac{1}{x^2} = (1)^2 + \frac{1}{(1)^2} = 1 + 1 = 2$
 ডানপক্ষ = $x^4 + x^{-4}$
 $= x^4 + \frac{1}{x^4}$
 $= (1)^4 + \frac{1}{(1)^4}$
 $= 1 + 1$
 $= 2$
 $\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + x^{-4}$ (প্রমাণিত)

গ. $x^5 - \frac{1}{x^3} = (1)^5 - \frac{1}{(1)^3}$ [মান বসিয়ে]
 $= 1 - 1$
 $= 0$ (Ans.)

প্রশ্ন ১৩ $p^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $a^3 + a^{-3} = 18\sqrt{3}$ এবং $a, p > 0$ [বরিশাল বোর্ড-২০১৭ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $p - \frac{1}{p}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, যখন $a^3 - a^{-3} > 0$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{p^{10} + 1}{p^5} = 178\sqrt{3}$. ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,
 $p^2 = 5 + 2\sqrt{6}$
 $= 3 + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2$
 $= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$
 $= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
 $\therefore p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$
 $\therefore \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1}$
 $= \sqrt{3} - \sqrt{2}$
 এখন, $p - \frac{1}{p} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 $= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$\therefore p - \frac{1}{p} = 2\sqrt{2}$ (Ans.)

খ. সূত্রনশীল 5 (গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. 'ক' থেকে পাই,

$p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ এবং $\frac{1}{p} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\therefore p + \frac{1}{p} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$

বা, $p + \frac{1}{p} = 2\sqrt{3}$

বা, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = (2\sqrt{3})^2$ [বর্গ করে]

বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} + 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p} = 12$

বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} + 2 = 12$

বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} = 12 - 2$

$\therefore p^2 + \frac{1}{p^2} = 10$ (i)

আবার, $p + \frac{1}{p} = 2\sqrt{3}$

বা, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^3 = (2\sqrt{3})^3$

বা, $p^3 + \frac{1}{p^3} + 3 \cdot p \cdot \frac{1}{p} \left(p + \frac{1}{p}\right) = 24\sqrt{3}$

বা, $p^3 + \frac{1}{p^3} + 3 \times 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

বা, $p^3 + \frac{1}{p^3} + 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

বা, $p^3 + \frac{1}{p^3} = 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$\therefore p^3 + \frac{1}{p^3} = 18\sqrt{3}$ (ii)

(i) ও (ii) গুণ করে পাই,

$\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right) = 180\sqrt{3}$

বা, $p^5 + \frac{1}{p^5} + p + \frac{1}{p} = 180\sqrt{3}$

বা, $p^5 + \frac{1}{p^5} + 2\sqrt{3} = 180\sqrt{3}$

বা, $p^5 + \frac{1}{p^5} = 180\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

বা, $\frac{(p^5)^2 + 1}{p^5} = 178\sqrt{3}$

$\therefore \frac{p^{10} + 1}{p^5} = 178\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১৪ $p^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ [ঢাকা বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{p^6 - 1}{p^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $p^5 + \frac{1}{p^5} = 724$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

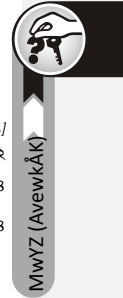
ক. দেওয়া আছে,

$p^2 = 7 + 4\sqrt{3}$
 $= 4 + 4\sqrt{3} + 3$
 $= 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
 $= (2 + \sqrt{3})^2$

$\therefore p = 2 + \sqrt{3}$ [বর্গমূল করে] (Ans.)

খ. 'ক' থেকে পাই,

$p = 2 + \sqrt{3}$



$$\therefore \frac{1}{p} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

এখন, $\frac{p^6 - 1}{p^3} = \frac{p^6}{p^3} - \frac{1}{p^3} = p^3 - \frac{1}{p^3}$

$$= \left(p - \frac{1}{p}\right)^3 + 3p \cdot \frac{1}{p} \left(p - \frac{1}{p}\right)$$

$$= (2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})^3 + 3(2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})$$

$$= (2\sqrt{3})^3 + 3 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 8 \times 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$= 24\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$= 30\sqrt{3} \text{ (Ans.)}$$

গ 'ক' ও 'খ' থেকে পাই,

$$p = 2 + \sqrt{3}, \frac{1}{p} = 2 - \sqrt{3} \text{ এবং } p^3 - \frac{1}{p^3} = 30\sqrt{3}$$

$$\therefore p + \frac{1}{p} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$\text{বামপক্ষ} = p^5 + \frac{1}{p^5}$$

$$= \left(p^3 - \frac{1}{p^3}\right) \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right) + \left(p + \frac{1}{p}\right)$$

$$= 30\sqrt{3} \times \left(p + \frac{1}{p}\right) \left(p - \frac{1}{p}\right) + \left(p + \frac{1}{p}\right)$$

$$= 30\sqrt{3} \times 4 \times 2\sqrt{3} + 4 = 724$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore p^5 + \frac{1}{p^5} = 724. \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ১৫ রাহিসা তার বিদ্যালয় হতে প্রাপ্ত বৃত্তি ও উপবৃত্তির মোট 10,000 টাকা 5 বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখে। বার্ষিক মুনাফার হার 8%। (সূত্র প্রযোজ্য)

[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $x^2 - 5x - 6$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

২

খ. সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

৪

গ. সরল মুনাফার ক্ষেত্রে উক্ত টাকা কত বছরে মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হবে?

৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $x^2 - 5x - 6$

$$= x^2 - 6x + x - 6$$

$$= x(x - 6) + 1(x - 6)$$

$$= (x - 6)(x + 1) \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে,

$$\text{মূলধন, } P = 10,000 \text{ টাকা}$$

$$\text{মুনাফার হার, } r = 8\% = \frac{8}{100}$$

সময়, $n = 5$ বছর

আমরা জানি, সরল মুনাফা, $I = Pnr$

$$= \left(10000 \times 5 \times \frac{8}{100}\right) \text{ টাকা}$$

$$= 4000 \text{ টাকা}$$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফায়, মুনাফাচক্রমূলধন C টাকা হলে,

$$C = P(1 + r)^n$$

$$= 10000 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5$$

$$= 10000 \left(\frac{108}{100}\right)^5$$

$$= 10000 \left(\frac{108}{100}\right)^5$$

$$= 10000 \times (1.08)^5$$

$$= 10000 \times 1.4693281$$

$$= 14693.28 \text{ টাকা (প্রায়)}$$

$$\therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = (14693.28 - 10000) \text{ টাকা}$$

$$= 4693.28 \text{ টাকা}$$

\therefore সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য

$$= (4693.28 - 4000) \text{ টাকা}$$

$$= 693.28 \text{ টাকা (প্রায়) (Ans.)}$$

গ. এখানে,

মূলধন, $P = 10000$ টাকা

\therefore মুনাফা-মূলধন = 2×10000 টাকা = 20000 টাকা

\therefore মুনাফা, $I = (20000 - 10000)$ টাকা = 10000 টাকা

$$\text{মুনাফার হার, } r = 8\% = \frac{8}{100}$$

সময়, $n = ?$

আমরা জানি, $I = Pnr$

$$\text{বা, } n = \frac{I}{Pr} = \frac{10000}{10000 \times \frac{8}{100}} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12 \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{সময় } 12 \frac{1}{2} \text{ বছর (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৬ $x + \frac{1}{x} = 6$

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ এর মান কত?

২

খ. দেখাও যে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 198$.

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 6726$.

৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = 6$

$$\text{আমরা জানি, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= (6)^2 - 4$$

$$= 36 - 4$$

$$= 32 \text{ (Ans.)}$$

খ. $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$

$$= (6)^3 - 3 \cdot 6$$

$$= 216 - 18$$

$$= 198$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = 198 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$x + \frac{1}{x} = 6$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (6)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 36$$

$$\text{বা, } x^2 + \frac{1}{x^2} = 36 - 2$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$$

$$\text{'খ' থেকে পাই, } x^3 + \frac{1}{x^3} = 198$$

$$\text{এখন, } \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 198 \times 34$$

$$\text{বা, } x^5 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} = 6732$$

$$\text{বা, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 6732 - 6 \quad [\square x + \frac{1}{x} = 6]$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 6726 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ১৭ $x + y = \sqrt{3}$ এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$ [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ২]



ক. xy এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4} = 3\sqrt{3}$

গ. $16xy(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{3}$ এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$

এখন, $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$

বা, $(x + y)(x - y) = \sqrt{6}$

বা, $x - y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ [$\because x + y = \sqrt{3}$]

বা, $x - y = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore x - y = \sqrt{2}$

আমরা জানি,

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{4}$$

$$= \frac{3 - 2}{4}$$

$\therefore xy = \frac{1}{4}$ (Ans.)

খ. 'ক' থেকে পাই,

$$x + y = \sqrt{3} \text{ এবং } xy = \frac{1}{4}$$

এখন, $x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4}$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + \frac{\sqrt{27}}{4}$$

$$= (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{9 \cdot 3}}{4} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$\therefore x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4} = 3\sqrt{3}$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{3}$

'ক' থেকে পাই,

$$x - y = \sqrt{2}$$

$$xy = \frac{1}{4}$$

প্রদত্ত রাশি = $16xy(x^2 + y^2)$

$$= 16 \times \frac{1}{4} \times \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} \text{ ['ক' হতে]}$$

$$= 4 \times \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}{2} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 2 \times (3 + 2)$$

$$= 2 \times 5$$

$$= 10 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৮. $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2$ দু'টি বীজগণিতীয় রাশি।

[চতুর্থম বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. ১ম রাশি = ০ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

খ. ১ম রাশি = ১০, ২য় রাশি = ৩৮ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান কত?

গ. ১ম রাশি = ০ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{(b + c)^2}{6bc} + \frac{(c + a)^2}{6ca} + \frac{(a + b)^2}{6ab} = \frac{1}{2}$

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$১ম রাশি = a + b + c$$

২. শর্তমতে,

$$a + b + c = 0$$

৪. বা, $a + b = -c$

৪. বা, $(a + b)^3 = (-c)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

$$বা, a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

$$বা, a^3 + b^3 + 3ab(-c) = -c^3 \text{ [}\because a + b = -c\text{]}$$

$$বা, a^3 + b^3 - 3abc = -c^3$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (দেখানো হলো)}$$

খ. ১ম শর্তমতে, $a + b + c = 10$

$$২য় শর্তমতে, a^2 + b^2 + c^2 = 38$$

এখানে, $a + b + c = 10$

$$বা, (a + b + c)^2 = 10^2 \text{ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$বা, a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 100$$

$$বা, 38 + 2(ab + bc + ca) = 100 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$বা, 2(ab + bc + ca) = 100 - 38$$

$$\therefore 2(ab + bc + ca) = 62$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$$

$$= (2 \times 38) - 62 \text{ [}\square 2(ab + bc + ca) = 62\text{]}$$

$$= 76 - 62$$

$$= 14 \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$১ম রাশি = a + b + c$$

$$\therefore ১ম রাশি = ০ \text{ হলে}$$

$$a + b + c = 0$$

$$\therefore a + b = -c$$

$$b + c = -a$$

$$c + a = -b$$

$$\text{এবং 'ক' থেকে পাই, } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{এখন, } \frac{(b + c)^2}{6bc} + \frac{(c + a)^2}{6ca} + \frac{(a + b)^2}{6ab} = \frac{(-a)^2}{6bc} + \frac{(-b)^2}{6ca} + \frac{(-c)^2}{6ab}$$

$$= \frac{a^2}{6bc} + \frac{b^2}{6ca} + \frac{c^2}{6ab}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{6abc}$$

$$= \frac{3abc}{6abc}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{(b + c)^2}{6bc} + \frac{(c + a)^2}{6ca} + \frac{(a + b)^2}{6ab} = \frac{1}{2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ১৯. জয়লন্ড ৫% হারে ১০,০০০ টাকা ৩ বছরের জন্য ব্যাংক থেকে ঋণ নিল। [সিলেট বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. উক্ত টাকার সরল মুনাফা নির্ণয় কর।

খ. উক্ত টাকার সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর।

গ. যদি উভয় মুনাফার পার্থক্য ৪৫.৭৫ টাকা হয় তবে জয়লন্ডের ঋণের পরিমাণ কত টাকা হবে?

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$\text{মূলধন, } P = 10000 \text{ টাকা;}$$

$$\text{মুনাফার হার, } r = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$\text{এবং সময়, } n = 3 \text{ বছর।}$$

সরল মুনাফার ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$I = Pnr$$

$$= 10000 \times 3 \times \frac{5}{100} \text{ টাকা}$$



= 1500 টাকা

∴ সরল মুনাফা 1500 টাকা (Ans.)

খ. আমরা জানি,

$$\begin{aligned} \text{চক্রবৃদ্ধি মূলধন, } C &= P(1+r)^n \\ &= 10000(1+0.05)^3 \text{ টাকা} \\ &= 10000 \times (1.05)^3 \text{ টাকা} \\ &= 10000 \times 1.157625 \text{ টাকা} \\ &= 11576.25 \text{ টাকা} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} &= (11576.25 - 10000) \text{ টাকা} \\ &= 1576.25 \text{ টাকা} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{মুনাফার পার্থক্য} &= (1576.25 - 1500) \text{ টাকা} \\ &= 76.25 \text{ টাকা (Ans.)} \end{aligned}$$

গ. 'খ' হতে পাই, উভয় মুনাফার পার্থক্য 76.25 টাকা

উভয় মুনাফার পার্থক্য 76.25 টাকা হলে ঋণ হয় 10000 টাকা

$$\begin{array}{ccccccc} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ & & & 1 & & & \frac{10000}{76.25} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ & & & 45.75 & & & \frac{10000 \times 45.75}{76.25} \end{array}$$

$$\therefore \text{ঋণের পরিমাণ } 6000 \text{ টাকা (Ans.)}$$

প্রশ্ন ২০ $x = 3 + 2\sqrt{2}$ [বিশেষ বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $\frac{1}{x}$ নির্ণয় কর। ২

খ. $x^6 + \frac{1}{x^6}$ এর মান কত? ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 14$. ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2\sqrt{2} \\ \therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{2}}{9 - 8} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2\sqrt{2} \\ \text{এবং 'ক' হতে পাই,} \\ \frac{1}{x} &= 3 - 2\sqrt{2} \\ \therefore x + \frac{1}{x} &= 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \\ &= 6^2 - 2 \\ &= 36 - 2 \\ &= 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^6 + \frac{1}{x^6} &= (x^2)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= (34)^3 - 3 \cdot 34 \\ &= 39304 - 102 \\ &= 39202 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2\sqrt{2} \\ \text{বা, } x &= 2 + 2\sqrt{2} + 1 \\ \text{বা, } x &= (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + 1^2 \\ \text{বা, } x &= (\sqrt{2} + 1)^2 \\ \therefore \sqrt{x} &= \sqrt{2} + 1 \text{ [বর্গমূল করে]} \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} &= (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) \\ &= \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } (\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 &= (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^3 + 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2 \\ &= 8 + 6 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$$\therefore (\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 14 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ২১ $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 21$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 7$, যেখানে a, b ধনাত্মক

এবং $a > b$. [বিশেষ বোর্ড-২০১৬ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $a^2 - ab + b^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 80$. ৪

গ. a ও b এর মান নির্ণয় কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= 21 \\ \text{এবং } a^2 + ab + b^2 &= 7, \text{ যেখানে } a, b \text{ ধনাত্মক এবং } a > b \\ \text{এখানে, } a^4 + a^2b^2 + b^4 &= 21 \\ \text{বা, } (a^2)^2 + 2 \cdot a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 &= 21 \\ \text{বা, } (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 &= 21 \\ \text{বা, } (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) &= 21 \\ \text{বা, } (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) &= 21 \\ \text{বা, } 7(a^2 - ab + b^2) &= 21 \\ \therefore a^2 - ab + b^2 &= 3 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

খ. দেওয়া আছে, $a^2 + ab + b^2 = 7$ (i)

'ক' থেকে পাই, $a^2 - ab + b^2 = 3$ (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 &= 10 \\ \text{বা, } 2(a^2 + b^2) &= 10 \\ \therefore a^2 + b^2 &= 5 \end{aligned}$$

আবার, সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$2ab = 4$$

$$\therefore ab = 2$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = 8ab(a^2 + b^2)$$

$$= 8 \times 2 \times 5$$

$$= 80$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

∴ 8ab (a² + b²) = 80 (প্রমাণিত)

গ 'খ' থেকে পাই,
 a² + b² = 5 (i)
 এবং ab = 2 (ii)
 আমরা পাই, (a² - b²)² = (a² + b²)² - 4a²b²
 = 5² - 4.2²
 = 25 - 16 = 9
 ∴ a² - b² = 3 (iii) [∵ a > b এবং a, b ধনাত্মক]
 সমীকরণ (i) ও (iii) যোগ করে পাই,
 2a² = 8
 বা, a² = 4
 ∴ a = 2, [∵ a > 0]
 এখন, a এর মান সমীকরণ (ii) এ বসিয়ে পাই,
 2b = 2 ∴ b = 1
 ∴ a = 2 এবং b = 1 (Ans.)

প্রশ্ন ২২ m² - 2√2 = 3
 [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল □ প্রশ্ন নং ২]
 ক. m এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. m³ + 1/m³ এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. প্রমাণ কর যে, m⁵ + 1/m⁵ = 58√2 ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূজনশীল ৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
 খ 'ক' থেকে পাই, m = √2 + 1
 ∴ 1/m = 1/(√2 + 1) = (√2 - 1)/(√2 - 1)(√2 + 1)
 = (√2 - 1)/(2 - 1)
 = √2 - 1
 ∴ m + 1/m = √2 + 1 + √2 - 1 = 2√2

প্রদত্ত রাশি = m³ + 1/m³
 = (m + 1/m)³ - 3.m.1/m (m + 1/m)
 = (2√2)³ - 3.2√2
 = 8.2√2 - 6√2
 = 16√2 - 6√2
 = 10√2 (Ans.)

গ 'খ' হতে পাই, m + 1/m = 2√2 এবং m³ + 1/m³ = 10√2
 m² + 1/m² = (m + 1/m)² - 2.m.1/m
 = (2√2)² - 2 = 8 - 2 = 6
 ∴ (m³ + 1/m³) (m² + 1/m²) = 10√2.6
 বা, m⁵ + m + 1/m + 1/m³ = 60√2
 বা, m⁵ + 1/m⁵ = 60√2 - (m + 1/m) = 60√2 - 2√2
 ∴ m⁵ + 1/m⁵ = 58√2 (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ২৩ (i) x² - 3 = 2√2
 (ii) f(y) = (y³ - 3y² + 1)/y(1 - y)

[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ, রাজশাহী □ প্রশ্ন নং ১]

ক. প্রমাণ কর যে, f(y⁻¹) = f(1 - y) ২
 খ. x⁴ + x⁻⁴ এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. প্রমাণ কর যে, x⁵ + x⁻⁵ = 58√2 ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২.২ এর উদাহরণ-২৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭
 খ সূজনশীল ৭(ক ও খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
 গ সূজনশীল ৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
 প্রশ্ন ২৪ (i) 12a² - 30a - 1 = 0 একটি বীজগাণিতিক সমীকরণ।
 (ii) কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 2√5।

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. √x + 1/√x = a হলে, x² + 1/x² এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. (i) হতে 4a² + 1/36a² এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. (ii) এর সংখ্যাটিকে x ধরে দেখাও যে, x(x⁶ - 1)/(x⁵ - 1) = 19√5/180 ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, √x + 1/√x = a
 বা, (√x + 1/√x)² = a²
 বা, x + 2.√x.1/√x + 1/x = a²
 বা, x + 1/x = a² - 2
 বা, (x + 1/x)² = (a² - 2)²
 বা, x² + 2.x.1/x + 1/x² = a⁴ - 4a² + 4
 বা, x² + 1/x² = a⁴ - 4a² + 4 - 2
 ∴ x² + 1/x² = a⁴ - 4a² + 2 (Ans.)

খ দেওয়া আছে, 12a² - 30a - 1 = 0
 বা, 12a² - 1 = 30a
 বা, 12a²/6a - 1/6a = 30a/6a
 বা, 2a - 1/6a = 5
 বা, (2a - 1/6a)² = 5²
 বা, 4a² - 2.2a.1/6a + 1/36a² = 25
 বা, 4a² + 1/36a² - 2/3 = 25
 বা, 4a² + 1/36a² = 25 + 2/3
 ∴ 4a² + 1/36a² = 77/3 (Ans.)

গ প্রশ্নমতে,
 x + 1/x = 2√5
 বা, (x + 1/x)² = 20
 বা, x² + 1 = 20x
 বা, (x² + 1)² = (20x)²
 বা, x⁴ + 2x² + 1 = 20x²
 ∴ x⁴ + 1 = 18x²



$$\begin{aligned}
\text{বামপক্ষ} &= \frac{x(x^6-1)}{x^8-1} \\
&= \frac{x((x^2)^3-1)}{(x^4)^2-1} \\
&= \frac{x(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{(x^4+1)(x^4-1)} \\
&= \frac{x(x^2-1)(x^4+1+x^2)}{18x^2((x^2)^2-1)} \text{ [মান বসিয়ে]} \\
&= \frac{x(x^2-1)(18x^2+x^2)}{18x^2(x^2+1)(x^2-1)} \\
&= \frac{x \times 19x^2}{18x^2 \times 2\sqrt{5}x} \\
&= \frac{19x^3}{36\sqrt{5}x^3} = \frac{19\sqrt{5}}{36 \times 5} \\
&= \frac{19\sqrt{5}}{180} \\
&= \text{ডানপক্ষ} \\
&= \frac{x(x^6-1)}{x^8-1} = \frac{19\sqrt{5}}{180} \text{ (দেখানো হলো)}
\end{aligned}$$

প্রশ্ন ২৫ $f(x) = x^3 + kx^2 - 4x - 8$, $m = \sqrt{13 + 2\sqrt{42}}$,
 $P = a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$ সম্বন্ধিত অধ্যায় ১, ২ ও ৩

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(-2) = k^2 + 4$ হলে k এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. প্রমাণ কর যে, $m^3 - \frac{1}{m^3} = 54\sqrt{6}$ ৪
 গ. প্রমাণ কর যে, P একটি পূর্ণবর্গ রাশি। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + kx^2 - 4x - 8$
 শর্তমতে, $f(-2) = k^2 + 4$
 বা, $(-2)^3 + k(-2)^2 - 4(-2) - 8 = k^2 + 4$
 বা, $-8 - 8k + 8 - 8 = k^2 + 4$
 বা, $k^2 + 8k + 12 = 0$
 বা, $k^2 + 6k + 2k + 12 = 0$
 বা, $k(k+6) + 2(k+6) = 0$
 বা, $(k+6)(k+2) = 0$
 $\therefore k = -6, -2$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $m = \sqrt{13 + 2\sqrt{42}}$

বা, $m^2 = 13 + 2\sqrt{42}$
 বা, $m^2 = 7 + 2\sqrt{42} + 6$
 বা, $m^2 = (\sqrt{7})^2 + 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{7} + (\sqrt{6})^2$
 বা, $m^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2$
 $\therefore m = \sqrt{7} + \sqrt{6}$
 আবার, $\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$
 বা, $\frac{1}{m} = \frac{1(\sqrt{7} - \sqrt{6})}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})}$
 $= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6})^2}$
 $= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{7 - 6}$

$\therefore \frac{1}{m} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$

এখানে, $m - \frac{1}{m} = \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{7} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

\therefore প্রদত্ত রাশি $= m^3 - \frac{1}{m^3}$
 $= \left(m - \frac{1}{m}\right)^3 + 3 \cdot m \cdot \frac{1}{m} \left(m - \frac{1}{m}\right)$
 $= (2\sqrt{6})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}
&= 48\sqrt{6} + 6\sqrt{6} \\
&= 54\sqrt{6} \text{ (প্রমাণিত)}
\end{aligned}$$

গ. পাঠ্যবইয়ের অধ্যায়-১ এর উদাহরণ-২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫

প্রশ্ন ২৬ $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $p^3 - \frac{1}{p^3} = R$ এবং $p > 0$

[কুমিল্লা ক্যাডেট কলেজ, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3 - x - 6$ ২
 খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^6-1}{x^3} - \sqrt{2} \frac{x^4+1}{x^2} = 12\sqrt{2}$ ৪
 গ. $R = 46\sqrt{5}$ হলে দেখাও যে, $p = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $x^3 - x - 6$
 $= x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6$
 $= x^2(x-2) + 2x(x-2) + 3(x-2)$
 $= (x-2)(x^2 + 2x + 3)$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned}
x^2 &= 5 + 2\sqrt{6} \\
&= 3 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2 \\
&= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\
&= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \\
\therefore x &= \sqrt{3} + \sqrt{2} \\
\therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} \\
\therefore \frac{1}{x} &= \sqrt{3} - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

সুতরাং $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}$

বামপক্ষ $= \frac{x^6-1}{x^3} - \sqrt{2} \frac{x^4+1}{x^2}$
 $= x^3 - \frac{1}{x^3} - \sqrt{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$
 $= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) - \sqrt{2} \left\{ \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \right\}$
 $= (2\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \{(2\sqrt{2})^2 + 2\}$
 $= 8 \cdot 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}(8 + 2)$
 $= 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$
 $=$ ডানপক্ষ
 $\therefore \frac{x^6-1}{x^3} - \sqrt{2} \frac{x^4+1}{x^2} = 12\sqrt{2}$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $p^3 - \frac{1}{p^3} = R$ এবং $p > 0$

প্রশ্নমতে, $R = 46\sqrt{5}$

বা, $p^3 - \frac{1}{p^3} = 46\sqrt{5}$

বা, $\frac{p^6-1}{p^3} = 46\sqrt{5}$

বা, $p^6 - 1 = 46\sqrt{5}p^3$

বা, $p^6 - 46\sqrt{5}p^3 - 1 = 0$

বা, $(p^3)^2 - 2 \cdot p^3 \cdot 23\sqrt{5} + (23\sqrt{5})^2 - (23\sqrt{5})^2 - 1 = 0$

বা, $(p^3 - 23\sqrt{5})^2 = (23\sqrt{5})^2 + 1$

বা, $(p^3 - 23\sqrt{5})^2 = 2646$

বা, $p^3 - 23\sqrt{5} = 21\sqrt{6}$

বা, $p^3 = 21\sqrt{6} + 23\sqrt{5}$
 বা, $p^3 = (\sqrt{6})^3 + 3(\sqrt{6})^2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$
 বা, $p^3 = (\sqrt{6} + \sqrt{5})^3$
 $\therefore p = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১৭ $(a+b)^2 = \sqrt[3]{27}$, $a = \sqrt{2} + b$ এবং $(x^2 + 1)^2 = 3x^2$.
 [সৌজন্যরহিত ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ১]

ক. ab এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. প্রমাণ কর যে, $a^3b + ab^3 = \frac{5}{8}$ ৪
 গ. দেখাও যে, $x^6 + 1 = 0$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(a+b)^2 = \sqrt[3]{27} = 3$
 বা, $a+b = \sqrt{3}$
 এবং $a = \sqrt{2} + b$
 বা, $a-b = \sqrt{2}$
 এখন, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
 $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
 $= \frac{3}{4} - \frac{2}{4}$
 $= \frac{1}{4}$ (Ans.)

খ 'ক' হতে পাই,
 $a+b = \sqrt{3}$
 $a-b = \sqrt{2}$
 এখন, বামপক্ষ = $a^3b + ab^3$
 $= ab(a^2 + b^2)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$ ['ক' হতে $ab = \frac{1}{4}$]
 $= \frac{1}{8} \{ (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 \}$
 $= \frac{1}{8} (3+2) = \frac{5}{8}$
 $=$ ডানপক্ষ
 $\therefore a^3b + ab^3 = \frac{5}{8}$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে,
 $(x^2 + 1)^2 = 3x^2$
 বা, $x^2 + 1 = \sqrt{3}x$
 বা, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$
 বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (\sqrt{3})^3$ [ঘন করে]
 বা, $x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{3}$
 বা, $x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$
 বা, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$
 বা, $\frac{x^6 + 1}{x^3} = 0$
 $\therefore x^6 + 1 = 0$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ২৮ $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$ [বিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, বিনাইদহ □ প্রশ্ন নং ১]
 ক. $\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ৪
 গ. $a^5 + \frac{1}{a^5}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)^2 = \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)^2 - 4 \cdot a^3 \cdot \frac{1}{a^3}$
 $= (18\sqrt{3})^2 - 4$
 $= 972 - 4$
 $= 968$ (Ans.)

খ সূজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
গ সূজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ২৯ $k = 2x^2 - \sqrt{12}x$, $a+b+c = p$, $a^2 + b^2 + c^2 = q$ এবং
 $a^3 + b^3 + c^3 = r^2$. [বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল □ প্রশ্ন নং ২]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $m^3 + 6m^2n + 11mn^2 + 6n^3$. ২
 খ. $k = 2$ হলে $x^5 + \frac{1}{x^5}$ এর মান নির্ণয় কর। ২
 গ. $c = 0$ হলে দেখাও যে, $p^3 + 2r^3 = 3pq$. ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.৩ এর উদাহরণ-২৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৫৮

খ শর্তমতে, $k = 2$
 বা, $2x^2 - \sqrt{12}x = 2$
 বা, $2x^2 - 2\sqrt{3}x = 2$
 বা, $x^2 - \sqrt{3}x = 1$
 বা, $x^2 - 1 = \sqrt{3}x$
 $\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$
 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4x \cdot \frac{1}{x} = (\sqrt{3})^2 + 4 = 7$
 $\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$
 $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$
 $= (\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
 $\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = 6\sqrt{3} \dots \dots (i)$

এখন, $x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \dots \dots (ii)$
 (i) ও (ii) নং গুণ করে,
 $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}$
 বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} - x + \frac{1}{x^3} = 18\sqrt{7}$
 বা, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 18\sqrt{7} + x + \frac{1}{x}$
 $\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 18\sqrt{7} + \sqrt{7} = 19\sqrt{7}$ (Ans.)

গ সূজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৩০ $g(p) = \frac{3p^2 - p^3 - 1}{p(p-1)}$, $x + y = 5$ এবং $xy = 6$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. প্রমাণ কর যে, $g\left(\frac{1}{p}\right) = g(1-p)$. ৪
 গ. $x > y$ হলে, $x^5 + y^5$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$
 ক্রমজোড়ের শর্তমতে,
 $ax - cy = 0 \dots (i)$



এবং $a^2 - c^2 = ay - cx$ বা, $ay - cx = a^2 - c^2 \dots$ (ii)

(i) নং কে a দ্বারা ও (ii) নং কে c দ্বারা গুণ করে যোগ করি,

$$a^2x - acy = 0$$

$$\frac{acy - c^2x = a^2c - c^3}{a^2x - c^2x = a^2c - c^3}$$

$$\text{বা, } x(a^2 - c^2) = c(a^2 - c^2)$$

$$\text{বা, } x = \frac{c(a^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)}$$

$$\therefore x = c$$

(i) নং এ x এর মান বসিয়ে, $a.c - cy = 0$

$$\text{বা, } cy = ac$$

$$\therefore y = a$$

$$\therefore (x, y) = (c, a)$$

Ans. (c, a)

ক. দেওয়া আছে, $g(p) = \frac{3p^2 - p^3 - 1}{p(p-1)}$

$$= \frac{-(p^3 - 3p^2 + 1)}{-p(1-p)}$$

$$= \frac{p^3 - 3p^2 + 1}{p(1-p)}$$

অতঃপর পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২.২ এর উদাহরণ-২৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭

গ. পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উদাহরণ-১৭(গ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫২

প্রশ্ন ৩১ $a^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, $Q = x^3 + \frac{1}{x^3}$ এবং $R = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

[ভিকারিং-নিনসা নুল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $a^5 + \frac{1}{a^5} = 724$. ৪

গ. $Q = 18\sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x = R$ ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ১৪(ক)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. সূজনশীল ১৪(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. সূজনশীল ৫(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৩২ $x^2 = 9 + 2\sqrt{20}$ যেখানে $x > 0$ এবং $f(y) = y^3 - 6y^2 + 11y - 6$

সম্বন্ধিত অধ্যায় ২ ও ৩

[বীরশ্রেষ্ঠ নূর মোহাম্মদ পাবলিক কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. y কোন মানের জন্য $f(y) = 0$ হবে? ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 610\sqrt{5}$ ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$x^2 = 9 + 2\sqrt{20}$$

$$\text{বা, } x^2 = 5 + 2\sqrt{5}.4 + 4$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}.\sqrt{4} + 2^2$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{5} + 2)^2$$

$$\therefore x = \sqrt{5} + 2 \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে,

$$f(y) = y^3 - 6y^2 + 11y - 6$$

$$\therefore \text{শর্তমতে, } y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$$

$$\text{বা, } y^3 - y^2 - 5y^2 + 5y + 6y - 6 = 0$$

$$\text{বা, } y^2(y-1) - 5y(y-1) + 6(y-1) = 0$$

$$\text{বা, } (y-1)(y^2 - 5y + 6) = 0$$

$$\text{বা, } (y-1)(y^2 - 3y - 2y + 6) = 0$$

$$\text{বা, } (y-1)(y(y-3) - 2(y-3)) = 0$$

$$\text{বা, } (y-1)(y-2)(y-3) = 0$$

$$\therefore y = 1, 2, 3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান, } y = 1, 2 \text{ এবং } 3$$

গ. 'ক' থেকে পাই,

$$x = \sqrt{5} + 2 \text{ [ধ্রুবক মান নিয়ে]}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4} = \sqrt{5} - 2$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = (2\sqrt{5})^2 - 2 = 18$$

$$\text{আবার, } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{5})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$= 40\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 34\sqrt{5}$$

$$\text{এখন, } x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 34\sqrt{5} \times 18 - 2\sqrt{5}$$

$$= 612\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$= 610\sqrt{5} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ৩৩ $A = \sqrt{\frac{5x}{2} + \frac{1}{6}}$ এবং $B = 8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$

[গবর্নমেন্ট ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ২]

ক. সরল কর : $(a+b)^6 - (a-b)^6 - 12ab(a^2 - b^2)^2$ ২

খ. $A = x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{36x^4 + 1}{9x^2} = \frac{79}{3}$ ৪

গ. $B = 63$ হলে, প্রমাণ কর যে, $2x - \frac{2}{x} = 3$ ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(a+b)^6 - (a-b)^6 - 12ab(a^2 - b^2)^2$

$$= \{(a+b)^2\}^3 - \{(a-b)^2\}^3 - 3.4ab \cdot \{(a+b)(a-b)\}^2$$

$$= \{(a+b)^2\}^3 - \{(a-b)^2\}^3 - 3(a+b)^2(a-b)^2 \{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$$

$$= \{(a+b)^2 - (a-b)^2\}^3 = (4ab)^3$$

$$= 64a^3b^3 \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $A = \sqrt{\frac{5x}{2} + \frac{1}{6}}$

$$\text{বা, } x = \sqrt{\frac{5x}{2} + \frac{1}{6}}$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{5x}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{15x + 1}{6}$$

$$\text{বা, } 6x^2 = 15x + 1$$

$$\text{বা, } 6x^2 - 1 = 15x$$

$$\text{বা, } \frac{6x^2}{3x} - \frac{1}{3x} = 5$$

$$\text{বা, } 2x - \frac{1}{3x} = 5$$

$$\text{বা, } \left(2x - \frac{1}{3x}\right)^2 = (5)^2$$

$$\text{বা, } 4x^2 + \frac{1}{9x^2} - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{3x} = 25$$

$$\text{বা, } 4x^2 + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{3} = 25$$

$$\text{বা, } 4x^2 + \frac{1}{9x^2} = 25 + \frac{4}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{36x^4 + 1}{9x^2} = \frac{75 + 4}{3}$$

$$\therefore \frac{36x^4 + 1}{9x^2} = \frac{79}{3} \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ. দেওয়া আছে, $B = 8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$

এখন, $B = 63$ হলে, $8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 63$

বা, $8\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right\} = 63$

বা, $8(p^3 + 3p) = 63 \left[x - \frac{1}{x} = p \text{ aGi}\right]$

বা, $8p^3 + 24p - 63 = 0$

বা, $8p^3 - 12p^2 + 12p^2 - 18p + 42p - 63 = 0$

বা, $4p^2(2p - 3) + 6p(2p - 3) + 21(2p - 3) = 0$

বা, $(2p - 3)(4p^2 + 6p + 21) = 0$

বা, $2p - 3 = 0$

বা, $2p = 3$

$\therefore 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৩৪ (i) $p^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ (ii) $x + y = \sqrt{7}$ এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{35}$

[আদমজী ক্যান্টিনেট পাবলিক স্কুল, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $p^5 + \frac{1}{p^5} = 724$. ৪

গ. $16xy(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $8x^3 + 12x^2 + 6x - 63$
 $= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 64$
 $= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot (1)^2 + (1)^3 - 64$
 $= (2x + 1)^3 - (4)^3$
 $= (2x + 1 - 4) \{(2x + 1)^2 + (2x + 1) \cdot 4 + 4^2\}$
 $= (2x - 3) \{2x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + (1)^2 + 8x + 4 + 16\}$
 $= (2x - 3) (4x^2 + 4x + 1 + 8x + 20)$
 $= (2x - 3) (4x^2 + 12x + 21)$ (Ans.)

খ সূত্রনশীল ১৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{7}$

এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{35}$

বা, $(x + y)(x - y) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$

বা, $\sqrt{7}(x - y) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$

$\therefore x - y = \sqrt{5}$

এখন, $16xy(x^2 + y^2)$

$= 2 \cdot 4xy \cdot 2(x^2 + y^2)$
 $= 2 \cdot \{(x + y)^2 - (x - y)^2\} \cdot \{(x + y)^2 + (x - y)^2\}$
 $= 2 \cdot \{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2\} \cdot \{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2\}$
 $= 2(7 - 5)(7 + 5) = 2 \cdot 2 \cdot 12$
 $= 48$ (Ans.)

প্রশ্ন ৩৫ $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(1 - x)}$ এবং $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$ যেখানে $a > 0$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[শহীদ বীর উত্তম লেগে আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x^2) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)a^3 = 724$ ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(1 - x)}$
 $\therefore f(-3) = \frac{(-3)^3 - 3(-3)^2 + 1}{(-3)\{1 - (-3)\}}$
 $= \frac{-27 - 3 \times 9 + 1}{(-3)(1 + 3)}$
 $= \frac{-27 - 27 + 1}{-3 \times 4} = \frac{53}{12}$ (Ans.)

খ $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(1 - x)}$

$\therefore f(x^2) = \frac{(x^2)^3 - 3(x^2)^2 + 1}{x^2(1 - x^2)} = \frac{x^6 - 3x^4 + 1}{x^2(1 - x^2)}$
 $\therefore f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 1}{\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$
 $= \frac{\frac{1}{x^6} - 3 \cdot \frac{1}{x^4} + 1}{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2}} = \frac{\frac{1 - 3x^2 + x^6}{x^6}}{\frac{x^2 - 1}{x^4}}$
 $= \frac{1 - 3x^2 + x^6}{x^6} \times \frac{x^4}{x^2 - 1} = \frac{1 - 3x^2 + x^6}{x^2(x^2 - 1)}$

$\therefore f(x^2) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$

অর্থাৎ $f(x^2) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$ সত্য নয়।

গ দেওয়া আছে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$ (i)

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 14$

বা, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 16$

$\therefore a + \frac{1}{a} = 4$ (ii)

এখন, $a^3 + \frac{1}{a^3}$
 $= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right)$
 $= 4^3 - 3 \cdot 4 = 64 - 12 = 52$
 বামপক্ষ $= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)a^3$
 $= a^5 + \frac{1}{a}$
 $= \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right)$
 $= 52 \times 14 - 4 = 728 - 4 = 724$
 $=$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)a^3 = 724$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ৩৬ $x^2 - 1 = 5x$ এবং $a^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^8 + 1}{x^4} = 727$ ৪

গ. $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূত্রনশীল ৭(ক)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ দেওয়া আছে, $x^2 - 1 = 5x$

$\therefore x - \frac{1}{x} = 5$

বামপক্ষ $= \frac{x^8 + 1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$
 $= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$
 $= \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}\right\}^2 - 2$
 $= (5^2 + 2)^2 - 2$
 $= (25 + 2)^2 - 2$
 $= 27^2 - 2 = 729 - 2$
 $= 727 =$ ডানপক্ষ



MWTZ (AvevkaK)

$$\therefore \frac{x^8+1}{x^4} = 727 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ 'ক' থেকে পাই, $a = \sqrt{2} + 1$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 2$$

'খ' থেকে পাই, $x - \frac{1}{x} = 5$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 5^2 + 4 = 29$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{29}$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) &= \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) \right\} \left\{ \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right) \right\} \\ &= (\sqrt{29} \cdot 5) \{2^3 + 3 \cdot 2\} \\ &= 5\sqrt{29} \cdot \{8 + 6\} = 5\sqrt{29} \cdot 14 \\ &= 70\sqrt{29} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

প্রশ্ন ৩৭ $x^2 = 11 + 2\sqrt{30}$, $x > 0$ এবং $a + \frac{1}{a} = 6$

[মতিঝিল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $\frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^6 - \frac{1}{x^6} = 1932\sqrt{30}$. 8

গ. $a^5 + \frac{1}{a^5}$ এর মান নির্ণয় কর। 8

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূজনশীল ৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ 'ক' হতে পাই,

$$\therefore x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$\text{এবং } \frac{1}{x} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (2\sqrt{6})^3 - 3(2\sqrt{6}) = 48\sqrt{6} - 6\sqrt{6} = 42\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{আবার, } x - \frac{1}{x} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{এখন, } x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{5})^3 + 3 \times 2\sqrt{5}$$

$$= 40\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$= 46\sqrt{5}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right) = \left(x^3\right)^2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)^2$$

$$= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= 42\sqrt{6} \times 46\sqrt{5}$$

$$= 1932\sqrt{30}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore x^6 - \frac{1}{x^6} = 1932\sqrt{30} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ সূজনশীল ১৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৩৮ $a + b + c = 0$ এবং $x + y = 5$, $xy = 6$

[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $p^8 + p^4 - 2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + y^5 = 275$. 8

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab} = 1$. 8

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $= p^8 + p^4 - 2$
 $= p^8 + 2p^4 - p^4 - 2$
 $= p^4(p^4 + 2) - 1(p^4 + 2)$
 $= (p^4 + 2)(p^4 - 1)$
 $= (p^4 + 2)\{(p^2)^2 - 1^2\}$
 $= (p^4 + 2)(p^2 + 1)(p^2 - 1)$
 $= (p^4 + 2)(p^2 + 1)(p + 1)(p - 1)$ (Ans.)

খ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২ এর উদাহরণ ১৭(গ) দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫২

গ দেওয়া আছে, $a + b + c = 0$

$$\therefore a + b = -c, b + c = -a \text{ এবং } c + a = -b$$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab}$$

$$= \frac{(-a)^2}{3bc} + \frac{(-b)^2}{3ca} + \frac{(-c)^2}{3ab}$$

$$= \frac{a^2}{3bc} + \frac{b^2}{3ca} + \frac{c^2}{3ab}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc}$$

$$= \frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3}{3abc}$$

$$= \frac{(-c)^3 - 3ab(-c) + c^3}{3abc} \quad [\because a+b=-c]$$

$$= \frac{-c^3 + 3abc + c^3}{3abc}$$

$$= \frac{3abc}{3abc} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab} = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ৩৯ $x - 9 - 4\sqrt{5} = 0$ এবং $f(y) = \frac{y^3 - 3y^2 + 1}{y(1-y)}$

সম্বন্ধিত অধ্যায় ২ ও ৩

[মিরপুর ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. \sqrt{x} এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। 8

গ. দেখাও যে, $f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1-y)$ 8

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x - 9 - 4\sqrt{5} = 0$

$$\text{বা, } x = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$= 5 + 4\sqrt{5} + 4$$

$$= (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2$$

$$\text{বা, } x = (\sqrt{5} + 2)^2$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{5} + 2 \text{ (Ans.)}$$

খ $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5}-2$

$$\therefore x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= (\sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2)^3 + 3(\sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2)$$

$$= 4^3 + 3 \cdot 4$$

$$= 64 + 12 = 76 \text{ (Ans.)}$$

গ পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২.২ এর উদাহরণ-২৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৩৭

প্রশ্ন ▶ ৪০ $x^2 - 2\sqrt{30} - 11 = 0$; $x > 0$

[হিনজনিয়ারিং ইন্ডিনিভারসিটি স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $a^3 + 9b^3 + (a-b)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. দেখাও যে, $x^3 + \frac{1}{x^3} = 42\sqrt{6}$ ৪

গ. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $a^3 + 9b^3 + (a-b)^3$
 $= a^3 + b^3 + (a-b)^3 + 8b^3$
 $= (a+b)(a^2-ab+b^2) + (a-b)^3 + (2b)^3$
 $= (a+b)(a^2-ab+b^2) + (a-b+2b)(a-b)^2 - (a-b)2b + (2b)^2$
 $= (a+b)(a^2-ab+b^2) + (a+b)(a^2-2ab+b^2-2ab+2b^2+4b^2)$
 $= (a+b)(a^2-ab+b^2) + (a+b)(a^2-4ab+7b^2)$
 $= (a+b)(a^2-ab+b^2+a^2-4ab+7b^2)$
 $= (a+b)(2a^2-5ab+8b^2)$ (Ans.)

খ সূত্রনশীল ৩৭(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। SSC পণিত মেইড ইঞ্জি উত্তরপত্র-৩খ 'খ' হতে পাই,

$$x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{এখন, } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \right\} \left\{ \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \right\}$$

$$= \left\{ (2\sqrt{6})^2 - 2 \right\} \left\{ (2\sqrt{5})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{5} \right\}$$

$$= (24 - 2)(40\sqrt{5} + 6\sqrt{5})$$

$$= 22 \times 46\sqrt{5}$$

$$= 1012\sqrt{5}$$
 (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৪১ (i) $x^2 = 2\sqrt{30} + 11$

(ii) $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$ [উত্তরা হাই স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. (ii) নং হতে দেখাও যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ৪

৪১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূত্রনশীল ৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ 'ক' হতে পাই,

$$x = \sqrt{6} + \sqrt{5} \dots \dots (i)$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{6 - 5}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \sqrt{6} - \sqrt{5} \dots \dots (ii)$$

(i) + (ii) \Rightarrow

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{5} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{x^6+1}{x^3}$$

$$= x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (2\sqrt{6})^3 - 3(2\sqrt{6})$$

$$= 48\sqrt{6} - 6\sqrt{6}$$

$$= 42\sqrt{6}$$
 (Ans.)

গ সূত্রনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪২ $2a = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ এবং $2b = \sqrt{7} - \sqrt{5}$

[রাণী বিলাসমণি সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়, গাজীপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. ab এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a^2 - b^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = 33\sqrt{7}$ ৪

৪২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2a = \sqrt{7} + \sqrt{5}$

$$\text{এবং } 2b = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$

$$\therefore 4ab = (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

$$= (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 = 7 - 5 = 2$$

$$\text{বা, } 4ab = 2$$

$$\text{বা, } ab = \frac{2}{4}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{2}$$
 (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $2a = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ এবং $2b = \sqrt{7} - \sqrt{5}$

$$\text{SSC পণিত মেইড ইঞ্জি উত্তরপত্র-৩খ}$$

$$\text{বা, } 2(a+b) = 2\sqrt{7}$$

$$\therefore a+b = \sqrt{7}$$

$$\text{আবার, } 2a - 2b = (\sqrt{7} + \sqrt{5}) - (\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

$$\text{বা, } 2(a-b) = \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$\text{বা, } 2(a-b) = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore a-b = \sqrt{5}$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$$

$$= \sqrt{35}$$
 (Ans.)

গ 'ক' হতে পাই, $ab = \frac{1}{2}$

$$\text{'খ' হতে পাই, } a+b = \sqrt{7}$$

$$\text{এখানে, } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 7 - 1 = 6$$

$$\text{এবং } a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= (\sqrt{7})^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}$$

$$= 7\sqrt{7} - \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$= \frac{14\sqrt{7} - 3\sqrt{7}}{2}$$

$$= \frac{11\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{এখন, } (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = 6 \cdot \frac{11\sqrt{7}}{2} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 3.11\sqrt{7}$$

$$= 33\sqrt{7}$$

$$\therefore (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = 33\sqrt{7} \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ▶ ৪৩ $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ এবং $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

[মুকুল নিকেতন উচ্চ বিদ্যালয়, ময়মনসিংহ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x + \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5}$ ৪

গ. দেখাও যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ৪

৪৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,



MWTZ (AvevkaK)

$$x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 1 = \sqrt{5}x$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+1}{x} = \sqrt{5}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

খ. এখানে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x}$
 $= (\sqrt{5})^2 - 2$ [‘ক’ থেকে]
 $= 5 - 2 = 3$

এবং $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$
 $= (\sqrt{5})^3 - 3 \cdot \sqrt{5}$
 $= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$
 $= 2\sqrt{5}$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 3 \cdot 2\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } x^5 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = 6\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } x^5 + \frac{1}{x^3} = 6\sqrt{5} - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 6\sqrt{5} - \sqrt{5}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^3} = 5\sqrt{5} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ. সূজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৪ $A = x + y + z$, $B = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ এবং $C = y^3 + \frac{1}{y^3}$ হলে,

[ময়মনসিংহ জিলা স্কুল, ময়মনসিংহ □ প্রশ্ন নং ২]

ক. প্রমাণ কর যে, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$; যখন $A = 0$.

খ. $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $B = 0$.

গ. প্রমাণ কর যে, $C = 18$ হলে $y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

৪৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ১৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে,

$$B = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - x\sqrt{3} + 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 1 = x\sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+1}{x} = \frac{x\sqrt{3}}{x} \text{ [উভয়পক্ষকে } x \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 2$$

$$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 - 2$$

$$= 1 \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $C = 18$

$$\text{বা, } y^3 + \frac{1}{y^3} = 18$$

$$\text{বা, } \frac{y^6+1}{y^3} = 18$$

$$\text{বা, } y^6 + 1 = 18y^3$$

$$\text{বা, } y^6 - 18y^3 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (y^3)^2 - 2 \cdot y^3 \cdot 9 + 9^2 - 9^2 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (y^3 - 9)^2 = 80$$

$$\text{বা, } y^3 - 9 = \sqrt{80}$$

$$\text{বা, } y^3 = 9 + 4\sqrt{5} \text{ [} \sqrt{80} = \sqrt{5 \times 16} = 4\sqrt{5} \text{]}$$

$$\text{বা, } 8y^3 = 72 + 32\sqrt{5} \text{ [উভয়পক্ষকে ৪ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } (2y)^3 = 27 + 27\sqrt{5} + 45 + 5\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } (2y)^3 = (3)^3 + 3 \cdot 3^2 \sqrt{5} + 3 \cdot 3(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$$

$$\text{বা, } (2y)^3 = (3 + \sqrt{5})^3$$

$$\text{বা, } 2y = 3 + \sqrt{5}$$

$$\therefore y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ৪৫ $a^2 - 5a + 1 = 0$, $p^4 = 119 - \frac{1}{p^4}$

[জামালপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, জামালপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^4 - 7x^2 + 1$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. দেখাও যে, $\frac{a^8-1}{a^4} = 115\sqrt{2}$

গ. প্রমাণ কর যে, $p^6 - 1 - 36p^3 = 0$

৪৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে, $a^2 - 5a + 1 = 0$

$$\text{বা, } a - 5 + \frac{1}{a} = 0$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = 5$$

অতঃপর সূজনশীল ৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. সূজনশীল ৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $P = a + b + c$, $Q = a^2 + b^2 + c^2$

[শেরপুর সরকারি ভিক্টোরিয়া একাডেমী, শেরপুর □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $P = 0$ হলে, $a^3 + b^3 + c^3$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $c = 0$, $P = 2$, $Q = 4$ হলে, $(a^2 + b^2 - 8)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $P = 10$, $Q = 15$ হলে, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

৪৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ১৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে, $P = a + b + c$

$$Q = a^2 + b^2 + c^2$$

$$C = 0, P = 2, Q = 4 \text{ হলে,}$$

$$2 = a + b \dots (i)$$

$$\text{এবং } 4 = a^2 + b^2 \dots (ii)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\text{বা, } 2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) \text{ [(i) ও (ii) নং থেকে]}$$

$$\text{বা, } 2ab = 2^2 - 4$$

$$\therefore ab = 0$$

$$\text{এখন, } (a^3 + b^3 - 8)^2$$

$$= \{(a + b)^3 - 3ab(a + b) - 8\}^2$$

$$= (2^3 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 8)^2$$

$$= (8 - 8)^2$$

$$= 0 \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $P = a + b + c$, $Q = a^2 + b^2 + c^2$

$$P = 10, Q = 15 \text{ হলে,}$$

$$a + b + c = 10 \dots (i) \text{ এবং } a^2 + b^2 + c^2 = 15 \dots (ii)$$

$$\text{এখন, } a + b + c = 10$$

$$\text{বা, } a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 100 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 2(ab + bc + ca) = 100 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{বা, } 2(ab + bc + ca) = 100 - 15 \text{ [(ii) নং থেকে]}$$



∴ $2(ab + bc + ca) = 85 \dots \dots$ (iii)
 প্রদত্ত রাশি = $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + c^2 + 2ca + a^2$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$
 $= 2 \times 15 + 85$ [(ii) ও (iii) থেকে]
 $= 115$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৪৭ $P = a + b + c$, $f(t) = \frac{1+t^2+t^4}{t^2}$ এবং $R = x^3 + \frac{1}{x^3}$
 সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩
 [রাজশাহী কলেজিয়েট স্কুল, রাজশাহী] □ প্রশ্ন নং ১)

ক. প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, যখন $P = 0$ ২
 খ. দেখাও যে, $f(t^{-2}) = f(t)^2$ ৪
 গ. $R = 18$ হলে প্রমাণ কর যে, $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ৪

৪৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূত্রনশীল ১৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
খ অধ্যায়-২ এর সূত্রনশীল ৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৩৪
গ সূত্রনশীল ৪৪(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৮ $a + b = \sqrt{3}$, $a^2 - b^2 = \sqrt{6}$ এবং $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{18\sqrt{3}}{5}$ উত্তরপত্র-৩৪
 [শহীদ মামুন মাহমুদ পুলিশ লাইনস স্কুল এন্ড কলেজ, রাজশাহী] □ প্রশ্ন নং ২)
 ক. $a - b$ এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. প্রমাণ কর যে, $16ab(a^2 + b^2) = 10$ ৪
 গ. দেখাও যে, $p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ৪

৪৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a + b = \sqrt{3}$
 এবং $a^2 - b^2 = \sqrt{6}$
 বা, $(a + b)(a - b) = \sqrt{6}$
 বা, $\sqrt{3} \times (a - b) = \sqrt{6}$
 $\therefore a - b = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ (Ans.)

খ সূত্রনশীল ১৭(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
গ সূত্রনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৯ $x^2 = 9 + 4\sqrt{5}$, যেখানে, $x > 0$ [বগুড়া জিলা স্কুল, বগুড়া] □ প্রশ্ন নং ১)
 ক. $a^3 - a - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২
 খ. দেখাও যে, $x^8 - 322x^4 + 1 = 0$ ৪
 গ. $\frac{x^{10} - 1}{x^5}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.৪ এর উদাহরণ-৩০ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬১
খ দেওয়া আছে, $x^2 = 9 + 4\sqrt{5}$
 $= 5 + 2\sqrt{5} + 4$
 $= (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 2^2$
 $= (\sqrt{5} + 2)^2$
 $\therefore x = \sqrt{5} + 2$
 $\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$
 $= \frac{1 \times (\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}$
 $= \frac{\sqrt{5} - 2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2}$

$= \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4}$
 $= \sqrt{5} - 2$
 $\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2$
 বা, $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$
 বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (2\sqrt{5})^2$ [বর্গ করে]
 বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 20$
 বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18 \dots \dots$ (i)
 বা, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (18)^2$ [পুনরায় বর্গ করে]
 বা, $(x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 324$
 বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 324 - 2$
 বা, $\frac{x^8 + 1}{x^4} = 322$
 বা, $x^8 + 1 = 322x^4$
 $\therefore x^8 - 322x^4 + 1 = 0$ (দেখানো হলো)

গ 'খ' থেকে পাই, $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$
 এবং $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2 = 4$
 এখন, $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$
 $= 4^3 + 3 \cdot 4$
 $= 64 + 12$
 $= 76$
 $\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 18 \times 76$
 বা, $x^5 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^5} = 1368$
 বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} = 1368 - \left(x - \frac{1}{x}\right)$
 বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} = 1368 - 4$ [মান বসিয়ে]
 বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} = 1364$
 $\therefore \frac{x^{10} - 1}{x^5} = 1364$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৫০ $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $a + b = m$, $a^2 + b^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$
 [বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বগুড়া] □ প্রশ্ন নং ২)
 ক. x এর মান নির্ণয় কর। ২
 খ. $x^4 - \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. প্রমাণ কর যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$. ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূত্রনশীল ১০(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।
খ 'ক' হতে পাই, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$
 $\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
 $\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$
 $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$



$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^4 - \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \right\} \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= \{(2\sqrt{3})^2 - 2\} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \\ &= (12 - 2) \cdot 4\sqrt{6} \\ &= 40\sqrt{6} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ সূজনশীল ১০(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৫১ $x + y = \sqrt{3}$ এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$ হলে,

[রংপুর জিলা স্কুল, রংপুর □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $x + y + z = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. ২

খ. দেখাও যে, $x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4} = 3\sqrt{3}$ ৪

গ. যদি x^2 এর মান $5 + 2\sqrt{6}$ হয় এবং $y = \frac{1}{x}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $16xy(x^2 + y^2) = 160$. ৪

৫১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূজনশীল ১৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ সূজনশীল ১৭(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x^2 &= 5 + 2\sqrt{6} \\ &= 3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\text{আবার, } y = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\text{এখন, } x + y = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$\text{এবং } x - y = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$\therefore 16xy(x^2 + y^2)$$

$$= 2 \cdot 4xy \cdot 2(x^2 + y^2)$$

$$= 2\{(x+y)^2 - (x-y)^2\} \{(x+y)^2 + (x-y)^2\}$$

$$= 2\{(2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2\} \{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2\}$$

$$= 2(12 - 8)(12 + 8)$$

$$= 2 \times 4 \times 20$$

$$= 160$$

$$\therefore 16xy(x^2 + y^2) = 160 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ৫২ $p + \frac{1}{p} = 5$, $y - \frac{1}{y} = m$

[রংপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রংপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $54y^4 + 27y^3a - 16y - 8a$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $p^4 \left(1 - \frac{1}{p^3}\right) = 115\sqrt{21}$ প্রমাণ কর। ৪

গ. $y^4 = 119 - \frac{1}{y^4}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m = \pm 3$. ৪

৫২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.৪ এর উদাহরণ-৩২ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬২

খ দেওয়া আছে,

$$p + \frac{1}{p} = 5$$

$$\therefore \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 = \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 - 4 \cdot p \cdot \frac{1}{p}$$

$$= 5^2 - 4 \cdot 1$$

$$= 21$$

$$\therefore p - \frac{1}{p} = \sqrt{21}$$

$$\text{আবার, } p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 - 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p}$$

$$= 5^2 - 2 = 23$$

$$\text{এখন, বামপক্ষ} = p^4 \left(1 - \frac{1}{p^3}\right)$$

$$= p^4 - \frac{1}{p^4}$$

$$= (p^2)^2 - \left(\frac{1}{p^2}\right)^2$$

$$= \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \left(p + \frac{1}{p}\right) \left(p - \frac{1}{p}\right)$$

$$= 23 \cdot 5 \cdot \sqrt{21}$$

$$= 115\sqrt{21}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore p^4 \left(1 - \frac{1}{p^3}\right) = 115\sqrt{21} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ উদ্দীপক অনুসারে, $y - \frac{1}{y} = m$

$$\text{বা, } y^2 + \frac{1}{y^2} - 2y \cdot \frac{1}{y} = m^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } y^2 + \frac{1}{y^2} = m^2 + 2$$

$$\text{প্রস্থানুসারে, } y^4 = 119 - \frac{1}{y^4}$$

$$\text{বা, } y^4 + \frac{1}{y^4} = 119$$

$$\text{বা, } (y^2)^2 + \left(\frac{1}{y^2}\right)^2 = 119$$

$$\text{বা, } \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2 - 2 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{y^2} = 119$$

$$\text{বা, } (m^2 + 2)^2 = 119 + 2 = 121$$

$$\text{বা, } m^2 + 2 = 11$$

$$\text{বা, } m^2 = 11 - 2 = 9$$

$$\therefore m = \pm 3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ৫৩ $x^3 - \frac{1}{x^3} = 46\sqrt{5}$, $a^2 - 2\sqrt{6}a + 1 = 0$ এবং $x, a > 0$ হলে-

[পুলিশ লাইস স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর □ প্রশ্ন নং ২]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $4m^2 + \frac{1}{4m^2} - 2 + 4m - \frac{1}{m}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ ৪

গ. $a^5 - \frac{1}{a^5}$ এর মান কত? ৪

৫৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $4m^2 + \frac{1}{4m^2} - 2 + 4m - \frac{1}{m}$

$$= (2m)^2 + \left(\frac{1}{2m}\right)^2 - 2 \cdot 2m \cdot \frac{1}{2m} + 2 \left(2m - \frac{1}{2m}\right)$$

$$= \left(2m - \frac{1}{2m}\right)^2 + 2 \left(2m - \frac{1}{2m}\right)$$

$$= \left(2m - \frac{1}{2m}\right) \left(2m - \frac{1}{2m} + 2\right) \text{ (Ans.)}$$

খ সূজনশীল ২৬(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।



গ. দেওয়া আছে, $a^2 - 2\sqrt{6}a + 1 = 0$

বা, $a^2 + 1 = 2\sqrt{6}a$

বা, $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{6}$... (i)

$$\therefore \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$$

$$= (2\sqrt{6})^2 - 4 = 24 - 4 = 20$$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

এখন, $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$

$$= (2\sqrt{6})^2 - 2$$

$$= 24 - 2 = 22$$

আবার, $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a - \frac{1}{a}\right)$

$$= (2\sqrt{5})^3 + 3 \times 2\sqrt{5}$$

$$= 40\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

$$= 46\sqrt{5}$$

এখন, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) = a^5 - \frac{1}{a} + a - \frac{1}{a^3}$

$$\therefore a^5 - \frac{1}{a^3} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right) - \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$= 22 \times 46\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$$

$$= 1010\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৫৪ $p - 5 = 2\sqrt{6}$ [কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^3 - 9y^3 + (x + y)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $\left(\frac{p^6+1}{p^3}\right)\left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $p\sqrt{p} - \frac{1}{p\sqrt{p}} = 22\sqrt{2}$. ৪

৫৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $x^3 - 9y^3 + (x + y)^3$

$$= x^3 - y^3 + (x + y)^3 - 8y^3$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x + y)^3 - (2y)^3$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x + y - 2y)(x + y)^2 + (x + y) \cdot 2y + (2y)^2$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x - y)(x^2 + 2xy + y^2) + 2xy + 2y^2 + 4y^2$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x - y)(x^2 + 4xy + 7y^2)$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + x^2 + 4xy + 7y^2)$$

$$= (x - y)(2x^2 + 5xy + 8y^2) \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে,

$$p - 5 = 2\sqrt{6}$$

বা, $p = 5 + 2\sqrt{6}$

$$\therefore \frac{1}{p} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} \times \frac{5 - 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}} \text{ [হর ও লবকে } (5 - 2\sqrt{6}) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{5^2 - (2\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - 24}$$

$$= 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\therefore p + \frac{1}{p} = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10$$

আবার, $p - \frac{1}{p} = 5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

এখন, $\left(\frac{p^6+1}{p^3}\right)\left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right)\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(p - \frac{1}{p}\right)$

$$= \left\{ \left(p + \frac{1}{p}\right)^3 - 3 \cdot p \cdot \frac{1}{p} \left(p + \frac{1}{p}\right) \right\} \cdot 10 \cdot 4\sqrt{6}$$

$$= [10^3 - 3 \cdot 10] \cdot 10 \cdot 4\sqrt{6}$$

$$= (1000 - 30) \cdot 40\sqrt{6}$$

$$= 38800\sqrt{6} \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$p = 5 + 2\sqrt{6}$$

বা, $p = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

বা, $(\sqrt{p})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

$$\therefore \sqrt{p} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

এখন, বামপক্ষ = $p\sqrt{p} - \frac{1}{p\sqrt{p}}$

$$= (\sqrt{p})^2 \sqrt{p} - \frac{1}{(\sqrt{p})^2 \cdot \sqrt{p}}$$

$$= (\sqrt{p})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^3 + 3\sqrt{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\sqrt{p} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$$

$$= (2\sqrt{2})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$= 8 \cdot 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$$

$$= 16\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$$

$$= 22\sqrt{2}$$

$$= 22\sqrt{2}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore p\sqrt{p} - \frac{1}{p\sqrt{p}} = 22\sqrt{2} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ৫৫ $p + q = \sqrt{3}$ এবং $p^2 - q^2 = \sqrt{6}$

[গভঃ ল্যাবরেটরি হাই স্কুল, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $p^3 + q^3 - \frac{\sqrt{12}}{8} = 2\sqrt{3}$. ৪

গ. $3pq(p^2 + q^2)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$$p + q = \sqrt{3} \dots (i)$$

$$\text{এবং } p^2 - q^2 = \sqrt{6}$$

বা, $(p + q)(p - q) = \sqrt{6}$

বা, $\sqrt{3}(p - q) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$$\therefore p - q = \sqrt{2} \dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$2p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} \text{ (Ans.)}$$

খ. 'ক' হতে পাই,

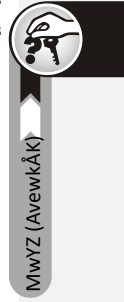
$$p + q = \sqrt{3}$$

$$\text{এবং } p - q = \sqrt{2}$$

$$(-)$$

$$2q = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } q = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$



'ক' হতে, $p = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

$\therefore pq = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\} = \frac{1}{4}$

বামপক্ষ = $p^3 + q^3 - \frac{\sqrt{12}}{8}$

= $(p + q)^3 - 3pq(p + q) - \frac{\sqrt{12}}{8}$

= $(\sqrt{3})^3 - 3 \times \frac{1}{4} (\sqrt{3}) - \frac{2\sqrt{3}}{8}$ [মান বসিয়ে]

= $3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

= $3\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{4}$

= $3\sqrt{3} - \sqrt{3}$

= $2\sqrt{3}$

= ডানপক্ষ

$\therefore p^3 + q^3 - \frac{\sqrt{12}}{8} = 2\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

গ. প্রদত্ত রাশি = $3pq(p^2 + q^2)$

= $3pq\{(p + q)^2 - 2pq\}$

= $3 \times \frac{1}{4} \left\{ (\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{1}{4} \right\}$ [মান বসিয়ে]

= $\frac{3}{4} \left(3 - \frac{1}{2} \right)$

= $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$ (Ans.)

প্রশ্ন ৫৬ $y = 5 + 2\sqrt{6}$ এবং $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$.

[হিম্মাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $m^3 - 3m^2 + 3m - 2$.

২

খ. $y^4 + \frac{1}{y^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $27 \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) = 728$.

৪

৫৬ নং প্রশ্নের সমাধান

সূজনশীল ১ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৭ $p^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ এবং $a^2 - 2\sqrt{6}a + 1 = 0$ দুইটি বীজগাণিতিক সমীকরণ।

[কুমিল্লা মডার্ন হাই স্কুল, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. p এর মান নির্ণয় কর।

২

খ. দেখাও যে, $p^5 + \frac{1}{p^5} = 178\sqrt{3}$

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a^6} (a^6 - 1) = 46\sqrt{5}$

৪

৫৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ১০(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. সূজনশীল ১৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. সূজনশীল ৯(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৫৮ $x = 7 - \frac{1}{x}$ [নোয়াখালী জিলা স্কুল, নোয়াখালী □ প্রশ্ন নং ৩]

ক. $\frac{x}{x^2 + x + 1}$ এর মান কত?

২

খ. দেখাও যে, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2207$

৪

গ. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

৫৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $x = 7 - \frac{1}{x}$

$\therefore x + \frac{1}{x} = 7 \dots \dots (i)$

এখন, $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\frac{x^2 + x + 1}{x}}$

= $\frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1}$

= $\frac{1}{7 + 1}$ [(i) নং হতে]

= $\frac{1}{8}$ (Ans.)

খ. 'ক' হতে পাই, $x + \frac{1}{x} = 7$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 49$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47 \dots \dots (ii)$

বা, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (47)^2$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 2209$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2209 - 2$

$\therefore x^4 + \frac{1}{x^4} = 2207$ (দেখানো হলো)

গ. 'খ' হতে পাই, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$

এবং $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2207$

$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = 47 \times 2207$

= 103729 (Ans.)

প্রশ্ন ৫৯ কোনো সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার ওপরক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি $2\sqrt{3}$ ।

[লক্ষ্মীপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, লক্ষ্মীপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. সংখ্যাটিকে x চলে প্রকাশ করে উপরের তথ্যকে একটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

২

খ. $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

৪

৫৯ নং প্রশ্নের সমাধান

সূজনশীল ৮ নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৬০ i. $x = 7 + 4\sqrt{3}$

ii. $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$

[ফেনী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $a + b + c = 0$ হলে দেখাও যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

২

খ. $32a^3b^2(a^2 + b^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3}$

৪

৬০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ১৮(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে, $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$

\therefore প্রদত্ত রাশি = $32a^3b^2(a^2 + b^2)$

= $(4ab)^2 \cdot 2(a^2 + b^2)$

= $\{(a + b)^2 - (a - b)^2\} \{(a + b)^2 + (a - b)^2\}$

$$= \{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2\}^2 \{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2\}$$

$$= (7 - 5)^2 (7 + 5)$$

$$= 2^2 \times 12$$

$$= 48 \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $x = 7 + 4\sqrt{3}$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

$$= (2 + \sqrt{3})^2$$

$$\therefore \sqrt{x} = 2 + \sqrt{3} \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

এখন, $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})$

$$= 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ৬১ $x^2 - 12\sqrt{2} = 17$ এবং $y^3 + y^{-3} = 18\sqrt{3}$

[ফেনী সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x - \sqrt{5} = 2$ হলে $x - \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(\sqrt{x})^3 - \frac{1}{(\sqrt{x})^3} = 14$ 8

গ. দেখাও যে, $\frac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 8

৬১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $x - \sqrt{5} = 2$

বা, $x = 2 + \sqrt{5}$

বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2 + \sqrt{5}}$

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{2^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{4 - 5}$$

$$= -(2 - \sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5} - 2$$

এখন, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2 = 4 \text{ (Ans.)}$

খ দেওয়া আছে,

$$x^2 - 12\sqrt{2} = 17$$

বা, $x^2 = 12\sqrt{2} + 17$

বা, $x^2 = 8 + 12\sqrt{2} + 9$

বা, $x^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 + (3)^2$

বা, $x^2 = (2\sqrt{2} + 3)^2$

বা, $x = 2\sqrt{2} + 3$ [বর্গমূল করে]

বা, $x = 2 + 2\sqrt{2} + 1$

বা, $x = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + (1)^2$

বা, $x = (\sqrt{2} + 1)^2$

বা, $\sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$ [বর্গমূল করে]

$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$

তাহলে, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$$

$\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)$

$$= \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$$

$\therefore (\sqrt{x})^3 - \frac{1}{(\sqrt{x})^3} = (\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 1 \cdot 2$$

$$= 8 + 6$$

$$= 14$$

$\therefore (\sqrt{x})^3 - \frac{1}{(\sqrt{x})^3} = 14 \text{ (প্রমাণিত)}$

গ সূজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

অতঃপর, $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$\therefore \frac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ (দেখানো হলো)}$

প্রশ্ন ৬২ $a^3 + a^{-3} = 18\sqrt{3}$ এবং $p^2 - 3 = 2\sqrt{2}$

[শাহীন একাডেমী স্কুল এন্ড কলেজ, ফেনী □ প্রশ্ন নং ১]

ক. p এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 8

গ. $a^5 - a^{-5}$ এর মান নির্ণয় কর। 8

৬২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূজনশীল ৭(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ সূজনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ 'খ' হতে পাই,

$a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

এবং $a - \frac{1}{a} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

এখন, $a^2 - \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a - \frac{1}{a}\right) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

আবার, $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = 4\sqrt{6} \cdot 18\sqrt{3}$ [মান বসিয়ে]

বা, $a^5 + \frac{1}{a^5} - a - \frac{1}{a} = 72\sqrt{18}$

বা, $a^5 - \frac{1}{a^5} - \left(a - \frac{1}{a}\right) = 72\sqrt{9} \times 2$

বা, $a^5 - \frac{1}{a^5} - 2\sqrt{2} = 72 \times 3\sqrt{2}$



$$\text{বা, } a^5 - \frac{1}{a^3} = 216\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore a^5 - \frac{1}{a^3} = 218\sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৬৩ কোনো ব্যবসায়ী সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকেই সদস্য সংখ্যার 150 গুণ টাকা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। কিন্তু 6 জন সদস্য টাকা না দেওয়ায় প্রত্যেকের টাকার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 1000 টাকা বেড়ে গেল।

[চট্টগ্রাম কলেজিয়েট স্কুল, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ১]

- ক. সমিতির সদস্য সংখ্যা y এং মোট টাকার পরিমাণ B হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২
- খ. সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর। ৪
- গ. মোট টাকার $\frac{11}{20}$ অংশ 6% হারে এবং অবশিষ্ট টাকা 7.5% হারে 3 বছরের জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের সমাধান

- ক** সমিতির সদস্য সংখ্যা = y
 \therefore প্রত্যেক সদস্য টাকা দেওয়ার কথা = $150y$ টাকা
 \therefore মোট টাকা, $B = 150y \times y = 150y^2$ (Ans.)
- খ** 'ক' থেকে পাই, $B = 150y^2$
 আবার, 6 জন সদস্য টাকা না দেওয়ায় মোট টাকা, $B = (y-6)(150y + 1000)$
 $\therefore 150y^2 = (y-6)(150y + 1000)$
 বা, $150y^2 = 150y^2 - 900y + 1000y - 6000$
 বা, $150y^2 - 150y^2 + 900y - 1000y = -6000$
 বা, $-100y = -6000$
 বা, $y = 60$
 \therefore সদস্য সংখ্যা = 60 জন (Ans.)
 আবার, মোট টাকার পরিমাণ = $150 \times 60^2 = 5,40,000$ টাকা (Ans.)
- গ** 'খ' থেকে পাই, মোট টাকা = 5,40,000 টাকা
 \therefore 6% হারে বিনিয়োগ করা হয়েছে = $5,40,000 \times \frac{11}{20}$
 = 2,97,000 টাকা
 এবং 7.5% হারে বিনিয়োগ করা হয়েছে = $5,40,000 - 2,97,000$
 = 2,43,000 টাকা
 \therefore প্রথম ক্ষেত্রে মুনাফা = মূলধন \times সময় \times মুনাফার হার
 = $2,97,000 \times 3 \times \frac{6}{100}$
 = 53,460 টাকা
 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মুনাফা = $2,43,000 \times 3 \times \frac{7.5}{100}$
 = 54,675 টাকা
 \therefore মোট মুনাফা = 53,460 + 54,675 = 1,08,135 টাকা (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৬৪ $x^2 = 11 - 2\sqrt{30}$, $a^3 + \frac{1}{a^3} = p$ কতিপয় বীজগাণিতিক রাশি।

[হিঙ্গাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ২]

- ক. $x - \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। ২
- খ. $P = 18\sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ৪
- গ. $x^5 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৪ নং প্রশ্নের সমাধান

- ক** দেওয়া আছে,
 $x^2 = 11 - 2\sqrt{30}$
 বা, $x^2 = 6 - 2\sqrt{6} \times 5 + 5$
 বা, $x^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$
 বা, $x^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$
 $\therefore x = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{6 - 5}$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$= -2\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

খ সূত্রনশীল ৫(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ 'ক' থেকে পাই,

$$x - \frac{1}{x} = -2\sqrt{5}$$

$$\text{এখন, } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= (-2\sqrt{5})^2 + 2$$

$$= 20 + 2$$

$$= 22$$

$$\text{এবং } x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= (-2\sqrt{5})^3 + 3 \cdot (-2\sqrt{5})$$

$$= -8 \cdot 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$$

$$= -46\sqrt{5}$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 22 \times (-46\sqrt{5})$$

$$\text{বা, } x^5 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = -1012\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } x^5 - \frac{1}{x^3} = -1012\sqrt{5} - \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= -1012\sqrt{5} - (-2\sqrt{5})$$

$$= -1010\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৬৫ (i) $p^2 = 13 + \sqrt{168}$ (ii) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$$B = \{x \in U : x^2 > 15 \text{ এবং } x^3 < 225\}$$

$$\text{এবং } C = \{x \in U : 4 \leq x \leq 7\}$$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল ও কলেজ, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ১]

- ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $4x^2 + \frac{4}{x^2} - 2 + 4x - \frac{1}{x}$ ২
- খ. (ii) নং উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(B \cap C)' = B' \cup C'$ ৪
- গ. দেখাও যে, $p^3 + \frac{1}{p^3} = 50\sqrt{7}$ ৪

৬৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সূত্রনশীল ৫৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ অধ্যায়-২ এর সূত্রনশীল ১২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৬

গ দেওয়া আছে,

$$p^2 = 13 + \sqrt{168}$$

$$= 13 + 2\sqrt{42}$$

$$= 7 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} + 6$$

$$= (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$$

$$= (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2$$

$$\therefore p = \sqrt{7} + \sqrt{6}$$

$$\text{এবং } \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})}$$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{7 - 6}$$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{6}$$

∴ $p + \frac{1}{p} = \sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{6} = 2\sqrt{7}$

বা, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^3 = (2\sqrt{7})^3$

বা, $p^3 + \frac{1}{p^3} + 3.p.\frac{1}{p} \left(p + \frac{1}{p}\right) = 8.7\sqrt{7}$

বা, $p^3 + \frac{1}{p^3} + 3(2\sqrt{7}) = 56\sqrt{7}$

বা, $p^3 + \frac{1}{p^3} + 6\sqrt{7} = 56\sqrt{7}$

∴ $p^3 + \frac{1}{p^3} = 50\sqrt{7}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ৬৬ $A = \{x \in N : x, 8 \text{ এর গুণনীয়ক}\}$ এবং $f(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ১]

- ক. 2.469 কে সাধারণ ভগ্নাংশে এবং $\frac{29}{21}$ কে আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২
- খ. P(A) নির্ণয়পূর্বক দেখাও যে, A এর উপাদান সংখ্যা m হলে P(A) এর উপাদান সংখ্যা 2^m এর সমান। ৪
- গ. $f(x) = 15$ হলে $x^5 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $2.469 = \frac{2469 - 24}{990}$
 $= \frac{2445}{990}$
 $= \frac{163}{66}$
 $= 2\frac{31}{66}$

আবার,

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 29} \\ \underline{21} \\ 80 \\ \underline{63} \\ 170 \\ \underline{168} \\ 200 \\ \underline{189} \\ 110 \\ \underline{105} \\ 50 \\ \underline{42} \\ 80 \end{array}$$

∴ $\frac{29}{21} = 1.380952$

খ দেওয়া আছে,

$A = \{x \in N : x, 8 \text{ এর গুণনীয়ক}\}$
 $= \{1, 2, 4, 8\}$

∴ $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}, \emptyset\}$
 এখানে, A এর উপাদান সংখ্যা, $m = 4$

এবং P(A) এর উপাদান সংখ্যা, $= 16 = 2^4 = 2^m$

∴ P(A) এর উপাদান সংখ্যা $= 2^m$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

এবং $f(x) = 15$

∴ $\frac{1+x^2+x^4}{x^2} = 15$

বা, $\frac{1}{x^2} + 1 + x^2 = 15$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$ (i)

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.x.\frac{1}{x} = 14$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 14 - 2$

বা, $x - \frac{1}{x} = \sqrt{12}$

∴ $x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$

এখন, $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x.\frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= (2\sqrt{3})^3 + 3(2\sqrt{3})$

$= 8.3\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$

$= 24\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$

$= 30\sqrt{3}$

অর্থাৎ $x^3 - \frac{1}{x^3} = 30\sqrt{3}$ (ii)

এখন, (i) ও (ii) গুণ করে পাই,

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 14.30\sqrt{3}$

বা, $x^5 + x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^5} = 420\sqrt{3}$

বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 420\sqrt{3}$

বা, $x^5 - \frac{1}{x^5} = 420\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

∴ $x^5 - \frac{1}{x^5} = 418\sqrt{3}$ (Ans.)

প্রশ্ন ৬৭ $P + \frac{1}{P+2} = 3, x^3 + y^3 = m$ এবং $x^2 + y^2 = n$ ▶ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[চট্টগ্রাম সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $f(x+2) = 3x - 2$ হলে, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ২
- খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(P+2)^5 + \frac{1}{(P+2)^5} = 2525$ ৪
- গ. $m = 8$ এবং $n = 4$ হলে, $(x+y)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৬৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x+2) = 3x - 2$

ধরি, $x + 2 = y$

∴ $x = y - 2$

∴ $f(y) = 3(y - 2) - 2 = 3y - 6 - 2 = 3y - 8$

∴ $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 8 = -1 - 8 = -9$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে,

$P + \frac{1}{P+2} = 3$

বা, $(P+2) + \frac{1}{(P+2)} = 3 + 2$

বা, $(P+2) + \frac{1}{(P+2)} = 5 \dots \dots \dots$ (i)

বা, $\left\{(P+2) + \frac{1}{(P+2)}\right\}^2 = 5^2$

বা, $(P+2)^2 + \frac{1}{(P+2)^2} + 2 \cdot (P+2) \cdot \frac{1}{(P+2)} = 25$



$$\therefore (P+2)^2 + \frac{1}{(P+2)^2} = 25 - 2 = 23 \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

$$\begin{aligned} \text{আবার, } (P+2)^3 + \frac{1}{(P+2)^3} &= \left\{ (P+2) + \frac{1}{(P+2)} \right\}^3 \\ &- 3 \cdot (P+2) \cdot \frac{1}{(P+2)} \left\{ (P+2) + \frac{1}{(P+2)} \right\} \\ &= (5)^3 - 3 \cdot 5 \quad \text{[(i) হতে]} \\ &= 125 - 15 \end{aligned}$$

$$\therefore (P+3)^3 + \frac{1}{(P+2)^3} = 110 \dots \dots \dots \text{(iii)}$$

(ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$$\left\{ (P+2) + \frac{1}{(P+2)^2} \right\} \left\{ (P+2)^3 + \frac{1}{(P+2)^3} \right\} = 23 \times 110$$

$$\text{বা, } (P+2)^5 + \frac{1}{(P+2)^5} + \frac{1}{(P+2)} + (P+2) = 2530$$

$$\text{বা, } (P+2)^5 + \frac{1}{(P+2)^5} + 5 = 2530$$

$$\therefore (P+2)^5 + \frac{1}{(P+2)^5} = 2525 \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ প্রশ্নমতে, $x^3 + y^3 = 8 \dots \dots \dots \text{(i)}$

$$x^2 + y^2 = 4 \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(i) - (ii) $\times y$ করে পাই,

$$x^3 + y^3 - x^2y - y^3 = 8 - 4y$$

$$\text{বা, } x^3 - 8 = x^2y - 4y$$

$$\text{বা, } y(x^2 - 4) = x^3 - 8$$

$$\therefore y = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \dots \dots \dots \text{(iii)}$$

(ii) নং এ y এর মান বসিয়ে,

$$x^2 + \left(\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \right)^2 = 4$$

$$\text{বা, } x^2(x^2 - 4)^2 + (x^3 - 8)^2 = 4(x^2 - 4)^2$$

$$\text{বা, } x^2(x^2 - 4)^2 - 4(x^2 - 4)^2 = -(x^3 - 8)^2$$

$$\text{বা, } (x^2 - 4)^2(x^2 - 4) = -(x^3 - 8)^2$$

$$\text{বা, } (x^2 - 4)^3 = -(x^3 - 8)^2$$

$$\text{বা, } x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 + x^6 - 16x^3 + 64 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^6 - 12x^4 - 16x^3 + 48x^2 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2(x^4 - 6x^2 - 8x + 24) = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x^4 - 2x^3 + 2x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 4x - 12x + 24) = 0$$

$$\text{বা, } x^2\{x^3(x-2) + 2x^2(x-2) - 2x(x-2) - 12(x-2)\} = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x-2)(x^3 + 2x^2 - 2x - 12) = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x-2)(x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 6x - 12) = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x-2)(x-2)(x^2 + 4x + 6) = 0$$

$$\therefore x^2(x-2)^2(x^2 + 4x + 6) = 0$$

$$\text{হয়, } x^2 = 0 \quad \text{অথবা, } (x-2)^2 = 0 \quad \text{অথবা, } x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad \therefore x = 2 \quad \therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

যা গ্রহণযোগ্য নয়।

$$x = 2 \text{ (i) নং এ বসিয়ে, } 2^3 + y^3 = 8$$

$$\text{বা, } y^3 = 8 - 8 \quad \therefore y = 0$$

$$\therefore x + y = 2 + 0 = 2 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৬৮ $x^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ (সেন্ট প্যাট্রিসিয়ানস হাই স্কুল, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ১)

$$\text{ক. প্রমাণ কর যে, } x = \sqrt{5} + 1$$

$$\text{খ. } x + \frac{1}{x} \text{ এবং } x - \frac{1}{x} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\text{গ. প্রমাণ কর যে, } x^3 - \frac{1}{x^3} = \frac{130 + 63\sqrt{5}}{8}$$

৬৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$x^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } x^2 = 5 + 1 + 2\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot 1 + 1^2$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\therefore x = \sqrt{5} + 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

খ $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1}$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5})^2 - 1} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{5} + 4 + \sqrt{5} - 1}{4} = \frac{5\sqrt{5} + 3}{4} \text{ (Ans.)}$$

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{5} + 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{5} + 4 - \sqrt{5} + 1}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{5} + 5}{4} \text{ (Ans.)}$$

গ বামপক্ষ = $x^3 - \frac{1}{x^3}$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{5} + 5}{4}\right)^3 + 3 \times \frac{3\sqrt{5} + 5}{4}$$

$$= \frac{(3\sqrt{5})^3 + 5^3 + 3 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 5(3\sqrt{5} + 5)}{64} + \frac{3(3\sqrt{5} + 5)}{4}$$

$$= \frac{135\sqrt{5} + 125 + 45\sqrt{5}(3\sqrt{5} + 5)}{64} + \frac{3(3\sqrt{5} + 5)}{4}$$

$$= \frac{135\sqrt{5} + 125 + 675 + 225\sqrt{5}}{64} + \frac{3(3\sqrt{5} + 5)}{4}$$

$$= \frac{360\sqrt{5} + 800 + 9\sqrt{5} + 15}{64} + \frac{9\sqrt{5} + 15}{4}$$

$$= \frac{360\sqrt{5} + 800 + 144\sqrt{5} + 240}{64}$$

$$= \frac{504\sqrt{5} + 1040}{64}$$

$$= \frac{8(63\sqrt{5} + 130)}{64}$$

$$= \frac{130 + 63\sqrt{5}}{8} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ৬৯ $A = \{x : x \in \mathbb{R} \mid \text{এবং } x^2 - 5x + 6 = 0\}$

$B = \{x : x \in \mathbb{R} \mid \text{এবং } 2 < x < 6\}$

$$y^2 - 2\sqrt{42} - 13 = 0, y > 0$$

সমসিত অধ্যায় ২ ও ৩

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট □ প্রশ্ন নং ১]

ক. A কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

২

খ. প্রমাণ কর যে, $(A \cap B) \cup (B \cap A) = (A \cup B) \cap (A \cap B)$.

৪

গ. $\frac{y^{10} + 1}{y^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

৬৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \{x : x \in \mathbb{R} \mid \text{এবং } x^2 - 5x + 6 = 0\}$

$$\text{এখানে, } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$$

$$\text{বা, } x(x-3) - 2(x-3) = 0$$

$$\text{বা, } (x-3)(x-2) = 0$$

Commented [k1]:

∴ $x = 2, 3$
 ∴ $A = \{2, 3\}$ (Ans.)

ক. দেওয়া আছে, $B = \{x : x \in \mathbb{N} \mid \text{এবং } 2 < x < 6\}$
 এখানে, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
 ∴ $B = \{3, 4, 5\}$
 'ক' থেকে পাই, $A = \{2, 3\}$
 এখন, $A \cap B = \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$
 $B \setminus A = \{3, 4, 5\} - \{2, 3\} = \{4, 5\}$
 $A \cup B = \{2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$
 $A \cap B = \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$
 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2\} \cup \{4, 5\} = \{2, 4, 5\}$
 এবং $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2, 3, 4, 5\} - \{3\} = \{2, 4, 5\}$
 ∴ $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $y^2 - 2\sqrt{42} - 13 = 0$
 বা, $y^2 = 7 + 2\sqrt{42} + 6$
 বা, $y^2 = (\sqrt{7})^2 + 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{7} + (\sqrt{6})^2$
 বা, $y^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2$
 ∴ $y = \sqrt{7} + \sqrt{6}$
 আবার, $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$
 বা, $\frac{1}{y} = \frac{1(\sqrt{7} - \sqrt{6})}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})}$
 $= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6})^2}$
 $= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{7 - 6}$
 ∴ $\frac{1}{y} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$
 এখন, $y^2 + \frac{1}{y^2} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{y}$
 $= (\sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{6})^2 - 2$
 $= (2\sqrt{7})^2 - 2$
 $= 4 \times 7 - 2$
 ∴ $y^2 + \frac{1}{y^2} = 26$
 আবার, $y^3 + \frac{1}{y^3} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^3 - 3 \cdot y \cdot \frac{1}{y} \left(y + \frac{1}{y}\right)$
 $= (\sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{6})^3 - 3(2\sqrt{7})$
 $= (2\sqrt{7})^3 - 6\sqrt{7}$
 $= 8 \times 7\sqrt{7} - 6\sqrt{7}$
 ∴ $y^3 + \frac{1}{y^3} = 50\sqrt{7}$
 আবার, $\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = y^5 + y + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^5}$
 বা, $50\sqrt{7} \times 26 = y^5 + \frac{1}{y^5} + y + \frac{1}{y}$
 বা, $1300\sqrt{7} = y^5 + \frac{1}{y^5} + 2\sqrt{7}$
 বা, $y^5 + \frac{1}{y^5} = 1300\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$
 ∴ $\frac{y^{10} + 1}{y^5} = 1298\sqrt{7}$ (Ans.)

প্রশ্ন ১০ $x = 2 + \sqrt{3}$ এবং $x + y = 4$
 [মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ড, যশোর □ প্রশ্ন নং ২]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $p^2 - 9q^2 + 16p + 64$. ২

খ. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $x^3y + xy^3 = 14$. ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $p^2 - 9q^2 + 16p + 64$
 $= p^2 + 16p + 64 - 9q^2$
 $= (p^2 + 2 \cdot p \cdot 8 + 8^2) - (3q)^2$
 $= (p + 8)^2 - (3q)^2$
 $= (p + 8 + 3q)(p + 8 - 3q)$
 $= (p + 3q + 8)(p - 3q + 8)$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে,
 $x = 2 + \sqrt{3}$
 $\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$
 $= \frac{1 \times (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$
 $= \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$
 $= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3}$
 $= 2 - \sqrt{3}$
 $\therefore x - \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 প্রদত্ত রাশি $= x^3 - \frac{1}{x^3}$
 $= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$
 $= (2\sqrt{3})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{3}$
 $= 8 \cdot 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
 $= 24\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
 $= 30\sqrt{3}$ (Ans.)

গ. দেওয়া আছে,
 $x = 2 + \sqrt{3} \dots \dots$ (i)
 $x + y = 4 \dots \dots$ (ii)
 (ii) নং হতে পাই,
 $x + y = 4$
 বা, $y = 4 - x = 4 - (2 + \sqrt{3}) = 4 - 2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$
 $\therefore x - y = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})$
 $= 2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3}$
 বামপক্ষ $= x^3y + xy^3$
 $= xy(x^2 + y^2)$
 $= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} \times \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}$
 $= \frac{4^2 - (2\sqrt{3})^2}{4} \times \frac{4^2 + (2\sqrt{3})^2}{2}$
 $= \frac{16 - 12}{4} \times \frac{16 + 12}{2}$
 $= 1 \times 14$
 $= 14$
 $=$ ডানপক্ষ
 $\therefore x^3y + xy^3 = 14$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১১ (i) $x^2 + 1 = 7x$ এবং (ii) $P(m) = \frac{m^3 - 3m^2 + 1}{m(1 - m)}$
 [বরিশাল জিলা স্কুল, বরিশাল □ প্রশ্ন নং ১]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $4b^2 + \frac{1}{4b^2} - 2 + 4b - \frac{1}{b}$ ২

খ. $x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। $[x > 0]$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(1 - x)$. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনমূল ৫৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।



খ. দেওয়া আছে,
 $x^2 + 1 = 7x$

বা, $x + \frac{1}{x} = 7$ [x দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে]

$$\text{বা, } (\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 7$$

$$\text{বা, } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 7$$

$$\text{বা, } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 7 - 2$$

$$\text{বা, } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 5$$

$$\therefore \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$$

এখন, প্রদত্ত রাশি = $x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{x})^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= (\sqrt{5})^3 + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\ &= 8\sqrt{5} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ. পার্থিবহয়ের অনুশীলনী-২.২ এর উদাহরণ-২৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭

প্রশ্ন ▶ ৭২ $P = x^2 - \sqrt{5}x + 1$ এবং $Q = a + b + c$ হলে,

[পিরোজপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, পিরোজপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $P = 0$ হলে $x + \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $Q = 0$ হলে $\frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $P = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5}$ । ৪

৭২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ৪৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. সূজনশীল ৩৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. সূজনশীল ৪৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৩ $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ এবং $P = \sqrt{5}$ ◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[বনানী বিদ্যালয়কেতন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x + \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, P একটি অমূলদ সংখ্যা। ৪

৭৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ৪৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. সূজনশীল ৪৩(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. আমরা জানি, $4 < 5 < 9$

$$\therefore \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$\text{বা, } 2 < \sqrt{5} < 3$$

সুতরাং $\sqrt{5}$ এর মান 2 অপেক্ষা বড় এবং 3 অপেক্ষা ছোট।

অতএব, $\sqrt{5}$ পূর্ণ সংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা অথবা অমূলদ সংখ্যা।

যদি $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা হয় তবে

ধরি, $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$; যেখানে p ও q উভয়ই স্বাভাবিক সংখ্যা ও পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$

বা, $5 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

বা, $5q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত, $5q$ পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণ সংখ্যা নয় কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা ও এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ ।

$\therefore 5q$ এবং $\frac{p^2}{q}$ সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $5q \neq \frac{p^2}{q}$ ।

$\therefore \sqrt{5}$ এর মান $\frac{p}{q}$ আকারের কোনো সংখ্যাই হতে পারে না, অর্থাৎ $\sqrt{5} \neq \frac{p}{q}$ ।

সুতরাং, $\sqrt{5}$ মূলদ সংখ্যা নয়।

$\therefore \sqrt{5}$ অর্থাৎ P একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ৭৪ $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x^2 + 12x = 0\}$, $P = a^2 - 2\sqrt{42} - 13$, $a > 0$,

$Q = x + y$, $x^2 - y^2 = R$ ◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[ব্রাইট স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. A সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে নির্ণয় কর। ২

খ. $P = 0$ হলে, $a^5 - \frac{1}{a^5}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $Q = 6$ এবং $R = 24$ হলে, দেখাও যে, $x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 4(x - y)^2 = 112$ ৪

৭৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x^2 + 12x = 0\}$

এখন, $x^2 - 7x^2 + 12x = 0$

বা, $x(x^2 - 7x + 12) = 0$

বা, $x(x^2 - 3x - 4x + 12) = 0$

বা, $x(x(x-3) - 4(x-3)) = 0$

বা, $x(x-3)(x-4) = 0$

$\therefore x = 0, 3, 4$

কিন্তু $x \in \mathbb{R}$ হওয়ায়,

$A = \{3, 4\}$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $P = 0$

$\therefore a^2 - 2\sqrt{42} - 13 = 0$

বা, $a^2 = 2\sqrt{42} + 13$

বা, $a^2 = 6 + 2\sqrt{42} + 7$

বা, $a^2 = (\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2$

বা, $a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2$

$\therefore a = \sqrt{6} + \sqrt{7}$

$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})}$$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{7 - 6}$$

$$= \sqrt{7} - \sqrt{6}$$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{7} - \sqrt{6}$

$$= 2\sqrt{7}$$

এবং $a - \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{7} + \sqrt{6}$

$$= 2\sqrt{6}$$

এখন, $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)$

$$= a^4 - \frac{1}{a^4} + a - \frac{1}{a^2}$$

$$= \left(a^4 - \frac{1}{a^4}\right) + \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$\therefore a^4 - \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) - \left(a - \frac{1}{a}\right)$

$$= \left\{ \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} \right\} \left\{ \left(a - \frac{1}{a} \right)^3 + 3a \cdot \frac{1}{a} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right\} - \left(a - \frac{1}{a} \right)$$

$$= \{ (2\sqrt{7})^2 - 2 \} \{ (2\sqrt{6})^3 + 3 \cdot 2\sqrt{6} \} - 2\sqrt{6}$$

$$= \{ 28 - 2 \} \{ 48\sqrt{6} + 6\sqrt{6} \} - 2\sqrt{6}$$

$$= 26.54\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$= 1404\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$= 1402\sqrt{6} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $Q = 6$

$$\therefore x + y = 6 \dots \text{(i)}$$

$$\text{এবং } R = 24$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 24$$

$$\text{বা, } (x + y)(x - y) = 24$$

$$\text{বা, } 6(x - y) = 24$$

$$\therefore x - y = 4 \dots \text{(ii)}$$

$$\therefore xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$$

$$= \frac{6^2 - 4^2}{4} = \frac{36 - 16}{4}$$

$$= \frac{36 - 16}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{এখন, } x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 4(x - y)^2$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3\{(x + y)^2 - 2xy\} + 4(x - y)^2$$

$$= 6^3 - 3 \cdot 5 \cdot 6 - 3\{6^2 - 2 \cdot 5\} + 4 \cdot 4^2 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 216 - 90 - 3\{36 - 10\} + 64$$

$$= 216 - 90 - 3 \cdot 26 + 64$$

$$= 216 - 90 - 78 + 64$$

$$= 112$$

$$\therefore x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 4(x - y)^2 = 112 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ৭৫ জনাব রহিম সাহেব বার্ষিক 5% মুনাফায় 3 বছরের জন্য 8000 টাকা বিনিয়োগ করেছেন।

[সেন্ট ফ্রান্সিস জেভিয়ার্স গার্লস হাই স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা □ প্রশ্ন নং ২]

ক. উপপাদকে বিশেষত্ব কর : $4a^2 + \frac{1}{4a} - 2 + 4a - \frac{1}{a}$ ২

খ. সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য কত? 8

গ. যদি একই আসলে 4% হার মুনাফায় 2 বছরের সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য 1 টাকা হয়। তাহলে আসল কত? 8

৭৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূত্রনশীল ৫৩(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে,

$$\text{আসল, } p = 8000 \text{ টাকা}$$

$$\text{সময়, } n = 3 \text{ বছর}$$

$$\text{মুনাফার হার, } r = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$\therefore \text{ সরল মুনাফা, } I = Pnr$$

$$= 8000 \times 3 \times 0.05$$

$$= 1200 \text{ টাকা}$$

$$\text{চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = P(1 + r)^n - P$$

$$= 8000(1 + 0.05)^3 - 8000$$

$$= 1261 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{ মুনাফার পার্থক্য} = (1261 - 1200) \text{ টাকা} = 61 \text{ টাকা (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে,

$$\text{সময়, } n = 2 \text{ বছর}$$

$$\text{মুনাফার হার, } r = 4\% = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$\text{ধরি, আসল} = P \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{ সরল মুনাফা} = Pnr$$

$$= P \times 2 \times 0.04$$

$$= 0.08P$$

$$\text{এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফা} = P(1 + r)^n - P$$

$$= P(1 + 0.04)^2 - P$$

$$= 0.0816P$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } 0.0816P - 0.08P = 1$$

$$\text{বা, } P(0.0816 - 0.08) = 1$$

$$\text{বা, } P \times 0.0016 = 1$$

$$\text{বা, } P = \frac{1}{0.0016}$$

$$\text{বা, } P = 625$$

\therefore আসল 625 টাকা। (Ans.)

প্রশ্ন ৭৬ রায়হান 5% হারে 10,000 টাকা 3 বছরের জন্য ব্যাংক থেকে ঋণ নিল।

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ৩

[মানিকগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, মানিকগঞ্জ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. 42.3478 কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ২

খ. উক্ত টাকার সরল মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় কর। 8

গ. যদি উভয় মুনাফার পার্থক্য 45.75 টাকা হয়, তবে রায়হানের ঋণের পরিমাণ কত টাকা হবে? 8

৭৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $42.3478 = \frac{423478 - 4234}{9900}$

$$= \frac{419244}{9900} = \frac{34937}{825}$$

$$= 42 \frac{287}{825} \text{ (Ans.)}$$

খ. সূত্রনশীল ১৯(ক + খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. সূত্রনশীল ১৯(গ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৭৭ $p^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ এবং $Q = 7$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ৩

[রাজবাড়ী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, রাজবাড়ী □ প্রশ্ন নং ২]

ক. p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $p^8 + 1 = 322p^4$ 8

গ. দেখাও যে, \sqrt{Q} একটি অমূলদ সংখ্যা। 8

৭৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $p^2 = 9 + 4\sqrt{5}$

$$= 5 + 2\sqrt{5} \cdot 2 + 4$$

$$= (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2$$

$$= (\sqrt{5} + 2)^2$$

$$\therefore p = \sqrt{5} + 2 \text{ (Ans.)}$$

খ. সূত্রনশীল 8৯(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. অধ্যায়-১ এর সূত্রনশীল ৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩০

প্রশ্ন ৭৮ (i) $a^2 = 11 + 2\sqrt{30}$ এবং (ii) $x^3 + x^{-3} = 42\sqrt{6}$

[শিবগঞ্জ সরকারি মডেল হাই স্কুল, টাঙ্গাইনবাবগঞ্জ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $a - \frac{1}{a}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. (ii) নং হতে x এর মান নির্ণয় কর। 8

গ. দেখাও যে, $\frac{a^{10} + 1}{a^5} = 922\sqrt{6}$ 8

৭৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^2 = 11 + 2\sqrt{30}$

$$= 6 + 2\sqrt{30} + 5$$

$$= (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$$

$$= (\sqrt{6} + \sqrt{5})^2$$

$$\therefore a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\therefore a - \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $x^3 + x^{-3} = 42\sqrt{6}$



MWTZ (AvevkaK)

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} &= 42\sqrt{6} \\ \Rightarrow x^6 + 1 &= 42\sqrt{6}x^3 \\ \Rightarrow x^6 - 42\sqrt{6}x^3 + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 21\sqrt{6} + (21\sqrt{6})^2 + 1 - (21\sqrt{6})^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x^3 - 21\sqrt{6})^2 &= 2646 - 1 \\ \Rightarrow x^3 - 21\sqrt{6} &= 23\sqrt{5} \\ \Rightarrow x^3 &= 21\sqrt{6} + 23\sqrt{5} \\ \Rightarrow x^3 &= 6\sqrt{6} + 18\sqrt{5} + 15\sqrt{6} + 5\sqrt{5} \\ \Rightarrow x^3 &= (\sqrt{6})^3 + 3(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{6}(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3 \\ \Rightarrow x^3 &= (\sqrt{6} + \sqrt{5})^3 \\ \therefore x &= \sqrt{6} + \sqrt{5} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ 'ক' হতে পাই, $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$
 $\frac{1}{a} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{6}$$

অতঃপর সূত্রনশীল ৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

[বি. দ্র. 'b' এর স্থলে 'a' হবে।]

অতঃপর, $a^5 + \frac{1}{a^5} = 922\sqrt{6}$

$$\therefore \frac{a^{10} + 1}{a^5} = 922\sqrt{6} \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ৭৯ $p^4 = 322 - \frac{1}{p^4}$ এবং $p > 1$ [নওগাঁ জিলা স্কুল, নওগাঁ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $p^2 + \frac{1}{p^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $(p^2 + \frac{1}{p^2})(p^3 + \frac{1}{p^3}) =$ কত? ৪

গ. দেখাও যে, $p^7 - \frac{1}{p^7} = 24476$. ৪

৭৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$p^4 = 322 - \frac{1}{p^4}$$

$$\text{বা, } p^4 + \frac{1}{p^4} = 322$$

$$\text{বা, } (p^2)^2 + 2p^2 \times \frac{1}{p^2} + \left(\frac{1}{p^2}\right)^2 = 322 + 2$$

$$\text{বা, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 = 324$$

$$\therefore p^2 + \frac{1}{p^2} = 18 \text{ (Ans.)}$$

খ 'ক' হতে পাই,

$$p^2 + \frac{1}{p^2} = 18$$

$$\text{বা, } p^2 + 2p \times \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = 18 + 2$$

$$\text{বা, } \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = 20$$

$$\text{বা, } p + \frac{1}{p} = \sqrt{20}$$

$$\text{এখন, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \times \left(p + \frac{1}{p}\right) = 18 \times \sqrt{20}$$

$$\text{বা, } p^3 + p + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} = 18\sqrt{20}$$

$$\text{বা, } \left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right) + \left(p + \frac{1}{p}\right) = 18\sqrt{20}$$

$$\text{বা, } p^3 + \frac{1}{p^3} + \sqrt{20} = 18\sqrt{20}$$

$$\therefore p^3 + \frac{1}{p^3} = 17\sqrt{20}$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \times \left(p^3 + \frac{1}{p^3}\right) &= 18 \times 17\sqrt{20} \\ &= 306\sqrt{20} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

গ 'ক' নং হতে পাই,

$$p^2 + \frac{1}{p^2} = 18$$

$$\text{বা, } p^2 - 2p \times \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = 18 - 2$$

$$\text{বা, } \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 = 16$$

$$\therefore p - \frac{1}{p} = 4 \dots \dots (i)$$

$$\text{এখন, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \times \left(p - \frac{1}{p}\right) = 18 \times 4$$

$$\text{বা, } p^3 - p + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} = 72$$

$$\text{বা, } \left(p^3 - \frac{1}{p^3}\right) - \left(p - \frac{1}{p}\right) = 72$$

$$\therefore p^3 - \frac{1}{p^3} = 76$$

$$\text{দেওয়া আছে, } p^4 = 322 - \frac{1}{p^4}$$

$$\therefore p^4 + \frac{1}{p^4} = 322$$

$$\text{এখন, } \left(p^4 + \frac{1}{p^4}\right) \times \left(p^3 - \frac{1}{p^3}\right) = 322 \times 76$$

$$\text{বা, } p^7 - p + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^7} = 24472$$

$$\text{বা, } \left(p^7 - \frac{1}{p^7}\right) - \left(p - \frac{1}{p}\right) = 24472$$

$$\text{বা, } p^7 - \frac{1}{p^7} = 24472 + 4 \text{ [(i) নং হতে]}$$

$$\therefore p^7 - \frac{1}{p^7} = 24476 \text{ (দেখানো হলো)}$$

প্রশ্ন ৮০ $x^2 - 3 = 2\sqrt{2}$ এবং $h(t) = \frac{t^4 + t^2 + 1}{t^2}$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

সম্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[মোমেনা আলী বিজ্ঞান স্কুল, সিরাজগঞ্জ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $3x^3 + 2x + 5$ ২

খ. $x^5 - \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $h(t^2) = h\left(\frac{1}{t}\right)$ ৪

৮০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $= 3x^3 + 2x + 5$

$$= 3x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 3x + 5x + 5$$

$$= 3x^2(x+1) - 3x(x+1) + 5(x+1)$$

$$= (x+1)(3x^2 - 3x + 5) \text{ (Ans.)}$$

খ এখানে, $x^2 - 3 = 2\sqrt{2}$

$$\text{বা, } x^2 = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot 1 + (1)^2 = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\text{সুতরাং, } x = \sqrt{2} + 1$$

অতঃপর সূত্রনশীল ২(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ অধ্যায়-২ এর সূত্রনশীল ৮(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা- ৩৪

প্রশ্ন ৮১ (i) $x^2 - 2\sqrt{5} = 15$ (ii) $p(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(1-x)}$

সম্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[সালেহা ইসহাক সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, সিরাজগঞ্জ □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $\frac{x^6-1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $p\left(\frac{1}{x}\right) = p(1-x)$

৮১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $16x^2 - 25y^2 - 8xz + 10yz$
 $= (4x)^2 - (5y)^2 - 2z(4x - 5y)$
 $= (4x + 5y)(4x - 5y) - 2z(4x - 5y)$
 $= (4x - 5y)(4x + 5y - 2z)$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে,
 $x^2 - 2\sqrt{56} = 15$
 বা, $x^2 = 15 + 2\sqrt{56} = 8 + 7 + 2\sqrt{8 \cdot 7}$
 বা, $x^2 = (\sqrt{8})^2 + 2\sqrt{8 \cdot 7} + (\sqrt{7})^2$
 বা, $x^2 = (\sqrt{8} + \sqrt{7})^2$
 $\therefore x = \sqrt{8} + \sqrt{7}$
 $\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}}$
 $= \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{(\sqrt{8} + \sqrt{7})(\sqrt{8} - \sqrt{7})}$
 $= \frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{8 - 7}$
 $= \sqrt{8} - \sqrt{7}$
 $\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{8} + \sqrt{7} - \sqrt{8} + \sqrt{7}$
 $= 2\sqrt{7}$

এখন, $\frac{x^6 - 1}{x^3}$
 $= x^3 - \frac{1}{x^3}$
 $= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$
 $= (2\sqrt{7})^3 + 3.2\sqrt{7}$
 $= 56\sqrt{7} + 6\sqrt{7}$
 $= 62\sqrt{7}$ (Ans.)

গ. পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২.২ এর উদাহরণ-২৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭

প্রশ্ন ৮২ (i) $2x - \frac{1}{3x} = 4$ এবং (ii) $p^2 = 13 + 2\sqrt{42}$ হলে

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, রংপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. $27x^3 - \frac{1}{8x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. $p^4 + \frac{1}{p^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

৮২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.৩ এর উদাহরণ-২৯ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৫৮

খ. দেওয়া আছে,

$$2x - \frac{1}{3x} = 4$$

$$\text{বা, } \frac{6x^2 - 1}{3x} = 4$$

$$\text{বা, } 6x^2 - 1 = 12x$$

$$\text{বা, } \frac{6x^2 - 1}{2x} = \frac{12x}{2x}$$

$$\therefore 3x - \frac{1}{2x} = 6 \dots \dots (i)$$

$$\text{এখন, } 27x^3 - \frac{1}{8x^3}$$

$$= (3x)^3 - \left(\frac{1}{2x}\right)^3$$

$$= \left(3x - \frac{1}{2x}\right)^3 + 3.3x \cdot \frac{1}{2x} \left(3x - \frac{1}{2x}\right)$$

$$= 6^3 + \frac{9}{2} \cdot 6$$

8

গ. দেওয়া আছে, $p^2 = 13 + 2\sqrt{42}$

$$\text{বা, } p^2 = 7 + 2\sqrt{42} + 6$$

$$\text{বা, } p^2 = (\sqrt{7})^2 + 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{7} + (\sqrt{6})^2$$

$$\text{বা, } p^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2$$

$$\therefore p = \sqrt{7} + \sqrt{6}$$

$$\text{আবার, } \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{p} = \frac{1(\sqrt{7} - \sqrt{6})}{(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})}$$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{7 - 6}$$

$$\therefore \frac{1}{p} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$$

$$\therefore p + \frac{1}{p} = \sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{6}$$

$$\text{বা, } p + \frac{1}{p} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{বা, } \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = (2\sqrt{7})^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} + 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p} = 4 \cdot 7$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} = 26$$

$$\text{বা, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 = (26)^2 \text{ [পুনরায় বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } (p^2)^2 + \left(\frac{1}{p^2}\right)^2 + 2 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{p^2} = 676$$

$$\text{বা, } p^4 + \frac{1}{p^4} = 676 - 2$$

$$\therefore p^4 + \frac{1}{p^4} = 674 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ৮৩ (i) $x = 7 + 4\sqrt{3}$

(ii) $p^3 - q^3 = 98$ এবং $p - q = 2$ যেখানে, $p, q > 0$

[বীরগঞ্জ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, দিনাজপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $\frac{1}{5}x^3 - 25$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 12$

গ. $p^5 + q^5$ এর মান নির্ণয় কর।

৮৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\frac{1}{5}x^3 - 25$

$$= \frac{1}{5}(x^3 - 125)$$

$$= \frac{1}{5}((x)^3 - 5^3)$$

$$= \frac{1}{5}(x - 5)(x^2 + 5x + 25) \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে,

$$x = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{7 - 4\sqrt{3}}{(7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})}$$



MWTZ (AvevkaK)

$$\begin{aligned} &= \frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} \\ &= 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} = 14$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 &= x + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 14 - 2 \text{ [মান বসিয়ে]} \\ &= 12 \text{ (প্রমাণিত)} \end{aligned}$$

গ দেওয়া আছে, $p^3 - q^3 = 98 \dots$ (i)

$$p - q = 2 \dots \dots \text{(ii)}$$

(i) নং থেকে, $(p - q)(p^2 + pq + q^2) = 98$

$$\text{বা, } 2(p^2 + pq + q^2) = 98$$

$$\therefore p^2 + pq + q^2 = 49 \dots \dots \text{(iii)}$$

(ii) নং থেকে, $(p - q)^2 = 2^2$

$$\text{বা, } p^2 - 2pq + q^2 = 4 \dots \dots \text{(iv)}$$

(iii) থেকে (iv) নং বিয়োগ করে,

$$p^2 + pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 49 - 4$$

$$\text{বা, } 3pq = 45$$

$$\therefore pq = 15 \dots \dots \text{(v)}$$

$$\therefore (p + q)^2 = (p - q)^2 + 4pq = 2^2 + 4 \cdot 15 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 4 + 60$$

$$= 64$$

$$\therefore p + q = \sqrt{64} = 8 \dots \dots \text{(vi)}$$

(ii) ও (vi) নং যোগ করে,

$$p - q + p + q = 2 + 8$$

$$\text{বা, } 2p = 10$$

$$\therefore p = 5 \dots \dots \text{(vii)}$$

(ii) নং এ $p = 5$ বসিয়ে,

$$5 - q = 2$$

$$\text{বা, } q = 5 - 2$$

$$\therefore q = 3 \dots \dots \text{(viii)}$$

এখন, $p^5 + q^5$

$$= 5^5 + 3^5 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 3125 + 243$$

$$= 3368 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ চ৪ $x - 5 + \sqrt{24} = 0$ এবং $f(y) = \frac{y^3 - 3y^2 + 1}{y(1 - y)}$

[লালমনিরহাট সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, লালমনিরহাট □ প্রশ্ন নং ১]

ক. দেখাও যে, $\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

খ. $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. প্রমাণ কর যে, $f(a^2) \neq f(a^{-2})$

চ৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$$x - 5 + \sqrt{24} = 0$$

$$\text{বা, } x = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } x = 3 - 2\sqrt{6} + 2$$

$$\text{বা, } x = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$\text{বা, } x = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ (দেখানো হলো)

খ থেকে পাই,

$$\sqrt{x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{x})^3 + \frac{1}{(\sqrt{x})^3}$$

$$= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 - 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$= 8 \cdot 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

$$= 18\sqrt{3} \text{ (Ans.)}$$

গ সূজনশীল ৩৫(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ চ৫ $A = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } 11 < x < 19\}$

$B = \{x : x \in \mathbb{Z} \mid \text{এবং } x^2 - 16x + 39 = 0\}$ এবং $f(x) = (x^2 - 1)^2$

সম্ভবিত অধ্যায় ২ ও ৩

[পঞ্চগড় বি.পি. সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, পঞ্চগড় □ প্রশ্ন নং ১]

ক. A ও B কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ. A ও B এর সম্পর্কগুলোর মধ্যে যদি $x > y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে তবে রিলেশনটি নির্ণয় কর।

গ. $f(x) = 3x^2$ হলে $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

চ৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $A = \{x : x \text{ মৌলিক সংখ্যা এবং } 11 < x < 19\}$

$$\therefore A = \{13, 17\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{Z} \mid \text{এবং } x^2 - 16x + 39 = 0\}$$

$$\text{এখন, } x^2 - 16x + 39 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 13x - 3x + 39 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 13) - 3(x - 13) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 13)(x - 3) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 13 = 0 \quad \text{অথবা, } x - 3 = 0$$

$$\text{বা, } x = 13 \quad \text{বা, } x = 3$$

$$\therefore B = \{3, 13\} \text{ (Ans.)}$$

খ 'ক' হতে পাই, $A = \{13, 17\}$

$$\text{এবং } B = \{3, 13\}$$

ধরি, রিলেশনটি $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B \text{ এবং } x > y\}$

এখানে, $A \times B = \{13, 17\} \times \{3, 13\}$

$$= \{(13, 3), (13, 13), (17, 3), (17, 13)\}$$

$$\therefore x > y \text{ সম্পর্কটি বিবেচনায় নির্ণেয় রিলেশন}$$

$$R = \{(13, 3), (17, 3), (17, 13)\} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $f(x) = (x^2 - 1)^2$

$$\text{আবার, } f(x) = 3x^2$$

$$\therefore 3x^2 = (x^2 - 1)^2$$

$$\text{বা, } x^2 - 1 = \sqrt{3}x$$

অতঃপর, সূজনশীল ২৯(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ চ৬ $x + y = \sqrt{3}$ এবং $x^2 - y^2 = \sqrt{6}$

[আওয়ার লেডি অব ফাতেমা উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. xy এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $x^3 + y^3 + \frac{\sqrt{27}}{4} = 3\sqrt{3}$

গ. $20xy (x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

৮৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূত্রনশীল ১৭(ক)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. সূত্রনশীল ১৭(খ)নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{3}$

'ক' থেকে পাই, $x - y = \sqrt{2}$ এবং $xy = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি: } 20xy (x^2 + y^2) &= 20 \times \frac{1}{4} \cdot \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} \\ &= 5 \times \frac{3+2}{2} \\ &= 12.5 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

প্রশ্ন ৮৭ $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ এবং $p = y^3 + \frac{1}{y^3}$

[হিবনে তাইমিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^3 + 9y^3 + (x+y)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. উদ্দীপক হতে দেখাও যে, $\frac{1}{x^3}(x^6 + 1) = 18\sqrt{3}$

গ. $p = 42\sqrt{6}$ হলে প্রমাণ কর যে, $y = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

৮৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূত্রনশীল ৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} x^2 &= 5 + 2\sqrt{6} \\ &= 3 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \\ \therefore x &= \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} \\ \therefore x + \frac{1}{x} &= \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3} \\ \therefore \frac{1}{x^3}(x^6 + 1) &= \frac{x^6 + 1}{x^3} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 2\sqrt{3} \\ &= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{x^3}(x^6 + 1) = 18\sqrt{3} \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ. সূত্রনশীল ৭৮(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৮৮ $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ এবং Q একটি অমূলদ সংখ্যার সেট।

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ৩

[কুমিল্লা ক্যান্টনমেন্ট বোর্ড আল-উলু স্কুল, কুমিল্লা □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $a^3 + 9b^3 + (a+b)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. দেখাও যে, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5}$

গ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{5} \in Q$

৮৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূত্রনশীল ৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. সূত্রনশীল ৪৩(ক + খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. সূত্রনশীল ৭৩(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

অতঃপর, $\sqrt{5} \in Q$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৮৯ $f(x) = 2x - \frac{1}{3x}$ একটি ফাংশন এবং $x^2 = 13 + \sqrt{168}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[আল-আমিন একাডেমি স্কুল এন্ড কলেজ, চাঁদপুর □ প্রশ্ন নং ১]

ক. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

খ. $f(x) = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $54x^3 + \frac{1}{4x^3} = 21\sqrt{15}$

গ. $x^5 - \frac{1}{x^5}$ এর মান নির্ণয় কর।

৮৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - \frac{1}{3x}$

$$\therefore 2x - \frac{1}{3x} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{6x^2 - 1}{3x} = 0$$

$$\text{বা, } 6x^2 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 6x^2 = 1$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = 2$

$$\text{বা, } 2x - \frac{1}{3x} = 2$$

$$\text{বা, } \left(2x - \frac{1}{3x}\right)^3 = 8$$

$$\text{বা, } 8x^3 - \frac{1}{27x^3} - 3 \cdot 2x \cdot \frac{1}{3x} \left(2x - \frac{1}{3x}\right) = 8$$

$$\text{বা, } 8x^3 - \frac{1}{27x^3} - 2 \times 2 = 8 \left[\square 2x - \frac{1}{3x} = 2 \right]$$

$$\text{বা, } 8x^3 - \frac{1}{27x^3} = 12$$

$$\text{বা, } \frac{8}{54} \left(54x^3 - \frac{54}{27 \times 8x^3}\right) = 12$$

$$\text{বা, } 54x^3 - \frac{1}{4x^3} = 81 \dots \dots \dots (i)$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \left(54x^3 + \frac{1}{4x^3}\right)^2 &= \left(54x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2 + 4 \cdot 54x^3 \cdot \frac{1}{4x^3} \\ &= 81^2 + 54 \\ &= 6615 \\ &= 21 \times 21 \times 15 \end{aligned}$$

$$\therefore 54x^3 + \frac{1}{4x^3} = 21\sqrt{15}$$

$$\therefore 54x^3 + \frac{1}{4x^3} = 21\sqrt{15} \text{ (প্রমাণিত)}$$

গ. দেওয়া আছে, $x^2 = 13 + \sqrt{168}$

$$= 7 + \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 6} + 6$$

$$= (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7 \cdot 6} + (\sqrt{6})^2$$

$$= (\sqrt{7} + \sqrt{6})^2$$

$$\therefore x = \sqrt{7} + \sqrt{6}$$

অতঃপর সূত্রনশীল ৭৪(খ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ৯০ $p^4 + p^2 + 1$ একটি বীজগাণিতীয় রাশি।

[আশুগঞ্জ সার কারখানা কলেজ, ব্রাহ্মণবাড়িয়া □ প্রশ্ন নং ২]



- ক. $p^4 + p^2 + 1$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২
 খ. $p^4 + p^2 + 1 = 8p^2$ হলে, $p^3 + \frac{1}{p^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. যদি $p^4 + p^2 + 1 = 6p^2$ হয় তবে, দেখাও যে, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^4 \neq p^4 + \frac{1}{p^4}$ ৪

৯০ নং প্রশ্নের সমাধান

- ক. $p^4 + p^2 + 1$
 $= (p^2)^2 + 2 \cdot p^2 \cdot 1 + 1^2 - p^2$
 $= (p^2 + 1)^2 - p^2$
 $= (p^2 + 1 + p)(p^2 + 1 - p)$
 $= (p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$ (Ans.)
- খ. দেওয়া আছে, $p^4 + p^2 + 1 = 8p^2$
 বা, $p^2 + 1 + \frac{1}{p^2} = 8$
 বা, $p^2 + \frac{1}{p^2} = 7$
 বা, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 - 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p} = 7$
 বা, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = 7 + 2$
 বা, $p + \frac{1}{p} = \sqrt{9}$
 $\therefore p + \frac{1}{p} = 3$
 এখন, $p^3 + \frac{1}{p^3} = \left(p + \frac{1}{p}\right)^3 - 3 \cdot p \cdot \frac{1}{p} \left(p + \frac{1}{p}\right)$
 $= 3^3 - 3 \cdot 3$
 $= 18$ (Ans.)

- গ. দেওয়া আছে, $p^4 + p^2 + 1 = 6p^2$

বা, $p^2 + 1 + \frac{1}{p^2} = 6$

$\therefore p^2 + \frac{1}{p^2} = 5$

$\therefore \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = p^2 + \frac{1}{p^2} + 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p}$
 $= 5 + 2$
 $= 7$

$\therefore \left\{ \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 \right\}^2 = 7^2$

$\Rightarrow \left(p + \frac{1}{p}\right)^4 = 49$

আবার, $p^2 + \frac{1}{p^2} = 5$

$\Rightarrow p^4 + \frac{1}{p^4} + 2 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{p^2} = 25$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow p^4 + \frac{1}{p^4} = 25 - 2$

$\therefore p^4 + \frac{1}{p^4} = 23$

$\therefore \left(p + \frac{1}{p}\right)^4 \neq p^4 + \frac{1}{p^4}$ (দেখানো হলো)

- প্রশ্ন ৯১. $a = \sqrt{13} + 2\sqrt{3}$ হলে—

[বেগমঞ্জ সরকারি কারিগরি উচ্চ বিদ্যালয়, নোয়াখালী □ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $a - \frac{1}{a}$ এর মান কত? ২
 খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{13a}{a^2 - \sqrt{13}a + 1} = \sqrt{13}$ ৪
 গ. $a^5 + \frac{1}{a^5}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯১ নং প্রশ্নের সমাধান

- ক. দেওয়া আছে, $a = \sqrt{13} + 2\sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{13} + 2\sqrt{3}}$
 $= \frac{\sqrt{13} - 2\sqrt{3}}{(\sqrt{13} + 2\sqrt{3})(\sqrt{13} - 2\sqrt{3})}$
 $= \frac{\sqrt{13} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{13} - 2\sqrt{3}}$
 $\therefore a - \frac{1}{a} = \sqrt{13} + 2\sqrt{3} - \sqrt{13} + 2\sqrt{3}$
 $= 4\sqrt{3}$

- খ. 'ক' হতে পাই, $\frac{1}{a} = \sqrt{13} - 2\sqrt{3}$

$\therefore a + \frac{1}{a} = \sqrt{13} + 2\sqrt{3} + \sqrt{13} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{13}$

এখন, $\frac{13a}{a^2 - \sqrt{13}a + 1} = \frac{13}{a - \sqrt{13} + \frac{1}{a}}$
 $= \frac{13}{\left(a + \frac{1}{a}\right) - \sqrt{13}}$
 $= \frac{13}{2\sqrt{13} - \sqrt{13}}$
 $= \frac{13}{\sqrt{13}}$
 $= \sqrt{13}$

$\therefore \frac{13a}{a^2 - \sqrt{13}a + 1} = \sqrt{13}$ (প্রমাণিত)

- গ. 'খ' হতে পাই, $a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{13}$

$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 4 \times 13$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 52 - 2$

$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = 50 \dots \dots$ (i)

এখন, $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right)$
 $= (2\sqrt{13})^3 - 3 \times 2\sqrt{13}$
 $= 104\sqrt{13} - 6\sqrt{13}$

$\therefore a^3 + \frac{1}{a^3} = 98\sqrt{13} \dots \dots$ (ii)

- (i) ও (ii) গুণ করে পাই,

$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = 50 \times 98\sqrt{13}$

$a^5 + \frac{1}{a^5} + a + \frac{1}{a^3} = 4900\sqrt{13}$

$\Rightarrow a^5 + \frac{1}{a^5} = 4900\sqrt{13} - \left(a + \frac{1}{a}\right)$

$= 4900\sqrt{13} - 2\sqrt{13}$

$= 4898\sqrt{13}$

$\therefore a^5 + \frac{1}{a^5} = 4898\sqrt{13}$ (Ans.)

- প্রশ্ন ৯২. $x^2 = 7 + 2\sqrt{12}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১, ২ ও ৩

[আতাতুর্ক সরকারি মডেল হাই স্কুল, ফেনী □ প্রশ্ন নং ১]

- ক. $A = \{0, 1, 3\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$ হলে, দেখাও যে, A ও B পরস্পর নিষ্কেন্দ্র সেট। ২
 খ. $x + \frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
 গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2 - 7}{4}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। ৪

৯২ নং প্রশ্নের সমাধান

- ক. দেওয়া আছে, $A = \{0, 1, 3\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$

$$\therefore A \cap B = \{0, 1, 3\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$$

\(\therefore A\) এবং \(B\) পরস্পর নিষ্পন্ন সেট। (দেখানো হলো)

খ দেওয়া আছে, $x^2 = 7 + 2\sqrt{12}$

$$= 7 + 4\sqrt{3}$$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

$$= (2 + \sqrt{3})^2$$

\(\therefore x = 2 + \sqrt{3}\) [বর্গমূল করে]

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

\(\therefore x + \frac{1}{x} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4\) (Ans.)

গ $\frac{x^2-7}{4} = \frac{7+2\sqrt{12}-7}{4}$

$$= \frac{2\sqrt{4 \times 3}}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

ধরি, $\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা।
তাহলে এমন দুইটি পরস্পর সহমৌলিক স্বাভাবিক সংখ্যা $p, q > 1$ থাকবে যে, $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$

বা, $3 = \frac{p^2}{q^2}$ [বর্গ করে]

অর্থাৎ $3q = \frac{p^2}{q}$ [উভয়পক্ষকে q দ্বারা গুণ করে]

স্পষ্টত $3q$ পূর্ণসংখ্যা কিন্তু $\frac{p^2}{q}$ পূর্ণসংখ্যা নয়, কারণ p ও q স্বাভাবিক সংখ্যা, এরা পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1$ ।

\(\therefore 3q\) এবং $\frac{p^2}{q}\) সমান হতে পারে না, অর্থাৎ $3q \neq \frac{p^2}{q}$$

\(\therefore \sqrt{3}\) কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যাবে না, অর্থাৎ $\sqrt{3} \neq \frac{p}{q}$

\(\therefore \sqrt{3}\) একটি অমূলদ সংখ্যা। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৯৩ একটি সমবায় সমিতির সদস্যগণ প্রত্যেকে সদস্য সংখ্যার 100 গুণ টাকা দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলো। কিন্তু 5 জন সদস্য টাকা না দেওয়ায় প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ পূর্বের চেয়ে 600 টাকা বেড়ে গেল।

[আতাতুর্ক সরকারি মডেল হাই স্কুল, ফেনী □ প্রশ্ন নং ২]

- ক. $x^2 - 5x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। 2
খ. সমিতির সদস্য সংখ্যা ও মোট চাঁদার পরিমাণ নির্ণয় কর। 8
গ. মোট চাঁদার $\frac{1}{5}$ অংশ 5% হারে এবং অবশিষ্ট 4% হারে 5 বছরের জন্য সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করা হলো। মোট মুনাফা নির্ণয় কর। 8

৯৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 - 5x - 6$

$$= x^2 - 6x + x - 6$$

$$= x(x - 6) + 1(x - 6)$$

$$= (x - 6)(x + 1) \text{ (Ans.)}$$

খ ধরি, সমিতির সদস্য সংখ্যা x

\(\therefore\) প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ = $100 \times x$ টাকা = $100x$ টাকা

\(\therefore x\) জনের চাঁদার পরিমাণ = $(100x \times x)$ টাকা = $100x^2$ টাকা

5 জন সদস্য টাকা না দেওয়ায়, $(x - 5)$ জনের প্রত্যেকের চাঁদার পরিমাণ হবে $(100x + 600)$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $(x - 5)(100x + 600) = 100x^2$

বা, $100x^2 + 600x - 500x - 3000 = 100x^2$

বা, $100x = 3000$

বা, $x = \frac{3000}{100} \therefore x = 30$

\(\therefore\) সমিতির সদস্য সংখ্যা = 30 জন

এবং মোট চাঁদার পরিমাণ = $100x^2$ টাকা

$$= 100 \times (30)^2 \text{ টাকা}$$

$$= 100 \times 900 \text{ ,,}$$

$$= 90,000 \text{ টাকা}$$

সদস্য সংখ্যা 30 জন এবং মোট চাঁদার পরিমাণ 90,000 টাকা (Ans.)

গ মোট চাঁদার $\frac{1}{5}$ অংশ = $(90,000 \text{ টাকা এর } \frac{1}{5}) = 18,000 \text{ টাকা}$

অবশিষ্ট টাকার পরিমাণ = $(90,000 - 18,000) \text{ টাকা} = 72,000 \text{ টাকা}$

1ম ক্ষেত্রে মুনাফা = $Pnr = (18,000 \times 5 \times \frac{5}{100}) \text{ টাকা}$

$$[\square P = 18,000 \text{ টাকা, } n = 5 \text{ বছর, } r = 5\% = \frac{5}{100}]$$

$$= 4500 \text{ টাকা}$$

2য় ক্ষেত্রে মুনাফা = $Pnr = (72,000 \times 5 \times \frac{4}{100}) \text{ টাকা}$

$$[\square P = 72,000 \text{ টাকা, } n = 5 \text{ বছর, } r = 4\% = \frac{4}{100}]$$

$$= 14400 \text{ টাকা}$$

\(\therefore\) মোট মুনাফা = $(4500 + 14400) \text{ টাকা} = 18900 \text{ টাকা}$ (Ans.)

প্রশ্ন ৯৪ $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ এবং $a^3 + a^{-3} = 50\sqrt{7}$

[চট্টগ্রাম রেসিডেন্সিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ২]

- ক. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $x^4 - 6x^2 + 1$ 2
খ. $x^4 - \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর। 8
গ. দেখাও যে, $a = \sqrt{7} + \sqrt{6}$ 8

৯৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^4 - 6x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2$

$$= (x^2 - 1)^2 - (2x)^2$$

$$= (x^2 - 1 + 2x)(x^2 - 1 - 2x)$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) \text{ (Ans.)}$$

খ $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

বা, $x^2 + 1 = \sqrt{5}x$

বা, $\frac{x^2+1}{x} = \sqrt{5}$ [উভয় পক্ষকে x দ্বারা ভাগ করে]

\(\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}\)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \quad [\square a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab]$$

$$= (\sqrt{5})^2 - 2 = 5 - 2 = 3$$

আবার, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4x \cdot \frac{1}{x} \quad [\square (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab]$

$$= (\sqrt{5})^2 - 4$$

$$= 5 - 4 = 1$$

\(\therefore x - \frac{1}{x} = \sqrt{1} = 1

এখন, $x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= (1)\sqrt{5} \cdot 3$$

$$= 3\sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $a^3 + a^{-3} = 50\sqrt{7}$



$$\text{বা, } a^3 + \frac{1}{a^3} = 50\sqrt{7}$$

$$\text{বা, } \frac{a^6 + 1}{a^3} = 50\sqrt{7}$$

$$\text{বা, } a^6 - 50\sqrt{7}a^3 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot 25\sqrt{7} + (25\sqrt{7})^2 - (25\sqrt{7})^2 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3 - 25\sqrt{7})^2 = 4375 - 1$$

$$\text{বা, } (a^3 - 25\sqrt{7})^2 = 4374$$

$$\text{বা, } a^3 - 25\sqrt{7} = 27\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } a^3 = 25\sqrt{7} + 27\sqrt{6}$$

$$= 7\sqrt{7} + 21\sqrt{6} + 18\sqrt{7} + 6\sqrt{6}$$

$$= (\sqrt{7})^3 + 3 \cdot (\sqrt{7})^2 \cdot \sqrt{6} + 3 \cdot \sqrt{7} \cdot (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^3$$

$$= (\sqrt{7} + \sqrt{6})^3$$

$$\therefore a^3 = (\sqrt{7} + \sqrt{6})^3$$

$$\therefore a = \sqrt{7} + \sqrt{6} \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$\text{প্রশ্ন } \blacktriangleright \text{ ৯৫ } y^2 - 2\sqrt{6} = 5; \text{ যেখানে } y > 0, a + b = \sqrt{13}, a - b = \sqrt{11}$$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ১ ও ৩

[কাজেম আলী স্কুল এন্ড কলেজ, চট্টগ্রাম □ প্রশ্ন নং ১]

$$\text{ক. } 1.94 \times 2.35 \text{ কে সরল কর।} \quad 2$$

$$\text{খ. } y^4 - \frac{1}{y^4} \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad 8$$

$$\text{গ. } \frac{7}{4} a^3 b^2 (a^6 - b^6)^2 \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad 8$$

৯৫ নং প্রশ্নের সমাধান

$$\text{ক. } 1.94 \times 2.35$$

$$= \frac{194 - 19}{90} \times \frac{235 - 2}{99}$$

$$= \frac{175}{90} \times \frac{233}{99}$$

$$= \frac{35}{18} \times \frac{233}{99}$$

$$= \frac{8155}{1782} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ. দেওয়া আছে,}$$

$$y^2 - 2\sqrt{6} = 5$$

$$\text{বা, } y^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{y^2} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{y^2} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} \times \frac{5 - 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{y^2} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{5^2 - (2\sqrt{6})^2}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{y^2} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - 24}$$

$$\therefore \frac{1}{y^2} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\therefore y^2 + \frac{1}{y^2} = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10$$

$$y^2 - \frac{1}{y^2} = 5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = y^4 - \frac{1}{y^4}$$

$$= (y^2)^2 - \left(\frac{1}{y^2}\right)^2$$

$$= \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)$$

$$= 10 \times 4\sqrt{6}$$

$$= 40\sqrt{6} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{গ. দেওয়া আছে,}$$

$$a + b = \sqrt{13}$$

$$a - b = \sqrt{11}$$

$$\therefore ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$= \frac{(\sqrt{13})^2}{4} - \frac{(\sqrt{11})^2}{4}$$

$$= \frac{13}{4} - \frac{11}{4}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{এখন, } a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= (\sqrt{13})^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}$$

$$= 13\sqrt{13} - \frac{3}{2}\sqrt{13}$$

$$= \frac{23\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{এবং } a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$= (\sqrt{11})^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{11}$$

$$= 11\sqrt{11} + \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

$$= \frac{25\sqrt{11}}{2}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{7}{4} a^3 b^2 (a^6 - b^6)^2$$

$$= \frac{7}{4} (ab)^2 ((a^3)^2 - (b^3)^2)^2$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 ((a^3 + b^3)(a^3 - b^3))^2$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot ((a^3 + b^3)^2 \cdot (a^3 - b^3)^2)$$

$$= \frac{7}{16} \cdot \left\{ \left(\frac{23\sqrt{13}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{25\sqrt{11}}{2}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{7}{16} \cdot \frac{6877}{4} \cdot \frac{6875}{4}$$

$$= \frac{330955625}{256} \text{ (Ans.)}$$

$$\text{প্রশ্ন } \blacktriangleright \text{ ৯৬ } A = 2x^2 - 3x - 2 \text{ এবং } B = 4x^2 - 5x + 4$$

[বাসুদেবান সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, বাসুদেবান □ প্রশ্ন নং ১]

$$\text{ক. } A \text{ এর বর্গ নির্ণয় কর।} \quad 2$$

$$\text{খ. } A = 0 \text{ এবং } x > \frac{1}{x} \text{ হলে } x^2 - \frac{1}{x^2} \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad 8$$

$$\text{গ. } B = 8 \text{ হলে } \frac{x^6 - 1}{x^3} \text{ এর মান নির্ণয় কর।} \quad 8$$

৯৬ নং প্রশ্নের সমাধান

$$\text{ক. দেওয়া আছে, } A = 2x^2 - 3x - 2$$

$$\therefore A^2 = (2x^2 - 3x - 2)^2$$

$$= (2x^2)^2 + (-3x)^2 + (-2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot (-3x) + 2 \cdot (-3x) \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot (2x^2)$$

$$= 4x^4 + 9x^2 + 4 - 12x^3 + 12x - 8x^2$$

$$= 4x^4 + x^2 + 4 - 12x^3 + 12x \text{ (Ans.)}$$

$$\text{খ. দেওয়া আছে,}$$

$$A = 2x^2 - 3x - 2$$

$$\text{এবং } A = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 2 = 3x$$

$$\text{বা, } x^2 - 1 = \frac{3}{2}x$$

$$\text{বা, } x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{বা, } x^7 + \frac{1}{x} - x - \frac{1}{x^7} = 161560\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x^7 - \frac{1}{x^7} = 161560\sqrt{2} + \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore x^7 - \frac{1}{x^7} = 161560\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ = 161564\sqrt{2} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৯৯ $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$ এবং $a^3 + a^{-3} = 34\sqrt{5}$ দুইটি বীজগাণিতিক সমীকরণ।

[আদী আমজাদ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, মৌলভীবাজার □ প্রশ্ন নং ২]

ক. $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $x = \sqrt{2\sqrt{6} + 5}$ ৪

গ. a এর মান নির্ণয় কর। ৪

৯৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখন, $x^4 + \frac{1}{x^4}$

$$= (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= 10^2 - 2 \quad \left[\square x^2 + \frac{1}{x^2} = 10 \right]$$

$$= 100 - 2 = 98 \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 10$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 10$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 12$$

$$\text{বা, } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4 \times 3$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{3} \dots \dots \dots \text{(i)}$$

আবার, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 10$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 10$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 8$$

$$\text{বা, } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{2} \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$2x = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\text{বা, } x^2 = 3 + 2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x^2 = 2\sqrt{6} + 5$$

$$\therefore x = \sqrt{2\sqrt{6} + 5} \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ. দেওয়া আছে, $a^3 + a^{-3} = 34\sqrt{5}$

$$\text{বা, } a^3 + \frac{1}{a^3} = 34\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } \frac{a^6 + 1}{a^3} = 34\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } a^6 + 1 = 34\sqrt{5} a^3$$

$$\text{বা, } (a^3)^2 - 34\sqrt{5}a^3 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3)^2 - 2 \cdot a^3 \cdot 17\sqrt{5} + (17\sqrt{5})^2 - (17\sqrt{5})^2 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (a^3 - 17\sqrt{5})^2 = (17\sqrt{5})^2 - 1$$

$$\text{বা, } (a^3 - 17\sqrt{5})^2 = 1444 = 38^2$$

$$\text{বা, } a^3 - 17\sqrt{5} = 38$$

$$\text{বা, } a^3 = 38 + 17\sqrt{5}$$

$$\text{বা, } a^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$$

$$\text{বা, } a^3 = (2 + \sqrt{5})^3$$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{5} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ১০০ $y = \sqrt{\frac{5y}{2} + \frac{1}{6}}$ এবং $f(y) = \frac{y^3 - 3y^2 + 1}{y(1-y)}$

◀ সমন্বিত অধ্যায় ২ ও ৩

[বাংলাদেশ শিক্ষক সমিতি (কামরুজ্জামান গ্রুপ), বরিশাল □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $f(-3) =$ কত? ২

খ. দেখাও যে, $f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1-y)$ ৪

গ. $\frac{216y^6 - 1}{27y^3}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১০০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সূজনশীল ৩৫(ক) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ. পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২.২ এর উদাহরণ-২৩ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৭

গ. দেওয়া আছে,

$$y = \sqrt{\frac{5y}{2} + \frac{1}{6}}$$

$$\text{বা, } y^2 = \frac{5y}{2} + \frac{1}{6} \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 2y^2 = 5y + \frac{1}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{2y^2}{y} = \frac{5y}{y} + \frac{1}{3y}$$

$$\therefore 2y - \frac{1}{3y} = 5 \dots \dots \text{(i)}$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{216y^6 - 1}{27y^3} = 8y^3 - \frac{1}{27y^3}$$

$$= (2y)^3 - \left(\frac{1}{3y}\right)^3$$

$$= \left(2y - \frac{1}{3y}\right)^3 + 3 \cdot 2y \cdot \frac{1}{3y} \left(2y - \frac{1}{3y}\right)$$

$$= (5)^3 + 2 \cdot 5$$

$$= 135 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ১০১ $x^2 = 13 + 2\sqrt{42}$, $a + b + c = m$; $a^2 + b^2 + c^2 = n$ এবং $a^3 + b^3 = p^3$

[স্বজনী বিদ্যানিকেতন, পটুয়াখালী □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $a^3 + 3a + 36$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $m^3 + 2p^3 = 3mn$ ৪

১০১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $a^3 + 3a + 36 = a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a + 12a + 36$

$$= a^2(a + 3) - 3a(a + 3) + 12(a + 3)$$

$$= (a + 3)(a^2 - 3a + 12) \text{ (Ans.)}$$

খ. সূজনশীল ৬৯(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ. সূজনশীল ১০(গ) নং সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ১০২ $4y^2 + 1 = 2y$, $a = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ এবং $b = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

[সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি □ প্রশ্ন নং ১]

ক. $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$ রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $16y^4 + \frac{1}{16y^4} + 1 = 0$ 8

গ. দেখাও যে, $a^2b - ab^2 = 2\sqrt{15}$ 8

১০২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.৪ এর উদাহরণ-৩১ দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৬১

খ দেওয়া আছে, $4y^2 + 1 = 2y$

বা, $(2y)^2 + 1 = 2y$

বা, $2y + \frac{1}{2y} = 1$

বা, $\left(2y^2 + \frac{1}{2y^2}\right)^2 = 1$

বা, $(2y)^2 + \left(\frac{1}{2y^2}\right)^2 + 2 \cdot 2y \cdot \frac{1}{2y} = 1$

বা, $4y^2 + \frac{1}{4y^2} = 1 - 2$

বা, $\left(4y^2 + \frac{1}{4y^2}\right)^2 = (-1)^2$

বা, $(4y^2)^2 + \left(\frac{1}{4y^2}\right)^2 + 2 \cdot 4y^2 \cdot \frac{1}{4y^2} = 1$

বা, $16y^4 + \frac{1}{16y^4} + 2 = 1$

∴ $16y^4 + \frac{1}{16y^4} + 1 = 0$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে,

$a = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

$b = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

∴ $a + b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$a - b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

এবং $ab = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}{4}$

$= \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

∴ $a^2b - ab^2 = ab(a^2 - b^2)$

$= ab\{(a^2)^2 - (b^2)^2\}$

$= ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

$= ab\{(a + b)^2 - 2ab\}(a + b)(a - b)$

$= \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right\} \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

$= \frac{1}{2} [5 - 1] \sqrt{15}$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{15}$

$= 2\sqrt{15}$

∴ $a^2b - ab^2 = 2\sqrt{15}$ (দেখানো হলো)

